Н. А. Тарасенкова, М. І. Бурда,

М. В. Босовський, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк

Задачі підвищеної складності з геометрії для 7 класу

Навчальний посібник

За редакцією
Н. А. Тарасенкової, М. І. Бурди

Київ
УОВЦ «Оріон»
2023

ББК 74.262.21
Т-19

Рецензенти:
Чашечникова О. С. – доктор пед. наук, професор кафедри математики Сумського державного педагогічного університету ім. А. С. Макаренка
Вент І. Г. – вчитель математики вищої категорії, вчитель-методист Черкаської ЗОШ І-ІІІ ст. № 7, лауреат премії імені народного вчителя О. А. Захаренка

Тарасенкова Н. А.
Т-19 Задачі підвищеної складності з геометрії для 7 класу: навч. посіб. / Н. А. Тарасенкова, М. І. Бурда, М. В. Босовський, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк; за ред. Н. А.Тарасенкової, М. І. Бурди. К.: УОВЦ «Оріон», 2023.

ISBN

Матеріали посібника відповідають модельній навчальній програмі з геометрії для 7 класу ЗЗСО (авт. М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, Д. В. Васильєва) та підручнику М. І. Бурди, Н. А. Тарасенкової «Геометрія, 7».

Посібник призначений для організації індивідуальної роботи зі здібними та зацікавленими учнями.

Для вчителів закладів загальної середньої освіти.

ББК 74.262.21

ПЕРЕДМОВА

Матеріали посібника призначені для вчителів математики закладів загальної середньої освіти, які викладають геометрію у 7 класах за підручником М. І. Бурди, Н. А. Тарасенкової «Геометрія, 7».

Посібник містить задачі підвищеної складності до чотирьох розділів підручника, а також задачі до рубрики «Дізнайтеся більше» підручника.

Задачі першого розділу посібника призначені для індивідуальних тематичних завдань, які доцільно пропонувати найбільш підготовленим і зацікавленим учням. Такі завдання краще задавати учням на початку вивчення теми. Тоді протягом вивчення теми учні матимуть змогу опрацьовувати задачі у зручний для них час. Результати виконання тематичного завдання доцільно перевіряти напередодні або під час проведення тематичної атестації. Вони можуть бути враховані в тематичній оцінці.

У посібнику чільне місце посідають задачі за готовими малюнками. На малюнках до таких завдань рівність відрізків, кутів, перпендикулярність прямих позначається традиційно. Причому даних, як правило, позначено більше, ніж потрібно для розв'язання задачі одним способом. Доцільно всіляко заохочувати спроби учнів відшукати кілька способів розв'язування задачі.

У багатьох задачах на обчислення і доведення визначення конкретних значень величин, позначених на малюнку, є ключовим моментом розв'язання. Наприклад, якщо на конфігурації можна виділити прямокутний трикутник, гострі кути якого позначено однаковою кількістю дужок, то потрібно зробити висновок не тільки про те, що такий трикутник рівнобедрений і його гострі кути становлять по 45°, але й про те, що кожен кут на даному малюнку, який позначено такою самою кількістю дужок, становить 45°. Нерідко така метрична інформація дає змогу спростити розв'язання задачі. Доцільно, щоб учні заносили на малюнок усі метричні відомості, які вони будуть отримувати у ході розв'язування задачі. Розв'язання таких задач не бажано проводити усно.

У другому розділі посібника пропонується добірка задач, що стосується матеріалу рубрики підручника «Дізнайтеся більше». За допомогою цих задач зацікавлені учні зможуть не лише розширити і поглибити свої знання з геометрії, але й відпрацювати нові уміння, одержати досвід напруженого інтелектуального пошуку.

Задачі посібника можна використовувати на факультативних та інших додаткових заняттях з геометрії.

РОЗДІЛ 1 ЗАДАЧІ ДЛЯ ТЕМАТИЧНИХ ЗАВДАНЬ

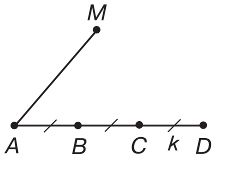
§ 1. Елементарні геометричні фігури та їх властивості

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

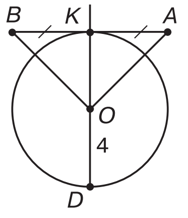
1. Знайдіть довжини відрізків AM і AD (мал. 1), якщо $k = 3$, $2\,AB = AM$.

2. Знайдіть довжини відрізків AK і AB (мал. 2), якщо $AB - KD = 0$, $KD = 2\,KO$.

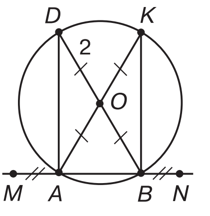
3. Знайдіть довжини відрізків MN, AB, AK (мал. 3), якщо $MN = 2\,AB$, $AK = 2\,AB$.



Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3

4. На прямій взяли 6 точок. Потім між кожними двома сусідніми точками взяли ще по одній, і так 6 разів. Доведіть, що після кожної такої операції загальна кількість точок – число непарне.

5. На прямій взяли декілька точок. Потім між кожними двома сусідніми точками взяли ще по одній, і так кілька разів. Доведіть, що після кожної такої операції загальна кількість точок – число непарне.

6. Розмістіть 10 точок на 5 прямих так, щоб на кожній було по чотири точки.

7. Розмістіть 6 точок на 4 прямих так, щоб на кожній було по три точки.

8. На скільки частин можна розділити площину чотирма різними прямими?

9. На скільки частин можна розділити площину трьома різними прямими?

10. Скількома способами з відрізків довжиною 7 см і 12 см можна скласти відрізок довжиною 1 м?

11. Як за допомогою двох мотузок довжиною 11 см і 3 см відкласти відрізок довжиною 1 см?

12. На відрізку MN послідовно позначено точки A і B так, що відрізок MA у 5 разів менший від подвоєного відрізка AB, а довжина відрізка AB становить 0,75 довжини відрізка BN.
Знайдіть довжину відрізка MN, якщо $BN = 40$ см.

13. На відрізку MN послідовно позначено точки A і B так, що $AB = 2\ MA$, $AB = 0{,}6\ MN$. Знайдіть довжину відрізка MN, якщо $BN - BM = 10$ см.

14. На відрізку AB довжиною 6 см побудуйте точку M так, щоб третина відрізка AM становила сьому частину відрізка MB.

15. На відрізку AB довжиною 12 см побудуйте точку M так, щоб 45% довжини відрізка AM становило 63% довжини відрізка MB.

16. Треба знайти довжину відрізка MN, на якому позначено послідовно точки A, B і С так, що $MC = 20$ см, $AC = 15$ см, $AB = 3$ см. Чи достатньо наведено даних для цього?
Яку умову слід додати, щоб задача мала розв'язок?

17. Треба знайти довжину відрізка MN, на якому позначено послідовно точки A, B і С так, що $MC = 20$ см, $MB = 15$ см, $AN = 30$ см. Чи достатньо наведено даних для цього?
Яку умову слід додати, щоб задача мала розв'язок?

18. Чи можуть сім прямих перетинатися у восьми точках?

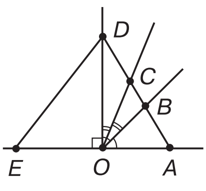
19. Розмістіть на площині шість відрізків так, щоб кожен з них перетинався точно з трьома із даних відрізків.

20. Скільки є способів взаємного розміщення двох відрізків?

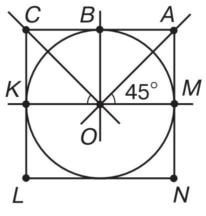
21. Визначте градусну міру $\angle COA$ (мал. 4), якщо $\angle DOC = 0{,}25\ \angle DOE$.

22. Визначте градусну міру $\angle COA$ (мал. 5), якщо $\angle KOB = \angle BOM$, $\angle COM - \angle AOM = 90°$.

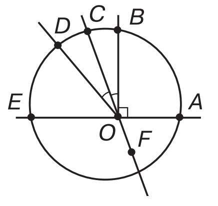
23. Визначте градусну міру $\angle DOB$ (мал. 6), якщо відомо, що $\angle COF = 180°$, $\angle COD = 0{,}125 \angle BOF$.



Мал. 4



Мал. 5



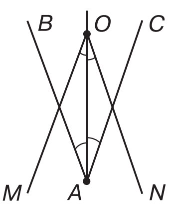
Мал. 6

24. Поясніть, чому промінь *AO* є бісектрисою кута 1 і не є бісектрисою кута 2, якщо:

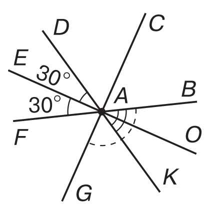
а) $\angle 1 = \angle BAC$, $\angle 2 = \angle MON$ (мал. 7);

а) $\angle 1 = \angle BAK$, $\angle 2 = \angle BAG$ (мал. 8);

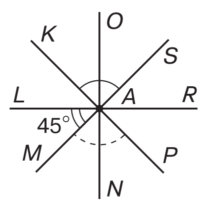
б) $\angle 1 = \angle KAS$, $\angle 2 = \angle MAP$ (мал. 9).



Мал. 7



Мал. 8



Мал. 9

25. Дано: $\angle BAC = 15°$, $\angle BAD = 60°$, $\angle CAM = 25°$. Знайдіть $\angle MAD$.

26. Чи можна за допомогою кута 17° відкласти кут 7°?

27. Дано кут, градусна міра якого дорівнює 19°. Побудуйте кут, градусна міра якого, дорівнює 1°.

28. Чи можна за допомогою кутів 45°, 30° і 20° відкласти кут 35°?

29. Від променя *OM* відклали кути α і β двома способами, при цьому дістали кути 30° і 112°. Знайдіть кути α і β.

30. Скільки разів за добу стрілки годинника утворюють розгорнутий кут?

31. Чи можуть відстані між чотирма точками, взятими попарно, дорівнювати відповідно 1 см, 2 см, 3 см, 4 см, 5 см та 6 см?

32. На прямій розміщено 5 точок. Яка найменша кількість середин відрізків з кінцями у цих точках?

33. На прямій розміщено n точок. Яка найменша кількість середин відрізків з кінцями у цих точках?

