

Séquence 2 : Arithmétique – Nombres premiers

Objectifs :

À la fin de cette Séquence 02, je dois connaître :
Le vocabulaire et les critères de divisibilité.
La définition d'un nombre premier et tous les nombres premiers inférieurs à 30.
Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers.
La définition d'une fraction irréductible.

J E S A I S

- Calculer la puissance d'un nombre.
- Ce qu'est un critère de divisibilité

L'arithmétique est le domaine des mathématiques qui **étudie les nombres entiers**, c'est-à-dire ceux « sans virgule ». C'est un domaine des mathématiques qui a notamment de nombreuses applications en cryptographie, en particulier grâce à l'étude de certains nombres particuliers appelés « nombres premiers ».

Remarque importante : Dans tout ce cours, a et b seront des nombres entiers positifs, avec **b** ≠ 0

A) Divisibilité

I. Division euclidienne

Définition 1 : Division euclidienne

Effectuer la division euclidienne de **a** par **b**, c'est trouver deux autres nombres entiers positifs **q** et **r** tels que :

.....
.....

Exemple : Poser la division euclidienne de 56 (appelé le) par 17
(appelé le) par exemple c'est trouver le quotient et le reste tel que :

$$\begin{array}{r|l} 56 & 17 \\ 5 & 3 \end{array}$$

Dividende = x + avec reste <

Dans notre cas : $56 = \dots \times \dots + \dots$. Le quotient est donc et le reste

Exemple(s) : Pose et effectue les divisions euclidiennes suivantes :

$$361 \div 7 :$$

$$35 \div 5 :$$

- **Dividende** :
- **Diviseur** :
- **Quotient** :
- **Reste** :

- **Dividende** :
- **Diviseur** :
- **Quotient** : *un*
- **Reste** :

On dit que 35 est **divisible** par 5.

Remarque : Le quotient et le reste sont donnés par certaines calculatrices à l'aide de la touche

f

II. Critères de divisibilité

Définition 2 : Divisibilité

Si le reste de la division euclidienne de a par b **est nul** ($= 0$), on dit au choix que :

- b est a
- a est b
- a est b

Cela revient à dire que b est « dans la table de » a

Exemple(s) :

$5 \times 3 = 15$ donc on peut dire :

-
-
-
-
-
-



On ne peut PAS dire « 5 est divisible par 15 », ou « 15 est un diviseur de 3 », ou encore « 5 est un multiple de 15 ».

Propriété 1 : Critères de divisibilité

- Si un entier est pair (se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8), alors il est divisible par 2;
- Si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 3, alors ce nombre est divisible par 3 ;
- Si le nombre formé par les deux derniers chiffres d'un nombre est divisible par 4, alors il est divisible par 4
- Si un nombre se termine par 0 ou 5, alors il est divisible par 5 ;
- Si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 9, alors ce nombre est divisible par 9 ;
- Si un nombre se termine par 0, alors il est divisible par 10

Exemple(s) :

- + Nombres divisibles par 2 :
- + Nombres divisibles par 3 :
- + Nombres divisibles par 4 :
- + Nombres divisibles par 5 :
- + Nombres divisibles par 9 :
- + Nombres divisibles par 10 :

B) Nombres premiers

1. Introduction : le crible d'Ératosthène

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Dans la grille ci-contre :

1. Commence par barrer le 1
2. Entoure 2 puis barre **tous les multiples** de 2
3. Entoure le plus petit nombre non barré (c'est-à-dire 3) puis barre tous ses multiples
4. Répète l'étape 3 jusqu'à ce que tous les nombres de la grille soient barrés ou entourés.

Que peut-on dire des nombres entourés ?

2. Définition et exemples à connaître

Définition 3 : Nombre premier

.....

