

Chapitre 10: Les modèles démographiques

Sommaire

Activités	Page(s)	Autoévaluation
Activité documentaire 1 : Le modèle linéaire pour prédire l'évolution d'une population et de ses ressources	1-3	
Activité documentaire 2 : Le modèle exponentiel pour prédire l'évolution d'une population et de ses ressources	3-5	
Activité documentaire 3 : Le malthusianisme	5-7	
Cours	7-12	

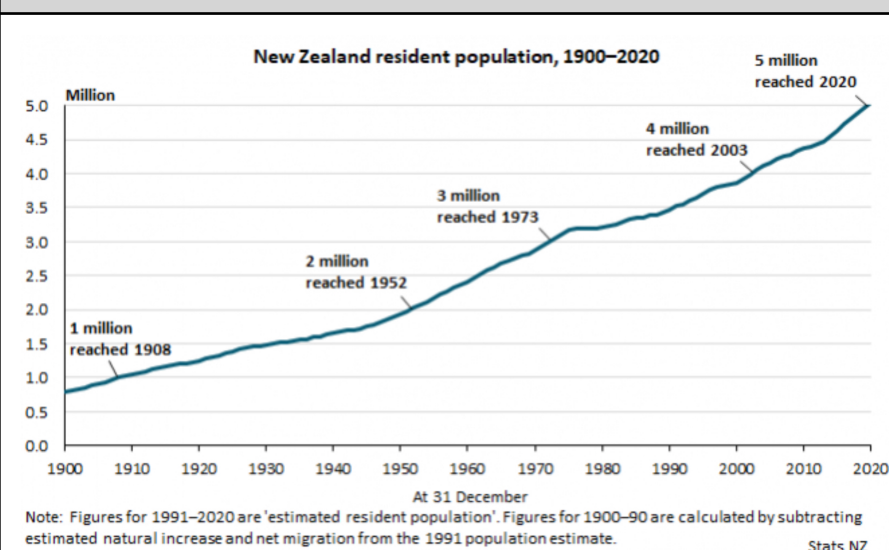
Activité 1: Le modèle linéaire pour prédire l'évolution d'une population et de ses ressources

Introduction : Comprendre comment une population et ses ressources évoluent est important pour analyser la situation d'un pays. Les modèles linéaires permettent d'étudier ces évolutions de manière simple à partir de données. Dans cette activité, nous observerons l'évolution de la population en Nouvelle-Zélande et celle de la production de riz en Indonésie afin de voir comment un modèle linéaire peut décrire ces changements.

Problématique : Comment utiliser un modèle linéaire pour modéliser et prédire l'évolution d'une population et de ses ressources ?

Objectifs : À partir de données démographiques, calculer des variations absolues par unité de temps et des variations relatives par unité de temps d'une population afin de choisir entre un modèle linéaire et un modèle exponentiel. À partir de documents fournis, proposer un modèle de croissance de ressources alimentaires (par exemple, la production mondiale de blé ou de riz) et la comparer à une croissance exponentielle. À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, ajuster un nuage de points par une courbe de tendance et utiliser ce modèle pour effectuer des prévisions. Comparer les valeurs fournies par un modèle à des données réelles afin de tester sa validité.

Document 1: Evolution de la population de la Nouvelle-Zélande



Document 2: Le modèle linéaire

Dans le langage courant enseigné au collège et au lycée, un modèle linéaire traduit une relation simple entre deux grandeurs, dont la représentation graphique est une droite. On distingue notamment la fonction linéaire, définie par $y = f(x) = ax$ et la fonction affine, définie par $y = f(x) = ax + b$. Pour rappel, a représente le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.

Document 3: Un outil mathématique pour décrire une croissance linéaire : la suite arithmétique

Une suite u est une liste ordonnée de nombres, dont chaque terme $u(n)$ est associé à un indice n appartenant à \mathbb{N} , l'ensemble des entiers naturels. Lorsque les points de coordonnées $(n, u(n))$ sont alignés, la suite peut être considérée comme arithmétique : cela signifie que chaque terme se déduit du précédent par l'ajout d'une même valeur constante.

