Enseigner les mathématiques à l'école

Magnard – 2018 **Thierry DIAS**

Chapitre 1 : enseigner et apprendre en mathématiques

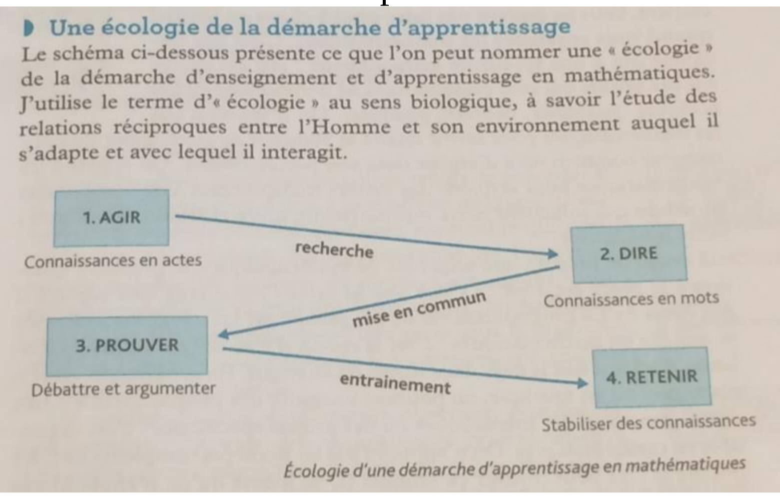
Partie1 : Repères pragmatiques

Apprendre :

- Expérimenter (agir, manipuler, s'interroger, vérifier)
  - Environnement matériel adapté aux représentations et climat de clase propice aux interrogations, aux doutes, à la recherche
  - Ritualisation de la vérification
- Comprendre (discuter, argumenter, prouver, raisonner)
  - Dire et décrire (verbaliser)
  - Expliquer et questionner
  - Échanger (des points de vue, des démarches, des résultats)
  - Débattre, argumenter, raisonner
- S'entrainer (faire et refaire, progresser, se dépasser, stabiliser)
  - Faire fonctionner ses connaissances dans différents contextes
  - Travailler à son niveau de compétence
  - Refaire et recommencer pour réussir
  - Généraliser et décontextualiser

Enseigner :

- Anticiper (repérer les savoirs, comprendre et respecter les programmes, prendre en compte les prérequis)
  - Identifier les savoirs référents
  - Anticiper les difficultés
- Adapter (langage, matériel, dispositifs sociaux)
  - Aménager l'environnement
  - Observer, écouter, comprendre
  - Adapter ses interventions
  - Maintenir l'engagement et l'attention dans la tâche
- Analyser (évaluer, différencier, diversifier, remédier)
  - Valider les apprentissages (différents types d'évaluations)
  - Diversifier, différencier, personnaliser, remédier, compenser
  - Utiliser les erreurs pour traiter les difficultés



Partie2 : Repères didactiques :
Les objets mathématiques présentent une spécificité de deux ordres : épistémologique (les articulations, les liens, l'histoire de la construction des connaissances) et sémiotique (les signes).

1) Les difficultés

Trois principales difficultés de l'enseignement des mathématiques :

- Changer de point de vue sur les difficultés d'apprentissage et différencier les différents types de difficulté :
  - Enseignement
  - Savoir (prérequis nécessaires)
  - Élève (analyser les contenus didactiques plutôt que la posture de l'élève)
- Adapter la méthode : 3 modèles d'enseignement / apprentissage
  - Modèle transmissif (escaliers). La transmission engendre souvent des imitations de la part des élèves.
  - Modèle par adaptation (Piagétien, déséquilibre cognitif à franchir : assimilation-accommodation). Quand un nouvel élément crée un déséquilibre dans nos conceptions et nos connaissances, l'apprentissage consiste alors à s'adapter à ce déséquilibre. Construire, déconstruire, reconstruire.

Cf. **Bachelard** (résistance) et **Vygotski** (ZPD).

  - Modèle spiralaire

Démarche d'enseignement :

  - Transmission
  - Résolution de problème
  - Modelage
- Accompagner à la fois chaque élève et tous les élèves

Trois catégories de difficultés de l'enseignement des mathématiques :

- Le rapport personnel (du PE) aux connaissances mathématiques
- Le choix des types représentation des objets mathématiques (dans des registres sémiotiques différents : le nombre 3 est un concept que je peux représenter 3 / … / trois oral / 1+2)

Cf. **Stella Baruk** « Comptes pour petits et grands » 2003

- La compréhension des programmes (assurer une transposition didactique, connaître les programmes des niveaux antérieurs et ultérieurs)

2) Pour apprendre en math :

- S'adapter à la déstabilisation
- Rechercher les origines des difficultés des élèves
  - Ancrées dans un objet de savoir (domaine particulier : géométrie / les fractions / des propriétés acquises qui se transformes en méconnaissances 2+3=5 et 2/3 +3/2 =5/5)
  - Liées à des programmations de contenu (difficultés temporaires lors de la découverte de l'algorithme de calcul de la division)

- Relatives à un environnement didactique défavorable (prof, outils, démarche, voisin,…)
- Liées à des dysfonctionnements cognitifs locaux et contextuels (attention fragile)

Parfois les difficultés d'attention sont liées contextuellement à certaines tâches mathématiques (le calcul mental, écouter l'enseignant, …).

