

Leçon n°15 : Probabilité

I) Expérience aléatoire

A) Définition : Situation liée au hasard



On dit d'une expérience qu'elle est « aléatoire » lorsqu'elle vérifie trois conditions :

- on connaît tous les résultats possibles de l'expérience ;
- le résultat n'est pas prévisible ;
- on peut reproduire plusieurs fois l'expérience dans les mêmes conditions.

Exemple : On lance un dé et on regarde la face visible lorsque le dé s'arrête de rouler.

- Il y a 6 résultats possibles : 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- On ne peut pas prévoir le résultat avant de lancer le dé.
- On peut refaire plusieurs fois l'expérience dans les mêmes conditions.

B) Méthode : étudier une situation liée au hasard (exercice résolu)

Sur un jeu de 13 cartes indiscernables, Léo écrit sur chaque carte une lettre du mot «mathématiques».

M A T H E M A T I Q U E S

Ensuite Léo retourne toutes les cartes et demande à son ami Théo d'en choisir une au hasard.

- 1) Est-ce une expérience aléatoire ?
- 2) Quelle(s) lettre(s) a-t-il le plus de chance d'obtenir ?
- 3) Théo pense qu'il a plus de chance d'obtenir une consonne qu'une voyelle. A-t-il raison ?
- 4) Théo affirme qu'il a plus d'une chance sur deux de tirer une lettre appartenant à son prénom. A-t-il raison ?

1) Cette expérience est aléatoire, car :

- on connaît les résultats possibles : M, A, T, H, E, I, Q, U, S ;
- le résultat n'est pas prévisible : les cartes sont retournées ;
- on peut la reproduire plusieurs fois.

2) Les lettres M, A, T, E apparaissent deux fois. Ce sont ces 4 lettres qu'il a le plus de chance d'obtenir.

3) On compte 7 consonnes : 2M, 2T, H, Q, S et 6 voyelles : 2A, 2E, I, U. Il a raison de penser qu'il a plus de chance d'obtenir une consonne qu'une voyelle.

4) Le jeu contient 5 lettres appartenant à son prénom : 2T, H, 2E. Il a donc 5 chances sur 13 d'obtenir une de ces lettres. 5 est inférieur à la moitié de 13, il a donc moins d'une chance sur deux de tirer une lettre appartenant à son prénom. Théo a donc tort.

II) Notion de probabilité et vocabulaire

A) Notion de probabilités

Chaque élève lance 100 fois un dé à six faces et note les effectifs d'apparition de chaque face dans le tableau :

Faces	1	2	3	4	5	6	Total
Effectifs	20	14	10	22	16	18	100

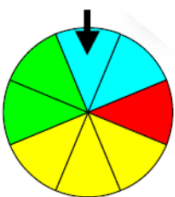
On regroupe ensuite l'ensemble des résultats de la classe dans un même tableau puis on calcule les fréquences d'apparition de chaque face.

Faces	1	2	3	4	5	6	Total
Effectifs	434	456	443	459	435	473	2700
Fréquences	16,1%	16,9%	16,4%	17%	16,1%	17,5%	100

Les fréquences d'apparition sont très proches les unes des autres. Théoriquement, il y a autant de chance d'obtenir un 1, un 2, ... ou un 6. En effectuant un nombre encore plus grand de lancers, les fréquences se rapprocheraient les unes des autres de façon encore plus évidente.

♥ Lorsqu'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement se rapproche d'une « fréquence théorique » appelée **probabilité**.

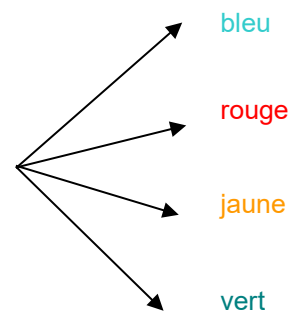
B) Arbre des possibles



Exemple :

Lorsqu'on fait tourner la roue, quatre issues sont possibles. On le schématise sur l'arbre des possibles :

L'arbre des possibles permet de visualiser les issues d'une expérience aléatoire.

