# Reconstruction harmonique
# d'une forme d'onde
# RDM 55-XS

## 1 - Sons périodiques - harmoniques

La forme d'onde d'un son périodique se répète de façon identique à elle-même dans le temps. On peut voir une image stable de ce son sur un oscilloscope. Le motif qui se répète, ainsi que sa durée $T_0$, s'appellent la période du son.

On peut démontrer qu'un son périodique peut être approché aussi précisément qu'on le souhaite par une somme de sons sinusoïdaux, dont les fréquences sont des multiples de la fréquence fondamentale $f_0 = \frac{1}{T_0}$ . Chaque terme de la somme est appelé "harmonique", et il est caractérisé par sa fréquence $f_1 = 1 . f_0$, $f_2 = 2 . f_0$, $f_3 = 3 . f_0$, ... , $f_n = n . f_0$ , ..., par son amplitude $A_1$, $A_2$, $A_3$, ... , $A_n$, ..., et par son déphasage $\phi_1$, $\phi_2$, $\phi_3$, ..., $\phi_n$. Le déphasage est compris entre 0° et 360° et il précise comment les différents harmoniques sont "synchronisés" par rapport au son fondamental, c'est-à-dire, l'harmonique de la fréquence la plus basse.

**Application 1** : l'intérêt de cette théorie et de la réalité qu'elle décrit est qu'il est possible de traiter ou de modifier individuellement l'amplitude et le déphasage de chacun des harmoniques d'un son initialement "riche" (en harmoniques). Les synthétiseurs disposent de filtres qui atténuent ou renforcent les harmoniques choisis, et modifient considérablement le son initial. La gestion des harmoniques est également une préoccupation centrale dans la construction d'instruments traditionnels (guitare, flûte, violon ...). La différence entre le son d'une flûte et celui d'un violon provient exclusivement de la présence différente des harmoniques, et la différence de sonorité entre des violons, comme un Mirecourt, un Stainer et un Stradivarius, vient également des harmoniques.

**Application 2** : on peut également et inversement procéder à la synthèse d'un son en additionnant des sons sinusoïdaux de fréquences multiples. C'est ce qui est fait dans la suite pour quelques formes d'onde simples.

**Remarque** : on peut généraliser la démarche, et additionner des sons dont les fréquences ne sont pas des multiples. Le son obtenu n'est plus périodique, et c'est le cas de nombreux instruments, en particulier les percussions.

**NOTE** : le module RDM 55-XS écrit en HTML, lancé depuis le lien "Exécutables" du site http://www.tuclic.fr/exec/gene_osc_fourier_06css.htm est prévu pour fonctionner avec une version récente de Firefox.

# 2 - Fréquence, amplitude et phase des harmoniques

Lancer le module RDM 55-XS (http://www.tuclic.fr/exec/gene_osc_fourier_06css.htm) depuis Firefox.

On entend un son de forme d'onde sinusoïdale qui correspond à un LA 1 de fréquence 110 Hertz.

Chaque ligne numérotée n du RDM 55-XS permet de faire entendre un son sinusoïdal de fréquence $n \times 110$ Hz : ce sont les différents harmoniques. La ligne 02 permet de faire entendre un son sinusoïdal de fréquence $2 \times 110$ Hz = 220 Hz, la ligne 03 un son de fréquence $3 \times 110$ Hz = 330 Hz, etc.

La partie droite permet de visualiser comme sur un oscilloscope la forme d'onde entendue : comparer avec un oscilloscope relié à la sortie audio de l'ordinateur.

Au lancement du RDM 55-XS, seul le premier harmonique est joué puisque c'est le seul qui a une amplitude non nulle, réglée à 60 à l'initialisation. Modifier cette amplitude avec le curseur "Amplitude". Plus celle-ci est grande, plus la figure est "haute" (note : de part la programmation du RDM 55-XS, l'intensité du son est maintenue constante, seul le signal visualisé apparaît plus grand ou plus petit).