3) La notion de situation didactique

Cf. **Brousseau** : modélisation de systèmes didactiques nommés « situations ».
Triangle didactique (savoir / élève / enseignant).
Dimensions influentes :

- Dimension psychologique (affect des élèves)
- Dimension épistémologique (situer les savoirs)
- Dimension sociologique (institution et enseignant)

La théorie des situations didactiques se réfère à quatre grandes catégories de situations. Elle est un modèle d'apprentissage par adaptation (part importante accordée à l'action de sujets et prise en compte essentielle des interactions langagières, la conceptualisation passe par la mise en mots).

- L'action : mise en actes
- La formulation : mise en mots
- La validation : mise en débat
- L'institutionnalisation : mise au clair

Chapitre 2 : l'environnement d'apprentissage en mathématiques

Partie 1 : La notion de milieu

Le milieu désigne tout ce que l'enseignant propose comme environnement (organisation des intentions didactiques) à ses élèves (qui vont interagir) pour apprendre.
Exemple de milieu au sein d'une tâche de comparaison de fraction 2/3 et 4/5

- Bandes de papier de 15 carreaux
- Travail en binômes

Exemple d'interaction au sein d'une tâche de comparaison de fraction 2/3 et 4/5
« je n'ai pas compris ce qui est écrit, le 2 au-dessus du 3 »

- Interaction avec la consigne
- Difficulté d'ordre sémiotique (sens du symbolisme utilisé)
- Information sur l'état des connaissances de l'élève (ne sait pas lire une fraction, et ne semble pas concevoir l'écriture fractionnaire comme un seul nombre)

Pas d'apprentissage sans interaction !

- Le milieu est dynamique (pas stable) : prévoir des adaptations et des étayages, anticiper les réactions, préparer les interventions.
- Travail spécifique pour la constitution du milieu (analyser la situation d'apprentissage en mathématiques)
- Repérer et distinguer les réussites et les dysfonctionnements (matériels sociaux, cognitifs, didactiques, pédagogiques)

<u>Partie 2 : Quel milieu pour apprendre ?</u>
Ex. objectif d'apprentissage : faire du vélo (roulettes / draisienne, pédaler / équilibre).
Caractérisation du milieu : allié ou antagoniste.
Ex. étude de cas : dénombrement de voitures, cf. doc 1 et doc2.
Milieu allié :
- Interactions fictives
- Peu ou pas de rétroaction des éléments du milieu sur les actes des élèves (contraintes fortes et marges d'action limitées) : doc1
- Résolution selon une procédure unique

Milieu antagoniste :
- Interactions effectives (barrer les camions, …)
- Nombreuses rétroactions du milieu (certaines actions sont possibles, d'autres impossibles)

<u>Partie 3 : Le milieu : un outil didactique complet</u>
<u>Ex.1 Tâche</u> complexe : le treillis magique
- Plusieurs procédures de résolution
- Les supports : feuille / crayon / boulier / jetons numérotés

Les aides peuvent porter sur 4 éléments principaux :
- Le dispositif de travail
- Les caractéristiques mathématiques du problème (complément à 10)
- Le matériel
- La formulation de la consigne de travail

<u>Ex.2 Tâche</u> « théorie des situations » : le puzzle
- Travail en équipe
- Problème d'agrandissement

Rétroactions potentielles :
- Jouer sur le rapport d'agrandissement (passer de 4 à 8 plutôt que de 4 à 6)
- Fournir une pièce du puzzle agrandie
- Changer le dispositif social (tout le monde doit réaliser la même pièce)

Chapitre 3 : Troubles et difficultés d'apprentissage en mathématiques : comment agir ?

<u>Partie 1 : troubles et difficultés d'apprentissage en mathématiques</u>
Les difficultés sont diversifiées et peuvent être référées à une diversité de causes. Signes possibles :
- Élèves moins engagés dans les tâches d'apprentissage
- Élèves moins confiants dans leur capacité à apprendre
- Élèves moins enclins à prendre des risques
- Élèves incapables de faire face à de multiples instructions
- Élèves mal organisés dans leurs habitudes de travail
- Élèves frustrés face à des tâches de travail jugées difficiles
- Élèves découragés par le manque de réussite

Les troubles d’apprentissage peuvent être de deux ordre : un dysfonctionnement des fonctions cognitives ou un trouble spécifique aux mathématiques :