Exemple(s) :

- 3 est un nombre car il a exactement 2 diviseurs et
- 6 n'est pas un nombre premier car il a
- Le nombre 1 un nombre premier, alors que 2 est le seul nombre premier

Voici la liste des premiers nombres premiers inférieurs à 40.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

3. Décomposition en facteurs premiers

Méthode 1 : Décomposition en facteurs premiers

Pour décomposer un nombre N en produit de facteurs premiers, on commence par chercher le plus petit nombre premier qui divise N, et on effectue cette division autant de fois que c'est possible. Puis on recommence avec le nombre premier suivant, et ainsi de suite jusqu'à obtenir 1

Exemple(s) :

<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>126</td><td> </td><td>2</td></tr> <tr><td>63</td><td> </td><td>3</td></tr> <tr><td>21</td><td> </td><td>3</td></tr> <tr><td>7</td><td> </td><td>7</td></tr> <tr><td>1</td><td> </td><td></td></tr> </table> <p style="text-align: center;">$126 = 2 \times 3^2 \times 7$</p>	126		2	63		3	21		3	7		7	1			<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>504</td><td> </td><td>.....</td></tr> <tr><td>.....</td><td> </td><td>.....</td></tr> <tr><td>.....</td><td> </td><td>.....</td></tr> <tr><td>.....</td><td> </td><td>.....</td></tr> <tr><td>.....</td><td> </td><td>.....</td></tr> <tr><td>.....</td><td> </td><td>.....</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">504 =</p>	504		<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>2 530</td><td> </td><td>.....</td></tr> <tr><td>.....</td><td> </td><td>.....</td></tr> <tr><td>.....</td><td> </td><td>.....</td></tr> <tr><td>.....</td><td> </td><td>.....</td></tr> <tr><td>.....</td><td> </td><td>.....</td></tr> <tr><td>.....</td><td> </td><td>.....</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">2 530 =</p>	2 530		<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>728</td><td> </td><td>.....</td></tr> <tr><td>.....</td><td> </td><td>.....</td></tr> <tr><td>.....</td><td> </td><td>.....</td></tr> <tr><td>.....</td><td> </td><td>.....</td></tr> <tr><td>.....</td><td> </td><td>.....</td></tr> <tr><td>.....</td><td> </td><td>.....</td></tr> </table> <p style="text-align: center;">728 =</p>	728	
126		2																																																																						
63		3																																																																						
21		3																																																																						
7		7																																																																						
1																																																																								
504																																																																							
.....																																																																							
.....																																																																							
.....																																																																							
.....																																																																							
.....																																																																							
2 530																																																																							
.....																																																																							
.....																																																																							
.....																																																																							
.....																																																																							
.....																																																																							
728																																																																							
.....																																																																							
.....																																																																							
.....																																																																							
.....																																																																							
.....																																																																							

C) Simplification de fractions

Définition 4 : Fraction irréductible

.....
.....

Remarque : On dit que a et b sont « premiers entre eux »

Exemples(s)

Les fractions suivantes sont irréductibles :

☞ $\frac{3}{7}$ car : diviseurs de 3 : { } et diviseurs de 7 : { }

☞ $\frac{15}{4}$ car : diviseurs de 15 : { } et diviseurs de 4 : { }

☞ $\frac{22}{9}$ car : diviseurs de 22 : { } et diviseurs de 9 : { }

Les fractions suivantes ne sont pas irréductibles :

☞ $\frac{6}{9}$ car 6 et 9 ont comme diviseur commun autre que 1.

☞ $\frac{13}{26}$ car 13 et 26 ont comme diviseur commun autre que 1.

☞ $\frac{63}{21}$ car 63 et 21 ont comme diviseurs communs autres que 1.

Propriété 3 : Rappel sur les fractions

On ne change pas une fraction en multipliant ou en divisant son numérateur par un même nombre (non nul) !

Méthode 2 : Simplifier une fraction

Pour simplifier une fraction, la méthode la plus simple est de décomposer son numérateur ET son dénominateur en facteurs premiers, puis de simplifier les facteurs identiques

Exemple :

Simplifions la fraction $\frac{204}{72}$. Pour cela on commence par décomposer 204 et 72 en facteurs premiers :

--	--

On peut ensuite simplifier la fraction :

$$\frac{204}{72} = \dots\dots\dots$$