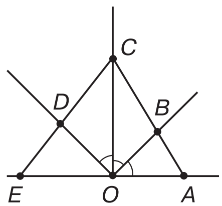
§ 2. Взаємне розміщення прямих на площині

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

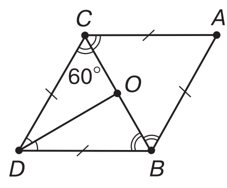
34. Знайдіть градусну міру $\angle COE$ (мал. 10), якщо $\angle DOE : \angle AOD = 1 : 3$.

35. Знайдіть градусну міру $\angle BDO$ (мал. 11), якщо $\angle ABD + \angle BDC = 180°$.

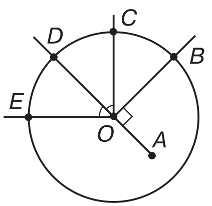
36. Знайдіть градусну міру $\angle COE$ (мал. 12), якщо $\angle BOD = \angle BOA$, OC є бісектрисою $\angle BOD$.



Мал. 10



Мал. 11



Мал. 12

37. Знайдіть кут, третина якого дорівнює $\frac{1}{5}$ суміжного з ним кута.

38. Різниця суміжних кутів дорівнює 20% від їх суми. Знайдіть ці кути.

39. Два кути відносяться, як 7 : 3, а їх різниця дорівнює 72°. Чи суміжні ці кути?

40. Два кути відносяться, як 13 : 2, а їх різниця дорівнює 110°. Чи суміжні ці кути?

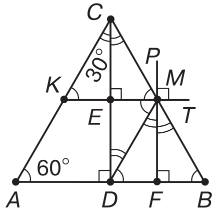
41. Кути, що утворюють бісектриси суміжних кутів зі сторонами відповідно інших кутів, відносяться, як 5 : 3. Знайдіть суміжні кути.

42. Знайдіть суміжні кути, якщо бісектриса одного з них утворює зі стороною іншого кут, що дорівнює 125% від кута між бісектрисами даних суміжних кутів.

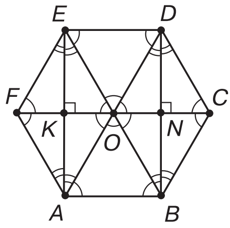
43. Чи правильно, що кут між бісектрисами суміжних кутів дорівнює 75% від розгорнутого кута?

44. Чи правильно, що кут між бісектрисами вертикальних кутів дорівнює 200% від прямого кута?

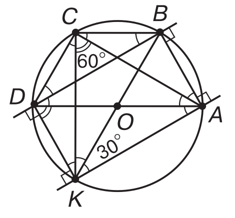
45. Визначте, які прямі на малюнках 13–15 паралельні. Висновки обґрунтуйте.



Мал. 13

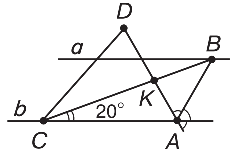


Мал. 14

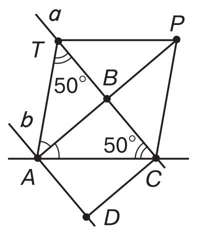


Мал. 15

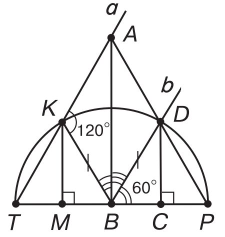
46. На малюнках 16–18 прямі a і b паралельні. Визначте градусну міру кута ABC.



Мал. 16



Мал. 17



Мал. 18

47. Прямі AB і BC перетинаються під кутом 80°. Через точки A і C проведено прямі AM і CP так, що $\angle BAM = 135°$, $\angle BCP = 160°$. Чи паралельні прямі MA і CP?

48. Прямі AB і BC перетинаються під кутом 50°. На даних прямих позначено відповідно точки P і M так, що прямі AM і CP – паралельні, а $\angle BAM = 35°$. Знайдіть $\angle BCP$.

49. Один із суміжних кутів утричі більший за їх різницю. Знайдіть градусні міри даних кутів.

50. Дано сім прямих, кожні дві з яких не є паралельними. Доведіть, що серед них знайдеться дві прямі, кут між якими менший від 26°.

§ 3. Трикутники

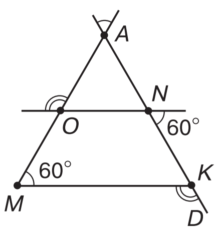
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

51. Визначте градусну міру кута MON, якщо:

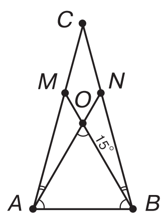
а) $\angle MKD = 2\angle KMO$ (мал. 19);

б) $\angle CAB + \angle CBA = 150°$ (мал. 20);

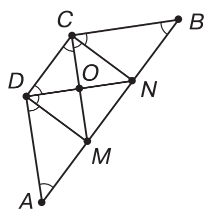
в) $\angle DOC = 2\angle DAB$, $\angle CDA + \angle DAB = 180°$ (мал. 21).



Мал. 19

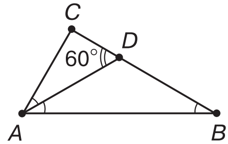


Мал. 20

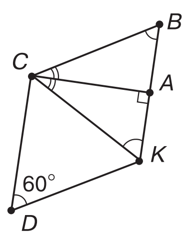


Мал. 21

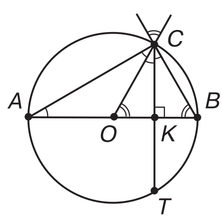
52. За даними на малюнках 22–24 визначте градусні міри кутів трикутника ABC.



Мал. 22



Мал. 23



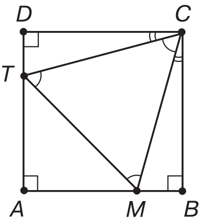
Мал. 24

53. Доведіть рівності:

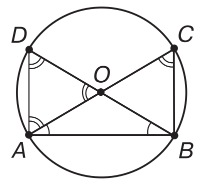
а) $\angle CMB = 5\angle MCB$ (мал. 25);

б) $\angle ACB = 90^\circ$ (мал. 26);

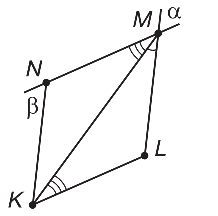
в) $\beta = \alpha$ (мал. 27).



Мал. 25

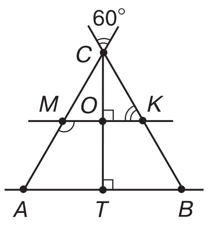


Мал. 26

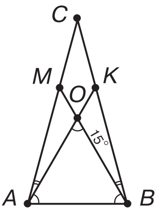


Мал. 27

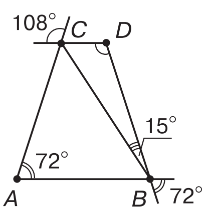
54. За даними на малюнках 28–30 визначте зовнішні кути трикутника ABC.



Мал. 28



Мал. 29

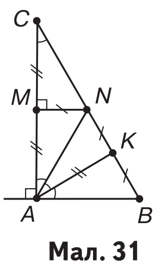


Мал. 30

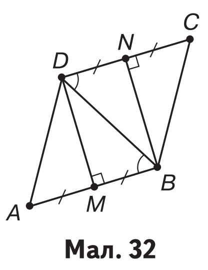
55. Доведіть рівність трикутників двома способами – за першою та другою ознаками рівності трикутників:

а) $\Delta\, CMN$ і $\Delta\, AKN$ (мал. 31); б) $\Delta\, AMD$ і $\Delta\, DNB$ (мал. 32);

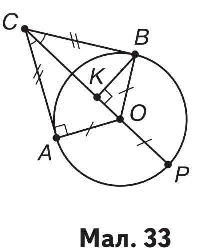
в) $\Delta\, BOK$ і $\Delta\, AOK$ (мал. 33), якщо $\angle AKB$ – розгорнутий.



Мал. 31



Мал. 32

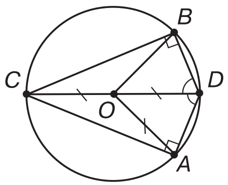


Мал. 33

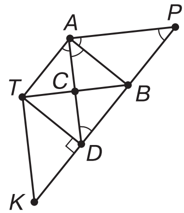
56. За даними на малюнках 34–36 доведіть, що трикутник ABC є рівнобедреним:

а) за однією з ознак рівнобедреного трикутника;

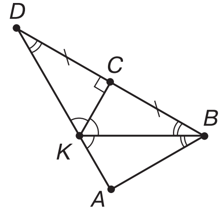
б) за рівністю певних трикутників.



Мал. 34



Мал. 35

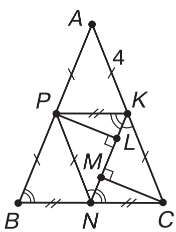


Мал. 36

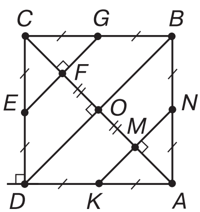
57. За малюнком 37 визначте довжину відрізка KN, якщо $\angle APK = \angle KCB$.

58. За малюнком 38 визначте градусну міру $\angle ABC$.

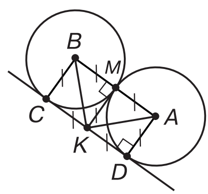
59. За малюнком 39 визначте градусну міру $\angle KCB$.



Мал. 37



Мал. 38



Мал. 39

60. Доведіть рівність трикутників:

а) $\Delta\, ACB$ і $\Delta\, POT$ (мал.40);

б) $\Delta\, ABC$ і $\Delta\, TSR$ (мал. 41);

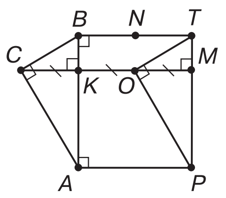
в) $\Delta\, ACB$ і $\Delta\, KMT$ (мал. 42).

61. Визначте периметр трикутника ABC, якщо:

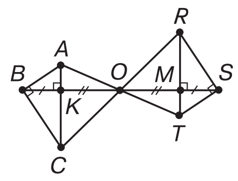
а) $P_{\Delta\, CAK} - P_{\Delta\, BKA} = 81$ (мал. 43);

б) $P_{\Delta\, RSD} - P_{\Delta\, MNQ} = 15$ (мал. 44);

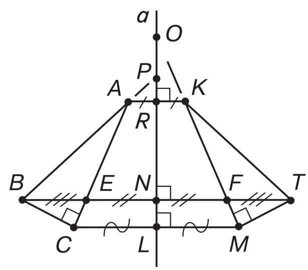
в) $DM = 1$ (мал. 45).



