

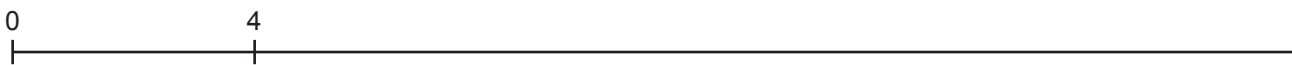
# Annexe 1a

## GRADUATIONS (PROBLÈMES 1 À 3) PHASE 1 – MATÉRIEL POUR UN BINÔME

Agrandir à 141 %

### Problème 1

Prénom.....



Sur cette ligne, on a placé les nombres 0 et 4.  
Place exactement 6, 8 et 12.

### Problème 2

Prénom.....



Quel nombre faut-il écrire pour chaque nouveau trait ?

### Problème 3

Prénom.....



*Pour cette question, donne d'abord la réponse sans utiliser d'instrument.*

Quel nombre peut être placé au-dessus du nouveau trait ?

*Maintenant il est possible d'utiliser la bande de papier.*

Trouve la bonne réponse.

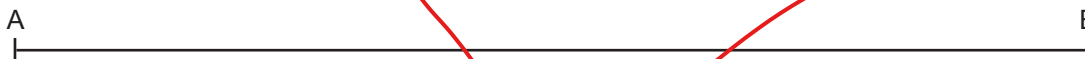
# Annexe 2a

## MESURES DE SEGMENTS • FEUILLE N° 1 PHASE 2 – MATÉRIEL POUR TROIS ÉLÈVES

Agrandir à 141 %

### Feuille n° 1

Prénom de l'émetteur .....



Segment de la feuille n° 3 trouvé par le récepteur : .....

Est-ce le bon segment ? .....

### Feuille n° 1

Prénom de l'émetteur .....



Segment de la feuille n° 3 trouvé par le récepteur : .....

Est-ce le bon segment ? .....

### Feuille n° 1

Prénom de l'émetteur .....



Segment de la feuille n° 3 trouvé par le récepteur : .....

Est-ce le bon segment ? .....

Les activités décrites ci-dessous sont une description plus détaillée de la phase 1 de la situation **BANDE-UNITÉ**.

## Les problèmes

Dans un premier problème, les élèves ont à réaliser la graduation d'une droite à partir de la donnée de la position de deux nombres 0 et n, n pouvant prendre différentes valeurs. Les élèves doivent positionner sur la ligne des points correspondant à d'autres nombres. Le deuxième problème propose de trouver les nombres associés à de nouveaux points. Les autres problèmes sont des variations de ces deux types.

## Connaissances visées

Les élèves doivent comprendre qu'une graduation régulière conduit à un positionnement unique des autres nombres que l'on veut placer sur la droite, et à la possibilité de déterminer des écarts entre des nombres **par le mesurage**. La graduation est régulière si elle respecte les écarts entre les nombres ; dans **FIL NUMÉRIQUE** en revanche (cf. *Les Essentielles CM1* p. 16), le positionnement des nombres sur la droite n'est soumis qu'au respect de l'ordre.

## Résumé de la situation

Cette situation comporte deux étapes, une pour chaque type de problème.

- **L'étape 1** est consacrée aux problèmes 1, 2 et 3.
- **L'étape 2**, facultative, porte sur les problèmes 4 et 5 ; elle est considérée comme un approfondissement.

## Organisation de la situation

Elle peut se dérouler en 2 séances : une pour chaque étape.

GRADUATIONS (ERMEL CM1 p. 260) est une situation du thème « Champ multiplicatif ».

## ■ ÉTAPE 1 : LES NOMBRES EN JEU SONT « PETITS »

### Matériel pour un élève ou pour un binôme

- Les fiches problèmes 1, 2 et 3, agrandies en A3, sur papier 60 g ; une bande par énoncé de problème (cf. Annexe 1a p. 72 ou à télécharger).

**Problème 1** Prénom .....

0 4

Sur cette ligne, on a placé les nombres 0 et 4.  
Place exactement 6, 8 et 12.

**Problème 2** Prénom .....

0 4

Quel nombre faut-il écrire pour chaque nouveau trait ?

**Problème 3** Prénom .....

0 4

Pour cette question, donne d'abord la réponse sans utiliser d'instrument.  
Quel nombre peut être placé au-dessus du nouveau trait ?  
Maintenant il est possible d'utiliser la bande de papier.  
Trouve la bonne réponse.

