Chapitre 7 : Triangles semblables – Théorème de Thalès

Compétences à valider :

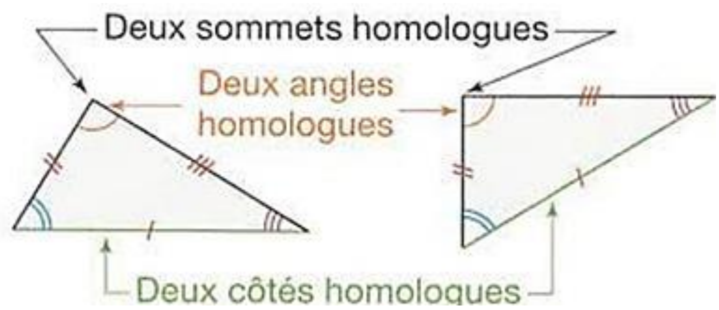
- Reconnaître des triangles semblables.
- Utiliser la relation de Thalès pour calculer une longueur manquante.
- Déterminer si deux droites sont parallèles ou non en utilisant la relation de Thalès.

I. Triangles semblables

1. Définition

Définition : Deux triangles sont **semblables** si **leurs angles** sont **égaux deux à deux**.

Vocabulaire : Les angles de même mesure sont dits homologues ; les sommets ou les côtés opposés à deux angles homologues sont aussi dits homologues.



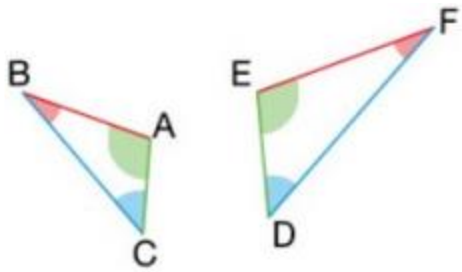
Remarques :

1) Des triangles sont égaux s'ils sont superposables (ils ont les mêmes mesures d'angles et les mêmes longueurs de côté).
2) Des triangles égaux sont semblables ; mais des triangles semblables ne sont pas forcément égaux.

2. Propriétés

Propriété : Si deux triangles sont semblables alors les longueurs des côtés de l'un sont proportionnelles aux longueurs des côtés de l'autre.

Exemple : Les triangles ABC et DEF sont semblables. Donc les longueurs de leurs côtés homologues sont deux à deux proportionnelles.



Côtés de ABC	AB	AC	BC
Côtés de DEF	EF	ED	DF

Ce tableau est donc proportionnel. On peut alors écrire :

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{ED} = \frac{BC}{DF}$$

Propriété (réciproque) : Si les longueurs des côtés d'un triangle sont proportionnelles aux longueurs des côtés d'un autre triangle alors ces deux triangles sont semblables.

II. Le théorème de Thalès

1. Propriété et configurations possibles

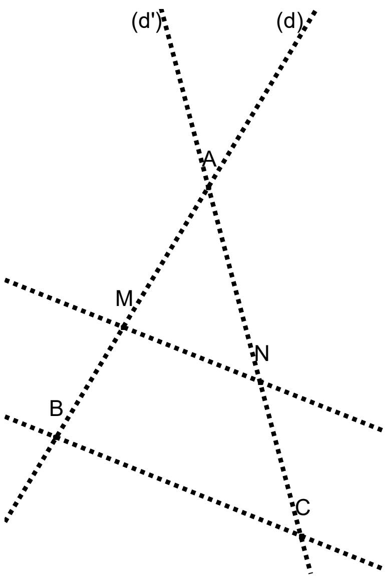
Théorème de Thalès: Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A.
Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