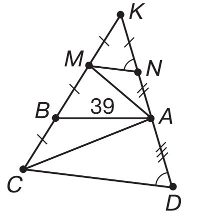
Мал. 40



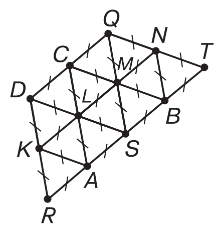
Мал. 41



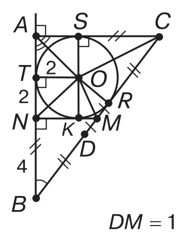
Мал. 42



Мал. 43

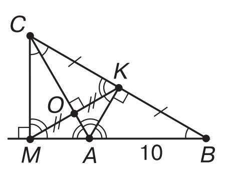


Мал. 44

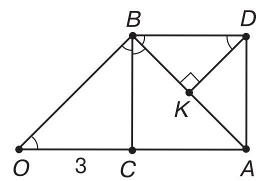


Мал. 45

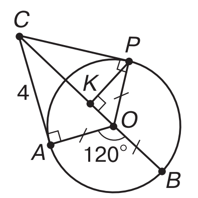
62. За даними на малюнках 46–48 визначте відстань від точки A до прямої BC.



Мал. 46



Мал. 47



Мал. 48

63. Бісектриси AA_1 і CC_1 трикутника ABC перетинаються в точці I. Доведіть, що $\angle AIC = 90^\circ + 0{,}5\ \angle B$.

64. У трикутнику ABC проведено висоти AE, BM і CP. Відомо, що EM паралельна AB, EP паралельна AC. Доведіть, що MP паралельна BC.

65. У $\Delta\, ABC$ через точку перетину бісектрис кутів B і C проведено пряму MN паралельно BC до перетину зі сторонами AB і AC відповідно у точках M і N. Знайдіть залежність між відрізками MN, BM і CN.

66. Чи існує трикутник, у якого один з кутів удвічі більший за другий кут, а третій кут на 130° більший за другий?

67. Як відносяться гострі кути прямокутного трикутника, у якому бісектриса прямого кута дорівнює одному з катетів?

68. У трикутнику одна сторона удвічі більша за іншу. Чи правильно, що один з кутів трикутника дорівнює 30°?

69. У трикутнику ABC сума сторін AB і BC становить 50% від суми сторін AC і AB, а чверть сторони AC дорівнює третині різниці сторін AB і BC. Знайдіть сторони трикутника ABC, якщо його периметр дорівнює 23 см.

70. У трикутнику ABC проведено медіану AM. Периметр трикутника ABM дорівнює 16 см, а периметр трикутника ACM – 24 см. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $AM = 10$ см.

71. Як визначити відстань між точками A і B, між якими є перешкода?

72. На продовженнях сторін AB, BC і CA рівностороннього трикутника (рахуючи від точок B, C і A) позначено відповідно точки K, E і D так, що $AK = BE = CD = \frac{AB}{2}$. Який вид трикутника KED?

73. Всередині рівнобедреного трикутника ABC з основою BC позначено точку M так, що $\angle MBC = 30°$, $\angle MCB = 10°$. Знайдіть кут AMC, якщо $\angle BAC = 80°$.

74. У трикутнику ABC проведено висоти AA_1, BB_1 і CC_1, які перетинаються в точці H. Доведіть, що $\angle AHB_1 = \angle ACB$.

75. Висоти трикутника, перетинаючись, утворюють кути 30°, 45° і 105°. Обчисліть кути трикутника.

76. У якому трикутнику достатньо знати кут між двома висотами, щоб визначити його кути?

77. У трикутнику ABC бісектриса зовнішнього кута ABM паралельна стороні AC. Встановіть вид цього трикутника.

78. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = AC$) бісектриси

AA_1 і BB_1 перетинаються в точці O. Знайдіть кут BAA_1, якщо $\angle BOA = 130°$.

79. Як за допомогою косинця з кутом 50° та лінійки побудувати перпендикулярні прямі?

80. Як за допомогою косинця з кутом 50° та лінійки побудувати паралельні прямі?

81. Який трикутник треба взяти, щоб розрізавши його, дістати такі види трикутників: рівносторонній, рівнобедрений, різносторонній, прямокутний, гострокутний, тупокутний?

82. Як рівнобедрений трикутник можна розрізати на чотири рівнобедрені трикутники?

83. Як розрізати трикутник з кутами 15°, 105° і 60° на три рівнобедрені трикутники?

84. Чи можна розрізати різносторонній трикутник на два рівних трикутники?

85. Зовнішні кути трикутника відносяться, як 4 : 3 : 5. Знайдіть відношення кутів трикутника.

86. Зовнішні кути трикутника відносяться, як $m : n : p$. Знайдіть відношення кутів трикутника.

87. У трикутнику ABC $\angle B = 120°$. AA_1, BB_1, CC_1 − бісектриси трикутника ABC. Доведіть, що $\angle A_1B_1C_1 = 90°$.

88. Треба знайти кути трикутника, у якого висота вдвічі менша від бісектриси. Чи достатньо наведено даних для цього? Якими даними слід доповнити умову, щоб задача мала розв'язок?

89. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 8 см, а висота, проведена до гіпотенузи − 2 см.
Знайдіть кути трикутника.

90. Медіана, проведена з вершини прямого кута трикутника, дорівнює 8 см. Гострий кут трикутника дорівнює 75°. Знайдіть висоту, проведену до гіпотенузи.

91. У трикутнику ABC кут A дорівнює 30°. Медіана BM дорівнює висоті CH. Знайдіть кути трикутника ABC.

92. З вершини прямого кута трикутника ACB проведено висоту CH і медіану CM. Трикутник CHM − рівнобедрений.

Які елементи трикутника ABC можна знайти? Складіть задачі та розв'яжіть їх.

93. Висота і медіана трикутника, які проведено з однієї вершини, ділять кут трикутника на три рівні кути. Доведіть, що даний кут трикутника – прямий.

94. Бісектриса і медіана, проведені з вершини прямого кута трикутника, утворюють рівнобедрений трикутник. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника.

95. За одним із гострих кутів прямокутного трикутника визначте кут між висотою і медіаною, які проведено з вершини прямого кута.

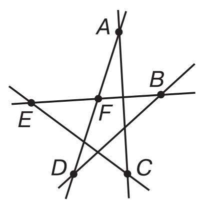
96. Доведіть, що у прямокутному трикутнику з нерівними катетами бісектриса прямого кута ділить навпіл кут між висотою і медіаною, проведеними з вершини прямого кута.

97. У гострокутному трикутнику ABC з однієї вершини проведено висоту AM, з іншої – медіану CD, а з третьої – бісектрису BP. При їх перетині утворився трикутник SKL. Доведіть, що він не може бути рівностороннім.

98. У рівнобедреному трикутнику ABC $\angle ABC = 100°$. Всередині трикутника позначено точку M так, що $\angle MAB = 10°$, $\angle MBA = 20°$. Визначте градусну міру кута BMC.

99. На бічних сторонах AB та BC рівнобедреного трикутника ABC з кутом $20°$ при вершині позначено відповідно точки P і M так, що $BM = AP = AC$. Знайдіть градусну міру кута BPM.

100. Знайдіть суму кутів при вершинах A, B, C, D, E фігури, яку зображено на мал. 49.



Мал. 49

101. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) кут при вершині B дорівнює $20°$. На сторонах AB та BC позначено відповідно точки E і F так, що $\angle ACE = 60°$, $\angle CAF = 50°$. Знайдіть градусну міру кута CEF.

102. Доведіть, що в будь-якому трикутнику сума медіан менша від периметра трикутника.

103. У трикутнику довжини двох сторін відповідно дорівнюють 3,14 та 0,67. Знайдіть довжину третьої сторони, якщо відомо, що вона виражається цілим числом.

104. Доведіть, що прямі, які містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці.

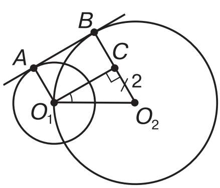
105. У трикутнику ABC ($AB > AC$) проведено медіану AM. Який кут більший – BAM чи CAM?

106. У трикутнику ABC ($AC > AB$) проведено бісектрису AD. Який кут більший – ADB чи ADC?

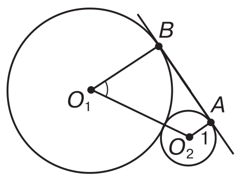
§ 4. Коло і круг. Геометричні побудови

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

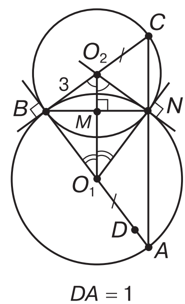
107. За даними на малюнках 50–52 визначте радіус кола з центром у точці O_1, якщо точка O_2 – центр іншого кола.



Мал. 50



Мал. 51



Мал. 52

108. Визначте градусну міру вказаних кутів, якщо точка O – центр кола:

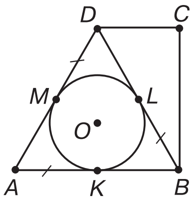
а) $\angle KOA$ (мал. 53);

б) $\angle COK$ (мал. 54), якщо $\angle DKC : \angle DAB = 4 : 7$;

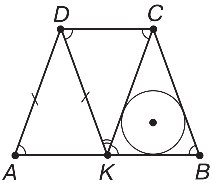
в) $\angle AMO$ (мал. 55).

109. На скільки частин розбивають круг три хорди?

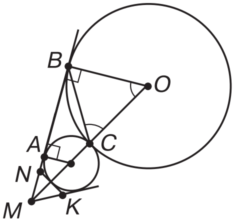
110. На площині задано точку O. Чи можна розмістити п'ять кругів так, щоб довільний промінь з початком у точці O перетинав би не менше двох кругів.



Мал. 53



Мал. 54



Мал. 55

111. На продовженні найбільшої сторони AC трикутника ABC відкладено відрізок CM, що дорівнює відрізку BC. Доведіть, що $\angle ABM$ – тупий.

112. Коло, вписане у трикутник ABC, дотикається до сторони BC в точці M. Доведіть, що відрізок AM більший за діаметр цього кола.

