

Catégorisation des problèmes en mathématiques, un enjeu langagier majeur



Share

publié le 02/07/2018 09:35, Dernière modification 10/12/2018 22:18

Faut-il travailler des catégorisations de problèmes en formation et/ou dans la classe avec les élèves ? Si oui, lesquelles ? Intérêts/limites de ce travail ? Et la schématisation, quel rôle joue-t-elle dans l'enseignement de la résolution de problèmes en mathématiques ? Ces questions préoccupent les formateurs et les enseignants. Le Centre Alain Savary a sollicité les points de vue de chercheurs en didactique des mathématiques et en psychologie cognitive pour tenter de comprendre où sont les controverses.

La question des rapports entre apprentissage et résolution de problèmes est sans doute l'une des plus complexes qui se pose dans le domaine des recherches sur l'enseignement
Jean Julot

Suite à la publication du dossier mathématiques en EP, des ressources pour la formation, des collègues formateurs qui ont testé la ressource dans différents contextes nous ont fait des retours. Le travail d'analyse des vidéos portant sur des situations de résolution de problèmes amène des questions et des discussions de métier autour de « catégorisation et schématisation de problèmes » : comment ? Pour qui ? Pour quoi ? Ils ne se sentent pas forcément suffisamment outillés pour répondre. Nous avons décidé de prendre au sérieux ces questions, dans toutes leur diversité et contradictions, et de tenter de nourrir de véritables discussions professionnelles, entre formateurs et avec des enseignants, en prenant appui à la fois sur les expériences de chacun, sur les savoirs du métier et sur les savoirs de recherches, dans toute leur variété. Nous avons donc sollicité les points de vue de chercheurs en didactique des mathématiques et en psychologie cognitive sur des questions vives, pour tenter de comprendre où se situent les controverses.

Volontairement dans les questions que nous avons posées, nous n'avons pas proposé de définition des termes suivants : *résolution de problèmes de mathématiques, catégorisation,*

Pour illustrer ces difficultés, voici quelques verbatims (paroles réelles) recueillis en formation d'enseignants ou de formateurs :

Formateur : « comme cet élève est déjà en difficulté, le temps qu'il dessine toutes les fleurs, il a oublié la consigne et le fait qu'il est dans un problème de maths »

Formateur : « j'ai compris l'intérêt de la catégorisation de problèmes le jour où j'ai dû l'enseigner aux élèves, il fallait bien que je les aide. Mais le temps qu'on passe à apprendre et comprendre les catégories, on ne le passe pas à résoudre des problèmes et à travailler sur les concepts mathématiques »

Enseignant : « moi, les problèmes de maths, j'évite. Je ne sais pas trop faire, et la catégorisation je ne la comprends pas ; alors comment l'expliquer aux élèves ? »

Enseignant : « La catégorisation, ça n'existe pas, sinon il y aurait une méthodologie de résolution pour chaque catégorie de problèmes, et il n'y aurait plus de problèmes, seulement des exercices... »

schématisation, de façon à ce que chacun puisse les employer avec le sens qui lui convient.

Nous organisons ici les réponses des chercheurs en trois parties :

1. La résolution de problèmes, de quoi parle-t-on ?
2. La catégorisation, c'est quoi ? C'est utile pour qui ? Intérêts/limites
3. La schématisation, C'est quoi ? C'est utile pour qui ? Intérêts/limites

Enseignant : « La catégorisation, c'est un peu comme faire de l'enseignement explicite, en fait. »

Enseignant : « des fois je fais souligner les mots et les nombres importants, des fois je fais dessiner la situation, mais je ne sais pas pourquoi je fais plutôt l'un que l'autre, dans telle ou telle situation »

IA-IPR : « non, mais depuis l'époque des cavernes, on sait qu'il ne faut pas faire schématiser un problème de mathématiques »

La résolution de problèmes, de quoi parle-t-on ?

Des points de vue de didacticiens des mathématiques

En 2008, Maryvonne Priolet soutenait une thèse qui s'appuyait sur l'identification d'un paradoxe fort entre la régularité de pratiques de séances d'enseignement de la résolution de problèmes à données numériques en cycle 3 et l'émergence, voire la persistance, des difficultés d'apprentissage des élèves.

