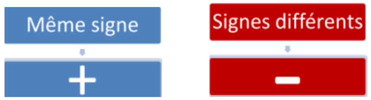
Ch02. Calculer avec des nombres relatifs et rationnels (3^{e})

(AFC1)

1. Règles des signes 1.

■ Pour **supprimer les parenthèses** quand **deux signes se suivent** :



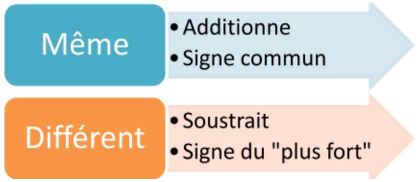
Exemples.

- $(-8{,}3) - (-5) = -8{,}3 + 5$
- $(+12) + (-7) = 12 - 7$

2. Additionner ou soustraire deux relatifs

■ *Supprimer les parenthèses* à l'aide de la règle des signes 1 ;

■ puis calculer selon deux cas :



Exemples.

- $(-7) + (-4) = -7 - 4 = -(7 + 4) = -11$
- $(+5) + (-6) = 5 - 6 = -(6 - 5) = -1$
- $(-8{,}9) - (-2{,}5) = -8{,}9 + 2{,}5 = -(8{,}9 - 2{,}5) = -6{,}4$

3. Effectuer une suite d'additions et de soustractions.

■ **Supprimer** les parenthèses et les nombres opposés puis **regrouper** les nombres positifs entre eux et les nombres négatifs entre eux.

Exemple. • $M = (+3) - (+6) + (+2) - (-5) + (-4) - (-1)$

$M = 3 - 6 + 2 + 5 - 4 + 1 = 3 + 2 + 5 + 1 - 6 - 4 = 11 - 10$ soit $\mathbf{M = 1}$

4. Multiplier ou Diviser deux relatifs

■ Signe du résultat : Donné par la règle des signes.

■ Distance à zéro du résultat : Produit ou Quotient des deux distances à zéro.

Exemples.

- $(-4) \times (-5) = 20$;
- $(-4) \div (-5) = 0{,}8$;
- $(-9) \times 6 = -54$;
- $(-9) \div 6 = -1{,}5$

5. Règles des signes 2. (Généralisation)

■ Nombre **Pair** de facteurs négatifs ⇒ **Positif**.

■ Nombre **impair** de facteurs négatifs ⇒ **négatif**.

Exemples.

- $E = -2 \times 5 \times (-6) \times (-3)$, il y a **3** facteurs négatifs (**impair**)

→ le produit est **Négatif**. $E = -(2 \times 5 \times 6 \times 3) = -180$

- $F = (-2) \times (-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4) \times (-2)$, il y a **6** facteurs négatifs (**Pair**)

→ le produit est **Positif**. $F = +(2 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 2) = 96$

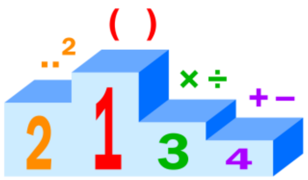
6. Fractions égales

■ On **ne change pas** une fraction si on **multiplie** (ou **divise**) le numérateur et le dénominateur par un même nombre (non nul).

Cette propriété est utile pour **simplifier** ou pour mettre deux fractions au **même dénominateur**.

- $A = \frac{40}{72} = \frac{8 \times 5}{8 \times 9} = \frac{5}{9}$ (on a simplifié par **8**) ;
- $B = \frac{77}{33} = \frac{7 \times 11}{3 \times 11} = \frac{7}{3}$ (on a simplifié par **11**)

10. Règle de priorités des opérations



Exemples.