113. Доведіть, що сума катетів прямокутного трикутника дорівнює сумі діаметрів вписаного і описаного кіл.

114. Через точки дотику вписаного у трикутник кола проведено прямі, які відповідно паралельні бісектрисам протилежних кутів. Доведіть, що ці прямі перетинаються в одній точці.

115. Чи обов'язково трикутник є рівнобедреним, якщо центр вписаного у нього кола рівновіддалений від середин: а) двох його сторін; б) трьох його сторін?

116. Якщо відстань від центра кола до прямої дорівнює радіусу кола, то ця пряма є дотичною до кола. Доведіть.

117. Три кола однакового радіуса попарно дотикаються одне до одного. Доведіть, що їх центри є вершинами рівностороннього трикутника.

118. Скільки точок перетину можуть мати три кола? Розгляньте різні випадки. Зробіть малюнки.

119. Скільки точок перетину можуть мати чотири кола? Розгляньте різні випадки. Зробіть малюнки.

120. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) проведено висоту CD. Доведіть, що $r + r_1 + r_2 = h$, де r, r_1, r_2 – радіуси кіл, вписаних відповідно у трикутники ABC, ACD, CBD, h – довжина висоти CD.

121. У рівнобедреному трикутнику ABC на основі AC позначено точку M так, що $AM = a$. У трикутники ABM і CBM вписано кола. Знайдіть MC, якщо відстань між точками дотику цих кіл до сторони BM дорівнює m.

122. У рівнобедреному трикутнику ABC на основі AB позначено точку D. Відомо, що $AD = a$, $DB = b$ ($a > b$). Кола, вписані в трикутники ACD і BCD, дотикаються до прямої CD відповідно у точках L і F. Знайдіть LF.

123. У рівнобедрений трикутник з основою 12 см вписано коло, до якого проведено три дотичних так, що вони відтинають від даного трикутника три малих трикутники. Сума периметрів малих трикутників дорівнює 48 см. Знайдіть бічну сторону даного трикутника.

124. Чи можуть чотири кола дотикатися одне до одного?

125. Чи можуть чотири кола однакового радіуса дотикатися одне до одного?

126. Два рівні кола, які дотикаються зовнішнім чином, дотикаються до третього кола внутрішнім чином. Сполучивши центри цих кіл, дістали трикутник, периметр якого дорівнює 18 см. Знайдіть радіус більшого кола.

127. Дано кола радіусів 28 і 12. Одне коло міститься всередині другого, найкоротша відстань між ними дорівнює 10. Визначте відстань між центрами даних кіл.

128. Найменша відстань між двома колами зі спільним центром дорівнює 2, а найбільша – 16. Знайдіть радіуси цих кіл. Сформулюйте задачу в загальному вигляді та розв'яжіть її.

129. У більшому з двох концентричних кіл проведено дві перпендикулярні хорди, дотичні до меншого. Кожна з хорд поділяється другою на відрізки 2 і 8.
Знайдіть радіус меншого кола.

130. Радіус одного з двох кіл зі спільним центром дорівнює 0,75 радіуса другого кола. Ширина кільця, утвореного цими колами, дорівнює 12. Знайдіть радіус меншого кола. Сформулюйте задачу в загальному вигляді та розв'яжіть її.

131. Доведіть, що частини січної, що лежать між колами зі спільним центром, рівні.

132. Два кола радіусів r і R дотикаються зовнішнім чином. Спільна зовнішня дотична дотикається до кіл у точках A і B. $AB = R - r$. Знайдіть кут між спільними зовнішніми дотичними до цих кіл.

133. На колі ω позначено точку C і дві діаметрально протилежні точки A і B. Дотична до кола ω у точці B і пряма AC перетинаються в точці M. Доведіть, що дотична, яку проведено до кола ω в точці C, ділить відрізок BM навпіл.

134. Точка B лежить на відрізку AC. На відрізках AB, BC, AC як на діаметрах побудовано кола ω, ω_1, ω_2 з центрами O, O_1, O_2. Пряма, яка проходить через точку B, перетинає коло ω в точках P і Q, а кола ω_1 і ω_2 у точках R і S. Доведіть, що $PR = QS$.

135. Пряма a перетинає коло з центром O. Через дану точку M проведіть січну так, щоб її частина, яка відтинається даним колом, ділилась навпіл точкою її перетину з прямою a.

136. Із вершини B прямого кута трикутника ABC проведено медіану BD. Нехай M – точка дотику кола, вписаного у трикутник ABD, до його сторони AD. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо точка M ділить відрізок AD на рівні частини.

137. Дано точки A і B, пряму a та відрізок довжиною c. Які геометричні місця точок можна побудувати?

138. Побудуйте коло даного радіуса, яке дотикається до двох даних кіл.

139. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим кутом і радіусом вписаного кола.

140. Навколо даного кола опишіть трикутник, у якого відомі два кути.

141. Побудуйте геометричне місце основ усіх перпендикулярів, проведених з даної точки A до прямих, які паралельні даній прямі c.

142. Дано кут ABC. Побудуйте геометричне місце точок, відстань від яких до сторони AB більша за їх відстань до сторони BC.

143. За допомогою циркуля і лінійки поділіть прямий кут на три рівні частини.

144. Побудуйте кола з центрами у вершинах даного трикутнику, які попарно дотикаються.

145. Побудуйте кола з центрами у вершинах даного рівнобедреного трикутника, одна пара яких дотикається зовнішнім чином, а інші дві пари – внутрішнім чином.

146. Через дану точку проведіть пряму, паралельну даній прямій.

147. Точка M лежить на колі. Через точку M проведіть дотичну до кола.

148. Проведіть дотичну до кола, паралельну даній прямій.

149. У кут, градусна міра якого дорівнює $60°$, впишіть коло даного радіуса.

150. Через дану точку M, що лежить у внутрішній області даного кута ABC, проведіть пряму, яка відтинає від нього рівнобедрений трикутник.

151. Побудуйте коло даного радіуса, що дотикається до даної прямої і до даного кола.

152. Побудуйте коло, що дотикається до двох даних паралельних прямих l і m та до даного кола, що лежить між цими прямими.

РОЗДІЛ 2 Задачі до рубрики «Дізнайтеся більше»

§ 5. Вимірювання відстаней і кутів

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

153. Кути трикутника мають градусну міру: 1) $40°$, $60°$, $80°$; 2) $27°30'$, $50°30'$, $102°$. Яка міра цих кутів у:
а) радіанах;
б) градах;
в) румбах?

154. Чи можуть кути трикутника дорівнювати:
а) 1 радіан, 2 радіани та $8°6'$;
б) 40 град, 60 град і 100 град;
в) 5 румбів, 1 радіан і 50 град?

155. Середнє арифметичне двох кутів трикутника дорівнює $\frac{8}{9}d$, а різниця найбільшого і найменшого кутів дорівнює $\frac{13}{18}d$. Знайдіть кути трикутника.

156. Зовнішній кут трикутника дорівнює $\frac{5}{9}d$, а різниця двох кутів трикутника, не суміжних з ним, дорівнює $\frac{2}{9}d$. Знайдіть кути трикутника.

157. При перетині двох прямих утворилися кути, сума градусних мір двох з яких дорівнює:

а) $\frac{2}{3}d$; б) $\frac{4}{7}d$; в) $\frac{5}{4}d$.

Знайдіть всі кути, які утворюють дані прямі із січною.

158. Кут AOB дорівнює: а) $40°$; б) $90°$; в) $140°$. Через точку C, що лежить у внутрішній області даного кута, проведено прямі, паралельні його сторонам. Знайдіть кути, утворені цими прямими. Під якими кутами вони перетинають сторони даного кута? Скільки випадків треба розглянути?

159. Знайдіть два кути із взаємно паралельними сторонами, якщо вони відносяться, як: 1) 2 : 3; 2) 1: 5.

160. Яка градусна міра двох кутів із взаємно паралельними сторонами, якщо один із них: 1) менший від другого на 58°; 2) більший за другий на 11°?

161. Визначте градусну міру двох кутів із взаємно паралельними сторонами, якщо третина одного з них дорівнює половині іншого.

162. Три кути мають відповідно паралельні сторони. Один із них дорівнює сумі двох інших. Яка градусна міра даних кутів?

163. Знайдіть три кути із взаємно паралельними сторонами, якщо їх сума дорівнює: а) 135°; 2) 335°.

§ 6. Зовнівписане коло

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

164. У трикутника ABC сторони дорівнюють $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $CA = 4$ см. Дане коло проведено так, що воно дотикається до сторони AB у точці M, продовження сторони BC – у точці P, а продовження сторони AC – у точці N. Знайдіть довжини відрізків BP, PC, AM і AN.

165. За даними попередньої задачі побудуйте трикутник ABC і дане коло за допомогою циркуля і лінійки. Виміряйте довжини відрізків BP, PC, AM, AN. Порівняйте результати вимірювання з результатами проведених обчислень.

166. Знайдіть радіуси зовнівписаних кіл до прямокутного трикутника зі сторонами: а) 3 см, 4 см, 5 см; б) 9 м, 12 м, 15 м; в) a, b, c.

167. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 17 м, а сума радіусів вписаного в трикутник кола і зовнівписаного для нього кола, що дотикається до гіпотенузи, дорівнює 23 м. Знайдіть катети трикутника.

168. У трикутнику ABC точки M, N, D – центри зовнівписаних кіл. Доведіть, що сторони трикутника MND перпендикулярні до відповідних бісектрис трикутника ABC.

169. Доведіть, що для будь-якого трикутника існують зовнівписані кола. Скільки таких кіл?

§ 7. Прямі та обернені твердження

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

У задачах 18–30 сформулюйте твердження, обернене до даного. Якщо обернене твердження правильне, то сформулюйте разом пряме і обернене твердження зі словами «тоді і тільки тоді». Якщо обернене твердження не є правильним, то наведіть приклад, який задовольняє його умову, але суперечить його вимозі.

170. Сума суміжних кутів дорівнює $180°$.

171. Вертикальні кути рівні.

172. Якщо бісектриси внутрішніх односторонніх кутів при двох прямих і січній утворюють із січною кути, які в сумі дорівнюють $90°$, то дані прямі паралельні.

173. Якщо бісектриси внутрішніх різносторонніх кутів при двох прямих і січній не перетинаються, то прямі паралельні.

