Chapitre 4 : Probabilités

Compétences à valider :

- Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilité.
- Calculer des probabilités dans des contextes familiers.

I. Vocabulaire

Définition : Une expérience dont on ne peut pas prévoir de façon certaine le résultat s'appelle une **expérience aléatoire.**

Exemples : Lancer un dé à six faces, tirer à pile ou face, piocher une carte dans un jeu de cartes (…) sont des expériences aléatoires.

Définitions :

• Les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont appelées **issues**.

• Un **événement** est un « regroupement » d'une ou plusieurs issues.

Exemples : Lors d'un lancer de dé à 6 faces :

• Les issues sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6.
• « Obtenir un nombre pair », « Obtenir le 1 » ou encore « Obtenir un multiple de 3 » sont des événements.

Définitions :

Un événement est **élémentaire** si une seule issue le réalise.

Un événement jamais réalisé est dit **impossible** : aucune issue ne le réalise.

Un événement toujours réalisé est dit **certain** : toutes les issues le réalisent.

L'événement **contraire** d'un événement A, noté $\overline{A}$, est celui qui se réalise lorsque A n'est pas réalisé.

Deux événements sont dits **incompatibles** s'ils ne peuvent pas être réalisés en même temps.

Exemples : Reprenons le lancer de dé :

L'événement A « Obtenir un multiple de 3 » est un **évènement**.
L'événement $\overline{A}$: « Obtenir un nombre *non* multiple de 3 » est **l'évènement contraire** de l'évènement A.
L'événement B « Obtenir 4 » est un **évènement élémentaire**.
L'événement C « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 » est un **évènement certain**.
L'événement D « Obtenir 10 » est un **évènement impossible**.
L'événement E « Obtenir un 4 » et l'événement F « Obtenir un nombre impair » sont des **événements incompatibles**

II. Calculs de probabilité

1) Probabilité d'un événement

Définition : La **probabilité d'un événement** est la mesure du caractère aléatoire de cet événement.

Propriétés :

• La probabilité d'un évènement A est un **nombre compris entre 0 et 1**.

• La probabilité d'un évènement impossible est 0 et celle d'un évènement certain est 1.

• La somme des probabilités de toutes les issues d'une expérience aléatoire est égale à 1.

Exemples : Si on reprend l'exemple précédent :
• $p(C) = 1$ et $p(D) = 0$
• $p(«Obtenir\ 1») + p(«Obtenir\ 2») + p(«Obtenir\ 3») + p(«Obtenir\ 4»)$
$+p(«Obtenir\ 5 + p(«Obtenir\ 6») = 1$

2) Equiprobabilité

Quand on lance un dé à 6 faces non truqué : on a les **mêmes chances** d'obtenir chacune des 6 faces.

Chaque face apparaît donc avec la probabilité $\frac{1}{6}$. On dit alors qu'il y a **équiprobabilité**.

Propriété : Dans une situation d'équiprobabilité, lorsque l'on peut dénombrer tous les événements possibles, la probabilité d'un événement E est donnée par :

$$\boldsymbol{p(E)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

3) Probabilité d'événements contraires

Propriété : La somme des probabilités d'un évènement A et de son contraire $\overline{A}$ est égale à 1.

$p(A) + p(\overline{A}) = 1$ ou encore $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

Exemple : Dans l'expérience du lancer de dé, si A est l'événement « Obtenir un multiple de 3 », les issues possibles sont : 3 et 6. Donc $\boldsymbol{p(A)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ainsi, $\boldsymbol{p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}}$.

III. Expérience aléatoire à deux épreuves

Pour représenter toutes les issues possibles dans une expérience aléatoire à deux épreuves, on peut utiliser **un tableau à double entrée** ou **un arbre de probabilité**.

1) Avec un tableau à double entrée

Exemple :
On tire, deux fois de suite et avec remise, une boule dans une urne contenant une boule bleue et deux boules violettes.
Déterminer la probabilité de tirer successivement deux boules violettes.