- $J = \frac{7}{4} \times \boxed{\left(\frac{21}{8} - \frac{3}{8}\right)} = \frac{7}{4} \times \frac{18}{8} = \ldots$
- $K = \frac{2}{7} - \boxed{\frac{8}{9} \times \frac{5}{7}} = \frac{2}{7} - \frac{8 \times 5}{9 \times 7} = \frac{2}{7} - \frac{40}{63} = \ldots$

3 et **4** : **dans le sens de lecture du calcul** (de gauche à droite)

- $L = \frac{7}{6} - \boxed{\frac{5}{8} \div \frac{4}{3}} + \frac{10}{11} = \frac{7}{6} - \boxed{\frac{5}{8} \times \frac{3}{4}} + \frac{10}{11} = \frac{7}{6} - \frac{5 \times 3}{8 \times 4} + \frac{10}{11} = \ldots$
- $N = 12 \boxed{+ 15 \div (-5)} = 12 - 3 = \mathbf{9}$

9. Diviser par une fraction

■ **Diviser par une fraction** $\frac{c}{d}$, c'est multiplier par son **inverse** $\frac{d}{c}$.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemples.

- $H = -\frac{2}{5} \div \frac{-3}{7} = \frac{2}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{2 \times 7}{5 \times 3} = \mathbf{\frac{14}{15}}$ (fraction irréductible)
- $I = \frac{\frac{12}{7}}{\frac{9}{5}} = \frac{12}{7} \div \frac{9}{5} = \frac{12}{7} \times \frac{5}{9} = \frac{12 \times 5}{7 \times 9} = \frac{4 \times 3 \times 5}{7 \times 3 \times 3} = \mathbf{\frac{20}{21}}$

8. Multiplier deux fractions

■ **Produit** des **numérateurs** sur **produit** des **dénominateurs** :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

■ **Prendre une fraction** d'un nombre, c'est multiplier cette fraction par ce nombre : $a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}$

Exemples.

- $F = -\frac{7}{12} \times \frac{5}{4} = -\frac{7 \times 5}{12 \times 4} = -\frac{35}{48}$;
- $G = \frac{3}{32} \times \frac{16}{5} = \frac{3 \times 16}{32 \times 5} = \frac{3 \times 16}{16 \times 2 \times 5} = \frac{3}{10}$
- Les trois quarts de 12 L $= \frac{3}{4} \times 12$ L $= 3 \times \frac{12}{4}$ L $= 3 \times 3$ L $= 9$ L

⚠ **Dénominateur commun INUTILE**

7. Additionner ou Soustraire deux fractions

■ **Dénominateur commun OBLIGATOIRE** obtenu en utilisant la règle des fractions égales.

Exemples. • $C = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5 + 2}{3} = \frac{7}{3}$;

$D = \frac{2}{25} + \frac{11}{25} - \frac{23}{25} = -\frac{10}{25} = -\frac{2}{5}$

■ *Cas général : on cherche un **multiple commun** aux deux dénominateurs*

- $E = \frac{8}{15} - \frac{7}{12} = \frac{8 \times 4}{15 \times 4} - \frac{7 \times 5}{12 \times 5} = \frac{32}{60} - \frac{35}{60}$

$E = -\frac{3}{60} = -\frac{1 \times 3}{20 \times 3} = -\frac{1}{20}$

Exercice type 1. Utiliser le calcul numérique (Objectif DNB)

Énoncé.

Mike monte dans l'ascenseur d'un grand hôtel de New York. Il oublie d'appuyer sur le bouton de l'étage désiré et se laisse porter selon les appels des clients de l'hôtel. Il monte d'abord de 28 étages, puis descend de 5 étages, descend à nouveau de 24 étages, remonte de 3 étages, redescend de 14 étages et finit par remonter de 1 étage.

De combien d'étages Mike est-il monté ou descendu ?

Solution.

A = 28 – 5 – 24 + 3 – 14 + 1

A = 28 + 3 + 1 – 5 – 24 – 14

A = 32 – 43 = **– 11**

Mike est **descendu de 11 étages**.

Exercice type 2. Utiliser le calcul numérique (Objectif DNB)

Énoncé.