Fixer l'amplitude du premier harmonique à 30, les autres étant conservés avec une amplitude nulle.

Modifier la position du curseur d'amplitude du $2^{ème}$ harmonique. Regarder et écouter. Un son plus aigu se mélange au son grave. Régler l'amplitude du $2^{ème}$ harmonique à 15.

Observer ce qui se passe lorsqu'on déplace le curseur "Phase" du $2^{ème}$ harmonique : la "petite bosse" se déplace sur la "grosse bosse". La phase est un nombre compris entre 0° et 360°. La position 360° est identique à la position 0°.

Remettre l'amplitude du $2^{ème}$ harmonique à 0.

Régler l'amplitude du $3^{ème}$ harmonique à 15 : le son mélangé a une fréquence aiguë triple de celle du $1^{er}$ harmonique (encore appelé son fondamental).

Les boutons ON et OFF permettent de n'écouter que certains harmoniques sans modifier les réglages.

Ecouter le $3^{ème}$ harmonique seul, puis le $1^{er}$ harmonique seul.

Déplacer les "petites bosses" du $3^{ème}$ harmonique sur la "grosse bosse" du premier harmonique, avec le curseur "Phase" du $3^{ème}$ harmonique.

Ecouter le $17^{ème}$ harmonique seul, de fréquence 1870 Hz, après avoir réglé son amplitude à 15. Zoomer en X pour mieux le voir. Remettre le bouton ON du premier harmonique. Modifier la phase du $17^{ème}$ harmonique : on voit les petites bosses se déplacer sur la grosse ondulation du premier harmonique.

Quelques réglages particuliers sont examinés dans ce qui suit.

# 3 - Reconstruction d'une dent de scie à partir de sinusoïdes

On règle dans le RDM 55-XS les 17 générateurs de son pour recréer la forme d'onde voulue. Les amplitudes et les déphasages pour chaque harmonique ont été calculés par la théorie des "séries de Fourier" qui s'applique aux phénomènes périodiques. On utilise ici les résultats de cette théorie.

On commence par additionner des harmoniques en phase, (déphasage $\phi$ nul pour tous), dont les amplitudes décroissent comme $\frac{1}{n}$, où n est le rang de l'harmonique. L'amplitude de chaque harmonique est donnée dans le tableau ci-dessous.

Régler ensuite la phase de chaque harmonique avec les valeurs données dans le tableau.

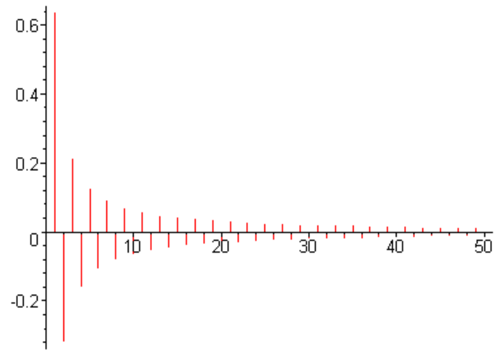
| Harmonique n | Fréquence en Hertz | Amplitude | Phase |
|---|---|---|---|
| 1 | 110 | 100 | 90 |
| 2 | 2*110 = 220 | 100/2 = 50 | 270 |
| 3 | 3*110 = 330 | 100/3 = 33,3333333333333 | 90 |
| 4 | 4*110 = 440 | 100/4 = 25 | 270 |
| 5 | 5*110 = 550 | 100/5 = 20 | 90 |
| 6 | 6*110 = 660 | 100/6 = 16,6666666666666 | 270 |
| 7 | 7*110 = 770 | 100/7= 14,2857142857142 | 90 |
| 8 | 8*110 = 880 | 100/8 = 12,5 | 270 |
| 9 | 9*110 = 990 | 100/9 = 11,1111111111111 | 90 |
| 10 | 10*110 = 1100 | 100/10 = 10 | 270 |
| 11 | 11*110 = 1210 | 100/11 = 9,0909090909090 | 90 |
| 12 | 12*110 = 1320 | 100/12 = 8,3333333333333 | 270 |
| 13 | 13*110 = 1430 | 100/13 = 7,6923076923076 | 90 |
| 14 | 14*110 = 1540 | 100/14 = 7,1428571428571 | 270 |
| 15 | 15*110 = 1650 | 100/15 = 6,6666666666666 | 90 |
| 16 | 16*110 = 1760 | 100/16 = 6,25 | 270 |
| 17 | 17*110 = 1870 | 100/17 = 5,8823529411764 | 90 |

