Leçon n°2 : Pourcentages, vitesses et échelles

I) Pourcentages

A) Définition

Définition : **Un pourcentage** est une façon d'exprimer une proportion avec une « fraction de dénominateur cent » ce qui se traduit par 25% = $\frac{25}{100}$ = 0,25.

Remarque : les "pourcentages" étant affaire de proportionnalité, on peut utiliser, dans la résolution de problèmes, soit un tableau, soit les égalités de quotients.

Exemple 1 : Dans la classe de Julia ; il y a 25 élèves, dont 9 qui portent des lunettes.

La proportion d'élèves portant des lunettes parmi tous les élèves est de $\frac{9}{25}$.

$\frac{9}{25} = \frac{9\times4}{25\times4} = \frac{36}{100}$ = 36 %

Il y a donc 36% d'élèves portant des lunettes dans la classe de Julia.

Pourcentages particuliers

Pourcentage	Fraction	Ecriture décimale
10 %	=	=
20 %	=	=
25 %	=	=
50 %	=	=
75 %	=	=
100 %	=	=

B) Quelques problèmes de pourcentages.

- Appliquer un pourcentage

Exemple 2 :

Dans un collège de 185 élèves, 80 % d'entre-eux viennent au collège à pied.

Combien d'élèves viennent à pied ?

Méthode 1 : *Sans tableau*

80 % de 185 élèves = $\frac{80\times185}{100}$ = 148

148 élèves viennent à pied.

Méthode 2 : *Avec tableau*

Nombre d'élèves venant à pied	?	80
Nombre total d'élèves	185	100

Les produits en croix sont égaux, on calcule $\frac{80\times185}{100}$ = 148

Remarque : Calculer 80 % d'une quantité revient à la multiplier par 0,80

- Calculer un pourcentage

Exemple 3 :

On a besoin de 125 g de beurre pour un total de 380 g de pâte brisée.

Quel est le pourcentage de beurre dans cette recette ?

Méthode 1 : *Sans tableau*

Proportion de beurre dans la pâte = $\frac{125}{380} \approx 33$ %

Cette pâte brisée contient environ 33% de beurre.

Méthode 2 : *Avec tableau*

masse de beurre (en g)	125	?
masse totale de la pâte (en g)	380	100

$\frac{125 \times 100}{380} = \frac{625}{19} \approx 33$ %.

Cette pâte brisée contient environ 33% de beurre.

- Retrouver le total

Exemple 4 :

Dans un club de judo 75 enfants pratiquent une autre activité sportive. Ils représentent 20% des adhérents.

Combien y-a-t-il d'inscrits au total ?

Méthode : *Avec tableau*

Enfants pratiquant d'autres sports	75	20
Total des enfants	?	100

$\frac{75 \times 100}{20} = 375$

Il y a donc 375 élèves inscrits au total

C) Evolution en pourcentages.

Exemple 5 : Un collège accueillait 480 élèves l'année dernière. Cette année, l'effectif a augmenté de 15%. Quel est le nombre d'élèves dans le collège cette année ?

Méthode 1 : **480 × 0,15 = 72 et 480 + 72 = 552**

Après l'augmentation le nombre d'élèves dans le collège est 552.

Méthode 2 : Dans la première méthode, on doit faire en fin de compte le calcul :

480 + 480 × 0,15

On va factoriser par 480 :

480 + 480 × 0,15 = 480 × 1 + 480 × 0,15 = 480 × (1 + 0,15) = 480 × 1,15

Finalement, pour **augmenter** le nombre d'élèves **de 15%**, il suffit de le **multiplier par 1,15.**

Propriété : Augmenter une quantité de *p* % revient à la multiplier par $1 + \frac{p}{100}$.

Exemple 6 : Un pull vaut 39 euros et bénéficie d'une réduction de 20%. Quel est son prix après réduction ?

39 – 39×0,20 = 39×1 - 39×0,20 = 39×(1- 0,20) = 38 × 0,80

Propriété : Diminuer une quantité de *p* % revient à la multiplier par $1 - \frac{p}{100}$.