Dans le cas d'une population dont la variation annuelle est presque constante, il devient pertinent d'utiliser une suite arithmétique pour modéliser son évolution. La valeur initiale $u(0)$ représente l'effectif de la population au début de l'étude, tandis que la raison r correspond à l'estimation de la variation absolue de population d'une année à l'autre.

On peut ainsi représenter la progression de la manière suivante :

$$u(0) \xrightarrow{+r} u(1) \xrightarrow{+r} u(2) \xrightarrow{+r} \dots \xrightarrow{+r} u(n)$$

Au terme de n années, la population peut être prédite grâce à la formule générale d'une suite arithmétique : $u(n) = u(0) + n \times r$

Cette expression permet d'estimer l'effectif pour n'importe quelle année n .

1) **Expliquer** pourquoi l'évolution de la population de la Nouvelle-Zélande depuis 1960 se rapproche de celle d'une suite arithmétique.

2) **Compléter** le tableau suivant. **Commenter**.

Années	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Population (millions)	4,442	4,517	4,609	4,714	4,814	4,901	4,970	5,072
Variation absolue $V_2 - V_1$								

3) **Vérifier** l'affirmation suivante : en moyenne, la population a augmenté de 90 000 habitants par an entre 2013 et 2020.

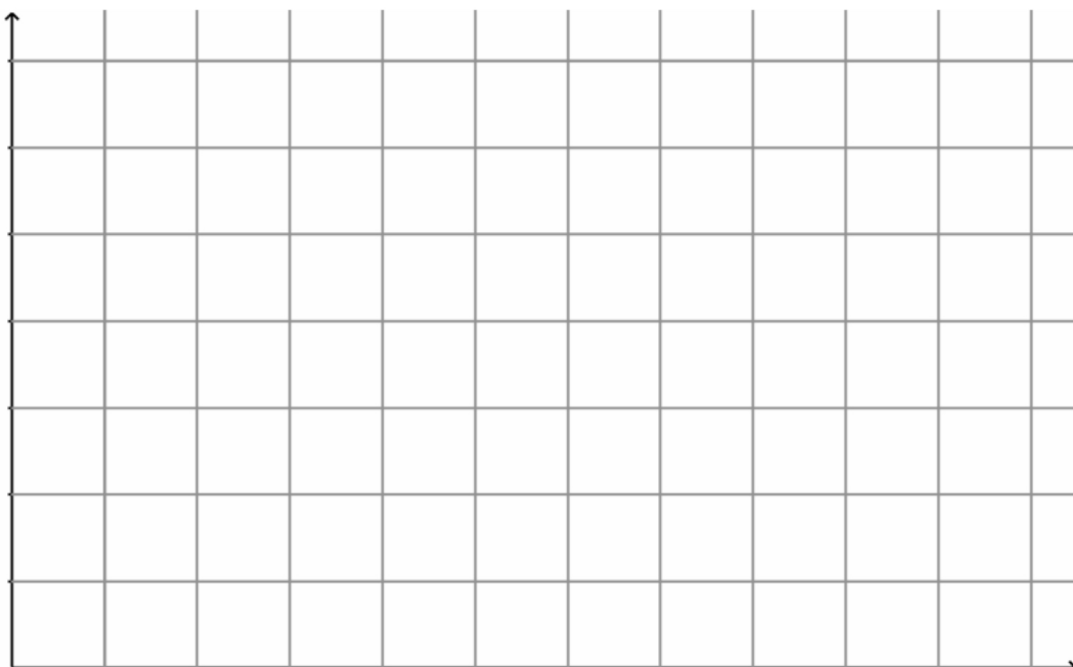
4) La croissance de la population à partir de 2013 est modélisée par une suite arithmétique de terme général $u(n)$ et de raison $r = 0.09$. $u(n)$ représente l'effectif de la population en millions d'habitants à l'année 2013+ n sous l'hypothèse d'une croissance linéaire.

a) **Justifier** que $u(0) = 4,442$.

b) **Calculer** $u(3)$ et $u(4)$. Que **représentent** les résultats obtenus ?

c) On suppose que la population de la Nouvelle-Zélande augmentera selon le même modèle dans les prochaines années. **Calculer** une prédiction de l'effectif de la population en 2050.