Pour la mise en commun, il peut être commode de se munir de textes de problèmes sur transparent ou en vidéoprojection.

- Des bandes de papier, deux ou trois par élève, de longueur au moins égale à la distance entre les points les plus éloignés.

## Présentation

L'enseignant annonce : « Vous allez travailler par équipes de deux. »  
Les équipes sont alors constituées.

### Objectifs de l'étape 1

Utiliser les relations entre les nombres donnés et les nombres proposés pour compléter une graduation.

Faire la correspondance entre « écart entre deux nombres » et « distance entre les deux points associés ».

### Choix didactiques

Les nombres entiers choisis sont inférieurs à 20 et présentent entre eux des relations arithmétiques simples : tel nombre est le double ou le triple de l'autre, tel nombre est la somme ou la différence de deux autres... Par exemple : 6, 8 et 12 ont été choisis pour les rapports existant entre eux et avec 4.

L'absence de règle graduée rend impossible le mesurage en centimètres ; les élèves peuvent plier la bande de papier pour reporter ou partager une longueur.

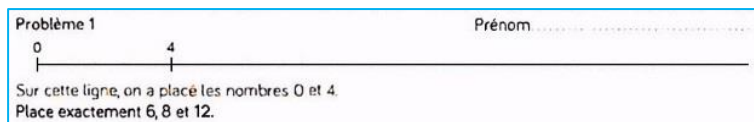
### Organisation de l'étape 1

Les trois problèmes sont traités successivement et séparément, selon le même protocole.

L'enseignant explique, en montrant des exemplaires de bandes : « Vous allez pouvoir utiliser des bandes de papier que je vais vous donner, vous pourrez faire ce que vous voulez avec. Vous prendrez aussi du matériel de vos trousseaux : feutre, stylo, compas, ciseaux... **sauf la règle graduée.** »

### Communication du problème 1

L'enseignant affiche au tableau la fiche problème 1 (et éventuellement en fait une présentation sur transparent ou en vidéoprojection) :



Il interroge : « Qu'est-ce que j'ai dessiné ? »

Après réponse des élèves, il fait lire le texte.

Distribution du matériel et de la fiche.

### Recherche par binômes

L'enseignant précise : « Je rappelle : pas de règle graduée, mais la bande de papier, stylo, ciseaux, compas... Vous faites un travail soigné pour placer exactement le point pour chaque nombre. Il faut être précis dans les mesures car nous en aurons besoin dans les problèmes suivants. »

Il observe et analyse les procédures des élèves ; il repère notamment si les élèves positionnent les nombres dans l'ordre où ils apparaissent dans l'énoncé.

### Mise en commun

Les procédures de placement dépendent assez fortement de l'ordre dans lequel les élèves ont placé les points. Étant donné la multiplicité de critères possibles pour organiser la mise en commun, nous choisissons la présentation des productions des élèves dans l'ordre de la consigne, un nombre après l'autre.

Au tableau une fiche problème est affichée, ainsi que les supports des productions des élèves.

L'enseignant : « On regarde comment vous avez placé le 6. » (ou celui par lequel en majorité les élèves ont commencé).

Une équipe passe au tableau, présente l'endroit où elle a placé le 6 et la méthode avec laquelle elle l'a positionné. La validité du positionnement de chaque point, la procédure et les connaissances employés sont débattus. Ces éléments sont ensuite comparés avec les productions des autres élèves qui sont à leur tour présentées. À la fin de ces présentations, les caractéristiques de positionnement du 6 sont explicitées clairement.

L'enseignant : « Maintenant, regardons comment vous avez placé le 8. » L'examen des productions s'effectue de la même manière que pour 6. Même chose pour 12.

En général, les élèves n'emploient pas tous le même ordre de placement (voir procédures ci-contre). L'enseignant, en choisissant deux productions où cet ordre est différent, demandera : « Si on compare ces deux façons de faire, quelles remarques pouvez-vous faire ? » Après explicitation des points communs et des différences entre les deux productions, les élèves dont les productions ont été ainsi comparées exposent les raisons de leurs choix : pour positionner un nombre, ils ont pris appui sur un autre nombre qui leur a paru approprié, etc.