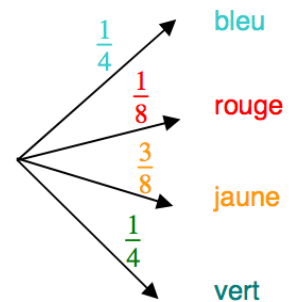


C) Probabilités

Exemple : 2 secteurs sur 8 sont de couleur bleue. Lors d'une expérience aléatoire, il y a donc 2 chances sur 8 d'obtenir un secteur de couleur bleue.

On dit que la probabilité d'obtenir un secteur bleu est égale à $\frac{2}{8}$, soit $\frac{1}{4}$.

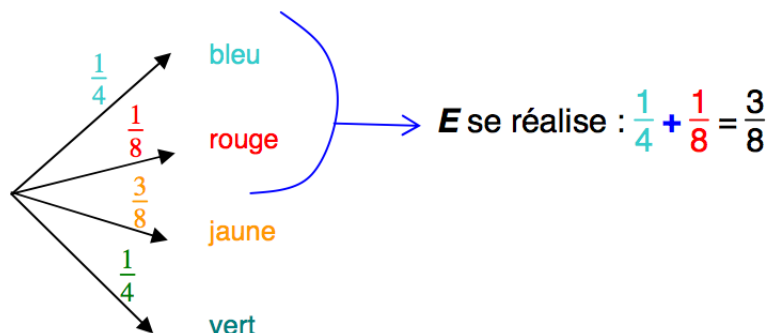
On inscrit sur l'arbre des possibles les probabilités des différentes issues.



C) Evènement

Exemple : Soit l'évènement **E** « La roue s'arrête sur un secteur bleu ou rouge ».

On pourrait se demander qu'elle est la probabilité que cet évènement se réalise ?



On dit que la probabilité que l'évènement **E** se réalise est égale à $\frac{3}{8}$ et on note : $P(\mathbf{E}) = \frac{3}{8}$.

♥ Un évènement est constitué par plusieurs issues d'une même expérience aléatoire.

IV) Calculer une probabilité

A) Définition

♥ La **probabilité d'un évènement** est un nombre compris entre 0 et 1 qui exprime « la chance qu'a un évènement de se produire ».

Exemple : Dire que la probabilité d'un évènement est de 0,8 signifie que cet évènement a 8 chances sur 10 ou 80 % de chance de se produire.

♥ Lorsque chaque issue a autant de chance de se produire, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

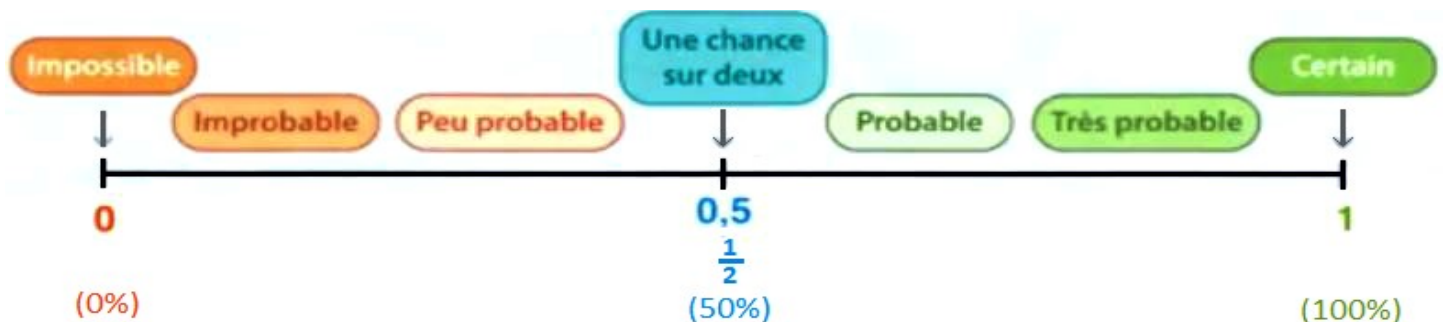
Exemple : Dans l'expérience précédente de lancer de dé bien équilibré,
 $p(1)=p(2)=p(3)=p(4)=p(5)=p(6)=1/6$ Il y a équiprobabilité.