5) **Tracer** le nuage de points associé à l'évolution de la population entre 2013 et 2020.



6) A la calculatrice, **utiliser** les données de la question 2 pour ajuster par une droite le nuage de points qui représente la population chinoise. **Tracer** la droite sur le graphique.

Document 4: L'évolution des ressources alimentaires

Le tableau ci-dessous présente l'évolution de la production de riz en Indonésie, qui se classe parmi les trois plus grands producteurs mondiaux de cette céréale. Il met en évidence la progression de la production sur trois décennies.

Année	Production de riz (tonnes)
1970	19 331 000
1975	22 339 200
1980	29 651 900
1985	39 032 940
1990	45 178 750
1995	49 697 444
2000	51 899 000

7) Avec cet ajustement, **calculer** une nouvelle prédiction du nombre d'habitants en 2050. **Discuter** de cette évolution à plus long terme.

8) Si la tendance linéaire se poursuivait, **estimer** la production en 2024.

9) La production en 2024 réelle est de 30,62 millions de tonnes, **conclure** sur la fiabilité de cette prédiction.

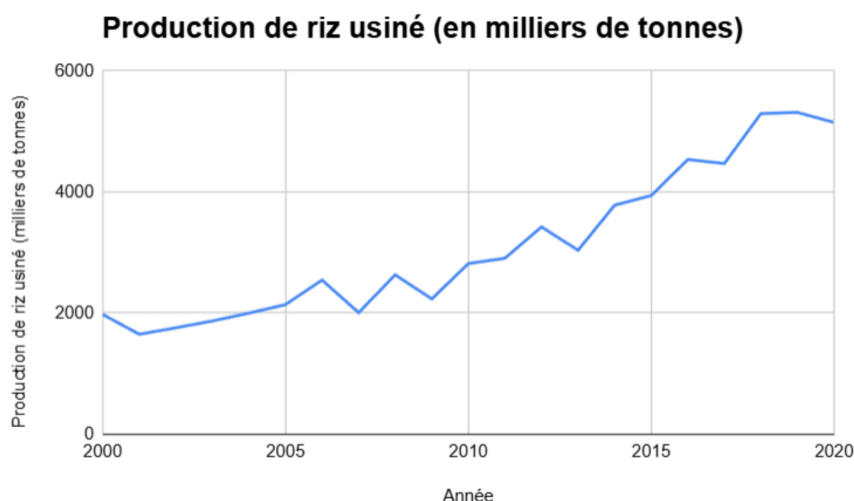
Activité 2: Le modèle exponentiel pour prédire l'évolution d'une population et de ses ressources

Introduction : L'étude de l'évolution d'une population et de ses ressources est essentielle pour comprendre les enjeux sociaux, économiques et sanitaires d'une région. À Lagos, au Nigeria, l'une des villes les plus peuplées du monde, la croissance rapide de la population exerce une pression croissante sur les ressources alimentaires, notamment la production de riz, qui reste une composante majeure de l'alimentation locale.

Problématique : Comment peut-on utiliser la modélisation mathématique pour prévoir l'évolution de la population et des ressources alimentaires ?