II) Grandeurs produit et quotient

A) Définition et exemples

Une grandeur est une quantité que l'on peut compter ou exprimer avec une unité de mesure.
Une mesure est un nombre qui permet d'écrire ou de communiquer une grandeur.
Une grandeur **produit** est obtenue en multipliant des grandeurs (longueurs, masses, durées …) .
Une grandeur **quotient** est obtenue en divisant des grandeurs.

Exemples :

GRANDEURS PRODUIT :

Aire $m^2 = m \times m$
Volume $m^3 = m \times m \times m$
Energie électrique $Energie = Puissance \times temps$; $Wattheures = Watts \times heures$

GRANDEURS QUOTIENT :

Vitesse $\text{Vitesse} = \dfrac{\text{distance}}{\text{temps}}$ km/h ; km ; h	*Masse volumique d'un matériau* $\text{masse volumique} = \dfrac{\text{masse}}{\text{volume}}$ kg/m^3 ; kg ; m^3	*Débit* $\text{Débit} = \dfrac{\text{volume}}{\text{temps}}$ L/min ; L ; min	*Prix unitaire* … € / kg ; … € / m ; … € / L ; … € / m^3 ; … € / kWh
Concentration $\text{Concentration} = \dfrac{\text{masse dissoute}}{\text{volume du liquide}}$ g/L ; g ; L	*Densité de population* $\text{Densité} = \dfrac{\text{nombre d'habitants}}{\text{surface}}$ hab/km^2 ; hab ; km^2	*Vitesse de téléchargement* $\text{Vitesse de téléchargement} = \dfrac{\text{Quantité de données informatiques}}{\text{temps}}$ Mo/s ; Mo ; s	*Consommation d'essence* … L / 100 km

• énergie éléctrique :
Un four micro-onde consomme 100 Wh d'énergie
ça signifie que, la puissance de l'appareil est de 100 W pendant 1h.

Temps (en h)	1	…
Puissance (en W)	100	…

× Energie électrique (Wh)

• débits :
La Seine a un débit de 400 m^3 / s ,
ça signifie que, il s'écoule 400 m^3 d'eau en 1 seconde.

Temps (s)	1	…
volume (m^3)	400	…

× débit (m^3/s)

B) Exemple à connaître : la vitesse moyenne

Lors d'un trajet, la vitesse d'un mobile n'est en général pas constante (accélérations, ralentissements, ...)
La **vitesse moyenne** est la vitesse qu'aurait le mobile s'il parcourait la même distance dans le même temps en conservant toujours la même vitesse.

Formules à retenir : $\boxed{v = \dfrac{d}{t}}$ et les produits en croix donnent $\boxed{d = v \times t}$ et $\boxed{t = \dfrac{d}{v}}$

v vitesse moyenne, d distance parcourue, t durée du parcours

Attention à utiliser des unités cohérentes →	v	d	t
	en km/h	en km	en h
	en m/s	en m	en s

Exemple : Une voiture roule à la vitesse moyenne de 60 km/h.

TRADUCTION : À vitesse constante, elle parcourt 60 km durant 1 heure.

temps (h)	1	…
distance (km)	60	…

× vitesse (km/ h)

Remarque 1 : Lorsqu'un véhicule se déplace à vitesse constante, la distance parcourue par le véhicule est proportionnelle au temps de parcours.
La vitesse est alors le coefficient de proportionnalité.

Remarque 2 : **km/h** peut aussi s'écrire **km.h^{-1}**

C) Conversions

Remarque 3 : Lorsqu'on fait des calculs avec des grandeurs, il faut faire attention à garder les mêmes unités. Pour cela, on doit savoir convertir des kilomètres en mètres, des heures minutes en heures décimales, des litres en m^3 et inversement.

Exemples :

Convertir 1,3h en heures minutes

Méthode 1 :

1,3 h = 1 h + 0,3 h
= 1 h + 0,3 × 60 min
= 1 h + 18 min
= 78 min

Méthode 2 :

Heures	1	1,3
Minutes	60	?