Régler le volume général pour qu'il n'y ait pas de saturation, c'est-à-dire pour que le son ne soit pas écrêté.

Dessiner schématiquement la forme d'onde. Ecouter l'évolution du son lorsqu'on ajoute les harmoniques.

Que se passe-t-il si on fixe la phase de tous les harmoniques impairs à 270° et la phase des harmoniques pairs à 90° ? Dessiner la nouvelle forme d'onde.

Le spectre d'un son est une représentation de l'amplitude de ses différents harmoniques. Celui de la dent de scie est représenté ci-dessous, pour les 50 premiers harmoniques :

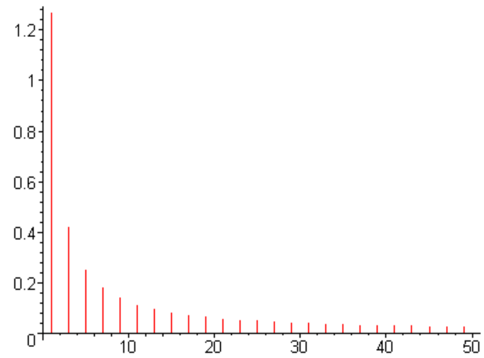



# 4 - Forme d'onde "carrée"

A partir des harmoniques de la dent de scie précédente, supprimer (bouton Off) les harmoniques pairs, en gardant le fondamental à 110 Hertz.

Dessiner la forme de l'onde. Comparer avec le son de l'onde en dent de scie.

Le spectre d'une forme d'onde carrée est donné ci-dessous :




# 5 - Forme d'onde "triangulaire"

On examine plusieurs situations pour lesquels l'amplitude des harmoniques de rang n décroit comme $\frac{1}{n^2}$ . Les formes d'onde qui seront obtenues seront plus "régulières" (c'est à dire que les sauts seront moins brutaux) que lorsque l'amplitude des différents harmoniques diminuaient comme $\frac{1}{n}$ , aux paragraphes 3 et 4 : les sons obtenus auront un timbre plus doux. Une autre conséquence est que les harmoniques de rang n très grand ont une amplitude très petite, et qu'ils ne contribuent pratiquement pas au son entendu ni à la forme d'onde observée. Ces sons seront plus faciles à synthétiser et la chaîne de traitement, d'amplification et d'écoute aura moins besoin d'être performante pour les fréquences des sons très aigus (hautes fréquences de la plage audible).

| Harmonique | Fréquence en Hertz | Amplitude | Phase |
|---|---|---|---|
| 1 | 110 | 100 | 0 |
| 2 | 2*110 = 220 | 100/4 = 25 | 0 |
| 3 | 3*110 = 330 | 100/9 = 11,1111111111111 | 0 |
| 4 | 4*110 = 440 | 100/16 = 6,25 | 0 |
| 5 | 5*110 = 550 | 100/25 = 4 | 0 |
| 6 | 6*110 = 660 | 100/36 = 2,7777777777777 | 0 |
| 7 | 7*110 = 770 | 100/49= 2,040816327 | 0 |
| 8 | 8*110 = 880 | 100/64 = 1,5625 | 0 |
| 9 | 9*110 = 990 | 100/81 = 1,234567901 | 0 |
| 10 | 10*110 = 1100 | 100/100 = 1 | 0 |
| 11 | 11*110 = 1210 | 100/121 = 0,826446281 | 0 |
| 12 | 12*110 = 1320 | 100/144 = 0,694444444444 | 0 |
| 13 | 13*110 = 1430 | 100/169 = 0,591715976 | 0 |
| 14 | 14*110 = 1540 | 100/196 = 0,510204082 | 0 |
| 15 | 15*110 = 1650 | 100/225 = 0,4444444444444 | 0 |
| 16 | 16*110 = 1760 | 100/256 = 0,390625 | 0 |
| 17 | 17*110 = 1870 | 100/289 = 0,346020761 | 0 |

Dessiner la forme d'onde lorsque la phase de tous les harmoniques est nulle (comme dans le tableau ci-dessus).

