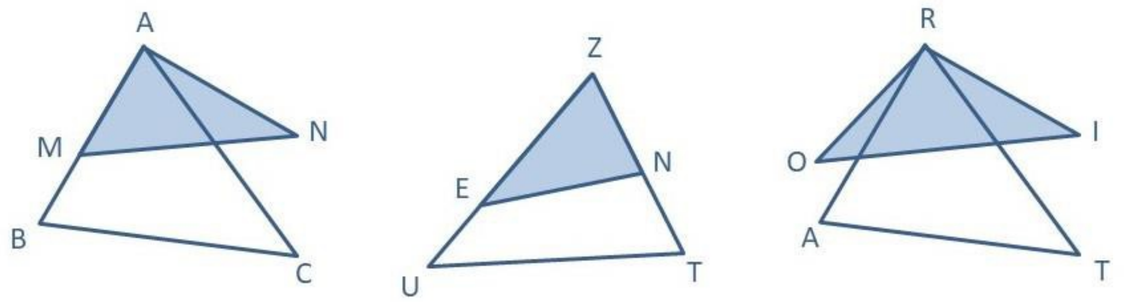
Leçon n°8 : Le théorème de Thalès

I) Triangles emboités

Définition : On dit que deux triangles ABC et AMN sont emboîtés l'un dans l'autre lorsque les sommets A, M et B sont alignés ainsi que les sommets A, N et C.

Exemples et contre-exemples :

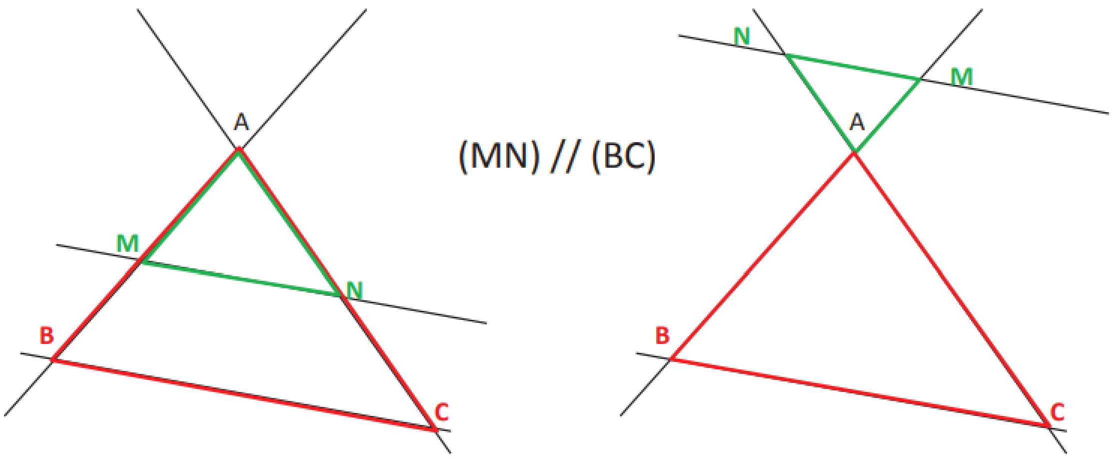


……………………………………………… ……………………………………………… ………………………………………………

II) Théorème de Thalès

Remarque : Quand on a deux triangles « emboités » ou « en papillon » avec deux côtés parallèles, l'un est un agrandissement ou une réduction de l'autre triangle.

« triangles emboités » « triangles en papillon »



Dans les deux configurations, on peut appliquer le :

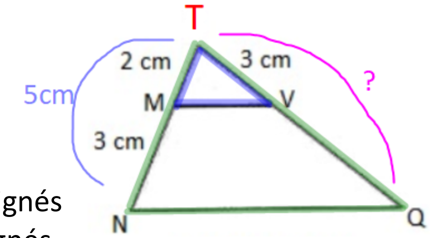
Théorème de Thalès :

SI
- les points A, **M**, **B** sont alignés
- les points A, **N**, **C** sont alignés
- les droites (**MN**) et (**BC**) sont parallèles

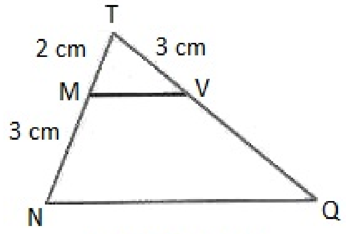
ALORS $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

A quoi sert le théorème de Thalès ? à calculer une longueur.

III) Exemples de calcul de longueur



Exemple 1 :



(VM) // (NQ)

Calculer la longueur TQ.

Résolution :

Je sais que :
- les points T, M, N sont alignés
- les points T, V, Q sont alignés
- les droites (VM) et (NQ) sont parallèles

Je peux donc appliquer le théorème de Thalès :

$$\frac{TM}{TN} = \frac{TV}{TQ} = \frac{MV}{NQ}$$

Petit triangle

Grand triangle

$$\text{D'où } \frac{2}{5} = \frac{3}{TQ} = \frac{VM}{NQ}$$

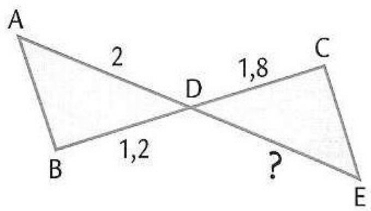
Je calcule TQ :

Puisque $\frac{2}{5} = \frac{3}{TQ}$, j'applique les produits en croix $TQ = \frac{3 \times 5}{2} = \frac{15}{2}$

donc $\boxed{\textbf{TQ = 7,5 cm}}$.