$\frac{60 \times 1{,}3}{1} = 78.$

Ainsi 1,3h équivaut à 78 minutes

Convertir 5h24min en heure décimale

Méthode 1 :

5 h 24 min = 5 h + $\frac{24}{60}$ h
= 5 h + 0,4 h
= 5,4 h

Méthode 2 :

Heures	1	?
Minutes	60	24

$\frac{1 \times 24}{60} = 0{,}4.$

Ainsi 5h24min équivaut à 5,4 h

D) Exemples de calcul

Exemples : Une voiture met 2h 30min pour parcourir 200 km

● **vitesse moyenne ?** $d = 20\ km$

$t = 2h\,30\text{min} = 2{,}5h$

$V(km/h) = \frac{d\ (km)}{t\ (h)} = \frac{200\ (km)}{2{,}5\ (h)} = 80\ km/h$ → La vitesse moyenne de la voiture est de 80 km/h.

● **distance parcourue en 1h 30min ?**

$v = 80\ km/h$

$t = 1h\,30\text{min} = 1{,}5h$

$d(km) = d\ (km) \times t\ (h) = 80\ (km/h) \times 1{,}5\ (h) = 120\ km$ → En 1h30, la voiture parcourt 120 km.

● **temps pour parcourir 496 km** ?

$v = 80\ km/h$

$d = 496\ km$

$t(h) = \frac{d\ (km)}{v\ (km/h)} = \frac{496\ (km)}{80\ (h)} = 6{,}2h = 6h + 0{,}2h = 6h + 0{,}2 \times 60 min = 6h + 12 min$

→ La voiture parcourt 496 km en 6h et 12 minutes.

● **conversions :**

De km/h en m/s

$80\ km/h = \frac{80\ km}{1\ h} = \frac{80\,000\ m}{3\,600\ s} \approx 22{,}2\ m/s$

De m/min en km/h

$43\ m/min = \frac{43\ m}{1\ min} = \frac{0{,}043\ km}{\frac{1}{60}h} = 0{,}043\ km \times \frac{60}{1} h = 2{,}58\ km/h$

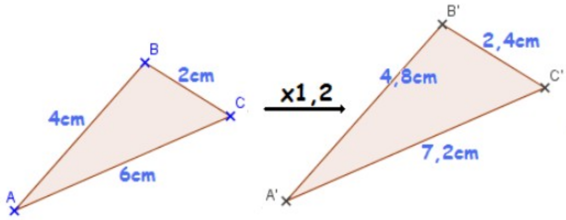
III) Agrandissement- Réduction

A) Définition et propriétés

Propriété : Pour représenter la réalité, il peut être nécessaire de l'agrandir ou de la réduire.
On multiplie alors les longueurs de la figure par un nombre strictement positif k appelé rapport d'agrandissement ou de réduction.

Si $0 < k < 1$, alors il s'agit d'une **réduction**
Si $k = 1$, alors il s'agit d'une **reproduction**
Si $k > 1$, alors il s'agit d'un **agrandissement**

Exemple : Les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.
Alors le triangle A'B'C' est un agrandissment du triangle ABC de rapport $k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{4{,}8\,\text{cm}}{4\,\text{cm}} = 1{,}2$



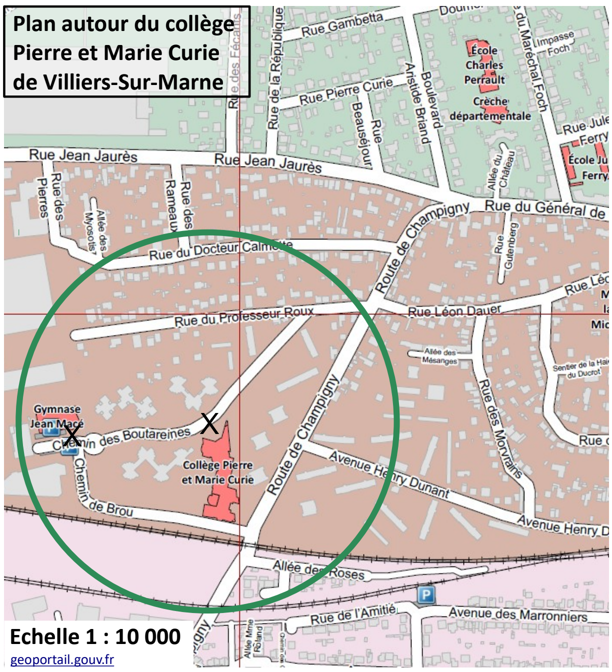
B) Echelle

Propriété : Le coefficient de réduction (ou d'agrandissement) est aussi appelé échelle.

$$k = \textbf{échelle} = \frac{\text{distance sur le dessin}}{\text{distance réelle}}$$ dans les mêmes unités.