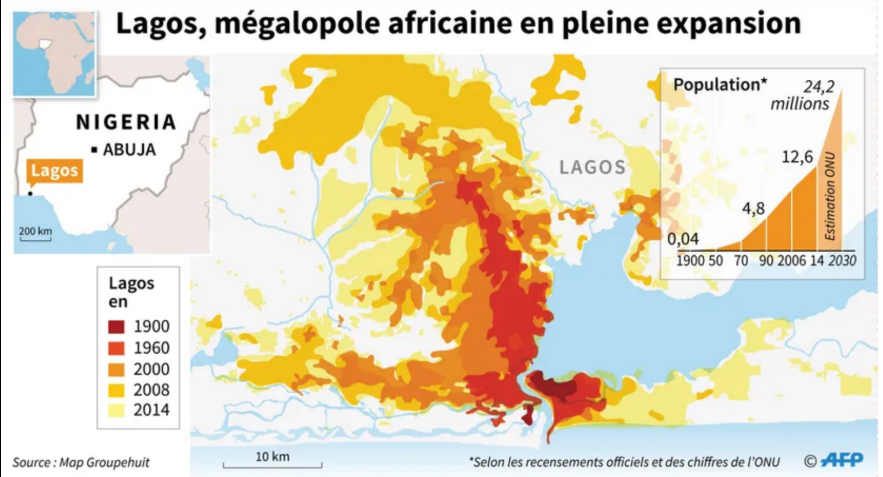
Objectifs : À partir de données démographiques, calculer des variations absolues par unité de temps et des variations relatives par unité de temps d'une population afin de choisir entre un modèle linéaire et un modèle exponentiel. À partir de documents fournis, proposer un modèle de croissance de ressources alimentaires (par exemple, la production mondiale de blé ou de riz) et la comparer à une croissance exponentielle. À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, ajuster un nuage de points par une courbe de tendance et utiliser ce modèle pour effectuer des prévisions. Comparer les valeurs fournies par un modèle à des données réelles afin de tester sa validité. À l'aide d'un tableur, d'une calculatrice ou d'une représentation graphique, calculer le temps de doublement d'une population sous l'hypothèse de croissance exponentielle.

Document 1: Production de riz usiné au Nigéria entre 2000 et 2020



Document 2 : Le Lagos, principale ville du Nigéria

Lagos, la plus grande ville du Nigeria et l'une des métropoles les plus peuplées d'Afrique, illustre parfaitement les dynamiques d'urbanisation rapide et d'essor démographique. Depuis le début du XX^e siècle, sa population est passée de quelques centaines de milliers d'habitants à plusieurs millions, reflétant à la fois l'attractivité économique de la ville et les migrations internes massives.



Document 3 : La suite géométrique

Pour une population dont le taux de variation est presque constant d'une année sur l'autre, on dit que la croissance (ou décroissance) de son effectif est exponentielle.

On modélise son évolution par une suite géométrique pour élaborer des prédictions.

La valeur initiale $u(0)$ de la suite est l'effectif de la population au début de l'étude.

La raison q de la suite correspond au coefficient multiplicateur associé au taux de variation de la population supposé constant. $u(0) \xrightarrow{\times q} u(1) \xrightarrow{\times q} u(2) \dots u(n)$

Une prédiction du nombre d'habitants pour une année n est donnée par $u(n) = u(0) \times q^n$

La raison q représente le facteur par lequel la valeur augmente à chaque pas. C'est $\frac{U_{n+1}}{U_n}$. On peut

la trouver aussi en repérant deux points précis sur la courbe : (x_1, y_1) et (x_2, y_2) et en calculant la

raison avec la formule de la suite géométrique $q = \frac{y_2 \cdot \frac{1}{x_2 - x_1}}{y_1}$.

1) **Expliquer** pourquoi le modèle linéaire est adapté pour représenter l'évolution de la production de riz au Nigeria.

2) **Justifier** que l'évolution de la population de Lagos peut être représentée par une suite géométrique.

3) La croissance de la population de Lagos à partir de 1900 est modélisée par une suite géométrique de terme général $u(n)$. Ici, $u(n)$ donne une prédiction de l'effectif de la population de Lagos en millions d'habitants à l'année $1900 + n$ sous l'hypothèse de progression géométrique des effectifs.

a) **Justifier** que l'on peut choisir une raison égale à 1,0518.

b) **Donner** l'expression de $u(n)$ en fonction de n .

c) **Calculer** $u(90)$ et **conclure** sur la validité du modèle.

d) **Comparer** la prévision donnée par le graphique pour l'année 2030 et la prévision obtenue avec le modèle exponentiel.