- Trouble des fonctions cognitives :
- • Troubles de l’attention
- • Troubles de la mémoire
- • Troubles sensoriels (handicap des fonctions sensorielles vue / ouïe / toucher
- TSA (en math) : dyscalculie (très faible pourcentage)

<u>Partie 2 : intervenir sur les difficultés : adapter son enseignement</u>

Adapter : *adaptare*, ajuster à (joindre, rattacher / aménager, accorder)
Cf. **Bruner** : catégoriser les fonctions de tutelle (série d’aides possibles) :

- Enrôlement
- Maintien de l’attention
- Signalisation des caractéristiques déterminantes
- Réduction du degré de liberté
- Contrôle de la frustration
- Démonstration

L’étayage est un échafaudage à l’apprentissage (solide mais démontable).

<u>La gestion des difficultés :</u>

- Améliorer l’efficacité des interactions PE/élèves
- Faire réussir le plus grand nombre
- Prévoir / accompagner / différencier
- <u>Niveau</u> 1 : aménagements préventifs
- • Choix et analyse préalable de la tâche mathématique
- • Diversité des supports de langage concernant l’énoncé du problème (écrit, oral ? signes ?)
- • Choix du matériel
- • Organisation des espaces et dispositifs sociaux
- <u>Niveau</u> 2 : interactions PE/élèves
- • Soutenir l’investissement des élèves dans la tâche (félicitation, encouragement, valorisation)
- • Soutenir le processus de résolution de problème (structuration du problème et étapes, aides à la représentation, transmission : *je te tiens la règle et tu traces le trait*, processus métacognitifs)

<u>Partie 3 : Troubles d’apprentissage : adaptation et compensation</u>

1) Troubles de l’attention (TDA/H)

- Diagnostic médical
- Définition, élèves sensibles aux « contingences de renforcements positifs (valorisation, contrats, signaux privés, plan de travail,…)
- Recommandations : tâches courtes dans le temps et limitées en objectifs.

2) Troubles sévères du langage p78 : dysfonctionnements de la fonction langagière (dyslexies). Conséquences importantes dans les dispositifs de communication.
3) Les Dyspraxies pp79-81
- Mauvaise maîtrise du geste complexe
- Troubles gnosiques
- Troubles exécutifs
- Adaptations et compensations

Chapitre 4 : Langage et connaissances mathématiques

Partie 1 : Les compétences langagières au service des connaissances mathématiques

1) Trois compétences clés : parler, lire, écrire
2) Quels langages en mathématiques ?

Dans les 4 types de situation :
- Action
- Formulation (mise en mots de connaissances : description)
- Validation (maîtrise de la preuve et de l'argumentation)
- Institutionnalisation

Trois enjeux langagiers :
- Dire
- Prouver
- Retenir

Plusieurs types de langages :
- Spontané (mise en mots par l'élève)
- Enrichi (validation) : travail en groupes (vocabulaire spécifique)
- « Institutionnel » : élaboration de la trace écrite

Organisation des temps de parole au sein des trois types de langage.

3) Spécificités langagières en math

- Représentation des concepts mathématiques :
- Signifiant (les dessins : je vois que)
- Signifié (propriétés de la figure : je sais que)
- Référent (problèmes, tracés, expérience : je fais et j'utilise)
- Apprentissage progressif de l'écriture symbolique. Ex. 2+3=5 (suite de signes : des mesures : 2/3/5, une opération : + et une relation : =).

Le langage mathématique peut être analysé selon trois axes :
- Dimension lexicale (quel mot pour quelle chose ?)

Un lexique complexe (on n'apprend pas une langue par capitalisation de listes de mots, cf. LVE). Le lexique doit constituer un outil avant d'être objet d'étude. Outil de Communication. Attention à la polysémie des mots (ex. sommet). Attention aux termes provisoires (construire des automatismes fondés sur des expressions erronées est risqué). Préférable de donner les clés d'utilisation de la langue le plus tôt possible.
- Dimension sémantique (étude des processus relatifs au sens)

Une sémantique problématique (ex. « être droit » attention aux implicites, expliciter).

- Dimension syntaxique (règles d'utilisation des signes)

Une syntaxe rigoureuse ex. 9-3 : (1/3) +1

<u>Partie 2 : Difficultés langagières et conséquences en mathématiques</u>

1) <u>Dire, échanger, interagir</u>

Cf. **Vygotski** : les interactions sociales sont bénéfiques pour les apprentissages des individus lorsqu'elles sont dissymétriques.

« *Apprendre les mathématiques, dans le cadre de la résolution de problèmes, c'est apprendre à dialoguer, à expliquer, à interroger et à convaincre*. »

Une situation de communication fondée sur des échanges oraux met en relation un émetteur et un récepteur par l'intermédiaire d'un message :

- Décrire une figure
- Discuter de l'efficacité d'une procédure de calcul (comment effectuer rapidement 54-19 ? 24 x 25 ?)