### Remarques éventuelles d'élèves

Si les élèves demandent si on peut plier les bandes, écrire dessus, ou regarder à travers, l'enseignant n'ajoutera rien à ce qu'il vient de dire.

### Procédures de placement

Pour placer les points, différentes procédures peuvent être utilisées : elles varient suivant l'ordre dans lequel les élèves placent les nombres, mais toutes s'appuient sur moitié, double ou sur des additions simples.

1 Placement de 8 :

- au jugé (P1) ;
- en se donnant une unité de mesure familière approchée (cm ou mm) (P2) ;
- comme symétrique de 0 par rapport à 4 (P3) :
  - par un pliage (de la bande problème ou d'une bande quelconque) (P3-1),
  - par un report (P3-2) ;
- en reportant 2 à partir de 6 (P4) ;
- comme milieu de [4 ; 12] (P5).

2 Placement de 6 :

- au jugé (P1) ;
- en se donnant une unité de mesure familière approchée (cm ou mm) (P2) ;
- comme symétrique de 2 par rapport à 4 (P3) :
  - par un pliage (P3-1),
  - par un report (P3-2) ;
- comme milieu de [4 ; 8] (P4) ;
- comme milieu de [0 ; 12] (P5).

### Objectifs de la mise en commun

Identifier les réponses des élèves, mettre en évidence les différentes procédures utilisées et déterminer collectivement ce qui conduit à réaliser une « bonne » graduation (régulière), à savoir les relations entre les nombres et une traduction correcte des écarts.

### Explicitation des procédures

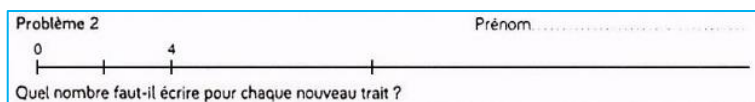
Les justifications formulées par les élèves concernant l'ordre, les écarts ou la régularité de la graduation sont acceptées pour les nombres proposés, sans être généralisées.

Ainsi, la distance entre 0 et 8 doit être le double de la distance entre 0 et 4 ; le nombre 6 doit être à égale distance de 4 et de 8. C'est le respect de ces relations qui permettra de savoir si les nombres constituent une graduation régulière.

L'injonction de placer exactement les nombres suffit pour que les élèves effectuent une graduation régulière.

## Problème 2

Il s'agit cette fois d'un problème d'identification du nombre (repère) « attaché » à un point de la ligne.



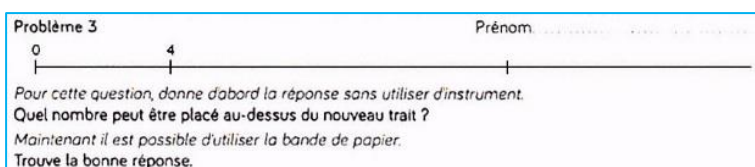
Le déroulement est identique à celui du problème précédent. Lors de la mise en commun, les diverses procédures sont à nouveau explicitées. L'enseignant peut choisir de la mener selon une autre modalité, comme, par exemple l'ordre des points identifiés (il y a deux ordres possibles).

Pour les élèves ayant procédé par estimation, la vérification est susceptible de remettre en cause leur procédure.

Pour les élèves ayant employé les autres procédures, l'accent sera mis sur les connaissances employées (voir ci-contre).

Il est probable que, pour certains élèves, la résolution soit facilitée par ce qui aura été présenté lors du problème 1, ou par la réutilisation de ce qu'ils ont déjà mobilisé.

## Problème 3



Le problème se résout en deux temps : les élèves doivent d'abord estimer le nombre correspondant, puis le trouver de façon sûre (14). Il leur est indiqué qu'ils doivent garder la trace du nombre estimé d'abord, puis du nombre trouvé ensuite.