B) Un peu de vocabulaire

♥ Un évènement dont la probabilité est égale à 0 est un **évènement impossible**.
Un évènement dont la probabilité est égale à 1 est un **évènement certain**.

Echelle des probabilités : Certains évènements sont plus probables ou ont plus de chances de se produire que d'autres. On peut les classer sur une échelle de probabilité.

Exemple :
A : je gagne au loto sans jamais jouer
B : Le premier jour de l'année est un 1^{er} janvier
C : il fera soleil demain
D : je vais gagner la cagnotte au loto (je joue toutes les semaines)
E : Obtenir 1, 2, 3, 4 ou 5 en lançant un dé à 6 faces



C) Evènement contraires

♥ L'évènement **contraire** de A, noté \bar{A} , est l'ensemble de toutes les issues n'appartenant pas à A.

♥ **Propriété** : $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

Exemple : On lance un dé à 6 faces et on regarde la face du dessus. Les évènements A et B sont contraires :
A = « On obtient un 1 »
donc B = « On obtient un 2, 3, 4, 5 ou 6. »

D) Calculer une probabilité

♥ La probabilité d'un évènement A est : $P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables A}}{\text{Nombre d'issues total}}$

E) Méthodes pour calculer une probabilité

Expérience à une épreuve (exercice résolu)

On considère l'expérience aléatoire suivante : On lance un dé à six faces et on regarde le nombre inscrit sur la face du dessus.

Soit E l'évènement : « La face du dessus est un nombre supérieur ou égal à 3 ». Quelle est la probabilité que l'évènement E se réalise ?

Nombre d'issues favorables à E = 4

En effet, pour avoir un nombre supérieur ou égal à 3, il faut obtenir un 3, un 4, un 5 ou un 6.

Nombre d'issues total = 6

En effet, le dé à 6 faces.

Ainsi $p(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

La probabilité que l'évènement E se réalise est de $\frac{2}{3}$. Il y a donc deux chances sur trois d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 3.

Expérience à deux épreuves (exercice résolu)

Lancer deux fois de suite une pièce de monnaie est une expérience aléatoire à deux épreuves.

Soit E l'évènement : « On obtient au moins une fois la face PILE. »

Tableau à double entrée

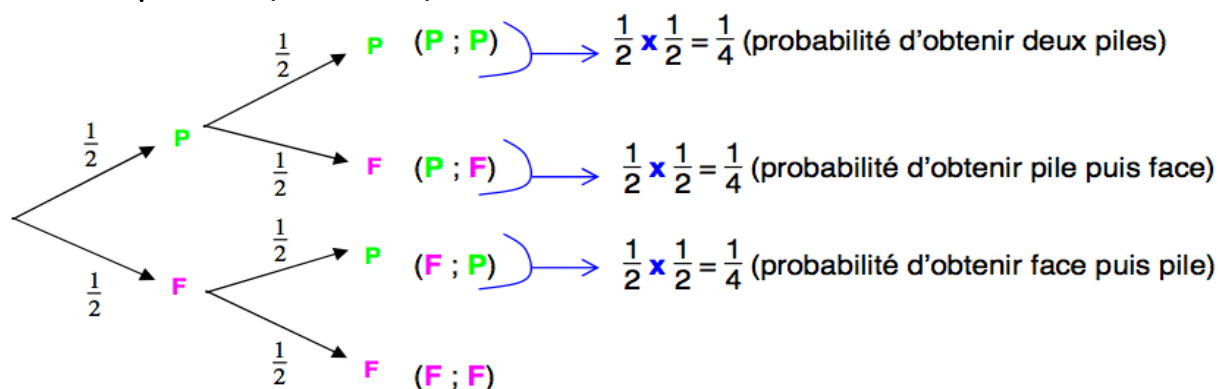
2 ^{ème} lancer 1 ^{er} lancer	Pile	Face
Pile	Pile ; Pile	Pile ; Face
Face	Face ; Pile	Face ; Face

Il y a $2 \times 2 = 4$ issues possibles dans ce tableau.

