Chapitre 8 : Calcul littéral

Compétences à valider :

- Calculer une expression littérale pour des valeurs numériques données.
- Réduire une expression littérale du premier ou second degré à une ou plusieurs inconnues.
- Développer et factoriser une expression littérale.
- Connaître les identités remarquables.
- Développer et factoriser en utilisant une identité remarquable.
- Résoudre une équation produit-nul.

I. Bases du calcul littéral

1- Réduire une expression littérale

Réduire une somme algébrique c'est **regrouper les termes de même nature**.

Exemples :

A = 3 a + 6 b + 8 + 7 a + 1 + 13 b A = 10a + 19b + 9	B = 7 a^2 – 11 b + 5 – 3 a^2 – 16 – 4 b B = 4a^2 - 15b – 11
C = 7x^2 + 15x – 8 – 15x^2 + 2x – 17x + 2 C = -8 x^2 - 6	D = 5x^2 – 8 – 2x – x^2 + 12x – 5 D = 4 x^2+10 x – 13

2- Calculer la valeur d'une expression littérale

On peut calculer la valeur d'une expression littérale si on fixe une valeur pour la variable. Dans ce cas, on **rétablit les signes « $\times$ »** sous-entendus, on **remplace x par sa valeur** dans l'expression littérale, puis on **calcule l'expression** obtenue en respectant les priorités de calculs.

Exemple : Calculer $5x^2 + 3x + (4x - 2) - (x^2 + 1)$ pour $x = -1$

$$\begin{aligned}5\times(-1)^2+3\times(-1)+(4\times(-1)-2)-((-1)^2+1) &= 5\times 1-3+(-4-2)-(1+1)\\ &= 5-3-6-2\\ &= 5-11\\ &= -6\end{aligned}$$

3- Développer

Développer un produit, c'est le transformer en une somme algébrique.

Pour cela, on utilise la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction.

A retenir : **La distributivité « simple »** $\boldsymbol{k(a+b) = ka + kb}$	**La distributivité « double »** $\boldsymbol{(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd}$

Exemples :

1) Développer et réduire $-3(5 - 4x)$: $-3\,(5-4x) = -15 + 12x$

2) Développer et réduire $(3x - 7)(5 - 4x)$: $(3x-7)(5-4\,x) = 15\,x - 12\,x^2 - 35 + 28\,x$
$= -12\,x^2 + 43\,x - 35$

Conséquence : Supprimer les parenthèses autour d'une somme algébrique précédée d'un signe + ou – revient à développer cette expression par +1 ou -1.

Exemples :

$\mathbf{5x - 2 + (4x^2 - 5x + 3)}$
$= \mathbf{5x - 2 + 1 \times (+4x^2 - 5x + 3)}$
$= \mathbf{5x - 2 + 4x^2 - 5x + 3.}$
$= 4x^2 + 1$

$5x - 2 - (4x^2 - 5x + 3)$
$= 5x - 2 - 1 \times (+4x^2 - 5x + 3).$
$= 5x - 2 - 4x^2 + 5x - 3$
$= -4x^2 + 10x - 5$

Quand on a un signe – devant les parenthèses, cela revient à supprimer ces parenthèses et le signe –, et à changer tous les signes des termes entre parenthèses.

II. Les identités remarquables

1- A savoir par cœur !!!

Identités remarquables : **A connaître par cœur !**

a et b sont deux nombres quelconques.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Exemples :

1. Développer $(3 + x)^2$:

On utilise donc $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ en remarquant que, dans ce cas, $a = 3$ et $b = x$.

On en déduit : $(3 + x)^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times x + x^2$
$= 9 + 6x + x^2$

2. Développer $(3x - 4)^2$:

On utilise l'égalité $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 3x$ et $b = 4$.

On en déduit : $(3x - 4)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 4 + 4^2$
$= 9x^2 - 24x + 16$

3. Développer $(2 + y)(2 - y)$:

C'est l'égalité $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ avec $a = 2$ et $b = y$.