174. Медіана, проведена до основи рівнобедреного трикутника, поділяє його на два трикутники, периметри яких рівні.

175. Якщо два трикутники мають по два рівних кути, то і треті їх кути рівні.

176. Пряма, перпендикулярна до бісектриси кута, відтинає на його сторонах рівні відрізки.

177. Якщо в трикутнику медіана, проведена до основи, є висотою, то такий трикутник рівнобедрений.

178. Бісектриса зовнішнього кута при вершині рівнобедреного трикутника паралельна його основі.

179. Якщо медіана трикутника дорівнює половині сторони, до якої вона проведена, то трикутник прямокутний.

180. Якщо MN і KP діаметри кола, то хорди MK і PN рівні і паралельні.

181. Якщо з точки кола проведено дві рівні хорди і діаметр, то цей діаметр ділить кут між хордами навпіл.

182. Рівні трикутники мають рівні периметри.

§ 8. Задачі на побудову

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

183. Поділіть даний відрізок навпіл за допомогою лише косинця.

184. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте трикутник за двома сторонами a і b ($b > a$), якщо кут трикутника, протилежний до однієї з даних сторін, утричі більший за кут, що лежить проти другої сторони.
Розв'язавши задачу, виконайте дослідження.

185. За допомогою циркуля і лінійки поділіть даний відрізок AB на чотири рівні частини, провівши лише шість ліній.

186. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте трикутник за стороною a, медіаною m, проведеною до цієї сторони, якщо протилежна до неї вершина лежить на колі, що описане навколо даного трикутника.
Скільки розв'язків може мати задача?

187. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте трикутник за стороною a, медіаною m, проведеною до цієї сторони, якщо протилежна до неї вершина лежить на даному колі.
Скільки розв'язків може мати задача?

188. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте трикутник за стороною a, медіаною m, проведеною до цієї сторони, якщо протилежна до неї вершина віддалена від точки A на задану відстань d.
Скільки розв'язків може мати задача?

189. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте коло даного радіуса, яке проходить через точку A і відтинає на сторонах даного кута рівні відрізки.
Скільки розв'язків може мати задача?

190. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте коло, яке проходить через точку A і відтинає на сторонах даного кута рівні відрізки.
Скільки розв'язків може мати задача?

191. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте коло, яке дотикається до трьох даних прямих.

192. Побудуйте за допомогою лінійки з поділками через 1 см пряму, перпендикулярну до даної прямої.

193. За допомогою циркуля поділіть хорду кола навпіл.

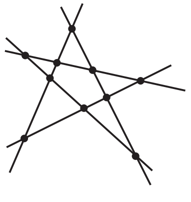
194. Дано коло і дві точки. За допомогою циркуля побудуйте точки перетину кола і прямої, що проходить через дані точки.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

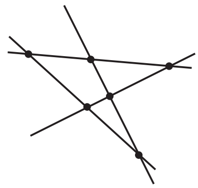
РОЗДІЛ 1

§ 1

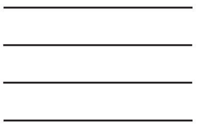
1. 6, 9. **2.** 4, 8. **3.** 4, 2, 4. **4.** *Вказівка*: дані точки відтинають на прямій 5 відрізків. Якщо між кожними двома сусідніми точками взяти ще по одній точці, то нових точок буде п'ять. Тому сума числа усіх позначених точок дорівнює 11. Одинадцять точок відтинають на прямій 10 відрізків, тому можемо позначити між кожними двома сусідніми 10 точок, тоді 10 + 11 = 21 – непарне число і т. д. **5.** *Вказівка:* якщо на прямій взяти парне число точок, то відрізків, які ними визначаються, буде непарне число. І якщо між кожними двома сусідніми точками взяти ще по одній точці, то цих точок буде непарне число. Тому сума числа усіх позначених точок буде непарне число. Якщо ж точок на прямій буде непарне число, то взятих між ними точок буде парне число. Кількість усіх позначених точок – непарне число і т. д. **6.** Шукане розміщення прямих показано на малюнку 56. **7.** Шукане розміщення прямих показано на малюнку 57. **8.** Площину можна розбити на п'ять (мал. 58), вісім (мал. 59), дев'ять (мал. 60), десять (мал. 61) і одинадцять (мал. 62) частин. **9.** Площину можна розбити на чотири, шість або сім частин. *Вказівка*: розгляньте різні випадки взаємного розміщення трьох прямих. **10.** Спосіб тільки один: 4 відрізки по 7 см і 6 відрізків по 12 см. *Вказівка*: нехай x – кількість відрізків по 7 см, y – кількість відрізків по 12 см. За умовою $7x + 12y = 100$. Звідси $7x = 4(25 - 3y)$. Тоді x ділиться націло на 4, а $(25 - 3y)$ ділиться націло на 7. Оскільки $25 - 3y < 25$, то ця різниця дорівнює або 21, або 14, або 7. Із цих трьох випадків можливий тільки третій. Тоді $x = 4$, $y = 6$. **11.** $2 \cdot 11 - 7 \cdot 3 = 1$ (см). **12.** 82 см. **13.** 12,5 см. **14.** $AM = 1{,}8$ см. **15.** $AM = 7$ см. **21.** 67°30′. **22.** 90°. **23.** 40°. **25.** Можливі 4 випадки: 100°, 50°, 70°, 20°. **26.** Так. *Вказівка*: $17° - (180° - 10 \cdot 17°) = 7°$. **27.** *Вказівка*: $19 \cdot 19° - 360° = 1°$. **28.** Так. *Вказівка*: $35° = 2 \cdot 20° + 30° - 45°$. **29.** 71°, 41°. *Вказівка*: $\alpha + \beta = 112°$, $\alpha - \beta = 30°$. Тоді $2\alpha = 142°$. **30.** 1440. **31.** Можуть. *Вказівка*: розташуйте ці точки на одній прямій. **32.** 7. **33.** $2n - 3$. *Вказівка*: нехай A і B – точки,