Dix ans plus tard, Dominique Lahanier-Reuter confirme que les problèmes arithmétiques mettent toujours en difficulté enseignants et élèves. Les évaluations nationales et internationales vont dans le même sens. Enseigner la résolution de problèmes nécessite de travailler sur un texte-énoncé, de le comprendre, de décrypter les règles auxquelles il obéit. C'est un travail dont on peut se demander s'il appartient aux savoirs mathématiques ou de manière plus générique à la compréhension de l'écrit dans sa forme scolaire, ce que la chercheuse appelle "la mise en discipline".

Finalement, les différents points de vue de recherche montrent que les difficultés des élèves relèvent de trois domaines :

- le passage au symbolisme du langage mathématique
- l'étude langagière des textes des énoncés, pour comprendre les implicites mathématiques
- la double tâche (la résolution d'une part, identifier l'objet mathématique de l'autre)

Un point de vue de la psychologie cognitive

Ainsi, André Tricot différencie, dans une situation d'enseignement, la tâche à réaliser (**le moyen** pour apprendre) et la connaissance (**l'objectif** de l'acte d'enseignement).

Parmi les tâches à réaliser dans les situations d'enseignement, la résolution de problèmes se caractérise par le fait qu'on demande aux élèves d'atteindre un but, alors qu'on ne leur a pas forcément enseigné la procédure pour l'atteindre. Pour ce faire, ils vont devoir raisonner, faire des inférences, tâtonner, se tromper, faire des erreurs, interpréter leurs erreurs, etc.

Dit autrement, la spécificité des situations de résolution de problèmes réside donc dans le fait que la résolution de la tâche constitue à la fois le moyen et l'objectif d'apprentissage. *Résoudre le problème, c'est à la fois apprendre et le moyen d'apprendre. Cette ambigüité réside dans le fait que le problème*

a un contenu (qui réfère à l'objectif) et une structure (qui réfère au moyen).

D'où un point de vigilance (une règle d'action pour les enseignants ?) : pour qu'un problème constitue une situation d'apprentissage pour l'élève, il faudrait que l'enseignant s'assure à la fois que son contenu correspond bien à l'objectif d'enseignement défini et que sa structure n'est pas inutilement complexe ou hors de portée de l'élève. Plusieurs pistes d'étayage sont jugées efficaces pour enseigner la résolution de problèmes :

- L'enseignant peut proposer une aide concernant la structure du problème, tandis que le contenu est de la responsabilité de l'élève.
- L'enseignant peut proposer l'étude de problèmes résolus ou partiellement résolus
- Eviter les obstacles inutiles qui peuvent concerner aussi bien la présentation du problème, que les informations inutiles qu'il contient.

La Catégorisation de problèmes, c'est quoi ? C'est utile pour qui ?

Catégoriser les problèmes pour organiser et structurer sa pensée en typologies de résolutions

NDLR : cette première sous-partie ne traite pas de la catégorisation de Vergnaud. Celle-ci fera l'objet de la deuxième sous-partie.

On recense plusieurs types de catégorisations des problèmes arithmétiques, de nature différente, pour lesquelles les chercheurs que nous avons interrogés s'accordent à dire qu'elles ont un intérêt à être travaillées en formation de formateurs, en formation d'enseignants et, moyennant des points de vigilance, avec les élèves en classe. Les chercheurs ne s'accordent ni sur les catégorisations à étudier, ni sur la plus grande utilité de certaines par rapport à d'autres. En effet, on peut prendre plusieurs critères tout à fait différents pour « catégoriser » des problèmes de mathématiques.