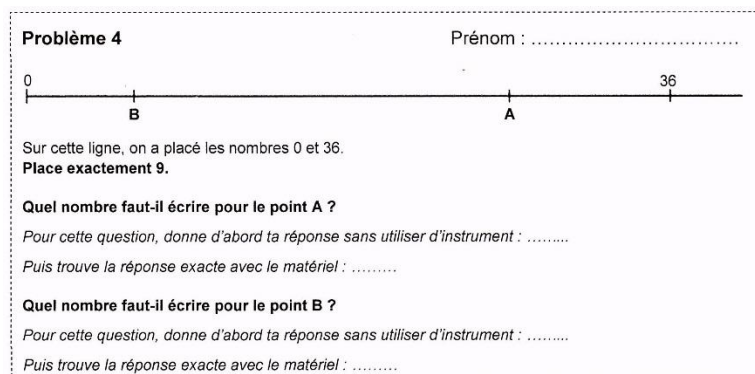
## ÉTAPE 2 : LES NOMBRES EN JEU SONT PLUS « GRANDS »

### Matériel pour un élève ou pour un binôme

- Les fiches problèmes 4 et 5, agrandies en A3, sur papier 60 g ; une bande par énoncé de problème (cf. Annexe 1c après le descriptif). Pour la mise en commun, il peut être à nouveau commode de se munir de textes de problèmes sur transparent ou en vidéoprojection.
- Des bandes de papier, deux ou trois par élève, de longueur au moins égale à la distance entre les points les plus éloignés.

Le déroulement est le même que celui de l'étape 1.

## Problème 4



### Première question

Les élèves lisent la première question, et y répondent.

Une mise en commun intervient après les réponses apportées à cette question, de manière à offrir à tous un point d'appui pour la suite.

### Procédures d'identification

Détermination du nombre :

- par estimation (au jugé) ;
- par l'une des procédures décrites pour le problème 1.

### Mise en commun

La validation se fait par un débat sur le respect des contraintes mises en évidence après le problème initial.

Le caractère « économique » de certaines procédures est discuté, sans qu'elles soient pour autant institutionnalisées.

Connaissances à faire expliciter :

- le placement de nombres intermédiaires (dont les graduations de 1 en 1 ou de 2 en 2) ;
- l'additivité (exemple :  $10 = 4 + 4 + 2$ ) ;
- le recours à la moitié, etc.

### Particularité du problème 3

Il convient de mettre en valeur ce moment d'estimation (il ne s'agit pas, du moins dans un premier temps, de trouver le nombre exact).

### Objectif de l'étape 2

Renforcer la connaissance de ce qui caractérise une graduation régulière et des moyens de la réaliser.

### Choix didactiques

Ici, les nombres donnés sont plus grands (36, 27, 30, 40...) ; les relations arithmétiques entre eux sont moins familières et donc à chercher.

Au problème 5, les points choisis font qu'il n'y a pas nécessité de partage en 3, mais seulement en 2 ou en 4.

### Procédures pour placer 9

Les mêmes que plus haut, en s'appuyant sur la relation arithmétique  $4 \times 9 = 36$  notamment.

### Procédures pour le nombre associé à A (27) :

- estimation au jugé, « directe » ou après avoir placé un nombre familier (10 par exemple) ;
- recherche de 6 (partage au jugé) à cause de la relation  $36 = 6 \times 6$ , puis de 9 (étant égal à  $6 + 3$ ) ;
- partage du segment  $[0 ; 36]$  en deux, puis encore en deux, faisant apparaître A comme le milieu du segment  $[18 ; 36]$  ;
- utilisation de 9, avec appui sur la relation arithmétique  $3 \times 9 = 27$


### Questions suivantes

Les élèves sont invités à répondre aux deux questions suivantes, sur lesquelles portera la mise en commun.

Ils doivent trouver le nombre correspondant au point A (27), puis le nombre correspondant au point B (6): Ils peuvent utiliser diverses procédures liées à des décompositions différentes du nombre. Ainsi, par exemple pour le point A, le nombre cherché, 27, est à la fois égal à  $18 + 9$ ,  $36 - 9$ ,  $9 \times 3$ ...

### Problème 5

**Problème 5** Prénom : .....



Sur cette ligne, on a placé les nombres 0 et 40.  
**Place exactement 10.**

**Quel nombre faut-il écrire pour le point A ?**  
*Pour cette question, donne d'abord ta réponse sans utiliser d'instrument : .....*  
*Puis trouve la réponse exacte avec le matériel : .....*

**Quel nombre faut-il écrire pour le point B ?**  
*Pour cette question, donne d'abord ta réponse sans utiliser d'instrument : .....*  
*Puis trouve la réponse exacte avec le matériel : .....*

Les élèves doivent maintenant trouver les nombres correspondant aux nouveaux points A (30) et B (15).