Réduction

En bas à gauche, il est indiqué que l'échelle est de 1 : 10 000 ;
on devrait écrire $\frac{1}{10\,000}$.
Cela signifie que pour passer de la réalité à la carte, on a multiplié les distances par $\frac{1}{10\,000}$.



Par exemple, si on cherche les points à 250 m de l'entrée du collège :

Méthode 1 : On doit chercher la distance correspondante sur la carte, on calcule : 250 m × $\frac{1}{10\,000}$ =0,0250 m = 2,5 cm
Ce sont donc tous les points du cercle vert de rayon 2,5 cm.

L'échelle $\frac{1}{10\,000}$ signifie aussi que 1 cm sur la carte représente 10 000 cm = 100 m de la réalité.

Méthode 2 : On aurait aussi pu la trouver avec un tableau de proportionnalité en utilisant 250 m = 25 000 cm

Carte	Réalité
1 cm	10 000 cm
?	25 000 cm

$? = \frac{1 \times 25\,000}{10000} = 2{,}5$
On retrouve le rayon de 2,5 cm.

Pour aller de l'entrée du collège au gymnase, il y a 1,8 cm (distance entre les 2 points).
On peut déterminer la distance entre le collège et le gymnase :

Carte	Réalité
1 cm	10 000 cm
1,8 cm	?

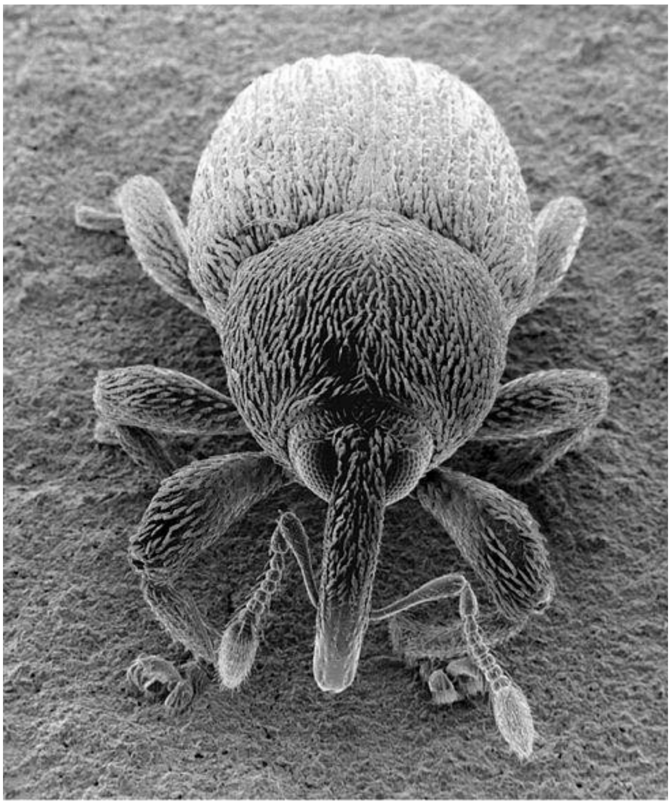
$? = \frac{1{,}8 \times 10\,000}{1} = 18\,000$
Il y a 18 000 cm = 180 m pour aller du collège au gymnase.

Agrandissement

L'échelle est ici de $\frac{20}{1}$. Cela signifie que pour passer de la réalité à la photo, on a multiplié les distances par $\frac{20}{1}$.

Cela signifie aussi que 20 cm sur la photo représentent 1 cm dans la réalité.

Pour connaître sa taille réelle, on la mesure sur la photo ; on trouve ici 8,6 cm.



Je calcule sa taille réelle :

Photo	Réalité
20 cm	1 cm
8,6 cm	?

$$? = \frac{8{,}6 \times 1}{20} = 0{,}43$$

La taille est donc de 0,43 cm = 4,3 mm.