2) <u>Écrire des mathématiques : signes et objets</u>

Trois types de représentation (signes caractéristiques en sémiotique)

- Icone (dessin d'un triangle)
- Symbole (triangle rectangle / polygone à trois côtés)
- Indice ($\hat{A}+\hat{E}+\hat{I}=180°$ / $a^2+b^2=c^2$)

La qualité de la communication dépend de la clarté, de l'objectivité et de l'adaptation des signes produits par l'émetteur aux capacités d'interprétation des récepteurs.

3) <u>Lire des mathématiques : vocabulaire, sens et contexte</u>

Ex. énoncé de problème « Un restaurateur achète des melons qu'il a l'intention de servir par moitié. Il achète 8 caisses de 12 melons. Il s'aperçoit qu'il doit jeter 4 melons trop abîmés pour être servis.
Combien pourra-t-il servir de clients ? ».

- Vocabulaire-lexique : restaurateur, intention
- Contexte-sémantique : servir par moitié / trop abîmés pour être servis
- Formulation-syntaxe : 8 caisses de 12 / des melons qu'il a l'intention de servir

Travail préalable : explicitation et reformulation pour accéder aux enjeux mathématiques.

Chapitre 5 : Construire le nombre

<u>Partie 1 : La dimension épistémologique du nombre</u>

1) <u>Détour historique</u>

Histoire de la construction du nombre jalonnée de tentatives de reproduction plus ou moins adaptées aux contextes culturels et économiques. Évolution.
Le choix de la représentation du nombre répond toujours au besoin de contourner un obstacle.

- Les premiers processus : mémoriser

- Procédure archaïque : dessiner autant d'animaux que rencontrés. Efficace, mais pose problème pour les grandes quantités.

- Procédure d'abstraction par la symbolisation : associer une bille d'argile à chaque animal compté (correspondance terme à terme)
- Écriture et système de représentation : communiquer (invention de la numération)
  - Positionnelle : maya, décimale
  - Additive : romaine, égyptienne

Chaque évolution dans le processus de représentation des nombres est issue de la résolution d'un problème, souvent sociétal. Ces obstacles se retrouvent dans le développement cognitif des élèves à propos de la construction du concept de nombre.

2) <u>Modèle Piagétien</u>

« La genèse du nombre chez l'enfant ».

Le concept de nombre est inséparable des liens qu'il entretient avec les situations à traiter, les opérations et les relations qu'il autorise. Cf. **Vergnaud**.

- Présentation du modèle et des stades de **Piaget**
- Modèle constructiviste : potentiel de développement chez tous les sujets et stades de développement identiques pour chacun
- Classification et sériation : cardinal (nombre en tant que mesure d'une quantité) et ordinal (ordre, dimension positionnelle). Classer, c'est mettre ensemble ce qui va ensemble (aspect cardinal) et sérier, c'est rechercher les différences, par exemple sériation selon le critère de hauteur, du plus grand au plus petit (aspect ordinal).
- Les stades et leur intérêt :
  - Stade de la numérosité spatiale (de 4 à 5 ans)
  - Stade du nombre préopératoire (de 5 à 6 ans) correspondance terme à terme
  - Stade du nombre opératoire (de 6 à 7 ans)

3) <u>Les principes du dénombrement</u>

- La correspondance terme à terme
- Une suite de nombre stable (« comptine numérique »)
- Indifférence de l'ordre
- Principe d'abstraction (dénombrer des pommes et des poires ensemble)
- Principe de cardinalité (dénombrer 12345 et savoir qu'il y en a 5. Réponse à la question combien ?).

Les nombres doivent être d'abord des outils de description et d'utilisation des choses du monde réel avant d'être des objets de connaissances.

<u>Partie 2 : Le nombre et ses représentations possibles</u>

1) <u>Trois types de représentation</u>

- Symbolique –numérique : 3
- Mot-nombre (oral ou écrit) : trois
- Quantité physique : xxx

2) <u>Trois registres, trois types de difficultés</u>

Dans le registre de la représentation symbolique numérique on se place dans un système de numération positionnelle : règles particulières d'utilisation des signes. Il faut donner du sens au codage numérique. Il utilise la base dix (règle

de groupement et d'échange « dix contre un ») et le principe positionnel (la valeur numérique d'un symbole dépend de sa position dans le nombre).
Concernant le registre de la représentation en mots, l'enjeu est différent parce qu'ancré dans le domaine langagier. Nommer les nombres, c'est les lire et les écrire. Il existe de nombreuses irrégularités en français.
Pour le registre de la quantité physique, il concerne seulement les petites quantités. Sous forme de constellations, groupements de doigts…

3) La question du symbole

Représentation symbolique, Représentation iconique et Représentation indicielle sont à utiliser et à expliciter avec les élèves, de manière à leur permettre de jongler avec les trois.