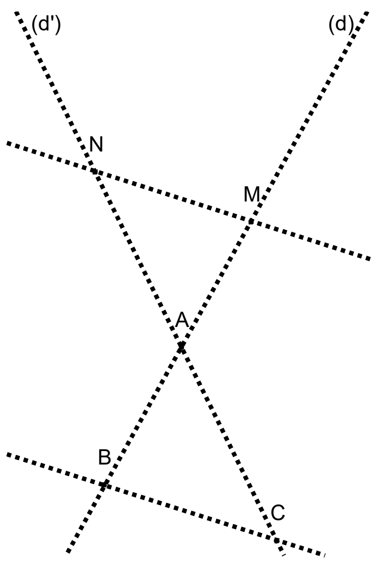
Remarque : Autrement dit, les longueurs des côtés des triangles ABC et AMN sont proportionnelles. Les triangles ABC et AMN sont semblables.

Il y a deux cas possibles :

1) Si B, M, C et N sont « du même côté » par rapport à A :

2) Si les points B, C et les points M, N sont de part et d'autre du point A :





2. Utilités

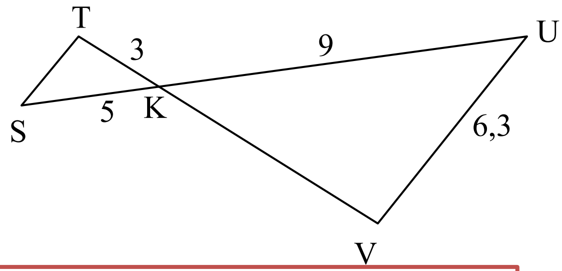
a) Calculer une longueur

Le théorème de Thalès permet de calculer une longueur quand on en connait trois autres.

Exemple :

On considère la figure suivante avec (ST)//(UV).

Calculer KV et ST.



Rédaction-type :

Les droites (ST) et (SU) sont sécantes en K.

Les droites (ST) et (UV) sont parallèles.

Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{KT}{KV} = \frac{KS}{KU} = \frac{TS}{VU}$$

d'où

$$\frac{3}{KV} = \frac{5}{9} = \frac{TS}{6,3}$$

En utilisant le produit en croix, on a :

$$KV = \frac{3 \times 9}{5}$$

et :

$$ST = \frac{5 \times 6,3}{9} = 3,5$$

KV mesure donc 5,4 cm et ST 3,5 cm.

b) Démontrer que des droites ne sont pas parallèles

Le théorème de Thalès permet aussi de démontrer que des droites ne sont pas parallèles.

Dans les conditions de la propriété de Thalès, si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$ alors les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

III. La réciproque du théorème de Thalès

Réciproque du Théorème de Thalès:

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ **et** si les points A, B, M sont **alignés dans le même ordre** que les points A, C, N, *alors* les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

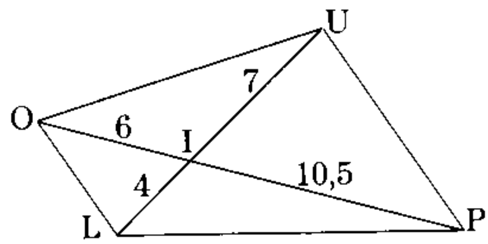
La réciproque du Théorème de Thalès permet de démontrer que des droites sont parallèles.

Remarques:

- Le rapport $\frac{MN}{BC}$ est égal aux deux autres.
- Pour appliquer cette réciproque, il y a deux conditions importantes :
  1) $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
  2) « les points A, B, M sont **alignés dans le même ordre** que les points A, C, N. »

Exemple :

Avec les données de la figure suivante, **démontrer que (OL) est parallèle à (UP).**



Rédaction-type :

- D'une part, les points O, I, P et L, I, P sont alignés dans le même ordre.

- D'autre part, on a : $\frac{IP}{IO} = \frac{10{,}5}{6} = 1{,}75$ *et* $\frac{IU}{IL} = \frac{7}{4} = 1{,}75$

Donc

$$\frac{IP}{IO} = \frac{IU}{IL}$$

-

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, on en déduit que la droite (OL) est parallèle à la droite (UP).