Liste non exhaustive de critères de natures différentes qui permettent de "catégoriser" des problèmes mathématiques :

- Différencier ceux qui sont statistiquement « faciles » ou plus « difficiles » à réaliser, en cherchant à comprendre pourquoi.
- Catégoriser selon la proximité (ou non) entre les connaissances « familières » de l'élève et le type d'écrit mathématique proposé par l'énoncé.
- Repérer la nature des éléments à compter : distincts, isolés qui sont plutôt visuels, ou bien peu visuels comme des grandeurs continues : masses, longueurs, etc.
- Trier des problèmes qui ont l'air de se ressembler, mais dont les données vont, en fait, nécessiter des procédures de résolution différentes (par exemple, on doit apprendre à ne pas traiter de la même manière « comparer les nombres 3,75 et 3,47 » et « comparer les nombres 6 et 3,457392754638 ». C'est ce que les chercheurs appellent « variable didactique ».
- Repérer le moment où apparaît l'inconnue (ce qu'on doit chercher) : il est plus facile de chercher combien on va avoir après une dépense que de chercher combien on avait avant d'avoir réalisé une dépense.
- Observer selon la place de la question : quand le texte d'énoncé commence par la question, la lecture des élèves est orientée sur ce qu'on cherche. Dans le cas contraire, ils vont devoir revenir à nouveau sur leur lecture pour focaliser leur attention.
- Distinguer les structures sous-jacentes aux textes d'énoncé : savoir reconnaître la « catégorie de situations » qui va permettre, au-delà de l'histoire racontée, de savoir à

quelle(s) opération(s) on va devoir recourir à partir de l'énoncé.

- Trier par les registres de représentations sémiotiques : le sens des mots en contexte mathématique (par exemple les verbes d'action, les structures comme « de plus que », « avant », « après »...), mais aussi la manière dont on va pouvoir représenter le problème (symboles mathématiques, schémas, graphiques, tableaux...).
- Reconnaître les contenus mathématiques qui font partie des enjeux d'apprentissage visés : problème de division, problème sur les nombres décimaux, de proportionnalité...

Intérêts, passages à risques et points de vigilance

Intérêts : de l'avis général des chercheurs consultés, il est utile d'engager, en formation initiale comme en formation continue, un travail de catégorisation des problèmes mathématiques. Il permet d'outiller les enseignants afin :

- de faire "l'analyse à priori" des énoncés proposés
- d'évaluer la nature de la difficulté soulevée par tel ou tel énoncé
- de s'assurer de varier les types de problèmes proposés

De même, dans la classe, les chercheurs s'accordent à dire que la catégorisation a un impact sensible sur le travail et sur les apprentissages des élèves. Du point de vue de la psychologie cognitive, la catégorisation représente même un processus cognitif fondamental. Il est d'autant plus efficace que le travail langagier installé par le maître (travail de comparaison, nature de ces comparaisons, organisation, rangement, classement, inférence, déduction...) est conservé sous différentes formes écrites, pour constituer une mémoire collective de ces catégorisations et permettre à la classe de s'y référer à tout moment.

Passages à risques pour l'enseignant/le formateur : indéniablement, il y a donc un intérêt à faire dire aux élèves/enseignants en quoi tel ou tel problème se ressemble, tel ou tel problème est différent. Cependant, on l'a vu plus haut, l'enseignant/le formateur doit s'attendre à des réponses très diverses, en fonction des critères de catégorisation utilisés par l'élève ou le formé. Même dans la situation où l'enseignant/le formateur fait le choix de fournir une catégorisation de référence aux élèves/enseignants, il y a un risque qu'il ne s'autorise à proposer aux élèves/enseignants que des problèmes relevant de cette catégorisation, qui ne couvre pas nécessairement tous les problèmes qu'il est utile d'étudier à l'école.

Deux points de vigilance forts :

- Si le problème proposé est centré sur un contenu mathématique, comme objet central de l'apprentissage ciblé par l'enseignant, il est nécessaire de s'assurer que le travail de réflexion extérieur à l'objet d'apprentissage visé ne va pas empêcher l'apprentissage. Certains chercheurs s'interrogent donc sur le risque que l'activité de catégorisation proposée n'aide pas forcément les élèves à focaliser leur attention sur l'objet mathématique étudié.
- La résolution de problème nécessite un travail de transposition langagière, entendu comme traduction, décodage-recodage, ou décryptage de l'énoncé du problème, pour reconnaître les éléments d'ordre mathématique qui sont donnés, et ce qu'il faut trouver. Pour certains chercheurs, le travail de catégorisation risque de conduire certains élèves à un travail de prélèvement d'indices lexicaux ou syntaxiques hasardeux, qui parfois déboucheront sur un résultat juste avec une catégorisation erronée. Ce risque des « analogies non contrôlées » par des savoirs suffisants concerne davantage les élèves les plus éloignés de la culture scolaire, et peut leurrer les enseignants les moins chevronnés