Partie 3 : La dimension neuropsychologique

1) Les connaissances stabilisées :

- Le modèle anatomo-fonctionnel : la bosse des math n'existe pas, une zone du cerveau a été mise en évidence pour son importance dans les activités mathématiques (sillon intrapariétal). 3x5 et 23x15 ne mobilisent pas les mêmes zones (mémoire seule / plusieurs secteurs cérébraux)
- Le triple code de **Stanislas Dehaene** : analogique / auditive-verbale / visuelle-arabe

- Auditive-verbale : utilise les modules généraux du langage, donne accès aux tables (addition et multiplication), tâches de comptage.
- Représentation visuelle-arabe : sémiotique. Permet de réaliser les calculs mentaux complexes (penser à laisser une trace écrite lors des procédures de calcul mental, réfléchi.
- Analogique : comparaisons numériques et calculs approximatifs

Cf. Des connaissances numériques chez le nourrisson, p121.

- L'intuition numérique : acuité numérique innée (ligne numérique mentale), qui permet de faire de l'arithmétique plus facilement avec les nombre du début de la ligne qu'avec ceux plus éloignés. Fonctionnement du cerveau. Penser à entrainer les élèves plutôt sur les nombres du début de la ligne numérique.

2) Troubles des apprentissages numériques

- Complexes à catégoriser (dyscalculie, p123) environ 4%
- Rarement isolés

Cf. **Jean-Paul Fischer** « *Je conclurai en observant que la notion de dyscalculie a incontestablement stimulé la recherche mais ne semble p as avoir apporté, à ce jour, d'idées pédagogiques nouvelles, efficaces et spécifiques pour l'aide aux élèves présumés dyscalculiques* ».

Partie 4 : Quels choix didactiques pour la construction du nombre ?

1) Sens et compréhension du nombre

- Agir puis dire
- Faire expérimenter la notion de groupements et d'échanges
- Problématiser les situations
- Apprendre à maîtriser l'énumération

2) Représentation des nombres
- Utiliser des systèmes de représentations adaptés :
• Constellations du dé
• Compter sur ses doigts
• Perceptivo-tactile : pour passer du concret à l'abstrait
• Matériel symbolique (Montessori, Cuisenaire)
- Passer par des formulations langagières plus explicites (cf. irrégularités, exemple du chinois, passer par dix-un)
- Utiliser l'arithmétique comme un code symbolique (travailler tôt les compétences en calcul permet une meilleure construction du nombre. Décomposer et recomposer les petits nombres). Le calcul n'est qu'un jeu sur les nombres.

Chapitre 6 : Au-delà des entiers naturels

Partie1 : Les ensembles de nombres

La compréhension par les élèves de la numération au-delà des entiers naturels est d'une très grande complexité.
Il existe d'importants obstacles épistémologiques dans le processus d'apprentissage lorsqu'on passe d'un ensemble à un autre (2-3 / 2x=1).
L'élève ne doit jamais avoir l'impression que toutes ses connaissances préalables sont fausses.
Il est indispensable de combattre la notion d'implicite. Il faut donc les repérer pour les faire disparaître.
Quelques rappels sur les ensembles de nombres :
- Les Réels : R (tous les nombres) : 1 ; 0,27 ; -2 ; π
- Les Rationnels : Q (toutes les fractions, décimales ou non) nombres fractionnaires. a/b avec b≠0
- Les entiers Relatifs : Z (tous les nombres entiers, + et -) utilisation des 10 chiffres arabes et du symbole -.
- Les entiers naturels : N (tous les entiers positifs)

Partie 2 : Des entiers naturels aux entiers relatifs

1) Obstacles épistémologiques
- Nouveauté majeure de Z : répondre à la question a-b quand b supérieur à a. éloignement de la réalité sensible.
• La connaissance des nombres négatifs : la température, les étages en sous-sol (dimension ordinale des nombres seulement) : ce sont des nombres-numéro qui ne participent pas à la conceptualisation d'un nombre négatif.
• La notion de « manque » : 2-3=manque 1, mais ne construit pas le concept d'ordre de grandeur des nombres négatifs (inverse des positifs).

2) Obstacles sémiotiques

Les nombres négatifs s'écrivent avec un signe alors que les positifs s'écrivent sans signe (on écrit -12 mais pas +12). Implicite du + dans N.
Il peut y avoir une confusion entre -12 et l'opération (soustraction) qui s'écrit avec ce signe. Valeur sémantique du signe « moins ». Cela rend les règles

d’écriture complexes : 3 – (-2) : signe opérateur ou signe signifiant du nombre. Faire découvrir ces symboles à l’intérieur de parenthèses est indispensable.

3) Obstacles mathématiques

L’introduction de l’ensemble des nombres relatifs oblige à une reconstruction des connaissances procédurales sur la dimension ordinale :

- 5 est supérieur à 1 alors que (-5) est inférieur à (-1). 5 est situé à droite de 1, (-5) est situé à gauche de (-1)

Un deuxième obstacle concerne le 0 (qui perd son statut de plus petit nombre construit dans l’ensemble des entiers naturels).
N avait un commencement, alors que Z n’est pas borné.