### Synthèse

À l'issue de la séance, l'enseignant organise une synthèse sur :

- les contraintes de placement :
  - le respect des écarts,
  - le soin pour les partages ou les reports ;
- les procédures utilisées :
  - la possibilité d'utiliser tous les nombres correctement placés,
  - l'intérêt de trouver des relations entre les nombres, etc.

### Procédures pour le nombre associé à B (6) :

- du fait que 9 est placé, il peut être utilisé comme point d'appui. La question peut être traitée en utilisant le fait que la distance de 9 à B (3) est deux fois celle de 0 à B (6) ;
- le partage en trois est une autre solution, mais plus difficile à réaliser.

### Choix

Le rapport entre A (30) et 40 est le même que dans le problème précédent entre A (27) et 36 (trois quarts).

### Procédures

10 étant à placer, il devient un nombre repère utilisable. Les élèves peuvent alors répondre en utilisant les procédures déjà rencontrées :

- pour A (30) : comme pour le point A du problème 4 ;
- pour B (15) : comme moitié de 30, ou encore par addition de 10 et de la moitié de 10.

## GRADUATIONS (Problèmes 4 et 5)

Agrandir à 141 %

### Problème 4

Prénom : .....



Sur cette ligne, on a placé les nombres 0 et 36.

**Place exactement 9.**

**Quel nombre faut-il écrire pour le point A ?**

*Pour cette question, donne d'abord ta réponse sans utiliser d'instrument : .....*

*Puis trouve la réponse exacte avec le matériel : .....*

**Quel nombre faut-il écrire pour le point B ?**

*Pour cette question, donne d'abord ta réponse sans utiliser d'instrument : .....*

*Puis trouve la réponse exacte avec le matériel : .....*

### Problème 5

Prénom : .....



Sur cette ligne, on a placé les nombres 0 et 40.

**Place exactement 10.**

**Quel nombre faut-il écrire pour le point A ?**

*Pour cette question, donne d'abord ta réponse sans utiliser d'instrument : .....*

*Puis trouve la réponse exacte avec le matériel : .....*

**Quel nombre faut-il écrire pour le point B ?**

*Pour cette question, donne d'abord ta réponse sans utiliser d'instrument : .....*

*Puis trouve la réponse exacte avec le matériel : .....*



## MESURES DE SEGMENTS • FEUILLE N° 2

### Feuille n° 2

Prénom de l'émetteur : .....

Message :

Prénom du récepteur : .....

Segment de la feuille n° 3 correspondant au message : .....

Remarques :

### Feuille n° 2

Prénom de l'émetteur : .....

Message :

Prénom du récepteur : .....

Segment de la feuille n° 3 correspondant au message : .....

Remarques :

