

LICEO SCIENTIFICO • CLASSE 4^a

Geometria Sintetica vs Geometria Analitica

Due paradigmi a confronto: intuizione spaziale e potenza algebrica

Materia: Matematica | Unità Didattica: Metodi della Geometria | Presentazione Interattiva

1. Introduzione: Due sguardi sul medesimo spazio

Perché studiamo la geometria con due approcci differenti?

SLIDE 2 / 10

L'Approccio Sintetico ("Vedere")

Studia lo spazio **direttamente attraverso le figure**. Le relazioni tra gli enti geometrici vengono dedotte da assiomi e postulati, osservando le proprietà intrinseche senza bisogno di misurazioni numeriche dirette.

- **Origine:** Grecia Classica (Euclide, 300 a.C.).
- **Parola chiave:** *Forma, congruenza, incidenza*.
- **Focus:** Struttura pura e ragionamento logico-deduttivo.

L'Approccio Analitico ("Calcolare")

Traduce lo spazio in **numeri ed equazioni** inserendo un sistema di riferimento cartesiano. Oggetti geometrici diventano relazioni algebriche tra coordinate (x, y) .

- **Origine:** Rivoluzione Scientifica (Descartes e Fermat, XVII sec.).
- **Parola chiave:** *Coordinate, equazioni, funzioni*.
- **Focus:** Calcolo algebrico e risoluzione sistematica.

Quesito Fondamentale per la Classe: Cambia la natura di un cerchio se lo descriviamo come "insieme di punti equidistanti da un centro" oppure come l'equazione $x^2 + y^2 = r^2$?

2. Geometria Sintetica (Euclidea)

Il rigore del ragionamento deduttivo senza numeri

SLIDE 3 / 10

Caratteristiche Fondamentali

- **Qualitativa e Intrinseca:** Le proprietà delle figure dipendono solo dalla figura stessa, non da dove si trova nello spazio.
- **Strumenti Classici:** Riga (non graduata) e Compasso.
- **Metodo:** Catena deduttiva:
Assiomi $\rightarrow$ Teoremi $\rightarrow$ Dimostrazioni.

Concetti Chiave:

Congruenza ($\cong$), Similitudine ($\sim$), Parallelismo ($\parallel$), Perpendicolarità ($\perp$), Invarianza per trasformazioni rigide (Isometrie).

Punti di Forza e Limiti

✓ Vantaggi:

- Sviluppa l'intuizione spaziale immediata.
- Fornisce dimostrazioni eleganti e sintetiche.
- Non richiede calcoli complessi.

✗ Limiti:

- Ogni problema richiede un'intuizione "ad hoc".
- Difficile da automatizzare o applicare a curve complesse.

3. Geometria Analitica (Cartesiana)

La potenza dell'algebra applicata alle forme

SLIDE 4 / 10

Caratteristiche Fondamentali

- **Quantitativa e Riferita:** Si fissa un sistema di coordinate cartesiane Oxy .
- **Dizionario Geometrico-Algebrico:**
 - Punto → Coppia ordinata (x, y)
 - Curva/Figura → Equazione $f(x, y) = 0$
 - Intersezione → Sistema di equazioni

Concetti Chiave:

Distanza tra punti, Pendenza / Coefficiente angolare (m), Luoghi algebrici (Coniche, rette).

Punti di Forza e Limiti

✓ Vantaggi:

- Metodo algebrico algoritmico e generale.
- Generabile e calcolabile tramite calcolatori.
- Permette lo studio di curve qualsiasi.

✗ Limiti:

- Rischio di "perdere di vista" la figura nei calcoli.
- Calcoli algebrici talvolta lunghi e macchinosi.

4. Quadro Comparativo Diretto

Sintesi dei due paradigmi geometrici

SLIDE 5 / 10

Caratteristica	Geometria Sintetica	Geometria Analitica
Oggetto di studio	Figure nello spazio puro	Coordinate ed equazioni nel piano cartesiano
Linguaggio	Proprietà geometriche (congruenza, angoli)	Formule algebriche, pendenze, equazioni
Strumenti principali	Riga, compasso, postulati euclidei	Sistema <i>Oxy</i> , algebra, sistemi, derivate
Retta	Ente primitivo passante per 2 punti	Equazione di 1° grado: $ax + by + c = 0$
Circonferenza	Luogo dei punti equidistanti dal centro	Equazione: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
Strategia risolutiva	Intuizione visiva e teoremi sintetici	Calcolo algebrico sequenziale

5. Esempio Svolto I: L'Asse di un Segmento

Problema: Determinare l'asse del segmento di estremi $A(1, 2)$ e $B(5, 2)$

SLIDE 6 / 10

Via Sintetica

Definizione: L'asse è il luogo geometrico dei punti equidistanti da A e B .

1. Si tracciano due circonferenze di pari raggio $R > AB/2$ centrate in A e B .
2. Si individuano i due punti di intersezione C e D .
3. La retta passante per C e D è l'asse del segmento.