Modifier la phase, et examiner les situations suivantes en écoutant et en dessinant la forme d'onde :

1 - Phase nulle pour les harmoniques impairs et phase égale à 90° pour les harmoniques pairs.

2 - Phase nulle pour les harmoniques impairs et phase égale à 270° pour les harmoniques pairs.

3 - Phase nulle pour les harmoniques impairs et bouton OFF pour les harmoniques pairs.

4 - Phase égale à 90° pour les harmoniques impairs et phase égale à 270° pour les harmoniques pairs.

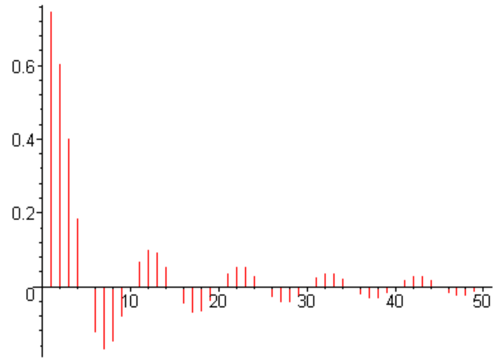
5 - Phase égale à 90° pour les harmoniques impairs et bouton OFF pour les harmoniques pairs.

# 6 - Forme d'onde "rectangulaire"

On revient à une forme d'onde pour laquelle l'amplitude décroît globalement comme $\frac{1}{n}$ .

Le spectre ci-dessous est celui d'une forme d'onde rectangulaire de rapport cyclique a = 1 / 5.

L'amplitude théorique de l'harmonique de rang n est $A_n = \frac{\sin(\pi \times n \times a)}{n}$ ("ondulation qui diminue comme $\frac{1}{n}$ ").




Le tableau ci-dessous contient les valeurs numériques qui correspondent à cette formule.

| Harmonique | Fréquence en Hertz | Amplitude | Phase |
|---|---|---|---|
| 1 | 110 | 100 | 0 |
| 2 | 2*110 = 220 | 80,90169944 | 0 |
| 3 | 3*110 = 330 | 53,93446629 | 0 |
| 4 | 4*110 = 440 | 25 | 0 |
| 5 | 5*110 = 550 | 0 | 0 |
| 6 | 6*110 = 660 | 16,66666666 | 180 |
| 7 | 7*110 = 770 | 23,11477127 | 180 |
| 8 | 8*110 = 880 | 20,22542486 | 180 |
| 9 | 9*110 = 990 | 11,11111111 | 180 |
| 10 | 10*110 = 1100 | 0 | 0 |
| 11 | 11*110 = 1210 | 9,09090909 | 0 |
| 12 | 12*110 = 1320 | 13,48361657 | 0 |
| 13 | 13*110 = 1430 | 12,4464153 | 0 |
| 14 | 14*110 = 1540 | 7,142857143 | 0 |
| 15 | 15*110 = 1650 | 0 | 0 |
| 16 | 16*110 = 1760 | 6,25 | 180 |
| 17 | 17*110 = 1870 | 9,517846993 | 180 |

Effectuer les réglages du RDM 55-XS. L'amplitude des harmoniques dont le rang n est multiple de 5 est nulle.

Ecouter le son et dessiner la forme d'onde visualisée. Vérifier la valeur du rapport cyclique :

a = 1 / 5.

Tester des modifications de valeurs du déphasage pour les premiers harmoniques en regardant la forme d'onde et en écoutant.