Chapitre 6 : Arithmétique

<u>Compétences à valider :</u>

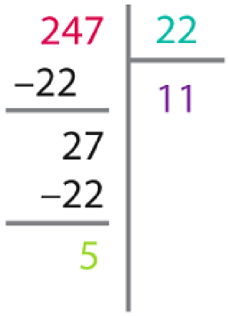
- Connaitre le vocabulaire « divisible par », « diviseur de », « multiple de »
- Connaître / utiliser les critères de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 9, 10
- Connaitre la notion de nombres premiers
- Décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers
- Simplifier une fraction pour la rendre irréductible.
- Modéliser et résoudre des problèmes arithmétiques

I. Multiples, diviseurs et nombres premiers

1. Division euclidienne

Propriété : La division euclidienne de a par b permet de déterminer le <u>quotient</u> q et le <u>reste</u> r tels que a = b q + r et r < b

Exemple :



Dans cette division euclidienne, le quotient est 11 et le reste est 5.
247 est appelé le dividende et 22 est le diviseur.

On a bien l'égalité suivante : $247 = 22 \times 11 + 5$, avec $5 < 22$.

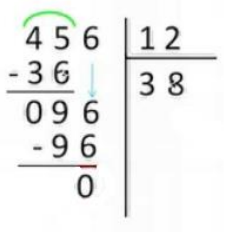
2. Multiples et diviseurs

Définition : a et b sont deux nombres entiers positifs avec b différent de 0 (b ≠ 0).

Si le reste de la division euclidienne de a par b est zéro, on dit alors que :

- b est un <u>diviseur de</u> a.
- a est <u>divisible par</u> b.
- a est <u>un multiple de</u> b.

Exemples :



Le reste de la division de 456 par 12 est égal à 0.

On dit alors que :

12 est un diviseur de 456.

456 est divisible par 12.

456 est un multiple de 12.

Remarques :

- ✓ 1 est un diviseur de n'importe quel nombre entier.
- ✓ 0 est un multiple de n'importe quel nombre entier.

3. Critères de divisibilité

Critères de divisibilité : ***A savoir par cœur !***

- Un nombre est divisible par 2 lorsqu'il se termine par un chiffre pair.
- Un nombre est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre est divisible par 4 si les deux derniers chiffres de ce nombre forment un nombre qui est un multiple de 4
- Un nombre est divisible par 5 lorsqu'il se termine par 0 ou 5.
- Un nombre est divisible par 9 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 9.

II. Diviseurs communs et nombres premiers entre eux.

On a $12 \times 23 = 276$ et aussi $12 \times 5 = 60$. 12 est un diviseur commun à 276 et 60.

Définition : Un diviseur commun à a et b est un entier naturel qui divise a et qui divise b.

Remarque : 1 est toujours un diviseur commun à a et b.

Définition : Deux nombres sont premiers entre eux si leur seul diviseur commun est 1.

Exemple : Diviseurs de 16 : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16

Diviseurs de 21 : 1 ; 3 ; 7 ; 21

Leur seul diviseur commun est 1. Donc 16 et 21 sont premiers entre eux.

III. Décomposition en produits de facteurs premiers

1. Nombres premiers

Définition : Un nombre premier est un nombre entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Exemples : Liste des nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37…

Attention ! 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1.

Remarque : 2 est le seul nombre pair qui est premier.

Propriété : On peut toujours décomposer un nombre entier non premier et supérieur à 2, en produit de plusieurs facteurs premiers.

Exemple :

$$588 = 2 \times 294 = 2 \times 2 \times 147 = 2 \times 2 \times 3 \times 49 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7^2$$

2. 1ère application : déterminer le plus grand diviseur commun de deux nombres

Méthode : Pour chercher le plus grand diviseur commun à deux nombres :

1) On les décompose chacun en un produit de facteurs premiers.
2) On garde uniquement les facteurs premiers qui apparaissent dans les deux décompositions (ayant le plus petit exposant).
3) On les multiplie ensemble.

Exemple : Pour chercher le plus grand diviseur commun à deux nombres :

1) $84 = 2^2 \times 3 \times 7$

   $270 = 2 \times 3^3 \times 5$
2) On garde 2 et 3 qui sont dans les deux décompositions
3) Le plus grand diviseur commun (PGCD) de 84 et 270 est donc : $2 \times 3 = 6$.

On note aussi $PGCD(84\,;270) = 6$

3. 2ème application : rendre une fraction irréductible

Définition : Une fraction est irréductible quand le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux.

Exemple : $\frac{12}{7}$ est irréductible car 12 et 7 sont premiers entre eux.

Méthode : On peut facilement simplifier une fraction et la rendre irréductible en décomposant son numérateur et son dénominateur en produits de plusieurs facteurs premiers.

Exemple : Simplifier la fraction $\frac{588}{120}$

- On peut décomposer numérateur et dénominateur en produit de facteurs communs :

$588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$ (Cf. : exemple précédent)

$120 = 2 \times 60 = 2 \times 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5$

Ainsi, on a :

$$\frac{588}{120} = \frac{2^2 \times 3 \times 7^2}{2^3 \times 3 \times 5} = \frac{7^2}{2 \times 5} = \frac{49}{10}$$

- On peut aussi diviser numérateur et dénominateur par leur plus grand diviseur commun (ici $2^2 \times 3 = 12$)

$$\frac{588}{120} = \frac{588 \div 12}{120 \div 12} = \frac{49}{10}$$