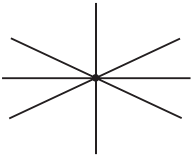
Мал. 56



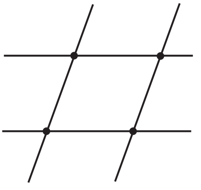
Мал. 57



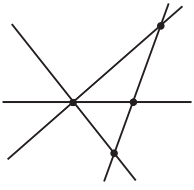
Мал. 58



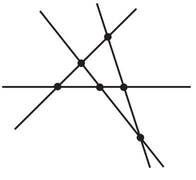
Мал. 59



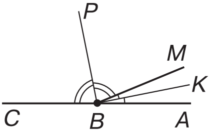
Мал. 60



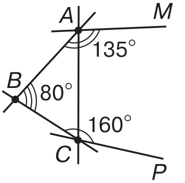
Мал. 61



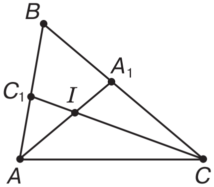
Мал. 62



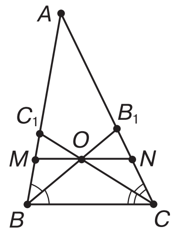
Мал. 63



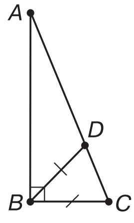
Мал. 64



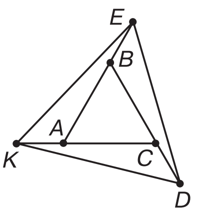
Мал. 65



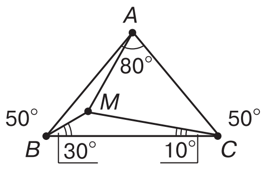
Мал. 66



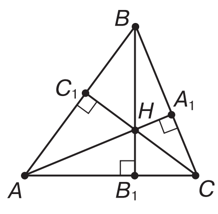
Мал. 67



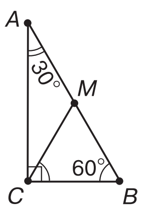
Мал. 68



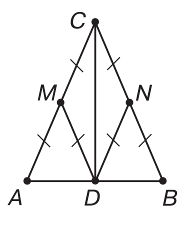
Мал. 69



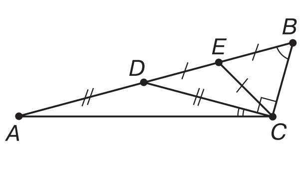
Мал. 70



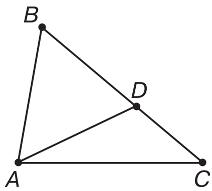
Мал. 71



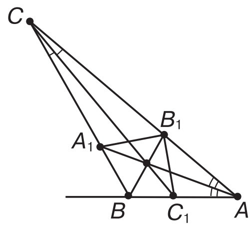
Мал. 72



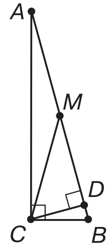
Мал. 73



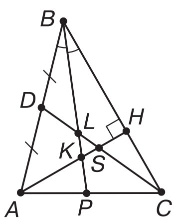
Мал. 74



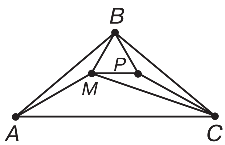
Мал. 75



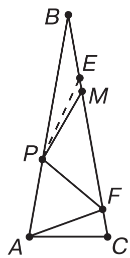
Мал. 76



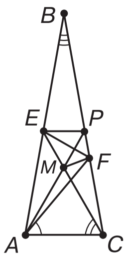
Мал. 77



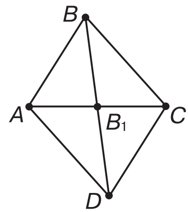
Мал. 78



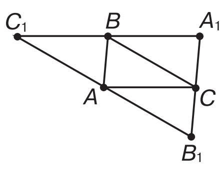
Мал. 79



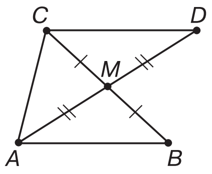
Мал. 80



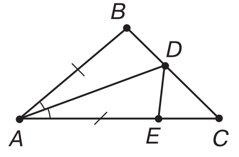
Мал. 81



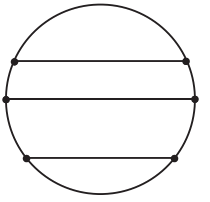
Мал. 82



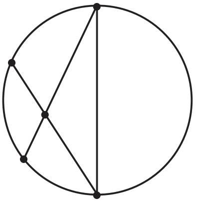
Мал. 83



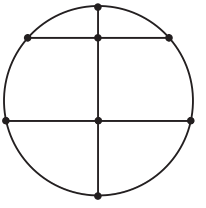
Мал. 84



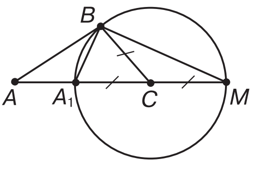
Мал. 85



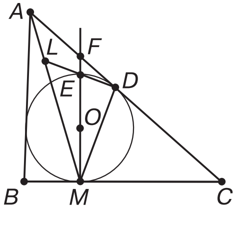
Мал. 86



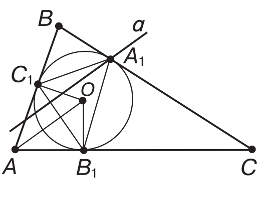
Мал. 87



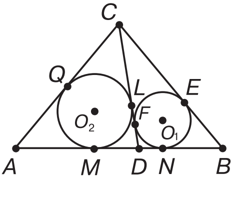
Мал. 88



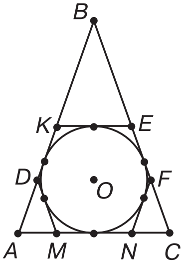
Мал. 89



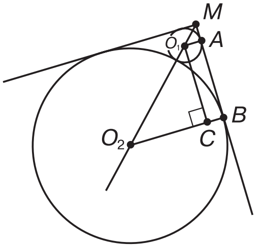
Мал. 90



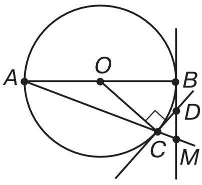
Мал. 91



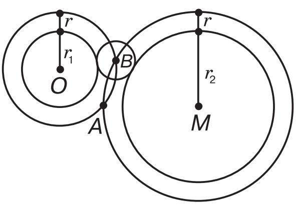
Мал. 92



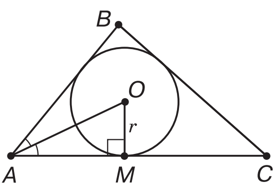
Мал. 93



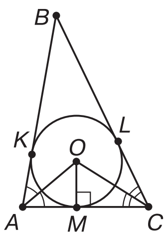
Мал. 94



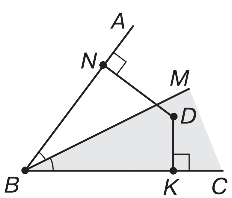
Мал. 95



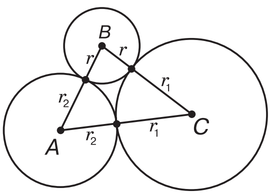
Мал. 96



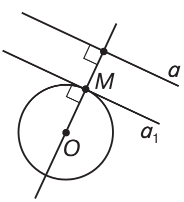
Мал. 97



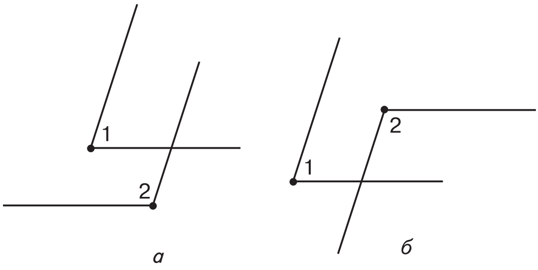
Мал. 98



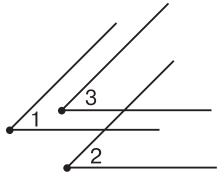
Мал. 99



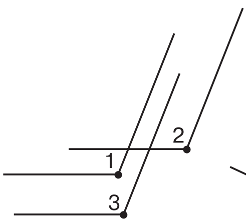
Мал. 100



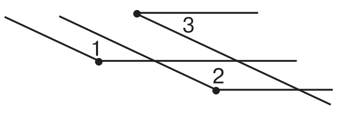
Мал. 106



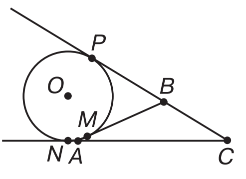
Мал. 107



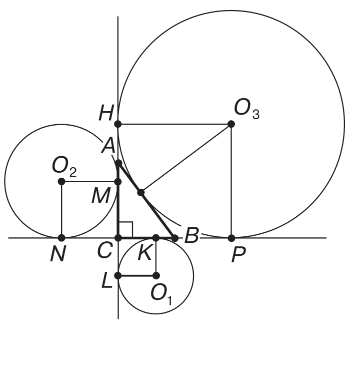
Мал. 108



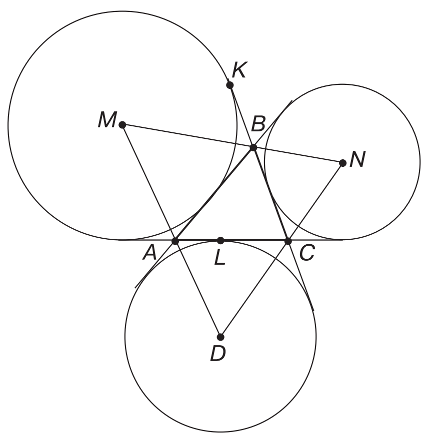
Мал. 109



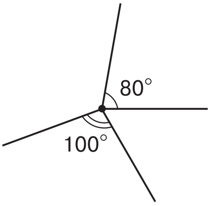
Мал. 110



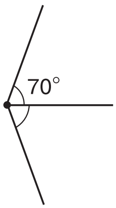
Мал. 111



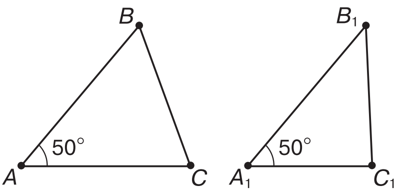
Мал. 112



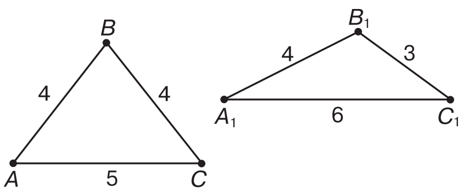
Мал. 113



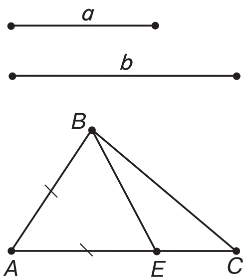
Мал. 114



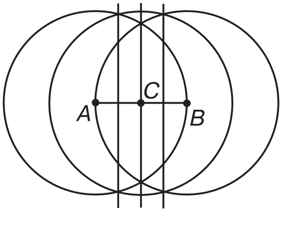
Мал. 115



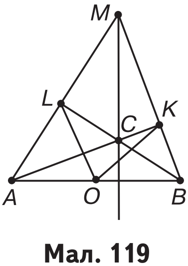
Мал. 116



Мал. 117



Мал. 118



Мал. 119

відстань між якими найбільша. З'єднаємо точку A з усіма точками, крім точки B. Середини отриманих $n - 2$ відрізків не співпадають і лежать у крузі з центром A радіуса $\frac{AB}{2}$. З'єднаємо точку B з усіма точками, крім точки A. Середини отриманих $n - 2$ відрізків не співпадають і лежать у крузі з центром B радіуса $\frac{AB}{2}$. Побудовані два круги мають єдину спільну точку – середину відрізка AB. Отже, ми дістали $2n - 3$ середин відрізків. Це можливо, наприклад, коли точки лежать на одній прямій на рівних відстанях одна від одної. Отже, найменша кількість середин відрізків дорівнює $2n - 3$.

§ 2

34. 90°. **35.** 30°. **36.** 45°. **37.** 67,5°. *Вказівка*: нехай α – шуканий кут. За умовою $\frac{\alpha}{3} = \frac{180^\circ - \alpha}{5}$. Звідси $\alpha = 67{,}5^\circ$. **38.** 72°, 108°. *Вказівка*: нехай α – шуканий кут, тоді кут $(180^\circ - \alpha)$ – суміжний з ним. За умовою, $0{,}2 \cdot 180^\circ = 180^\circ - 2\alpha$. Звідси $\alpha = 72^\circ$. **39.** Так. *Вказівка*: нехай α і β – дані кути. За умовою, $7\alpha = 3\beta$ і $\beta - \alpha = 72^\circ$. Звідси $\alpha = 54^\circ$, $\beta = 126^\circ$. Кути α і β суміжні, оскільки $54^\circ + 126^\circ = 180^\circ$. **40.** Ні. *Вказівка*: нехай α і β – дані кути. За умовою, $13\alpha = 2\beta$ і $\beta - \alpha = 110^\circ$. Звідси $\alpha = 20^\circ$, $\beta = 130^\circ$. Кути α і β не суміжні, оскільки $20^\circ + 130^\circ \neq 180^\circ$. **41.** 22,5°, 157,5°. *Вказівка*: нехай $\angle ABM$ і $\angle MBC$ – суміжні кути (мал. 63). Нехай $\angle ABM = \alpha$. Проведіть бісектриси BK і BP кутів ABM і MBC відповідно. $\angle KBC = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\angle PBA = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. За умовою, $3(180^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 5(90^\circ + \frac{\alpha}{2})$. Отже, $\alpha = 22{,}5^\circ$. **42.** 135°, 45°. **43.** Ні. *Вказівка*: $0{,}75 \cdot 180^\circ = 135^\circ$. Кут між бісектрисами суміжних кутів дорівнює 90°, а $90^\circ \neq 135^\circ$. **44.** Так. **45.** $CD \parallel MF$, $KM \parallel AB$, $AC \parallel MD$ (мал. 13); $AB \parallel FC \parallel ED$, $AF \parallel BE \parallel CD$, $BC \parallel AD \parallel FE$ (мал. 14); $AK \parallel BD$, $AB \parallel DK$, $AD \parallel BC$, $CD \parallel KB$ (мал. 15). **46.** 40° (мал. 16); 90° (мал. 17); 90° (мал. 18). **47.** Ні. *Вказівка*: проведіть січну AC (мал. 64). $\angle MAC + \angle PCA = 135^\circ - \angle BAC + 160^\circ - \angle BCA$.