Notions essentielles pour les enseignants :

- La suite des nombres ne commence pas à 0 : elle est infinie et continue (penser à une représentation de file numérique comme une ligne avec des traits plutôt que des nombres étiquette juxtaposés).
- Il n’existe pas d’opération *interdite,* certaines opérations n’ont pas de solution dans N.
- Les signes + et – peuvent avoir des significations différentes que celle de déclencher une opération : ils peuvent indiquer si un nombre est plus grand ou plus petit que 0.

Partie 3 : Des entiers aux rationnels

1) Du discret au continu

Un ensemble est ***discret*** si entre deux nombres qui se succèdent (1 et 2) on ne peut pas placer d’autres nombres appartenant à cet ensemble.
Un ensemble est ***continu*** quand il est toujours possible d’intercaler un nombre entre deux nombres de cet ensemble.
Cf. représentation de la file numérique (cases séparées / nombres sur un segment). Possibilité d’intercaler.
De N à Z on quitte le domaine de la réalité sensible (1,31 arbre ne se dit pas).
L’ordre, les questions de cardinalité, les calculs ne se travailleront plus de la même manière.

2) Les fractions, p143

Elles posent des problèmes sémiotiques :

- Admettre que 7/4 est un nombre (constitué de deux chiffres et d’un signe)
- 7/4 n’est pas une opération, c’est un rapport entre deux nombres entiers.
- La représentation
- Sous forme de tarte : problématique (cercle avec calcul complexe, faisant intervenir π (aire du cercle)
- Préférer une bande (aire du rectangle)
- Les différences algorithmiques de calcul (la multiplication est plus simple que l’addition) : 4/3 + 3/2 ≠ 4+3/3+2 mais 4/3 x 3/2 = 4x3/3x2

3) Les décimaux

- Nombres rationnels caractérisés comme des fractions particulières. 1257/100 dispose d’une deuxième écriture : 12,57. L’écriture à virgule permet d'identifier les parties entières et parties décimales. Langage complexe : « partie décimale d'un nombre décimal »

- Problématique d'ordre sémiotique : pour écrire un nombre il en faut deux séparés par un symbole (la virgule).

Préférer la terminologie « écriture à virgule » plutôt que « nombre à virgule ».
Exercices consistant à vérifier la compréhension : entourer la fraction correspondant à 80,4 :

804/100	**80/4**	84/10	804/10	804/1000

Erreur fréquente, qu'il est possible de réguler en comparant 80,4 et 80/4
80,4 est plus grand que 80 alors que 80/4 est plus petit que 80

- L'écriture décimale (nombre sous la forme de deux nombres séparés par une virgule) bouleverse les connaissances procédurales dans le domaine ordinal comme dans le domaine des opérations.
- • Faut-il ordonner les parties entières ou les parties décimales ?
- • Règle chez les entiers : le nombre qui a le plus de chiffres sera le plus grand (2,5 et 2,407)
- • Multiplier 2 entiers (résultat plus grand) multiplier 2 décimaux comme 0,4x0,4 (résultat plus petit).
- Il faut reconstruire de nouveaux procédés de comparaison :
- • Traitement séparé des parties entières et décimales d'un nombre
- Nouvelle utilisation du symbole « 0 »
- • Chez les entiers, ajouter un 0 à la fin revient à multiplier par 10, chez les décimaux cela ne change pas la valeur et permet la comparaison 1,4=1,40 alors que 10,4≠1,40
- Nouvelles connaissances procédurales lors des calculs posés (l'alignement des nombres ne se fait plus par la droite). Préférer l'utilisation de tableaux mcdu.

Chapitre 7 : Les calculs à l'école : apprentissages et difficultés

Partie 1 : Les calculs à l'école : repères didactiques

1) Différentes formes de Calcul

- Pourquoi calculer ? cf. « *comment les enfants apprennent à calculer* » **Brissiaud**. L'utilisation des connaissances opératoires permet de mieux comprendre les fondements de la numération décimale. Cf. rapport VT et les 4 opérations dès le CP.
- Comment enseigner le calcul ?
- • Les différents types de calcul : mental / écrit / instrumenté
- • Différencier calcul automatisé et calcul réfléchi
- • Programmer des enseignements liés aux sens et aux automatismes dans une fréquence et durée qui se compenseront (autant de l'un que de l'autre)
- La verbalisation renforce le caractère explicite de l'enseignement (ce qu'on fait, pour quoi on le fait, quels choix, pourquoi).
- L'institutionnalisation : trace écrite pour clore toute séquence d'enseignement

Cf. l’avis de l’académie des sciences, 2007, p154.