# Annexe 2c

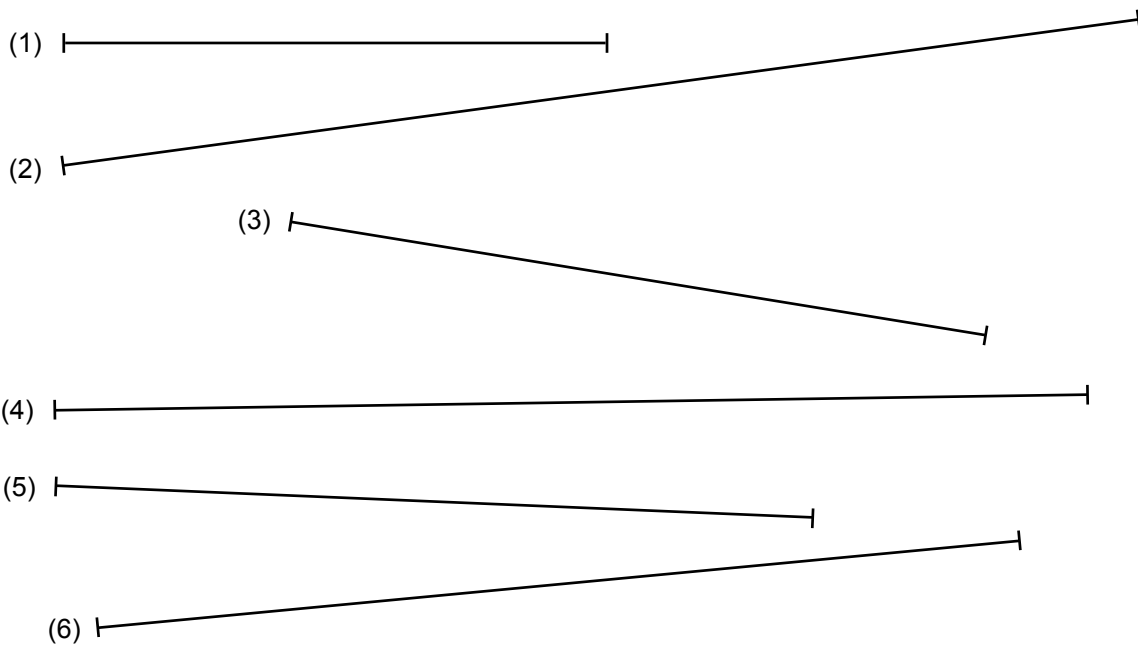
## MESURES DE SEGMENTS • FEUILLE N° 3 PHASE 2 – MATÉRIEL POUR UN ÉLÈVE



Agrandir à 141 %

Feuille n° 3

Prénom.....



# Annexe 3a

## CONSTRUCTION DE SEGMENTS PHASE 3 – MATÉRIEL POUR DEUX ÉLÈVES

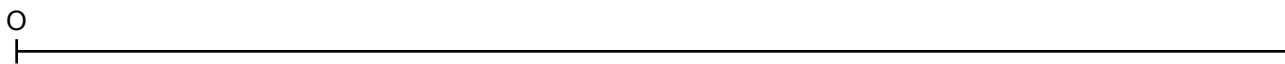


Agrandir à 141 %

Prénom.....

Place sur la demi-droite les points A, B, C, tels que :

$$OA = 1u + \frac{5}{4}u \quad OB = 2u + \frac{2}{4}u \quad OC = \frac{5}{2}u + \frac{1}{8}u$$



Prénom.....

Place sur la demi-droite les points A, B, C, tels que :

$$OA = 1u + \frac{5}{4}u \quad OB = 2u + \frac{2}{4}u \quad OC = \frac{5}{2}u + \frac{1}{8}u$$

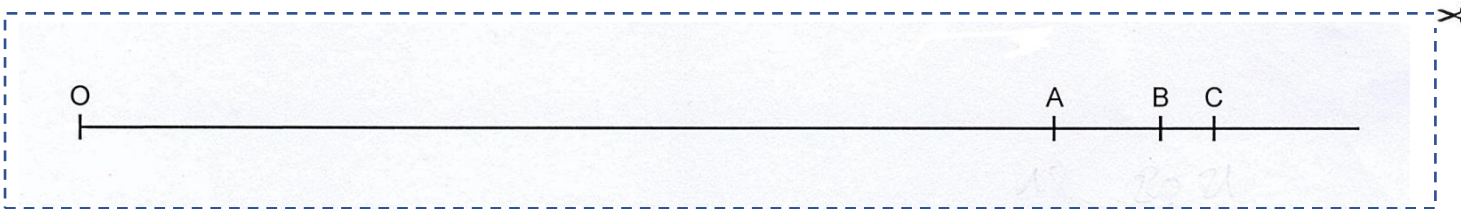
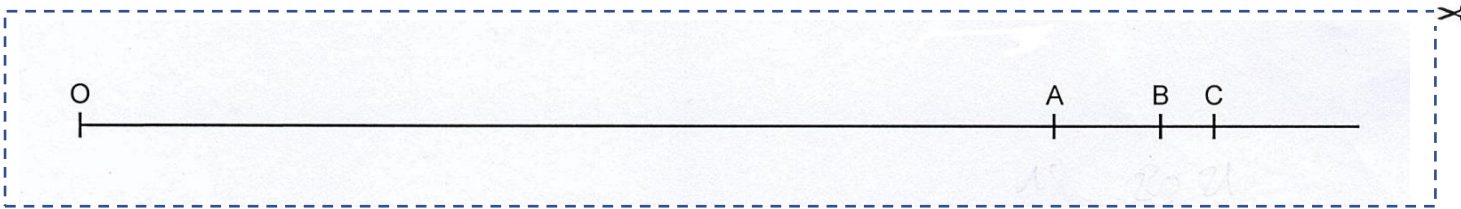
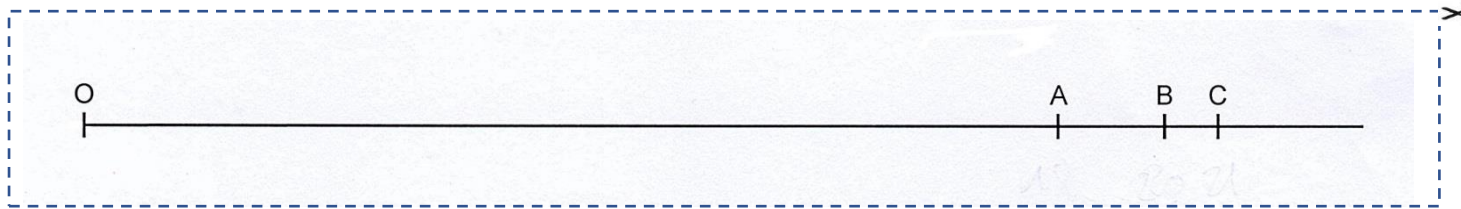
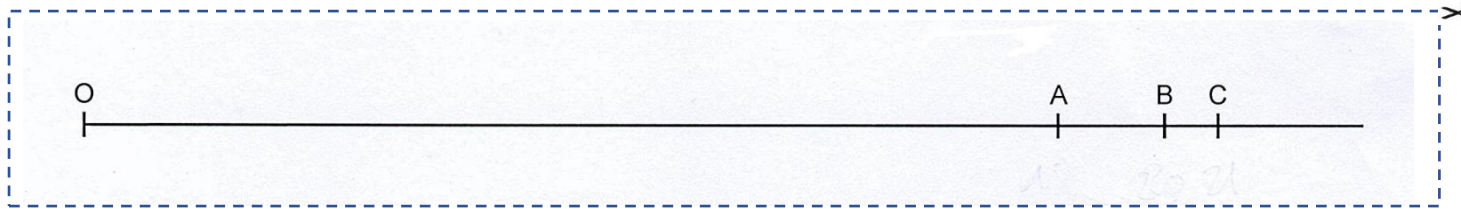