Dimostrazione: I triangoli ACD e BCD sono congruenti per il III criterio, da cui segue che la retta $\perp$ taglia il segmento a metà.

Via Analitica

Condizione Algebrica: $PA^2 = PB^2$ per un punto generico $P(x, y)$.

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 5)^2 + (y - 2)^2$$

Sviluppando i quadrati:

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 10x + 25$$
$$8x = 24 \Rightarrow x = 3$$

Retta verticale perpendicolare al segmento con punto medio $M(3, 2)$.

6. Esercizio Guidato II: Tangente alla Circonferenza

Teorema: La retta tangente a una circonferenza in un suo punto P è perpendicolare al raggio OP

SLIDE 7 / 10

Risoluzione Sintetica (Dimostrazione per Assurdo)

1. Supponiamo per assurdo che la tangente t in P **non sia** perpendicolare al raggio OP .
2. Allora esiste un punto $H \in t$ (diverso da P) tale che $OH \perp t$.
3. Nel triangolo rettangolo OHP , l'ipotenusa è OP , quindi $OH < OP = R$.
4. Ma se $OH < R$, il punto H è *interno* alla circonferenza!
5. Questo contraddice l'ipotesi che t sia tangente (un'unica intersezione). Quindi $OP \perp t$. ■

Risoluzione Analitica (Metodo del $\Delta = 0$)

1. Circonferenza centrata nell'origine: $x^2 + y^2 = R^2$.
2. Retta passante per $P(x_0, y_0)$: $y - y_0 = m(x - x_0)$.
3. Si impone il sistema e la condizione di tangenza $\Delta = 0$.
4. Si ottiene il coefficiente angolare della retta tangente:

$$m_t = -x_0/y_0$$

5. Il coefficiente angolare del raggio OP è $m_{OP} = y_0/x_0$.
6. Poiché $m_t \cdot m_{OP} = (-x_0/y_0) \cdot (y_0/x_0) = -1$, la tangente è **perpendicolare** al raggio. ■

7. Esercizio per la Classe (Doppia Modalità)

Proprietà del Rombo: Le diagonali di un rombo sono perpendicolari tra loro

SLIDE 8 / 10

Consegna per gli Studenti: Dimostrare il teorema utilizzando **entrambi gli approcci**. Dividetevi in coppie e confrontate la rapidità e l'eleganza della dimostrazione.

Traccia Via Sintetica

1. Ricorda che in un rombo tutti i 4 lati sono congruenti ($AB = BC = CD = DA$).
2. Considera il punto d'incontro delle diagonali O .
3. Usa i criteri di congruenza sui triangoli $\triangle ABO$, $\triangle CBO$... oppure la proprietà del triangolo isoscele $\triangle ABC$ dove la mediana è anche altezza!

Traccia Via Analitica

1. Posiziona il centro delle diagonali nell'origine $O(0,0)$.
2. Assegna le coordinate ai vertici opponendo la simmetria: $A(-a, 0)$, $C(a, 0)$, $B(0, b)$, $D(0, -b)$.
3. Calcola i coefficienti angolari delle diagonali AC e BD e verifica il loro prodotto!

8. Verificato Metacognitiva & Discussion Points

Riflettere sui metodi per scegliere lo strumento migliore

SLIDE 9 / 10

Domanda 1: Scelta del Metodo

In quale situazione concreta conviene usare la geometria analitica rispetto a quella sintetica?

(Risposta attesa: Quando occorre calcolare numeri precisi, intersezioni di curve complesse o quando la figura non suggerisce una costruzione intuitiva immediata).

Domanda 2: Arbitrarietà del Sistema di Riferimento

Se ruotiamo o trasliamo gli assi cartesiani in un problema analitico, le proprietà geometriche della figura cambiano?

(Risposta attesa: No, le proprietà geometriche sono invarianti; cambia solo la forma algebrica delle equazioni).

Domanda 3: Eleganza vs Generalità

Perché spesso i matematici definiscono "più elegante" una dimostrazione sintetica rispetto a una analitica?

(Risposta attesa: Perché rivela la ragione intima e strutturale della proprietà senza nasconderla dietro lunghi calcoli algebrici).

9. Sintesi Finale & Take-Away

La complementarità dei metodi nella matematica moderna

SLIDE 10 / 10

La Sinergia Tra i Due Mondi

Non esiste una geometria "migliore" in assoluto. Un matematico ed un fisico del liceo scientifico devono saper passare con disinvoltura da un paradigma all'altro:

- La **Geometria Sintetica** allena l'intuizione, la visione spaziale e il rigore logico.
- La **Geometria Analitica** fornisce la potenza di calcolo, l'algoritmo e il ponte verso l'Analisi Matematica.

Regola d'Oro per la Risoluzione dei Problemi

1. **Visualizza** il problema sinteticamente tracciando una figura accurata.
2. **Cerca** eventuali proprietà geometriche immediate (simmetrie, angoli, congruenze).
3. Se il problema richiede calcoli o diventa complesso, **fissa opportunamente gli assi cartesiani** e passa alla via analitica!