- Calcul à enseigner en lien avec les autres matières (grandeurs) dans des situations concrètes
- Calcul = effort et jeu. Mise en place d’automatismes impliquant réflexion et compréhension
- Calcul : pratique simultanée de la numération et des 4 opérations
- Capacité en calcul : se développe selon plusieurs modalités nécessaires et complémentaires (mental, posé écrit, approché, instrumenté)
- Calculer et nager : faisable pour tous (volonté, travail, plaisir).

2) Repérage des difficultés en calcul

- Repérer n’est pas diagnostiquer (médical)
- Processus de repérage : analytique et rigoureux (récolter de nombreuses données, ex. cas pratique p156)

Les difficultés s’interprètent à partir des erreurs qui en sont la cause. Pour une même difficulté on peut avoir plusieurs types d’erreurs. Une seule erreur peut référer à plusieurs difficultés. Anticiper les erreurs possibles et préparer les situations et le dispositif en fonction de ces erreurs.

- Remédiation et étayage

- Varier les outils de modélisation (manipulations mentales et réelles, schématisations et représentations)
- Verbaliser les actions
- Stabiliser les automatismes de calcul (éviter la surcharge cognitive)
- Utiliser les registres concrets des grandeurs (calcul comme outil)
- Mobiliser le jeu

3) La théorie des champs conceptuels de **Gérard Vergnaud**

Un concept est un triplet de trois ensembles, C= (S, I, ζ)

- – S, l’ensemble des situations qui donnent sens au concept (la référence). Situations dans lesquelles l’objet est travaillé.
- – I, l’ensemble des invariants sur lesquels repose l’opérationnalité des schèmes (le signifié). Les schèmes étant les situations, les représentations et les successions d’action qui permettent de parvenir à un même résultat net qui ont émergé au cours de l’activité.
- – ζ, l’ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédés de traitement (signifiant). » Ce sont les représentations qui ont permis le travail : (symboliques ou graphiques, imagées ou outillées).

Les mathématiques sont un système de connaissances et non pas un langage.
Il existe deux formes essentielles : la forme opératoire (s’exprime en actes et est issue de l’expérience, elle est dense et riche) et la forme prédicative (s’exprime par le langage).
Ce sont l’accumulation et la catégorisation des expériences qui permettent de construire des connaissances plus prédicatives.
Dans chaque tâche scolaire on retrouve un aspect productif (objectifs poursuivis) et un aspect constructif (les connaissances en jeu). En calcul on mise sur l’aspect productif (résultat) or l’aspect constructif est aussi essentiel.

« *Un champ conceptuel est un ensemble de situations dans lesquelles une variété de concepts, de procédures et de représentations symboliques sont en étroite relation* » Concernant les opérations, il existe deux champs conceptuels, celui de l'addition (+ et -) et celui de la multiplication (x et :).

- Champ conceptuel de l'addition
- La transformation (état initial, transformation, état final)
- La composition (partie 1 et partie 2 pour faire un tout)
- La comparaison (un référent, un référé et une comparaison)
- Apports didactiques pour l'addition
- Les deux opérations (+ et -) relèvent d'un même champ conceptuel (ne pas séparer addition et soustraction en matière de relation, même s'il s'agit de deux techniques opératoires)
- Mettre en œuvre les trois types de relation additive (également, et sans que la question ne pose que sur le résultat final)

Partie 2 : Calculer dans sa tête

Trois objectifs principaux :

- Construire des automatismes de calcul (récupération des données en mémoire : calcul mental et rapide)
- Diversifier les procédures et les stratégies de calcul complexe (calcul réfléchi)
- Préparer les aptitudes nécessaires au calcul approché (social)

1) À propos des mémoires

- Lien dysfonctionnements mnésiques et difficultés d'apprentissage
- Difficultés d'apprentissage et image de soi (réciter au tableau)
- Sollicitation intense de la mémoire entraine un épuisement cognitif
- Mémoire et attention : deux fonctions cognitives difficilement sollicitées sur de longues durées
- Présentation des tables : sous forme de liste plutôt que tableau

2) Exemples de jeux de calcul mental

- Passer du numérique à l'opératoire
- La liste (afficher une liste de nombres et poser des questions)
- Le tableau des nombres (avec des cases cachées) : poser des questions, tracer des chemins.
- Verbaliser pour comprendre (25x16)
- Acquérir des automatismes (pyramides de nombres)
- Jouer avec des casse-têtes
- S'entrainer et se dépasser

Partie 3 : Le calcul écrit

1) Les principes de base de la numération décimale

- La maîtrise des échanges et des groupements
- La valeur positionnelle des chiffres
- Le rôle du zéro

2) L'addition dans les entiers naturels

- Quelques préalables : compréhension du groupement par 10 et maîtrise des calculs de sommes inférieurs à 10

- Le calcul en ligne : jeu sur les nombres (procédure qui permet d'acquérir le réflexe d'observer les nombres avant d'opérer dessus). Ex. : 4 méthodes pour un même calcul, p171
- L'addition posée (algorithme de résolution dans le tableau cdu.