4) **Comparer** la croissance de la population de Lagos et celles des ressources. **Conclure**.

Document 4 : Temps de doublement d'une population

Le temps de doublement d'une population est le temps nécessaire pour que la population initiale double.

Si on note u_0 , la population initiale, $u(n)$, la population après n périodes et q , la raison de croissance annuelle alors le temps de doublement n_d est le plus petit entier n tel que $u(n) \geq 2u_0$.

Alors le temps de doublement vérifie :

$$u_0 \times q^{n_d} \geq 2u_0 \implies q^{n_d} \geq 2$$

On peut utiliser le logarithme pour trouver n_d : $n_d \geq \frac{\ln 2}{\ln q}$

Enfin, on prend le plus petit entier supérieur à ce résultat.

Par méthode graphique, on repère la valeur $2u_0$ sur l'axe des ordonnées puis on lit sur l'axe des abscisses le plus petit n pour lequel la courbe atteint cette valeur : c'est le temps de doublement.

5) **Déterminer** le temps de doublement de la population depuis 2014.

Activité 3 : Le malthusianisme

Introduction : Depuis la fin du XVIII^e siècle, les mathématiques sont utilisées pour étudier l'évolution des populations humaines. Parmi les premiers modèles proposés, celui de Thomas Robert Malthus occupe une place importante. Il repose sur l'idée que la croissance d'une population peut être décrite à l'aide d'outils mathématiques simples, permettant d'analyser son évolution au fil du temps et de la comparer aux ressources disponibles. Ce modèle a suscité de nombreux débats et a conduit au développement d'autres approches.

Problématique : Comment un modèle mathématique peut-il permettre d'étudier l'évolution d'une population, et dans quelles conditions ce type de modèle est-il pertinent ?

Objectifs : Selon le modèle de Malthus, prédire l'effectif d'une population au bout de n années à partir de son effectif initial, de son taux de natalité et de son taux de mortalité.

Document 1 : Extrait d'un ouvrage de Malthus

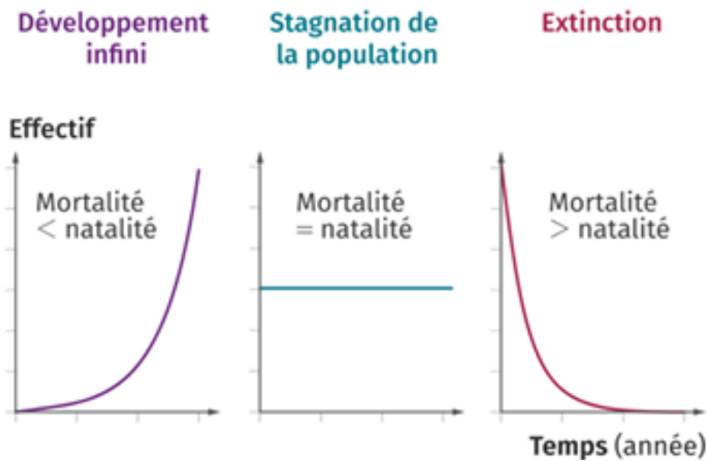
« Comptons pour 11 millions la population de la Grande-Bretagne, et supposons que le produit actuel de son sol suffise pour la maintenir. Au bout de vingt-cinq ans, la population sera de 22 millions ; et la nourriture ayant également doublé, elle suffira encore à l'entretenir. Après une seconde période de vingt-cinq ans, la population sera portée à 44 millions, mais les moyens de subsistance ne pourront plus nourrir que 33 millions d'habitants. Dans la période suivante, la population — arrivée à 88 millions — ne trouvera des moyens de subsistance que pour la moitié de ce nombre. [...] La race humaine croîtra selon la progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, etc., tandis que les moyens de subsistance croîtront selon la progression 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. »

Thomas R. Malthus, Essai sur le principe de population, 1798.