Оскільки $\angle BAC + \angle BCA + 80° = 180°$, то $\angle MAC + \angle PCA = 295° - 100° = 195° \neq 180°$. **48.** 95°. **49.** 108°, 72°. *Вказівка*: нехай α – градусна міра більшого із суміжних кутів. Тоді другий кут дорівнює $(180° - \alpha)$. Отже, $\alpha - (180° - \alpha) = 2\alpha - 180°$. За умовою задачі, $\alpha = 3(2\alpha - 180°)$. Звідси $5\alpha = 540°$, $\alpha = 180°$. **50.** *Вказівка*: через довільну точку O площини проведіть сім прямих, які паралельні даним. Кути між побудованими прямими дорівнюють кутам між відповідними даними прямими. Побудовані прямі ділять 360° на 14 частин. Ці кути або дорівнюють $\frac{360°}{14} = \frac{180°}{7} < 26°$, або існує кут, що менший від $\frac{180°}{7}$, тобто менший від 26°.

§ 3

51. а) 120°; б) 60°; в) 90°. **52.** 30°, 60°, 90° (мал. 22); 30°, 60°, 90° (мал. 23); 30°, 60°, 90° (мал. 24). **54.** 120°, 120°, 120° (мал. 28); 105°, 105°, 150° (мал. 29); 108°, 129°, 123° (мал. 30). **57.** 4. **58.** 90°. **59.** 90°. **61.** а) 159; б) 30; в) 24. **62.** 5 (мал. 46); 3 (мал. 47); 2 (мал. 48). **63.** *Вказівка*: у ΔACI $\angle CAI + \angle ACI + \angle AIC = 180°$ (мал. 65). $\angle AIC = 180° - \angle CAI - \angle ACI = 180° - \frac{1}{2}(\angle CAB + \angle ACB) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle CBA) = 90° + 0{,}5 \angle CBA$. **65.** *Вказівка*: нехай BO і CO – бісектриси внутрішніх кутів трикутника ABC (мал. 66). Трикутники BOM і CON рівнобедрені. Отже, $MN = BM + CN$. **67.** 3 : 1. *Вказівка*: у ΔABC $\angle B$ – прямий, BD – бісектриса кута B (мал. 67). Нехай $BC = BD$ і ΔBCD – рівнобедрений. $\angle DCB = (180° - 45°) : 2 = 67{,}5°$. Тоді $\angle BAC = 22{,}5°$. $\angle DCB : \angle BAC = 3 : 1$. **68.** Твердження буде правильним, якщо трикутник прямокутний. **69.** 10 см, 1 см, 12 см. **70.** 20 см. **71.** *Вказівка*: позначте точку C так, щоб на відрізках AC та BC перешкоди не було. Побудуйте кут ACD, рівний куту ACB, і відкладіть $CD = CB$. Тоді $\Delta ACD = \Delta ACB$. Звідси $AD = AB$. **72.** Так. *Вказівка*: $\angle KAE = \angle EBD = \angle DCK = 180° - 60° = 120°$ (мал. 68). Оскільки $KC = EA = DB = \frac{AB}{2} + AB$, $AK = BE = CD = \frac{AB}{2}$, то трикутники KBE, ECD, *DAK* рівні за першою ознакою. Тоді $KE = ED = DK$. Отже, ΔKED – рівносторонній. **73.** 70°. *Вказівка*: проведіть бісектрису *AD* (мал. 69). Пряма *BM* перетинає *AD* у точці *O*. Доведіть, що $\Delta AOC = \Delta\ MOC$. Тоді $MC = AC$. ΔAMC – рівнобедрений. Оскільки $\angle ACM = 40°$, то $\angle AMC = \angle MAC = 70°$. **74.** *Вказівка*: у ΔACA_1 $\angle A = 90° - \angle CAA_1$ (мал. 70). У ΔAHB_1 $\angle AHB_1 = 90° - \angle HAB_1$. Тоді $\angle AHB_1 = \angle ACA_1 = \angle ACB$. **75.** 30°, 45°, 105°. *Вказівка*: див. задачу 74. **76.** У рівнобедреному трикутнику. *Вказівка*: див. задачу 74. **77.** ΔABC – рівнобедрений. **78.** 10°. *Вказівка*: нехай $\angle BAA_1 = \alpha$, тоді $\angle ABA_1 = 90° - \alpha$. $\angle ABO = 45° - \dfrac{\alpha}{2}$. Оскільки сума кутів ΔABO дорівнює 180°, то $\alpha + 45° - \dfrac{\alpha}{2} + 130° = 180°$, $\alpha = 10°$. **79.** *Вказівка*: побудуйте рівнобедрений трикутник з кутом при основі 50°. **80.** *Вказівка*: скористайтеся фактом: якщо внутрішні односторонні кути при двох прямих і січній обидва прямі, то дані прямі паралельні. **81.** *Вказівка*: прямокутний трикутник з гострим кутом 30° (мал. 71). **82.** *Вказівка*: проведіть висоту, а потім медіани двох утворених прямокутних трикутників з вершин їх прямих кутів (мал. 72). **83.** *Вказівка*: див. мал. 73. **84.** *Вказівка*: припустимо, що трикутник *ABC* розрізаний на два рівні трикутники *ABD* і *ADC* (мал. 74). Тоді $\angle ADB$ трикутника *ABD* повинен дорівнювати одному з кутів трикутника *ADC*. Але він не може дорівнювати ні куту *DAC*, ні куту *ACD*, бо зовнішній кут трикутника завжди більший за його внутрішній кут, не суміжний з ним. Тому $\angle ADB$ має дорівнювати суміжному з ним $\angle ADC$. Але тоді $AB = AC$, що суперечить умові задачі. Звідси випливає, що різносторонній трикутник не можна розрізати на два рівних трикутники. **85.** 1 : 2 : 3. **86.** $(m + n - p) : (n + p - m) : (m + p - n)$. *Вказівка*: нехай кути даного трикутника дорівнюють α, β, $180° - \alpha - \beta$. Тоді зовнішні кути цього трикутника відповідно дорівнюють $180° - \alpha$, $180° - \beta$, $\alpha + \beta$. За умовою, $180° - \alpha = mk$, $180° - \beta = nk$, $\alpha + \beta = pk$. Додавши ці рівності, дістанемо: $360° = (m + n + p)k$. Звідси $k = \dfrac{360^\circ}{m+n+p}$. Отже, кути трикутника дорівнюють $\dfrac{180^\circ(n+p-m)}{m+n+p}$, $\dfrac{180^\circ(n+m-p)}{m+n+p}$,

$\frac{180^\circ(n+p-n)}{m+n+p}$. **87.** *Вказівка*: BA_1 – бісектриса кута, суміжного з кутом ABB_1 (мал. 75), B_1A_1 – бісектриса $\angle BB_1C$, C_1B_1 – бісектриса $\angle BB_1A$. Тоді $\angle C_1B_1A_1 = \angle C_1B_1B + \angle BB_1A_1 = 0{,}5\ (\angle AB_1B + \angle BB_1C) = 90^\circ$. **88.** *Вказівка*: в умові задачі недостатньо даних. Якщо умову доповнити даними про кут трикутника, тоді задача матиме розв'язок. **89.** 75°, 15°. *Вказівка*: нехай у трикутнику ABC кут C – прямий (мал. 76). CD – висота. Проведіть медіану CM. $CM = 8 : 2 = 4$ см. Тоді у $\Delta\ CMD\ \angle M = 30^\circ$. $\Delta\ CMA$ – рівнобедрений, тому $\angle CBA = (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$. **90.** 4 см. *Вказівка*: медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині. **91.** 30°, 60°, 90°. **92.** *Вказівка*: можна, наприклад, знайти кути трикутника ABC. Вони дорівнюють 67,5°і 22,5°. **93.** *Вказівка*: нехай ABC – даний трикутник, CD – висота, CM – медіана. $AD = DM = \frac{MB}{2}$. Якщо $ME \perp BC$, то $ME = MD = \frac{MB}{2}$, тому $\angle B = 30^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$ і $\angle ACB = 90^\circ$. **94.** 15°, 75°. **95.** $90^\circ - 2\angle B$. *Вказівка*: у прямокутному трикутнику ABC проведіть з вершини прямого кута A медіану AM і висоту AH. $\angle MAH = \angle BAH - \angle BAM$. Доведіть, що $\angle BAM = \angle ABM$. Тоді $MAH = 90^\circ - 2\angle B$. **96.** *Вказівка*: див. задачу 95. **97.** *Вказівка*: за умовою $AH \perp BC$ (мал. 77), $AD = DB$, $\angle ABP = \angle PBC$. Припустимо, що $\Delta\ SKL$ рівносторонній. Оскільки $\angle BKH = 60^\circ$, то $\angle KBH = 30^\circ = \angle KBA$. Отже, $\angle ABC = 60^\circ$. У $\Delta\ SHC\ \angle HSC = 60^\circ$, тому $\angle BCD = 30^\circ$ і $\angle CDB = 90^\circ$. Якщо CD є висотою $\Delta\ ABC$, то $AC = BC$. Оскільки $\angle ABC = 60^\circ$, то трикутник ABC – рівносторонній і в ньому точки S, K, L співпадають, що суперечить означенню трикутника. **98.** 80°. *Вказівка*: побудуйте рівносторонній трикутник BMP (мал. 78). Оскільки $\angle MBA = 20^\circ$, $\angle MBP = 60^\circ$, $\angle ABC = 100^\circ$, то $\angle CBP = 20^\circ$. Тоді $\Delta\ ABM = \Delta\ CBP$ за двома сторонами $AB = BC$, $BM = BP$ і кутом між ними. Отже, $AM = CP$, $\angle BCP = \angle BAM = 10^\circ$, $\angle MAC = \angle PCA = 30^\circ$. Тоді $\angle AMP = \angle CPM = 150^\circ$ і $\angle CPB = 150^\circ$. Отже, $\Delta\ CPM = \Delta\ CPB$, оскільки CP – спільна, $BP = MP$, $\angle BPC = \angle MPC$. Тому $BC = MC$, $\angle BMC = \angle MBC = \angle ABC - \angle ABM = 80^\circ$. **99.** 20. *Вказівка*: відкладіть на стороні BC точки E і F так, щоб $\angle BPE = \angle CAF = 20^\circ$ (мал. 79). Тоді $\angle PEF = 40^\circ$, $\angle AFC = \angle ACF = 80^\circ$, $AC = AF$. $\angle PAF = 60^\circ$, отже APF –