3) La soustraction des entiers naturels

- L'autre écriture du premier terme : 753-85 : 753 = 74d et 13u (casser les dizaines)
- L'équivalence entre soustraction et recherche de complément (addition à trou). Représentation en ligne avec les bonds pertinente.
- Invariance d'une différence par ajout simultané d'un même nombre. Complexe au niveau du sens, apprentissage très procédural reposant sur la propriété : a-b=(a+n)-(b+n).

4) La multiplication

- La technique classique : tâche complexe
- Connaitre les tables de multiplication
- Comprendre le système de numération décimale (gestion des retenues)
- Utiliser la distributivité de la multiplication sur l'addition : ax(b+c) =ab+bc
- La règle des zéros : multiplier par 35 c'est multiplier par 5 et puis par 30
- Technique par jalousie (cf. tableaux p176)

5) La division

Division euclidienne (41=7x5+6 : dividende – diviseur – quotient – reste)

- La division commence toujours par une estimation du nombre de chiffres du quotient
- La pose des produits annexes est fortement conseillée
- La pose effective de la soustraction doit être encouragée
- Des outils d'aide existent sous forme de supports à la division posée (cf. modélisation **Henri Planchon** et **Marc-Olivier Roux**).

http://acim.ouvaton.org/spip.php?article38
http://www.liensutiles.fr/categ/technique-de-la-division-80477844

Partie 4 : Le calcul instrumenté

1) De l'outil à l'instrument : apports théoriques

Un outil devient un instrument de calcul par un processus appelé genèse instrumentale (cf. **Pierre Rabardel**).
La calculatrice passe du statut d'objet à celui d'instrument lorsqu'on utilise une ou plusieurs fonctions de cet objet. En utilisant cet objet on va construire des schèmes d'utilisation : on apprend à utiliser la machine par rapport à sa fonction, dans la tâche mathématique.

2) Instrument versus machine

- Instrument de calcul (à mon service) : étaye les actes du sujet dans la tâche (sans le remplacer). Intervient comme un support.
- Machine (me remplace)

Ex. 25x16 : calcul réalisé : Machine / calcul vérifié : Instrument.

3) Un instrument au service des élèves en difficulté

L'instrument comme outil d'adaptation (le boulier, la calculatrice).
Construction du milieu didactique.

Chapitre 8 : Construire des connaissances spatiales et géométriques

Partie 1 : Espace et géométrie : des connaissances distinctes

1) Connaissances spatiales (orientation, expérience)
2) Connaissances géométriques
3) Concepts géométriques

Partie 2 : Enseigner la géométrie

1) La place du problème
2) La géométrie dans les programmes scolaires
3) Les différents types de géométrie (perceptive, théorique, instrumentée)
4) Manipuler et expérimenter en géométrie
5) Obstacles à l'apprentissage en géométrie (épistémologiques et didactiques)

Partie 3 : La dimension Psychologique

1) L'espace pratique d'action
2) L'espace des relations topologiques
3) L'espace projectif
4) L'espace euclidien

Partie 4 : Difficultés et troubles

1) Difficultés dans la construction des connaissances géométriques et spatiales :
- Difficultés d'apprentissage (manque d'expérience dans le spatial, mise en mots difficile, incompréhension des conventions, difficultés motrices)
- Difficultés d'enseignement (ostension, stéréotypes représentatifs)
2) Les troubles d'apprentissage (dyspraxies : de type moteur, visuo-spatiale; troubles de la mémoire, troubles exécutifs, troubles perceptifs)

Partie 5 : Quelques idées pour un enseignement adapté de la géométrie

1) Ressources environnementales (artéfacts au service de la représentation des concepts, dispositif social adapté à la collaboration et aux échanges, tâches structurées et rassurantes)
2) Des instruments adaptés à une meilleure conceptualisation (genèse instrumentale, recherche de diversité, GéoGébra)

Chapitre 9 : Des grandeurs à leurs mesures… progressivement

Partie 1 : Grandeurs et mesures : quelques définitions

1) Notion de grandeur dans les savoirs scolaires
2) Mesurer une grandeur

Partie 2 : quelques repères didactiques

1) Grandeurs et mesures dans l'apprentissage et le développement cognitif (transport visuel, transport manuel, étalon)
2) Enseigner les grandeurs et mesures (du C1 au C3)

Partie 3 : Obstacles, fausses conceptions et difficultés

1) Les obstacles (épistémologiques, didactiques)
2) Les fausses conceptions (prégnance de l'aire sur le périmètre, proportionnalité des grandeurs et mesures, opérations sur les mesures)
3) Des difficultés plurielles (conversions, usage des instruments de mesure, diversité des procédures, formules)
4) Quelques solutions didactiques (créer, construire)