

1. Proposition

- Énoncé mathématique qui est soit **vrai**, soit **faux**.
- Pour être **vraie**, la proposition doit être **toujours vraie**.
- Pour être **fausse**, la proposition doit être **fausse au moins une fois**.

3. Méthode ① . Prouver qu'une proposition est vraie

Différents outils :

- le **calcul littéral** : Exemple. • « $3x + 2x = 4x + x$ » → **vraie**

En effet, pour tout nombre x , $3x + 2x = 5x$ et $4x + 1x = 5x$.

- un **raisonnement (D-P-C)** utilisant les propriétés, théorèmes ou formules du cours.

Exemple. • « Si [EF] et [GH] sont deux diamètres d'un même cercle, alors le quadrilatère EGFH est un rectangle » → **vraie**

Données. Les diagonales [EF] et [GH] se coupent en leur milieu et sont de même longueur (comme diamètres d'un même cercle).

Propriété. Si un quadrilatère a ses diagonales qui se croisent en leur milieu et sont de même longueur, alors c'est un rectangle.

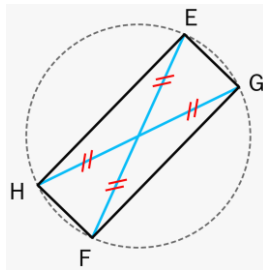
Conclusion. Le quadrilatère EGFH est un **rectangle**.

- un raisonnement par **disjonction de cas**, c.-à-d. en distinguant les cas possibles.

2. Cas particuliers

⚠ Quand une proposition est **fausse**, elle n'est pas nécessairement toujours **fausse**. En effet, une proposition **fausse** peut être **vraie** dans certains cas particuliers.

Exemple. • « Un rectangle a ses diagonales perpendiculaires. ». Cette proposition est **fausse**. Elle n'est **vraie** que dans le cas particulier d'un carré.



5. Propriété

- Proposition **logique** et **vraie**, formée d'une **condition suffisante** et d'une **condition nécessaire**.

On écrit souvent une propriété sous la forme : « Si **A** alors **B** »

Exemple.

- « Si je suis en 3e alors je suis en cycle 4. »

6. Contraposée d'une propriété

Propriété : « Si **A** alors **B** »

Contraposée : « Si **non B** alors **non A** »

Exemple.

Propriété : « Si j'habite le Var alors j'habite en France. »

Contraposée : « Si je n'habite pas en France alors je n'habite pas le Var. »

→ La **contraposée** d'une propriété est **toujours vraie**.

7. Réciproque d'une propriété

Propriété : « Si **A** alors **B** »

Réciproque : « Si **B** alors **A** »

Exemple.

Propriété : « Si j'ai 15 ans alors je suis mineur. »

Réciproque : « Si je suis mineur alors j'ai 15 ans. »

La réciproque est fausse (contre-exemple : un enfant de 10 ans. Cet enfant est mineur mais il n'a pas 15 ans).

→ La **réciproque** d'une propriété **n'est pas toujours vraie**.

Lorsqu'elle l'est, la réciproque d'une propriété devient elle-même une propriété.

4. Méthode ②. Prouver qu'une proposition est fausse

→ Un exemple qui **ne vérifie pas** une proposition s'appelle un **contre-exemple**.

- Pour prouver qu'une proposition est **fausse**, il suffit de trouver un **contre-exemple**.

- **En calcul littéral** : Une égalité est **fausse**, dès qu'on trouve une **valeur** pour laquelle elle n'est pas vérifiée.

Exemple. • « $7 + 2t = 9t$ » → **fausse** (contre-exemple : 0).

En effet, pour $x = 0$: $7 + 2t = 7 + 2 \times 0 = 7$ et $9 \times 0 = 0$.

Donc $7 + 2t \neq 9t$.

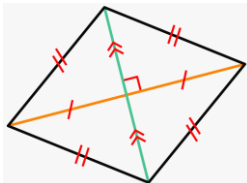
- **En géométrie** : Une proposition est **fausse**, dès qu'on peut construire une figure qui contredit la proposition.

Exemple.

