Leçon n°3 : Les puissances

I) Puissances entières d'un nombre relatif

A) Définition

Définition : Pour tout nombre entier n positif non nul, et pour tout nombre relatif b :
On note b^n le produit de n facteurs tous égaux à b.
b^n se lit « **b puissance n** » ou « **b exposant n** »

$$\underbrace{b \times b \times \ldots \times b}_{\text{il y a n nombres b multipliés entre eux}} = b^n$$

Remarques : par convention on pose : $b^0 = 1$; $b^1 = b$

b^2 désigne b x b, se lit « b au carré »

b^3 désigne b x b x b, se lit « b au cube »

Exemples :

$(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -64$

$-4^3 = -4 \times 4 \times 4 = -64$

$-3^4 = -3 \times 3 \times 3 \times 3 = -81$

$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\ 000\ 000$

Définition : Pour tout nombre entier n positif et pour tout nombre relatif b non nul :
La **puissance** d'exposant **- n** du nombre b est l'inverse du nombre b^n

Autrement dit, $b^{-n} = \dfrac{1}{b^n} = \dfrac{1}{b \times b \times \ldots \times b}$

Exemples : $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$ et $2^{-6} = \dfrac{1}{2^6} = \dfrac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \dfrac{1}{64}$

B) Signe d'une puissance

Pour tout nombre entier positif n

Si b est positif alors b^n est positif.	Si b est négatif alors b^n est : ● positif lorsque l'exposant n est pair ; ● négatif lorsque l'exposant n est impair

Exemples : $(-3)^4$ est positif — -3^4 est négatif car 3^4 est positif — $(-2)^5$ est négatif

C) Enchainer les calculs

On effectue d'abord les calculs entre parenthèses, puis les puissances, puis les multiplications/divisions et finalement les additions/soustractions.

Exemples : calculer

$A = 1 + 5 \times 2^4$
$A = 1 + 5 \times 16.$
$A = 1 + 80$
$A = 81$

$B = -3 + (5 - 7)^3$
$B = -3 + (-2)^3$
$B = -3 + (-16)$
$B = -19$

$C = 3 + (10 - 4 \times 2)^2$
$C = 3 + (10 - 8)^2$
$C = 3 + (2)^2$
$C = 3 + 4$
$C = 1$

II) Opérations sur les puissances

Règles de calcul :
Soient n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1 et a un nombre relatif non nul.

$a^n \times a^p = a^{n+p}$	$\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$	$(a^n)^p = a^{n \times p}$	$a^n \times b^n = (ab)^n$

Exemples :

1) Mettre sous forme a^n si possible :

$8^3 \times 8^{12} = 8^{3+12}$
$= 8^{15}$

$5^2 \times 4^3 = 5 \times 5 \times 4 \times 4 \times 4$
⚠ Ce ne sont pas les mêmes facteurs.
On ne peut pas l'écrire sous forme d'une seule puissance.

$\dfrac{5^6}{5^{-3}} = 5^{6-(-3)}$
$= 5^9$

$7^4 \times 5^4 = (7 \times 5)^4$
$= 35^4$

$3^6 + 3^2 =$
C'est une somme.
On ne peut pas l'écrire sous forme d'une seule puissance.

2) Edmond affirme que 2^{50} est le double de 2^{49}. Vrai ou faux ?
Le double de $2^{49} = 2 \times 2^{49} = 2^1 \times 2^{49} = 2^{1+49} = 2^{50}$. C'est donc vrai.

III) Cas particulier des puissances de 10

A) Définition

Rappel : $10^0 = 1$

Soit n est un entier plus grand ou égal à 1.

- 10^n désigne le produit de n facteurs tous égaux à 10. On a $10^n = 1\underbrace{0 \ldots 0}_{n \text{ zéros}}$
- 10^{-n} désigne l'inverse de 10^n. On a $10^{-n} = \underbrace{0,0 \ldots 0}_{n \text{ zéros}}1$

Exemples :

$10^6 = 1\,000\,000$

$10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100} = 0,01$

$0,001 = 10^{-3}$

un milliard est $1\,000\,000\,000 = 10^9$

un millionième est $10^{-6} = \dfrac{1}{10^6} = 0,000\,001$

B) Comparer 2 nombres avec des puissances de 10

Méthode : n désigne un entier positif.

Pour multiplier un nombre décimal par 10^n , on pense que l'unité du nombre devient 10^n **plus** forte.

Pour multiplier un nombre décimal par 10^{-n} , on pense que ça revient à diviser par 10^n , donc l'unité devient 10^n **moins** forte.