Document 2 : Évolution de la population selon Malthus

Le modèle démographique de Malthus est un modèle exponentiel d'évolution de l'effectif de la population. Il peut être traduit par une suite géométrique de raison $q = 1 + t$, où t est le taux d'accroissement de la population. Le taux d'accroissement de la population est calculé en faisant la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité. Ce taux peut être négatif, nul ou positif.

Document 3 : Le modèle exponentiel de Malthus



« Le modèle exponentiel [de Malthus] est utilisé afin de quantifier l'accroissement démographique d'une population donnée dans un environnement idéal, c'est-à-dire où les ressources sont illimitées. [...]

Il est vrai qu'une petite population peut croître rapidement durant un certain temps si elle se situe dans un milieu favorable. Par contre, en réalité, les ressources de l'environnement des individus concernés finiront forcément par s'épuiser et il y aura conséquemment un accroissement de la mortalité. Ce modèle n'est donc représentatif que de l'accroissement démographique théorique, et non de la croissance réelle. »

D'après Les modèles d'accroissement démographique de Malthus et Verhulst.

Document 4 : Vue malthusienne de Londres surpeuplée

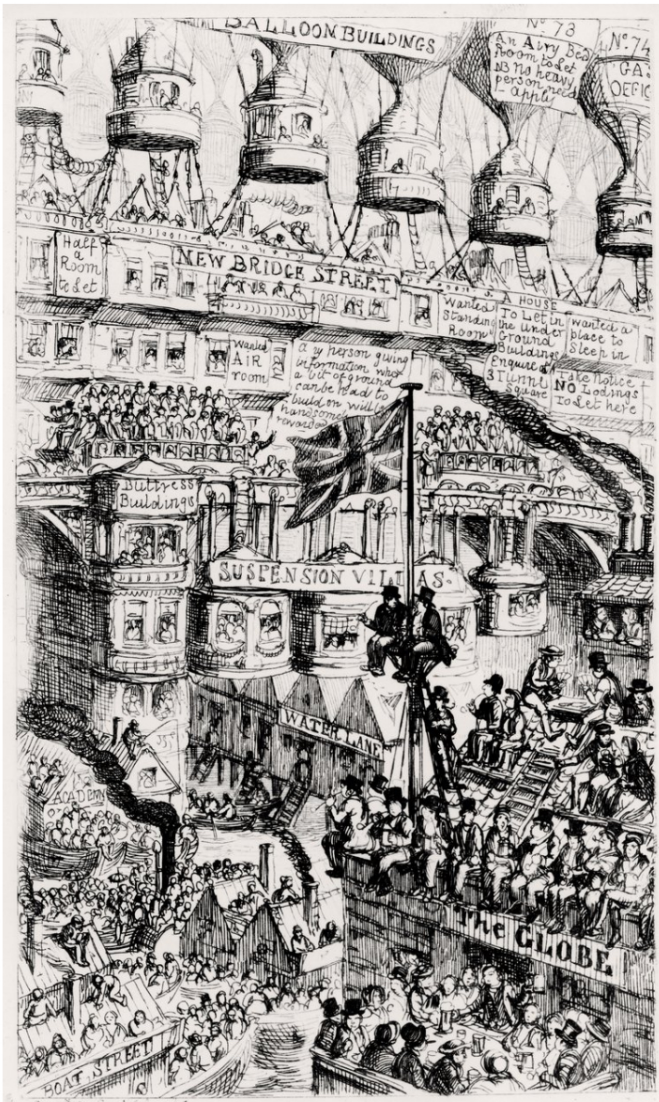


Illustration d'après les travaux de Malthus, George Cruikshank, gravure, 1851.