- « Un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même longueur est un carré »

→ **fausse**

(contre-exemple : losange)



Ch01.1. Démontrer (3^e) (AFC3-10)

⚠ Des **exemples** (même nombreux) **ne suffisent pas à prouver** qu'une proposition est **vraie**.

En revanche, un **contre-exemple suffit à prouver** qu'une proposition est **fausse**.

- Ce n'est pas parce que quelques maillons sont bons qu'on peut être sûr que la chaîne ne cassera pas.

Par contre, si un maillon de la chaîne est défectueux alors on est sûr que la chaîne cassera.



Exercice type 1. Démontrer (Objectif DNB)

Énoncé.

On considère la propriété suivante :

« S'il pleut, alors un sol découvert est mouillé ».

- Écrire la contraposée et la réciproque de cette propriété.
- La réciproque de cette propriété est-elle vraie ou fausse ?

Solution.

Propriété : « Si *il pleut*, alors *un sol découvert est mouillé*. »

a. Contraposée : « Si *un sol découvert n'est pas mouillé* alors *il ne pleut pas*. »

Réciproque : « Si *un sol découvert est mouillé* alors *il pleut*. »

b. La réciproque est fausse. Contre-exemple : le sol peut être mouillé à cause d'autres liquides ou après un arrosage. Il peut aussi être en train de sécher alors qu'il ne pleut plus.

Exercice type 2. Démontrer (Objectif DNB)

Énoncé.

La proposition suivante : « La somme de trois entiers consécutifs est divisible par 3. » est-elle vraie ou fausse ?

Solution.

$0 + 1 + 2 = 3$; $1 + 2 + 3 = 6$; $2 + 3 + 4 = 9$; $3 + 4 + 5 = 12$... Il semble que ce soit le cas. Validons cette conjecture :

Soit n le nombre central des trois entiers consécutifs : l'entier précédent est $n - 1$ et l'entier suivant est $n + 1$.

Somme de ces trois entiers : $n - 1 + n + n + 1 = 3n = \boxed{3 \times \text{nombre entier}}$ qui est bien un multiple de 3.

On peut donc conclure que la proposition est **vraie**.

Exercice type 3. Démontrer (Objectif DNB)

Énoncé.

Prouver que $3(x + 2) - 13 = -12 + 5(x + 1) - 2x$.

Solution.

■ **Étape 1.** On développe et on réduit chacun des deux membres de l'égalité.

• *Membre de gauche* : $3(x + 2) - 13 = 3 \times x + 3 \times 2 - 13 = 3x + 6 - 13 = \mathbf{3x - 7}$

• *Membre de droite* : $-12 + 5(x + 1) - 2x = -12 + 5 \times x + 5 \times 1 - 2x = -12 + 5x + 5 - 2x = 5x - 2x - 12 + 5 = \mathbf{3x - 7}$

■ **Étape 2.** On compare les résultats obtenus pour les deux membres de l'égalité.

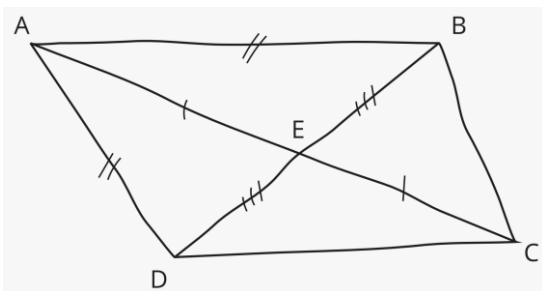
Les deux membres de l'égalité ont la même valeur, les deux expressions sont **toujours égales**.

Exercice type 4. Démontrer (Objectif DNB)

Énoncé.

Quelle est la nature exacte du quadrilatère ABCD ?

Justifier.



Solution.

D. E est le milieu des diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD.

P. Si un quadrilatère a ses diagonales de même milieu, alors c'est un parallélogramme.

C. ABCD est un parallélogramme.

D. Les côtés consécutifs [AB] et [AD] du parallélogramme ABCD ont la même longueur.

P. Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur alors c'est un losange.

C. ABCD est un losange.