Exemples :

- $329{,}4 \times 10^6 = 329\ 400\ 000$

	Millions	Centaines de milliers	Dizaines de milliers	Milliers	Centaines	Dizaines	Unités	Dixièmes	Centièmes
32	9	4	0	0	0	0	0		
					3	2	9	4	

$0{,}56 \times 10^4 = 5\ 600$

Millions	Centaines de milliers	Dizaines de milliers	Milliers	Centaines	Dizaines	Unités	Dixièmes	Centièmes

Donc $329{,}4 \times 10^6$ **>** $0{,}56 \times 10^4$

- $45{,}7 \times 10^{-5} = 0{,}000\ 45\ 7$

Milliers	Centaines	Dizaines	Unités	Dixièmes	Centièmes	Millièmes	Dix-millièmes	Cent-millièmes
			0	0	0	0	4	5
		4	5	7				

$0{,}046 \times 10^{-3} = 0{,}000\ 046$

Milliers	Centaines	Dizaines	Unités	Dixièmes	Centièmes	Millièmes	Dix-millièmes	Cent-millièmes

Donc $45{,}7 \times 10^{-5}$ **>** $0{,}046 \times 10^{-3}$

C) Notation scientifique

Un même nombre peut s'écrire de différentes façons : par exemple 12 c'est aussi $1{,}2\times10^1$; $0{,}12\times10^2$ ou même 120×10^{-1}. Toutes ces écritures représentent la même valeur : 12

L'écriture scientifique de 12, c'est l'écriture sous la forme $1{,}2\times10^1$

Définition : La **notation scientifique** d'un nombre décimal est la seule écriture de la forme $a\times10^n$

avec
- a est un nombre décimal avec un seul chiffre non nul avant la virgule
- n est un nombre entier relatif.

La notation scientifique : $\mathbf{7{,}328 \times 10^5}$

Nombre compris entre 1 et 10 (10 exclus) $\times$ une puissance de 10

Exemples :

$3\ 264{,}7 = 326{,}47 \times \mathbf{10} = 326{,}47 \times 10^1$

$3\ 264{,}7 = 32{,}647 \times \mathbf{100} = 32{,}647 \times 10^2$

$3\ 264{,}7 = 3{,}2647 \times \mathbf{1\ 000} = \mathbf{3{,}2647 \times 10^3}$

Comme $1 \leqslant 3{,}2647 < 10$, c'est l'écriture scientifique

$3264{,}7 = 0{,}32647\times 1\ 000 = 0{,}32647 \times 10^4$

$-\ 7\ 564\ 000 = -\ 7{,}564 \times 10^6$

$0{,}000\ 486 = 0{,}004\ 86 \div 10 = 0{,}004\ 86 \times 10^{-1}$

$0{,}000\ 486 = 0{,}048\ 6 \div 100 = 0{,}04\ 86 \times 10^{-2}$

$0{,}000\ 486 = 0{,}486 \div 1\ 000 = 0{,}4\ 86 \times 10^{-3}$

$0{,}000\ 486 = 4{,}86 \div 10\ 000 = \mathbf{4{,}86 \times 10^{-4}}$

Comme $1 \leqslant 4{,}76 < 10$, c'est l'écriture scientifique

<u>Méthode</u> : <u>Mettre en notation scientifique les expressions suivantes :</u>

$C = \dfrac{0{,}3\times10^{-2}\times5\times10^{-5}}{4\times10^{-4}}$ → On regroupe les puissances.

$C = \dfrac{0{,}3\times5}{4}\times\dfrac{10^{-2}\times10^{-5}}{10^{-4}}$ → On utilise les règles sur les puissances.

$C = \dfrac{1{,}5}{4}\times10^{-7-(-4)}$ → On fait la division.

$C = 0{,}375\times10^{-3}$ → Ce n'est pas une écriture scientifique.

$C = 3{,}75\times10^{-1}\times10^{-3}$ → On finalise le calcul.

$C = 3{,}75\times10^{-4}$ → Le résultat est en notation scientifique.

D) <u>Les préfixes scientifiques</u>

On utilise des préfixes pour simplifier le nom et l'écriture de mesures exprimées en puissances de 10 de certaines unités.

Préfixes				*Exemples*	
giga	**G**	→	milliard	1 Go = 10^9 octets	= 1 000 000 000
méga	**M**	→	million	1 mégapixel = 10^6 pixels	= 1 000 000
kilo	**k**	→	mille	1 kg = 10^3 grammes	= 1 000
hecto	**h**	→	cent	1 hL = 10^2 litres	= 100
déca	**da**	→	dix	1 dam = 10 mètres	= 10
déci	**d**	→	dixième	1 dB = 10^{-1} bel	= 0,1
centi	**c**	→	centième	1 cL = 10^{-2} litre	= 0,01
milli	**m**	→	millième	1 mg = 10^{-3} gramme	= 0,001
micro	**µ**	→	millionième	1 µs = 10^{-6} seconde	= 0,000 001
nano	**n**	→	milliardième	1 nm = 10^{-9} mètre	= 0,000 000 001

Ce tableau est valable pour toutes les grandeurs sauf aires et volumes.
Rappel : longueur mètre (m) ; masse gramme (g) ; capacité litre (L) ; capacité de mémoire octet (o) ; intensité d'un courant électrique Ampère (A) ; tension électrique Volt (V)…

Exemples :

1) Une clé USB de capacité 2 Go correspond à 2 000 Mo soit 2 000 000 000 octets.

2) Compléter avec une puissance de 10 :

1 cL = 10^{-3} L	1 MV = 10^{3} kV	1 ns = 10^{-9} s	1 µA = 10^{-3} mA	1 Gg = 10^{9} g