# Annexe 3b

## CONSTRUCTION DE SEGMENTS (Corrigé)



Agrandir à 141 %



# Annexe 4

## COMPARAISON DE LONGUEURS PHASE 4 – MATÉRIEL POUR DEUX ÉLÈVES



Avec la bande-unité, j'ai mesuré 6 segments. J'ai trouvé :

$$OA = 1u + \frac{5}{2}u$$

$$OB = \frac{7}{2}u$$

$$OC = 2u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u$$

$$OD = \frac{10}{4}u$$

$$OE = 2u + \frac{7}{8}u$$

$$OF = 1u + \frac{15}{8}u$$

Quel est le segment le plus court ? .....

Quel est le segment le plus long ? .....

Y a-t-il des segments de même longueur ? .....

Avec la bande-unité, j'ai mesuré 6 segments. J'ai trouvé :

$$OA = 1u + \frac{5}{2}u$$

$$OB = \frac{7}{2}u$$

$$OC = 2u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u$$

$$OD = \frac{10}{4}u$$

$$OE = 2u + \frac{7}{8}u$$

$$OF = 1u + \frac{15}{8}u$$

Quel est le segment le plus court ? .....

Quel est le segment le plus long ? .....

Y a-t-il des segments de même longueur ? .....

# Annexe 5

## CALCUL AVEC DES FRACTIONS PHASE 5 – MATÉRIEL POUR DEUX ÉLÈVES



Quelles écritures désignent les mêmes longueurs ?

$$\frac{4}{8} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{14}{8} \quad \frac{10}{8} \quad \frac{7}{4} \quad 2 + \frac{1}{2} \quad 1 + \frac{6}{8}$$

Pour chacune de ces mesures,  $\frac{18}{8}$  et  $3 + \frac{1}{4}$ , trouve d'autres écritures et justifie les égalités trouvées.

Quelles écritures désignent les mêmes longueurs ?

$$\frac{4}{8} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{14}{8} \quad \frac{10}{8} \quad \frac{7}{4} \quad 2 + \frac{1}{2} \quad 1 + \frac{6}{8}$$

Pour chacune de ces mesures,  $\frac{18}{8}$  et  $3 + \frac{1}{4}$ , trouve d'autres écritures et justifie les égalités trouvées.