Leçon n°21: Equations produit nul

I) Factoriser une expression

Définition : Factoriser, c'est transformer **une somme** en **un produit**.

A) Factoriser avec les règles de ditributivité

Propriété : Quels que soient les nombres *a*, *b*, *c* et *d* :

$a\,b + a\,c = a \times (b + c)$ $\qquad$ $a\,b - a\,c = a \times (b - c)$

Exemples :

$A = 5x + 40$	$B = 2uv + 7u - 3uw$	$C = (x-4) \times (x+2) + 3 \times (x+2)$
$A = 5 \times x + 5 \times 8$	$B = u \times 2v + u \times 7 - u \times 3w$	$C = (x+2) \times [(x-4) + 3]$
$A = 5 \times (x + 8)$	$B = u \times (2v + 7 - 3w)$	$C = (x+2) \times [x - 4 + 3]$
		(réduction)
		$C = (x+2) \times (x-1)$

B) Factoriser avec les identités remarquables

Propriété : Quels que soient les nombres *a* et *b* :

$a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b)$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Exemples :

$D = (x + 2)^2 - 36$	$E = x^2 + 10x + 25$	$F = 9x^2 - 42x + 49$
$D = (x + 2)^2 - 6^2$	$E = (x)^2 + 2 \times x \times 5 + (5)^2$	$F = (3x)^2 - 2 \times (3x) \times 7 + (7)^2$
$\mathbf{a^2 - b^2}$ **avec** $a = x + 2$ **et** $b = 6$	$\mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$ **avec** $a = x$ **et** $b = 5$	$\mathbf{a^2 - 2ab + b^2}$ **avec** $a = 3x$ **et** $b = 7$
$D = (x + 2 + 6) \times (x + 2 - 6)$	$E = (x + 5)^2$	$F = (3x - 7)^2$
$D = (x + 8) \times (x - 4)$		

II) Résoudre une équation du second degré

A) Equation produit nul

Définition : Une équation produit nul est une équation dont l'un des deux membres est un produit et l'autre membre est nul.

Propriété : Un produit de facteurs est nul si au moins un des facteurs est nul .

Pour résoudre une équation du 2nd degré au collège, **il faut donc toujours la mettre sous la forme d'un produit nul**, en factorisant si nécessaire.

Exemple 1 : Résoudre l'équation l'équation : $(x-5)(2x+1)=0$

or si un produit est nul alors l'un des facteurs au moins est nul.

On a donc : soit $x-5=0$ d'ou $x=5$ | soit $2x+1=0$ et $2x=-1$ et $x=-\frac{1}{2}=-0{,}5$

Les solutions de l'équation $(x-5)(2x+1)=0$ sont donc : 5 et - 0,5

Vérification : Si $x=5$ alors on a $(5-5)(2\times5+1)=0\times11=0$
Si $x=-0{,}5$ alors on a $(-0{,}5-5)(2\times(-0{,}5)+1)=-5{,}5\times0=0$

Exemple 2 : Résoudre l'équation $4x^2+5x=0$

Ce n'est pas un produit donc il faut factoriser le 1er membre de l'équation. $4x\times x+5\times x=x\times(x+5)$

Maintenant, on a bien un produit nul : $(x)(4x+5)=0$

or si un produit est nul alors l'un des facteurs au moins est nul.

On a donc : soit $x=0$ | soit $4x+5=0$ et $4x=-5$ et $x=-\frac{5}{4}=-1{,}25$

Les solutions de l'équation $4x^2+5x=0$ sont donc : 0 et - 1,25

Vérification : Si $x=0$ alors on a $4\times0^2+5\times0=4\times0+5\times0=0+0=0$
Si $x=-1{,}25$ alors on a $4\times(-1{,}25)^2+5\times(-1{,}25)=4\times1{,}5625-6{,}25=6{,}25-6{,}25=0$

B) Equation de la forme $x^2=a$

Avant de pouvoir résoudre cette équation, il faut savoir si elle a des solutions ou non.

- 1er cas : $x^2=-12$. Comme x^2 est une carré donc il est toujours positif. Alors **l'équation n'a pas de solution.**
- 2ème cas : $x^2=0$ → Alors **l'équation a une SEULE solution :** $\boxed{x=0}$.
- 3ème cas : $x^2=20$ → Alors **l'équation a DEUX solutions.**

Pour résoudre ce type d'équation du 2nd degré, il faut avoir un produit nul.

$x^2=20$
$x^2-20=0$ on fait apparaître l'I.R. a² - b²
$x^2-(\sqrt{20})^2=0$ on factorise en (a - b)(a+b)
$(x-\sqrt{20})(x+\sqrt{20})=20$

or si un produit est nul alors l'un des facteurs au moins est nul.

On a donc : soit $x-\sqrt{20}=0$ d'ou $x=\sqrt{20}$ | soit $x+\sqrt{20}=0$ et $x=-\sqrt{20}$

Les 2 solutions de cette équation sont donc $\boxed{x=\sqrt{20}}$ **et** $\boxed{x=-\sqrt{20}}$.