Le cas particulier de la catégorisation des champs conceptuels de Vergnaud^[1]

Au sens de Gérard Vergnaud, catégorisation et schématisation ont la même signification. Les didacticiens que nous avons interrogés s'accordent à dire qu'une étude, plus ou moins approfondie de la catégorisation des problèmes de Vergnaud leur semble indispensable pour la formation didactique des enseignants ; par exemple pour comprendre qu'au-delà du sens courant de l'addition, tous les problèmes additifs ne sont pas équivalents. D'ailleurs les évaluations montrent des écarts de performance.

Cependant, la catégorisation des problèmes de Vergnaud représente un cadre théorique particulier qui n'est pas suffisant pour décrire la complexité du travail réel des enseignants lorsqu'ils enseignent la résolution de problèmes avec les élèves. Il est donc nécessaire en formation d'étudier d'autres dimensions telles que celles présentées dans la partie précédente.

En revanche sur la question d'un travail spécifique conduit dans la classe sur la catégorisation des problèmes de Vergnaud, les chercheurs à l'unisson sont plutôt dubitatifs sauf si ce travail s'inscrit dans des activités de catégorisations plus larges.

La schématisation, c'est quoi ? Intérêts et limites

Les chercheurs que nous avons interrogés s'accordent sur l'importance de travailler la schématisation avec les élèves, sous différentes formes. De manière générale, par *schématisation*, on entend un travail conduit sur les *représentations* (au sens de «représenter» du SC3^[21]), qui s'appuie sur *les registres et les cadres* (sémantique, sémiotique, géométrique, graphique, récit, manipulation, tableaux, etc.) au sens de Raymond Duval, cité par plusieurs chercheurs.

Dans les documents d'accompagnement Eduscol, on lit que « Représenter », c'est donner à voir, ou au moins rendre perceptible à la vue et à l'esprit. Cette définition relativement simple recouvre cependant des réalités bien distinctes. « Représenter » des objets, des visages ou en tout cas des formes ou des solides est un premier niveau de représentation commun entre autres aux mathématiques, à la géographie, aux sciences et aux arts. Mais on peut aussi « Représenter » des relations entre les objets, que ce soit par un croquis de géographie, un codage en géométrie ou un schéma en électricité. Et il arrive enfin qu'on doive « représenter » des entités abstraites, qui n'ont pas d'autre mode d'existence que cette représentation : des nombres décimaux, des fractions, des fonctions, en un mot des objets mathématiques. Leur point commun est de ne pas être accessible par la vue, l'ouïe ou quelque autre sens : on ne peut pas montrer dans le monde extérieur une fonction, pas plus qu'on ne peut en fait montrer un cube, ou un cercle. Pour autant, l'existence de ces objets ne fait de doute pour aucun utilisateur des mathématiques, même occasionnel. Ces objets ne sont pas accessibles en eux-mêmes, seulement par leurs représentations, qui sont comme des chemins vers un objet auquel on ne pourrait pas avoir directement accès. Ces représentations diverses peuvent alors appartenir à différents registres : registre graphique, registre du langage naturel (« un parallélépipède à 6 faces »), registre numérique, registre de l'écriture symbolique, etc.

► CYCLE 2 MATHÉMATIQUES

Compétences travaillées

Chercher

- S'engager dans une démarche de résolution de problèmes en observant, en posant des questions, en manipulant, en expérimentant, en émettant des hypothèses, si besoin avec l'accompagnement du professeur après un temps de recherche autonome.
- Tester, essayer plusieurs pistes possibles par soi-même, les autres élèves ou le professeur.

Domaine de sé : 2, 4

Modéliser

- Utiliser des outils mathématiques pour résoudre des problèmes concrets, notamment des problèmes posés sur des grandeurs et leur mesure.
- Réaliser que certains problèmes relèvent de situations additives, d'autres de situations multiplicatives, de partages ou de groupements.
- Reconnaître des formes dans des objets réels et les reproduire géométriquement.

