Chapitre 3 : Trigonométrie

Compétences à valider :

- Connaître et utiliser les définitions du cosinus, du sinus, de la tangente d'un angle aigu.
- Calculer une longueur d'un triangle rectangle avec une formule trigonométrique.
- Utiliser les touches cos / sin / tan de la calculatrice pour déterminer une valeur approchée.
- Utiliser le théorème de Pythagore pour calculer une longueur dans un triangle rectangle.
- Savoir si un triangle est rectangle grâce au théorème de Pythagore.

I. Le théorème de Pythagore.

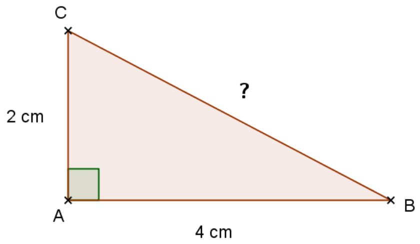
1. Rappels

Cf. : Carte mentale

2. Applications

Le théorème de Pythagore sert aussi **à calculer la longueur d'un côté dans un triangle rectangle, quand on connait les deux autres.**

Application 1 : Calculer la longueur de l'hypoténuse à partir de la longueur des deux autres côtés.



Modèle de rédaction :

ABC est un **triangle rectangle en A**.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

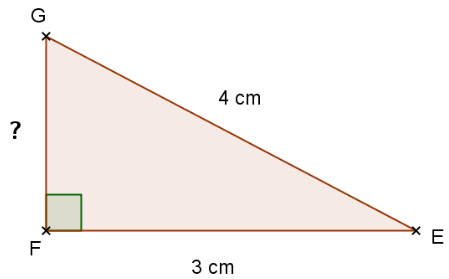
Donc $BC^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$

Donc $BC = \sqrt{20}$

$BC \approx 4{,}5$

BC mesure donc environ 4,5 cm.

Application 2 : Calculer la longueur d'un des côtés de l'angle droit à partir de la longueur des deux autres côtés.



Modèle de rédaction :

FEG est un **triangle rectangle en F**.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$GE^2 = FE^2 + FG^2$

Donc $FG^2 = GE^2 - FE^2$

D'où $FG^2 = 16 - 9 = 7$

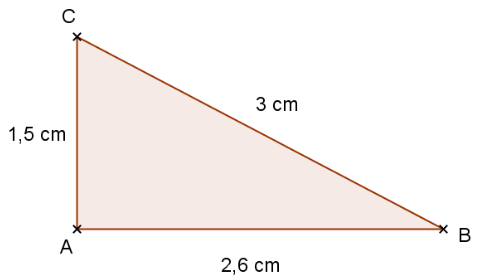
$FG = \sqrt{7}$

$FG \approx 2{,}6$

FG mesure donc environ 2,6 cm.

Le théorème de Pythagore ou sa réciproque servent à montrer si un triangle **est rectangle ou non.**

Application 3 : Le triangle suivant est-il rectangle ?



Modèle de rédaction :

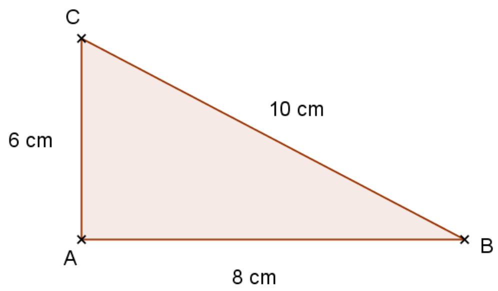
ABC est un triangle dont le plus grand côté est [BC].

- $BC^2 = 3^2 = 9$
- $AB^2 + AC^2 = 2{,}6^2 + 1{,}5^2 = 6{,}76 + 2{,}25 = 9{,}01$

Donc : $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$

D'après le théorème de Pythagore, le triangle ABC n'est pas rectangle.

Application 4 : Le triangle suivant est-il rectangle ?



Modèle de rédaction :

ABC est un triangle dont le plus grand côté est [BC].

- $BC^2 = 10^2 = 100$
- $AB^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

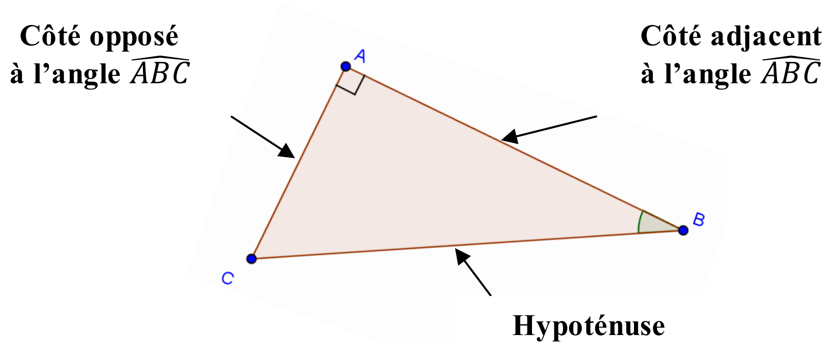
Donc : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

Remarque importante : Dans les applications 3 et 4, il faut séparer les calculs de BC^2 et de $AB^2 + AC^2$ car, au départ, on ne sait pas si ces expressions sont égales.