On en déduit : $(2 + y)(2 - y) = 2^2 - y^2 = 4 - y^2$

III. Factoriser une expression littérale.

1- Méthode pour factoriser avec un facteur commun

1) Repérer le facteur commun
2) Factoriser
3) Réduire les facteurs entre parenthèses (si nécessaire).

Exemples : Factoriser les expressions suivantes :

$A = 3y + 21$
$A = 3 \times y + 3 \times 7$
$A = 3(y + 7)$

$B = 2x + xy$
$B = 2 \times x + x \times y$
$B = x(2 + y)$

$C = (2x + 5)(3x + 7) - (2x + 5)(6x + 1)$
$C = (2x + 5)[(3x + 7) - (6x + 1)]$ *(attention au signe – devant les parenthèses !)*
$C = (2x + 5)[3x + 7 - 6x - 1]$
$C = (2x + 5)[3x - 6x + 7 - 1]$
$C = (2x + 5)(-3x + 6)$

2- Méthode pour factoriser en utilisant une identité remarquable

Lorsqu'il n'y a pas de facteur commun apparent, il faut penser aux identités remarquables.

1) Bien observer les termes et les signes de l'expression
2) Mettre en évidence l'identité remarquable utilisée en identifiant *a* et *b*.
3) Donner la forme factorisée de l'identité remarquable

Rappel :

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$$

Exemple : Factoriser l'expression suivante :

$C = 25x^2 - 36$
$C = (5x)^2 - 6^2$
$C = (5x - 6)(5x + 6)$

C'est de la forme
avec $a = 5x$ et $b = 6$.

On écrit la forme factorisée de l'identité remarquable.

IV. Equation produit nul

1. Définition et exemples

Définition : a, b, c, d et x sont des nombres avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$
Une **équation produit nul** est une équation de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$

Exemple :

$(5x+6)(3-7x)=0$ est une équation produit nul.

Le 1[er] membre est un produit.	Le 2[ème] membre est 0.

Remarques :

$(x+3)(x+2)=7$ n'est pas une équation produit nul car le 2[ème] membre n'est égal à 0.

$(x-1)+(x+5)=0$ n'est pas une équation produit nul car le 1[er] membre n'est pas un produit.

Propriété : Si un produit est nul, alors au moins l'un de ses facteurs est nul.

Cette propriété nous permet de résoudre les équations produit-nul :

Propriété : Les solutions de l'équation $(ax+b)(cx+d)=0$ sont les solutions de ***chacune*** des équations $ax+b=0$ et $cx+d=0$.

Exemples :

- **Résoudre $(2x+3)(5-x)=0$.**
  Si un produit est nul, alors au moins une de ses facteurs est nul.
  Donc cela revient à résoudre $2x+3=0$ et $5-x=0$.
  D'où :

$$\begin{array}{lcl} 2x+3=0 & \text{ou} & 5-x=0 \\ 2x=-3 & & -x=-5 \\ x=\frac{-3}{2} & & x=5 \end{array}$$

L'équation a donc deux solutions : $x=-\frac{3}{2}$ et $x=5$.

- **Résoudre $-2x(x+4)=0$**
  Si un produit est nul, alors au moins une de ses facteurs est nul.
  Donc cela revient à résoudre $-2x=0$ et $x+4=0$
  D'où :

$$\begin{array}{lcl} -2x=0 & \text{ou} & x+4=0 \\ x=0 & & x=-4 \end{array}$$

L'équation a donc deux solutions : $x=0$ et $x=-4$

2. Cas particulier : équations du type $x^2=a$

Propriété : Si a est un nombre positif, alors l'équation $x^2=a$ admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Remarques :

- Si $a=0$, l'équation $x^2=0$ admet une seule solution : $x=0$.
- Si $a<0$, l'équation $x^2=a$ n'admet aucune solution car le carré d'un nombre est toujours positif.

Exemples :

L'équation $x^2=2$ a deux solutions : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

L'équation $x^2=9$ a deux solutions : 3 et -3 (car $\sqrt{9}=3$).

L'équation $x^2=-1$ n'a pas de solution car le carré d'un nombre est toujours positif.