Domaine de sé : 1, 2, 4

Représenter

- Appréhender différents systèmes de représentations (dessins, schémas, arbres de calcul, etc.).
- Utiliser des nombres pour représenter des quantités ou des grandeurs.
- Utiliser diverses représentations de solides et de situations spatiales.

Domaine de sé : 1, 5

Raisoner

- Anticiper le résultat d'une manipulation, d'un calcul, ou d'une mesure.
- Raisonner sur des figures pour les reproduire avec des instruments.
- Tester compte d'éléments divers (arguments d'ordre, résultats d'une expérience, sources internes ou externes à la classe, etc.) pour modifier son jugement.
- Prendre progressivement conscience de la nécessité et de l'utilité de justifier ce que l'on affirme.

Domaine de sé : 2, 3, 4

Calculer

- Calculer avec des nombres entiers, mentalement ou à la main, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies adaptées aux nombres en jeu.
- Connaître la vraisemblance de ses résultats.

Domaine de sé : 4

Communiquer

- Utiliser l'oral et l'écrit, le langage naturel puis quelques représentations et quelques symboles pour expliciter des démarches, argumenter des raisonnements.

Domaine de sé : 1, 3

74

Dans les deux cas, l'objectif de ce travail de schématisation est essentiellement langagier. Il permet le passage du langage ordinaire au langage mathématique, et il favorise la compréhension, grâce à l'explicitation des relations entre des objets d'enseignement et leur structure.

Jean-Jacques Calmelet prend l'exemple de l'appropriation de la relation entre « *transformations* » et « *opérations* »^[3] : les schématisations constituent des « formes d'abstractions élaborées » qui permettent d'accompagner progressivement leur appropriation par les élèves. Ce travail est nécessaire, encore plus pour les élèves les plus en difficulté, non pas pour leur permettre de **réussir** les tâches, mais bien pour *construire* avec eux les abstractions qui sont en jeu, pour les accompagner explicitement dans ce travail langagier : " parler **sur les enjeux de l'activité**" qui s'articule avec " parler **de l'activité** ".

Du point de vue des chercheurs, apprendre à « lire » ces énoncés, mais aussi apprendre à en « produire » collectivement, avec leur spécificité (sans information surabondante), comprendre les règles auxquelles ils obéissent, comparer les schématisations possibles, les catégoriser, permet aux élèves d'opérer des changements de registres utiles et efficaces pour construire à la fois l'autonomie dans le travail et la conscience disciplinaire.

La différence entre "opérations" et "transformations" c'est la dimension symbolique

" La première difficulté majeure tient au passage au symbolique. Apparemment, la perception des quantités et de leurs transformations, la possibilité de les comparer, constituent des capacités de base ne nécessitant pas d'apprentissage (sauf peut-être en cas de troubles lourds, ce qui reste à voir). En revanche, la mise en correspondance de ces quantités avec des systèmes de symboles, qu'il s'agisse de la suite orale des noms de nombres, des configurations de doigts, des abaques ou des chiffres arabes pose problème à tous les enfants.

En somme, la compréhension des situations d'ajout, de retrait, de comparaison, etc. ne pose pas problème. Ce qui induit les difficultés a trait à l'apparition de la dimension symbolique. "

Jean-Jacques Calmelet

d'après les travaux de Michel Fayol

Crédits

Ressources et relectures

- André Gramain, mathématiques
- Brigitte Grugeon, didactique des mathématiques
- Jean-Jacques Calmelet, didactique des mathématiques
- Sylvie Coppé, didactique des mathématiques
- Benoît Galand, psychologie et sciences de l'éducation
- Dominique Lahanier-Reuter, didactique des mathématiques
- Yves Matheron, didactique des mathématiques
- Maryvonne Piolet, didactique des mathématiques
- Marc Prouchet, psychologie cognitive
- Janine Rogalski, didactique des mathématiques
- André Tricot, psychologie cognitive

Notes de bas de page

[1] Voir thèse de Maryvonne Piolet p 65

[2] Socle commun de connaissances, de compétences, et de culture

[3] Dans le nombre au cycle 2, coordonné par Michel Fayol

©Centre Alain Savary - Institut français de l'éducation - ENS de Lyon