Leçon n°20 : Arithmétique

Dans cette leçon on travaille avec des **nombres entiers**

I) Multiples et diviseurs

A) Vocabulaire

Définition : a et b sont 2 nombres entiers et $b \neq 0$.
S'il existe un nombre entier n tel que $a = n \times b$,
on dit que :
- b est un diviseur de a
- a est un MULTIPLE de b
- b divise a
- a est divisible par b

Exemple : $60 = 6 \times 10$. On dit alors que :
- 6 et 10 sont des diviseurs de 60
- 60 est un MULTIPLE de 6 et de 10
- 6 et 10 divisent 60
- 60 est divisible par 6 et par 10

B) Méthode : Touver tous les diviseurs d'un nombre

Exemples : 1) Donner tous les diviseurs de 24.

$24 = 1 \times 24$
$= 2 \times 12$
$= 3 \times 8$
$= 4 \times 6$

entre les deux il y a 5 mais 5 n'est pas un diviseur de 24 donc on s'arrête

Les diviseurs de 24 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

2) Donner tous les diviseurs de 17.

$17 = 1 \times 17$

tous les nombres entiers entre 2 et 16 ne sont pas des diviseurs de 17 donc on s'arrête

Les diviseurs de 17 sont 1 et 17.

SCAN ME

C) Nombres premiers

Définition : Un **nombre premier** est un nombre entier qui a **exactement** deux diviseurs : **1 et lui-même.**

Exemples :
- Voici la liste des 25 premiers nombres premiers :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97…
- 7 est un nombre premier : il n'est divisible que 1 et par 7.
- 6 n'est pas un nombre premier : il admet 2 et 3 comme autres diviseurs.
- 1 n'est pas premier car il possède un seul diviseur : lui-même.
- 2 est le seul nombre premier pair car tous les nombres pairs sont divisibles par 2.

D) Décomposition en produit de facteurs premiers

SCAN ME

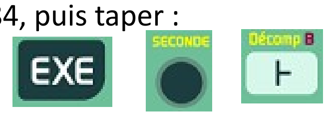
Propriété : Un nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers.
Cette décomposition est unique.

Exemple : Écrire 84 comme produit de facteurs premiers.

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

Donc $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$
$= 2^2 \times 3 \times 7$

A la calculatrice :
Touches CASIO fx – 92 Spéciale collège :
Taper 84, puis taper :



II) Rendre une fraction irréductible

Méthode : Pour simplifier une fraction, on décompose son numérateur et son dénominateur en un produit de facteurs premiers puis on simplifie cette fraction par tous les facteurs communs.

Exemple : Simplifier la fraction $\frac{84}{72}$

Donc $\frac{84}{72} = \frac{2\times2\times3\times7}{2\times2\times2\times3\times3} = \frac{7}{2\times3} = \boxed{\frac{7}{6}}$

III) Résoudre un problème :

Pour résoudre des problèmes, on utilise le PGCD (Plus Grand Diviseur Commun) et le PPCM (Plus Petit Multiple Commun)
Le PGCD est utilisé pour les problèmes avec des lots ou des paquets et le PPCM est utilisé pour des problèmes d'engrenage ou de

A) Le plus grand diviseur commun

Problème : Aksil a acheté pour son anniversaire 300 bonbons au chocolat et 525 sucettes.
Il décide de remplir des sachets dont la composition est identique.
Il souhaite faire un maximum de sachets et qu'il ne lui reste rien.
Combien en fera-t-il et quelle sera leur composition ?

Solution : Il ne veut pas de reste donc le nombre de sachets doit diviser à la fois 300 et 525. De plus, ce nombre de sachets doit être maximum, on cherche donc **le plus grand diviseur commun à 300 et 525**.

Pour trouver le **plus grand diviseur commun de plusieurs nombres**, on écrit la décomposition de ces nombres en produits de facteurs premiers et on prend tous les facteurs communs.

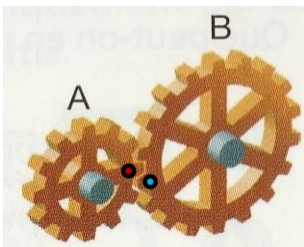
$300 = 2 \times 2 \times \mathbf{3 \times 5 \times 5}$
$525 = \mathbf{3 \times 5 \times 5} \times 7.$
Donc le plus grand diviseur commun de 300 et 525 est $\mathbf{3 \times 5 \times 5}$ c'est-à-dire 75.

Aksil peuvent donc faire au maximum 75 sachets.
300 : 75 = 4
525 : 75 = 7
Chaque sachet contiendra 4 bonbons au chocolat et 7 sucettes.

B) Problème d'engrenages

Problème : La petite roue a 12 dents. La grande roue a 18 dents. Combien de tours doivent faire chacune des roues pour se retrouver de nouveau et pour la 1ère dans la même position ?

Solution : **Pour résoudre ce problème, on utilise le plus petit multiple commun :**
• Lorsque les roues sont à nouveau dans la même position, elles ont tourné d'un nombre entier de tours, donc :
- La petite roue a tourné d'un nombre de dents qui est un multiple de 12 ;
multiples de 12 : 12 24 **36** 48 60 …



- La grande roue a tourné d'un nombre de dents qui est un multiple de 18.
multiples de 18 : 18 **36**

→ Le premier multiple non nul commun à 12 et 18 est **36**

• Ainsi, les roues occuperont à nouveau la même position pour première fois lorsque la petite aura fait **3 tours** (car **36** = **3**×12) et la grande **2 tours** (car **36** = **2**×18) .