Exemple 2 :

Les droites (AB) et (CE) sont parallèles.



Les mesures sont exprimées en centimètres.

Calculer DE.

Résolution :

Je sais que :
- les points A, D et E sont alignés
- les points B, D et C sont alignés
- les droites (AB) et (CE) sont parallèles

Donc, je peux utiliser le théorème de Thalès :

$$\frac{DA}{DE} = \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{EC}$$

$$\text{D'où } \frac{2}{DE} = \frac{1,2}{1,8} = \frac{AB}{EC}$$

Je calcule DE :

Puisque $\frac{2}{DE} = \frac{1,2}{1,8}$

J'en déduis que $DE = \frac{2 \times 1,8}{1,2}$ Donc $\boxed{\textbf{DE = 3 cm}}$.

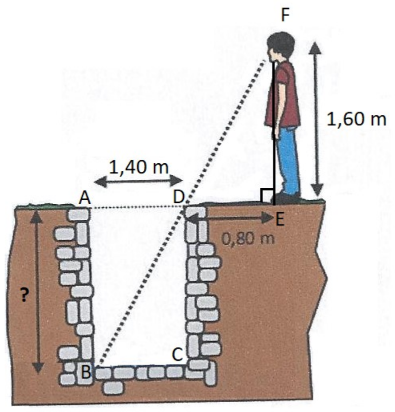
IV) Résolution d'un problème

Exemple 3 :
Un puits a un diamètre de 1,40m.

Un observateur se déplace jusqu'à ce que le rayon visuel, rasant le bord D du puits, passe par le point B du fond du puits qui est opposé à D.

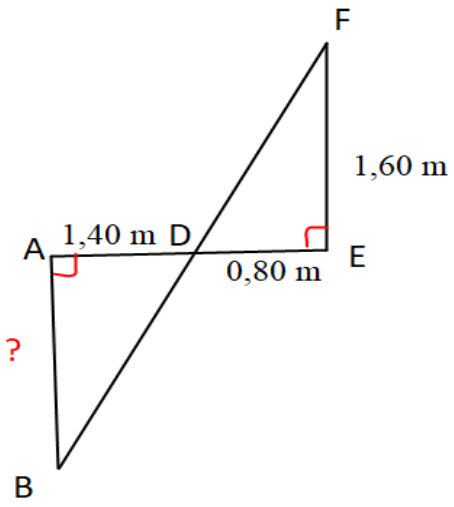
L'oeil de l'observateur est alors en F, à 1,60 m de hauteur et à 0,80 m du bord du puits.

Calculer la profondeur du puits.



Résolution :

Etape 1: Je fais un schéma :



Etape 2 : Je reconnais une situation de Thalès en papillon.
Je vérifie que je peux appliquer (points alignés, droites parallèles)

Etape 3 : Je rédige :
Je sais que :
- Les points A, D, E sont alignés
- Les points B, D, F sont alignés
- Les droites (AB) et (EF) sont parallèles (car perpendiculaires à la même droite (AE))

Je peux donc appliquer le théorème de Thalès :

$$\frac{DA}{DE} = \frac{DB}{DF} = \frac{AB}{EF}$$

D'où $\frac{1{,}40}{0{,}80} = \frac{DB}{DF} = \frac{AB}{1{,}60}$

Je calcule la longueur AB :

Puisque $\frac{1{,}40}{0{,}80} = \frac{AB}{1{,}60}$

J'en déduis que $AB = \frac{1{,}40 \times 1{,}60}{0{,}80}$

Donc $\boxed{\mathbf{AB = 2{,}80\ m}}$.

La profondeur du puits est de 2,80 m.

V) BILAN

TRIANGLES SEMBLABLES

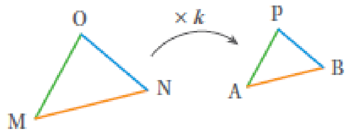
Longueurs des côtés

Les longueurs des côtés de deux triangles semblables sont proportionnelles deux à deux.

Exemple :

Côtés de OMN	OM	ON	MN
Côtés associés de PAB	PA	PB	AB

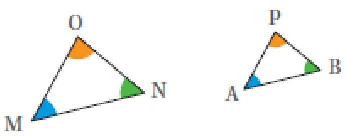
$\times k$



Mesures des angles

Les mesures des angles de deux triangles semblables sont égales deux à deux.

Exemple :

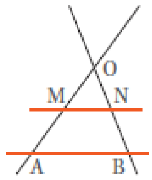


Théorème de THALÈS

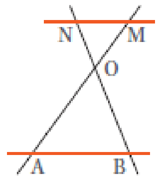
Si deux droites sécantes sont coupées par deux droites parallèles, alors ces droites déterminent deux triangles semblables

Exemple :

$$\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB} = \frac{MN}{AB}$$



Configuration « emboîtée »



Configuration « papillon »

(MN)//(AB)

Réciproque du théorème de THALÈS

Si A, O et M sont alignés dans le même ordre que B, O et N et si $\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB}$ alors (MN) et (BC) sont parallèles.