En électricité, pour calculer des valeurs de résistances, on utilise la formule : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

a. Calculer la valeur exacte de R pour $R_1 = 9$ ohms et $R_2 = 12$ ohms.

b. Calculer la valeur exacte de R_1 pour R = 100 ohms et $R_2 = 150$ ohms.

Solution.

a. ■ $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{1 \times 4}{9 \times 4} + \frac{1 \times 3}{12 \times 3} = \frac{4}{36} + \frac{3}{36} = \frac{7}{36}$

Comme $\frac{1}{R} = \frac{7}{36}$, $\mathbf{R = \frac{36}{7}\ \Omega}$

b. ■ $\frac{1}{100} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{150} \Rightarrow \frac{3}{300} = \frac{1}{R_1} + \frac{2}{300}$; $\frac{1}{R_1} = \frac{3}{300} - \frac{2}{300} = \frac{1}{300}$

Comme $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{300}$, $\mathbf{R_1 = 300\ \Omega}$

Exercice type 3. Utiliser le calcul numérique (Objectif DNB)

Énoncé.

Léo choisit un nombre, le multiplie par 6 puis ajoute 5.

Julie choisit le même nombre, lui ajoute 8, multiplie le résultat par le nombre de départ, puis soustrait le carré du nombre de départ.

1. Léo et Julie choisissent au départ le nombre – 3.

a. Quel résultat obtient Léo ?   b. Quel résultat obtient Julie ?

2. Quel nombre a choisi Léo pour obtenir 47 ?

Solution.

1.a. **<u>Léo :</u>**

$-3 \longrightarrow -3 \times 6 = -18 \longrightarrow -18 + 5 = -13$

$-3 \times 6 + 5 = -18 + 5 = -13$.

Avec – 3 comme nombre de départ, Léo obtient **– 13**.

b. **<u>Julie :</u>**

$(-3 + 8) \times (-3) - (-3)^2 = 5 \times (-3) - (-3)^2 = -15 - 9 = -24$.

Avec – 3 comme nombre de départ, Julie obtient **– 24**.

2. Pour retrouver le nombre de départ, on effectue le programme **« à l'envers »**

<u>Léo :</u>

Choisir un nombre ⟶ Multiplier ce nombre par 6 ⟶ Ajouter 5 au résultat obtenu *(Aller)*

Nombre de départ ⟵ Diviser le résultat par 6 ⟵ Soustraire 5 au résultat *(Retour)*

7 ⟵ 42 : 6 ⟵ 47 – 5 = 42

(40 + 2) : 6 = 42 : 6 = 7.

Avec le programme A, il faut choisir **7** pour obtenir 40.

Exercice type 4. Utiliser le calcul numérique (Objectif DNB)

Énoncé.

Les continents occupent $\frac{5}{17}$ de la superficie totale de la Terre.

1. L'océan Pacifique recouvre la moitié de la superficie restante.

Quelle fraction de la superficie totale de la Terre occupe-t-il ?

2. Sachant que la superficie de l'océan Pacifique est de 180 000 000 km^2, déterminer la superficie de la Terre.

Solution.

1. $1 - \frac{5}{17} = \frac{17}{17} - \frac{5}{17} = \frac{12}{17}$. La superficie restante occupe $\frac{12}{17}$ de la superficie totale de la Terre.

$\frac{12}{17} \div 2 = \frac{12}{17} \times \frac{1}{2} = \frac{2 \times 6}{17 \times 2} = \frac{6}{17}$.

Le Pacifique occupe les $\mathbf{\frac{6}{17}}$ **de la surface du globe** (un peu plus d'un tiers).

2. La superficie S, en km², de la Terre vérifie :

$$\frac{6}{17} \times S = 180\,000\,000.$$

Ainsi, $S = 180\,000\,000 \div \frac{6}{17} = 180\,000\,000 \times \frac{17}{6}$,

$S = \frac{180\,000\,000}{6} \times 17 = 30\,000\,000 \times 17 = 510\,000\,000$.

La Terre a une superficie d'environ **510 000 000 km²**.