II. Cosinus, sinus, tangente.

1. Vocabulaire :



2. Formules

Définitions : ABC est un triangle rectangle en A.
Le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle aigu $\widehat{ABC}$ sont les nombres définis par :

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{\text{côté } adjacent \text{ à } \widehat{ABC}}{hypoténuse} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{\text{côté } opposé \text{ à } \widehat{ABC}}{hypoténuse} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{\text{côté } opposé \text{ à } \widehat{ABC}}{\text{côté } adjacent \text{ à } \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB}$$

Remarque : le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont des nombres compris entre 0 et 1 car l'hypoténuse est le plus grand côté d'un triangle rectangle.

3. Utilisation de la calculatrice

Pour calculer le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle, on utilise les touches « cos », « sin » ou « tan » de la calculatrice. Puis on met la mesure l'angle dans les parenthèses.

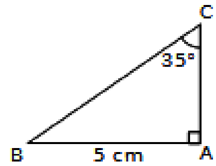
Exemples : Pour calculer le cosinus d'un angle de 30°, on tape : « **cos(30)** » et on obtient environ 0,87.
Pour calculer le sinus d'un angle de 45°, on tape : « **sin(45)** » et on obtient environ 0,7.
Pour calculer la tangente d'un angle de 65°, on tape : « **tan(65)** » et on obtient environ 2,1.

III. Utilisation de la trigonométrie.

1. Calcul de la longueur de l'hypoténuse

Exercice : ***ABC est un triangle rectangle en A, AB = 5 cm et $\widehat{BCA} = 35°$.***

Calculer la longueur BC.



Solution : [BC] est *l'hypoténuse* ; [BA] est *le côté opposé* à l'angle $\widehat{BCA}$.
On utilise donc le *sinus* de l'angle $\widehat{BCA}$.

Calcul de BC :

Dans le triangle ABC rectangle en A, on a : *sin* $\widehat{BCA} = \dfrac{côté\_opposé\_à\_B\hat{C}A}{hypoténuse}$

donc *sin* $\widehat{BCA} = \dfrac{BA}{BC}$

On applique la règle des produits en croix : BC = $\dfrac{BA}{\sin(B\hat{C}A)}$

On remplace par les données : BC = $\dfrac{5}{\sin(35)}$

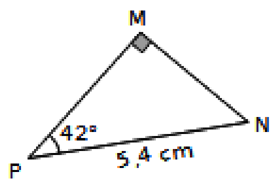
A l'aide de la calculatrice, on en déduit la longueur BC arrondie au millimètre :

$\boxed{BC \approx 8.7 \text{ cm.}}$

2. Calcul de la longueur d'un côté de l'angle droit

Exercice : ***MNP est un triangle rectangle en M tel que PN = 5,4 cm et $\widehat{MPN} = 42°$.***

Calculer la longueur MP.



Solution : [PN] est *l'hypoténuse ;* [MP] est le *côté adjacent* à l'angle $\widehat{MPN}$.
on utilise donc *le cosinus* de l'angle $\widehat{MPN}$.

Calcul de MP :

Dans le triangle MNP *rectangle* en M, on a : *cos* $\widehat{MPN} = \dfrac{côté\_adjacent\_à\_M\hat{P}N}{hypoténuse}$

donc *cos* $\widehat{MPN} = \dfrac{MP}{NP}$

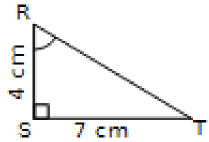
On applique la règle des produits en croix : $MP = NP \times \cos(\widehat{MPN})$

On remplace par les données : MP = *5,4 × cos(42)*

A l'aide de la calculatrice, on trouve :

$\boxed{MP \approx 4 \text{ cm.}}$

3. Calcul de la mesure d'un angle



Exercice : ***RST est un triangle rectangle en S tel que RS = 4 cm et ST = 7 cm.***

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{SRT}$.

Solution : [RS] est *le côté adjacent* à l'angle $\widehat{SRT}$. [ST] est *le côté opposé* à l'angle $\widehat{SRT}$.

On utilise donc la *tangente* de l'angle $\widehat{SRT}$.

Calcul de la mesure de l'angle :

Dans le triangle RST rectangle en S, on a : *tan* $\widehat{SRT} = \frac{ST}{RS}$ donc *tan* $\widehat{SRT} = \frac{7}{4}$

A l'aide de la calculatrice, on en déduira mesure de l'angle arrondie au degré :

$$\boxed{S\hat{R}T \approx 60\,°}.$$