Document 5 : La controverse

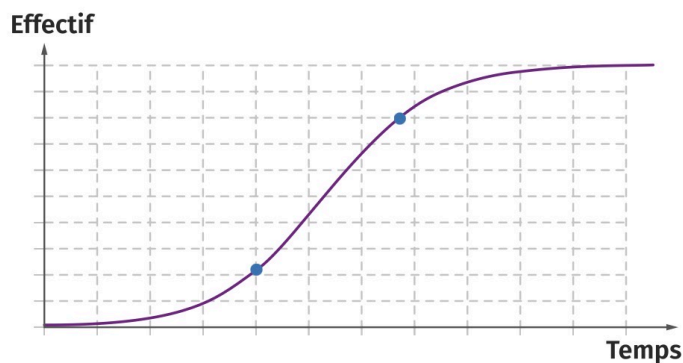
« Les travaux de Malthus ont déclenché dès 1798 une très vive controverse. Godwin, en particulier, estimait devoir réfuter le « principe fondamental » de Malthus. [...] Comment des peuples ont-ils pu disparaître avec une telle puissance de peuplement ? En cas de dépopulation, la contrainte des subsistances devenant moins forte, la population devrait augmenter à nouveau. La controverse s'est intéressée aux raisons de la rapide croissance démographique des États-Unis. Si la population y a pu doubler en 25 ans comme le montre Malthus, est-ce une simple conséquence de la puissance de peuplement sur un territoire où les ressources sont abondantes, ou bien le résultat d'une forte immigration en provenance d'Europe, alors que le désir d'émigrer était très fort ? [...]

Dans [un] texte paru en 1830 [...] Malthus reste fidèle à sa vision du principe de population. Comme déjà en 1798, il dénonce les effets pervers des lois d'assistance aux pauvres, qui reviennent à reconnaître « un droit de plein soutien à tout ce qui devrait naître ». »

D'après L'Essai de Malthus : le principe et la controverse, ined.fr, août 2017.

Document 6 : Le modèle logistique de Verhulst

Verhulst créa un second modèle décrivant l'accroissement démographique d'une population donnée. Ce modèle logistique intègre dans son équation la notion de capacité limite du milieu. Cette dernière est « le nombre maximal d'individus d'une population qui peuvent vivre dans un milieu au cours d'une période donnée, sans dégradation de l'habitat ». Elle est notée K et sa valeur change selon l'abondance ou la rareté des ressources présentes dans le milieu en question. En effet, de nombreux facteurs sont limitants dans un habitat, tels que les sites appropriés de nidification, l'eau, la richesse du sol, la quantité de prédateurs, les abris adéquats et la quantité de nourriture.



Crédits : lelivrescolaire.fr
Courbe de Verhulst : fonction logistique.

- 1) **Identifier** le type d'évolution de la population selon Malthus. **Faire** de même avec l'évolution des moyens de subsistance.
- 2) **Donner** la vision de l'évolution future d'une population selon le modèle de Malthus.
- 3) **Donner** les conclusions qui en découlent et **indiquer** en quoi elles peuvent être discutables.

- 4) **Identifier** les limites et les erreurs d'un modèle de croissance exponentielle appliquées à une population réelle.
- 5) **Identifier** les modifications introduites par le modèle logistique de Verhulst par rapport au modèle exponentiel de Malthus.
- 6) À partir d'un modèle de croissance exponentielle, **calculer** l'effectif de la population en 1823 puis en 1848.
- 7) **Extrapoler** ce modèle pour estimer la population en 2023.
- 8) **Indiquer** si un modèle exponentiel est pertinent pour modéliser l'évolution d'une population sur un temps court et sur un temps long.

Bilan des activités

I) Le modèle linéaire

1) Présentation

Dans le langage mathématique courant, le modèle linéaire correspond à une relation simple entre deux grandeurs, dont la représentation graphique est une droite.

On rencontre notamment la fonction linéaire $y = f(x) = a x$ et la fonction affine $y = f(x) = a x + b$. Le nombre a est appelé coefficient directeur et le nombre b est l'ordonnée à l'origine.