1^{er} lancer ↓ \ $2^{ème}$ lancer →	Boule bleue	Boule violette	Boule violette
Boule bleue	B ; B	B ; V	B ; V
Boule violette	V ; B	V ; V	V ; V
Boule violette	V ; B	V ; V	V ; V

La probabilité de tirer successivement deux boules violettes est donc de………..

2) Avec un arbre de probabilité

Un **arbre de probabilité** ou **arbre des possibles** est un schéma représentant une expérience aléatoire à une ou plusieurs épreuves. Il permet de visualiser les issues d'une expérience aléatoire.
Une branche représente un évènement. On appelle **chemin** une succession de branches.

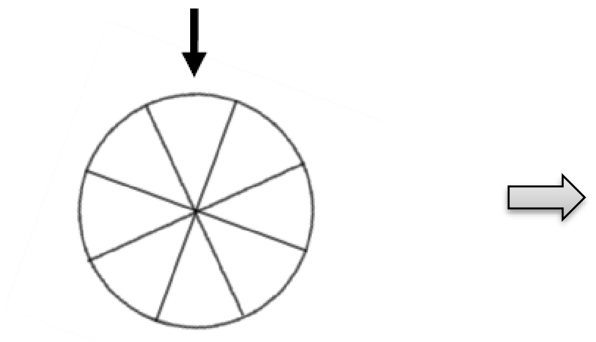
Définition : Un **arbre pondéré** est un arbre de probabilité sur lequel on fait apparaître les probabilités de chaque évènement.

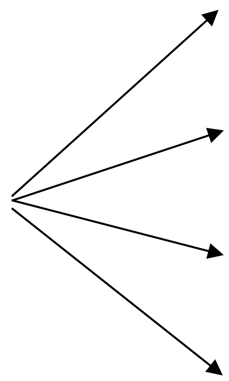
Propriété : Sur un arbre pondéré, la probabilité d'un évènement est égale au produit des **probabilités** indiquées sur les branches du chemin qui conduit à cet évènement.

Exemple 1 :

Lorsqu'on fait tourner la roue, les secteurs angulaires étant identiques, on peut obtenir quatre couleurs différentes devant la flèche. Il y a donc quatre issues possibles.

On schématise par **l'arbre pondéré** suivant :





Soit l'évènement ***E*** « La roue s'arrête sur un secteur bleu ou rouge ».

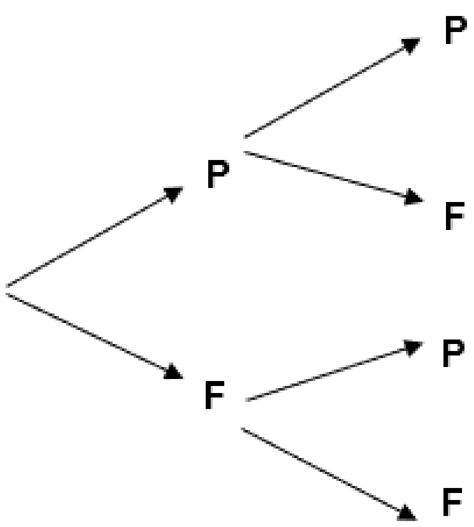
Quelle est la probabilité de cet évènement ?

$p(E) =$……………………………………………………………………………………

Exemple 2 : On lance **deux fois de suite** une pièce de monnaie et on veut la probabilité de l'événement ***E*** : **« On obtient deux fois de suite « Pile » :**

On appelle P l'événement « Obtenir Pile » et F l'événement « Obtenir Face ».

On construit d'abord l'arbre pondéré :



Sur le chemin « Pile » puis « Pile », on multiplie les probabilités :

$p(E) = p(P\ ;\ P) =$……………………………………………..

La probabilité de l'événement E est donc de ………….. .