Il y a 3 façons de réaliser l'évènement E.

Donc $p(E) = \frac{3}{4}$

Arbre des possibles (Vers la 2^{ème})



Sur un même chemin, on **multiplie** les probabilités.

$P(E) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ La probabilité que l'évènement E se réalise est de $\frac{3}{4}$.

Il y a donc trois chances sur quatre d'obtenir au moins une fois la face PILE lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

Tableau à double entrée

2 ^{ème} lancer 1 ^{er} lancer	Pile	Face
Pile	Pile ; Pile	Pile ; Face
Face	Face ; Pile	Face ; Face

Il y a $2 \times 2 = 4$ issues possibles dans ce tableau.

Il y a 3 façons de réaliser l'évènement E.

Donc $p(E) = 3/4$

Méthode :

On considère l'expérience aléatoire suivante :

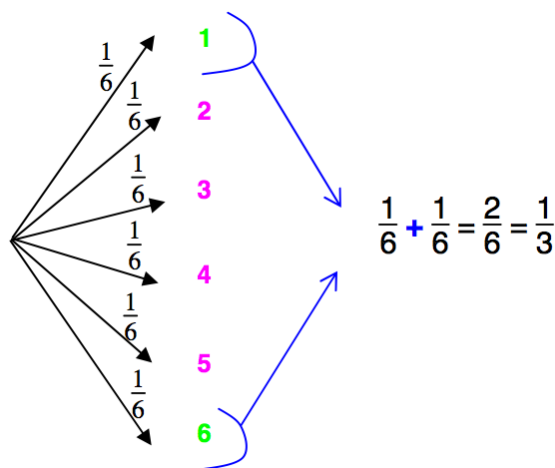
on lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.

Soit E l'évènement : « La face du dessus est un 1 ou un 6 ».

Quelle est la probabilité que l'évènement E se réalise ?

On construit l'arbre des possibles de l'expérience aléatoire :

Chaque issue à la même probabilité : il y a une chance sur six de sortir un 1, un 2, ... ou un 6. On dit qu'il y a **équiprobabilité**.



$$\text{Ainsi } P(E) = \frac{1}{3}$$

La probabilité que l'évènement E se réalise est de $\frac{1}{3}$.

Il y a donc une chance sur trois d'obtenir un 1 ou un 6 en lançant un dé.

III. Exemple d'une expérience aléatoire à deux épreuves

Méthode :

As-
tu

As-tu bien compris ? Vérifie tes connaissances

- Les quatre couleurs d'un jeu de cartes sont : Cœur, Carreau, Trèfle et Pique.
- Le joueur A pioche dans un jeu de 32 cartes (chaque couleur comporte les cartes : 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As)
- Le joueur B pioche dans un jeu de 52 cartes (chaque couleur comporte les cartes : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As)
- Chaque joueur tire une carte au hasard.
1. Calculer la probabilité qu'à chaque joueur de tirer le 5 de Carreau.
 2. Chaque joueur a-t-il la même probabilité de tirer du Cœur ? Justifier.
 3. Qui a la plus grande probabilité de tirer une Dame ? Justifier.

bien compris ? Vérifie tes connaissances

Les quatre couleurs d'un jeu de cartes sont : Cœur, Carreau, Trèfle et Pique. Le joueur A pioche dans un jeu de 32 cartes (chaque couleur comporte les cartes : 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As) Le joueur B pioche dans un jeu de 52 cartes (chaque couleur comporte les cartes : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi et As) Chaque joueur tire une carte au hasard. 1. Calculer la probabilité qu'à chaque joueur de tirer le 5 de Carreau. 2. Chaque joueur a-t-il la même probabilité de tirer du Cœur ? Justifier. 3. Qui a la plus grande probabilité de tirer une Dame ? Justifier.