2) Modélisation à l'aide des suites

Lorsque l'on étudie une grandeur à des instants discrets (par exemple, année après année), le modèle linéaire est représenté par une suite arithmétique.

Une suite arithmétique est définie par le fait que la variation absolue entre deux termes consécutifs est constante $u(n+1) = u(n) + r$ et $u(n) = u(0) + n \times r$ avec $u(0)$, le terme initial et r , la raison de la suite, c'est-à-dire l'augmentation (ou la diminution) annuelle.

Appliqué à la démographie ou aux ressources, le modèle linéaire signifie que chaque année, la population ou la ressource augmente (ou diminue) de la même quantité.

II) Le modèle exponentiel

1) Présentation

Dans le modèle exponentiel, la croissance n'est plus additive mais multiplicative.

La fonction de référence est $y = f(x) = \exp(x)$.

2) Modélisation à l'aide des suites

Pour des valeurs discrètes, le modèle exponentiel correspond à une suite géométrique.

Une suite géométrique est définie par le fait que le rapport entre deux termes consécutifs est constant $u(n + 1) = q \times u(n)$ et $u(n) = u(0) \times q^n$ avec $u(0)$, l'effectif initial et q , la raison.

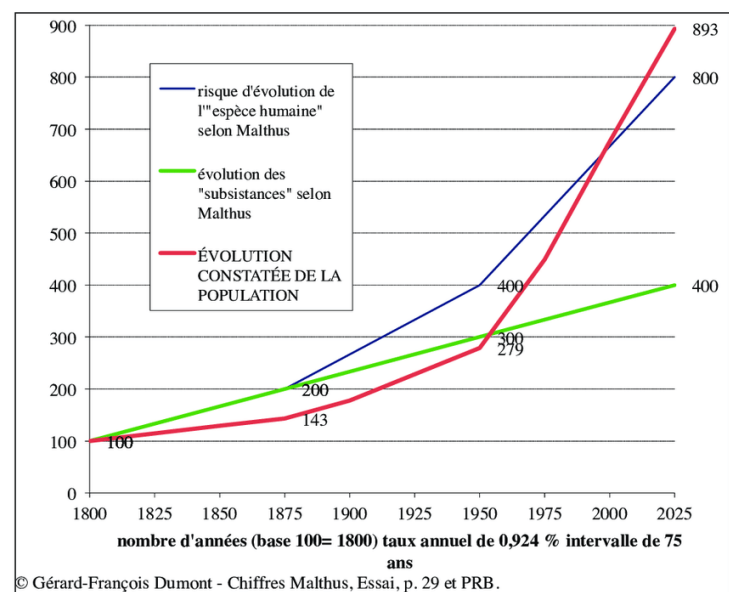
III) Le modèle de Malthus

Le modèle de Malthus, proposé à la fin du XVIII^e siècle par l'économiste britannique Thomas Robert Malthus, est un exemple de modèle exponentiel appliqué à la population humaine.

Il repose sur les hypothèses suivantes :

- si le taux de natalité est supérieur au taux de mortalité, la population augmente de façon exponentielle ;
- si le taux de mortalité est supérieur au taux de natalité, la population diminue ;
- si les deux taux sont égaux, la population reste stable.

Ce modèle peut être pertinent pour décrire une évolution sur un temps court, lorsque les ressources sont suffisantes. En revanche, il devient irréaliste sur un temps long, car une croissance exponentielle suppose des ressources infinies. Or, lorsque les ressources se raréfient, la mortalité augmente et la croissance ralentit.



IV) Vers des modèles plus réalistes

Afin de mieux tenir compte des contraintes réelles, d'autres modèles ont été proposés, notamment le modèle logistique (Verhulst).

Ces modèles intègrent des facteurs tels que la limitation des ressources, les migrations, les prédateurs ou les maladies et les contraintes économiques et sociales.

Ils prévoient généralement une croissance qui ralentit progressivement et tend vers une valeur limite. Selon ces modèles, la population mondiale pourrait atteindre environ 10 milliards d'habitants autour de 2050.