рівносторонній. Оскільки $\angle PFE = 40°$, то $PE = PF$. Отже, $BE = PE = PF = PA = AC$, тобто точки E і M – співпадають. Тому $\angle BPM = \angle BPE = 20°$. **100.** *Вказівка*: з'єднайте точки A і E. Нехай F – точка перетину відрізків AD та BE. Оскільки $\angle B + \angle D + \angle BFD = 180°$, $\angle FAE + \angle FEA + \angle AEF = 180°$, $\angle AFE = \angle BFD$, то $\angle B + \angle D = \angle FAE + \angle FEA$. Отже, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = \angle C + \angle CAE + \angle CEA = 180°$. **101.** 30°. *Вказівка*: проведіть відрізок $EP \parallel AC$ (мал. 80). Нехай M – точка перетину відрізків AP та CE. Тоді трикутники EPM та AMC – рівносторонні. Отже, $EP = EM$, а $MC = AC$. Але $\angle CAF = 50°$, $\angle ACF = 80°$, тому $\angle AFC = 50°$. Отже, $FC = AC = MC$. Оскільки $\angle MCF = 20°$, то $\angle CFM = \angle CMF = 80°$. А значить, $\angle PFM = 100°$. Але $\angle PAC = 60°$, $\angle PCA = 80°$, тому $\angle MPF = 50°$, $\angle PMF = 50°$. Звідси випливає, що $PF = MF$. У такому випадку $\Delta EPF = \Delta EMF$ за третьою ознакою рівності трикутників. Отже, $\angle MEF = \angle PEF = 0{,}5 \angle MEP = 30°$. **102.** *Вказівка*: нехай m_a, m_b, m_c – медіани трикутника ABC (мал. 81). У трикутнику ABC медіану BB_1 продовжіть за точку B_1 на її довжину. $BB_1 = B_1D$. Тоді $2m_b = BD < AB + AD = AB + BC = a + c$. Аналогічно доведіть, що $2m_a < b + c$, $2m_c < b + a$. Додавши ці нерівності, отримаєте, що $m_a + m_b + m_c < b + c + a$. **103.** 3. *Вказівка*: нехай a – довжина третьої сторони, тоді $3{,}14 - 0{,}67 < a < 3{,}14 + 0{,}67$. Отже, $a = 3$. **104.** *Вказівка*: нехай ΔABC – заданий (мал. 82). Через кожну його вершину проведіть пряму, паралельну протилежній стороні. Перетинаючись, ці прямі утворюють трикутник $A_1B_1C_1$. Доведіть, що $A_1B = BC_1$, $AC_1 = AB_1$, $CA_1 = CB_1$. Покажіть, що прямі, на яких лежать висоти трикутника, є серединними перпендикулярами до сторін трикутника $A_1B_1C_1$. Оскільки серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці, то прямі, які містять висоти трикутника ABC, також перетинаються в одній точці. **105.** *Вказівка*: продовжіть медіану AM (мал. 83). На її продовженні відкладіть відрізок MD, який дорівнює AM. $\Delta AMB = \Delta DMC$ за першою ознакою рівності трикутників. З рівності цих трикутників випливає, що $AB = DC$ і $\angle BAM = \angle CDM$. Тоді $DC > AC$. Оскільки у трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, то у ΔACD $\angle CAM > \angle CDM$. Тоді $\angle CAM > \angle BAM$. **106.** *Вказівка*: відкладіть на стороні AC відрізок AE, рівний AB (мал. 84).

$\Delta\, ADE = \Delta\, ADB$ за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle\, ADE = \angle\, ADB$ і $ED = BD$. Оскільки за умовою $AC > AB$, то точка E лежить між точками A і C. Звідси $\angle\, ADC > \angle\, ADE$.

§ 4

107. 2 (мал. 50); 3 (мал. 51); 4 (мал. 52). **108.** а) 60°; б) 125°; в) 30°. **109.** 4 (мал. 85), або 5 (мал. 86), або 6 (мал. 87). **110.** Можна. *Вказівка*: з точки O проведіть п'ять променів OA, OB, OC, OD, OE. У кути AOC, BOD, COE, DOA, EOB впишіть по одному кругу. Ці круги є шуканими. **111.** *Вказівка*: побудуйте коло з центром C_1 радіусом CB, яке перетинає промінь CA у точці A_1 (мал. 88). $CA_1 = CB$. Оскільки, за умовою, $AC > CB$, то точка A_1 лежить між точками A і C. Тому $\angle ABC > \angle A_1BC$. Оскільки точка C лежить між точками A і M (за умовою задачі), то $\angle ABM > \angle A_1BM = 90°$. **112.** *Вказівка*: нехай O – центр вписаного кола (мал. 89). Припустіть, що промінь MO проходить між сторонами одного з кутів – BMA або CMA. Нехай, для визначеності, це кут CMA. Позначимо як D точку дотику вписаного кола до сторони AC. Нехай промінь MO перетинає коло у точці E, а пряму AC – у точці F. Оскільки $ME < MF$, то точка E лежить між точками M і F. Тоді промінь DE перетинає відрізок AM у точці L і точка E лежить між точками D і L. Доведіть, що $\angle\, MDL = 90°$, а $MD < ML$. **113.** *Вказівка*: нехай у прямокутному трикутнику катети дорівнюють a і b, а гіпотенуза – c. Нехай r – радіус кола, вписаного в трикутник, R – радіус кола, описаного навколо трикутника. Тоді $c = 2R$ і $a + b - c = 2r$. **114.** *Вказівка*: нехай A_1, B_1, C_1 – точки дотику кола із сторонами BC, AC, AB відповідно (мал. 90). Через точку A_1 проведіть пряму a, паралельну бісектрисі AO. Оскільки $\Delta\, OB_1C_1$ – рівнобедрений, то $\angle\, OB_1C_1 = \angle\, OC_1B_1$. $\angle\, OB_1A = \angle\, OC_1A = 90°$. Отже, $\angle\, AB_1C_1 = \angle\, AC_1B_1$, тобто $\Delta\, AB_1C_1$ – рівнобедрений. Звідси $AO \perp B_1C_1$. Отже, на прямій a лежить висота $\Delta\, A_1B_1C_1$ проведена з вершини A_1. Аналогічно: на прямих, що перпендикулярні до сторін B_1A_1 та A_1C_1 відповідно, лежать висоти $\Delta\, A_1B_1C_1$, проведені з вершин B_1 та C_1. Відомо, що прямі, на яких лежать висоти трикутника, перетинаються в одній точці. **115.** а) Ні. *Вказівка*: розгляньте трикутник з довжинами сторін 4, 6, 8; б) так. **117.** *Вказівка*: виразіть сторони трикутника через радіуси кіл. **120.** *Вказівка*: нехай a, b – катети $\Delta\, ABC$, c – його гіпотенуза, а висота CD ділить гіпотенузу на відрізки n і m, $m + n = c$. Тоді $2r = a + b - c$, $2r_1 = n + h - a$, $2r_2 = m + h - b$. Звідси $2r + 2r_1 + 2r_2 = a + b - n - m + n + h - a + m + h - b = 2h$. **121.** $a - 2m$.

122. $\frac{a-b}{2}$. *Вказівка*: нехай p_1 – півпериметр $\Delta\ BCD$ (мал. 91). Оскільки $DN = DF$, $CE = CF$ і $BN = BE$, то $p_1 = DF + BC$, звідки $DF = p_1 - BC$. Аналогічно $DL = p_2 - AC$, де p_2 – півпериметр трикутника ACD. Оскільки $LF = DL - DF$ і $AC = BC$, то $LF = p_1 - p_2$. Оскільки трикутники BDC і ADC мають по дві рівні сторони (CD – спільна сторона, $AC = BC$), то різниця їх периметрів дорівнює різниці сторін AD і DB. Звідси $LF = p_1 - p_2 = \frac{a-b}{2}$. **123.** 18 см. *Вказівка*: Нехай ABC – шуканий трикутник (мал. 92), $AB = BC$. $P_{\Delta\ MAD} + P_{\Delta\ KBE} + P_{\Delta\ NFC} = KB + BE + KE + FC + NC + NF + MD + AM + AD = 48$. Оскільки відрізки дотичних до кола, проведені з однієї точки, рівні, то $P_{\Delta\ MAD} + P_{\Delta\ KBE} + P_{\Delta\ NFC} = 2AB + AC = 48$. $2AB = 48 - 12 = 36$. **124.** Так. **125.** Ні. **126.** 9 см. **127.** 6. **128.** 6. **130.** 36. **132.** 90°. *Вказівка*: трикутник CO_1O_2 – рівнобедрений (мал. 93), оскільки $CO_2 = R - r$, $CO_1 = R - r$. Тоді $\angle\ CO_1O_2 = 45°$, $\angle\ CO_1O_2 = \angle\ BMO_2$. **133.** *Вказівка*: нехай O – центр кола (мал. 94), D – точка перетину дотичної, проведеної з точки C, з дотичною BM. $DC = DB$. Нехай $\angle\ CAB = \alpha$, $\angle\ ACO = \alpha$. Оскільки $\angle\ OCD = 90°$, то $\angle\ DCM = 90° - \alpha$. Звідси $DC = DM$. Тому $DB = DM = 0{,}5BM$. **134.** *Вказівка*: $O_1R = OO_2$, $O_1O = O_2S$. Оскільки пряма O_1R паралельна O_2S, то $\angle\ OO_1R = \angle\ OO_2S$. Тоді трикутники O_1RO і O_1SO рівні. Звідси $OR = OS$. Проведемо перпендикуляр OH до хорди PQ. $RH = SH$, $PH = QH$, тому $PR = PH - RH = QH - SH = QS$. **135.** *Вказівка*: проведіть коло з діаметром OM. Це коло перетинає пряму a у точці C. MC – шукана пряма. $OC \perp MC$, тому OC ділить навпіл хорду кола, що лежить на MC. **136.** 60°, 30°. *Вказівка*: доведіть, що $AB = BD = AD$. $\Delta\ ADB$ – рівносторонній. **138.** *Вказівка*: нехай дано кола $\omega_1(O,\ r_1)$, $\omega_2(M,\ r_2)$, r – радіус шуканого кола. Геометричним місцем центрів кіл радіуса r, що дотикаються до кола ω_1, є два кола з центром O і радіусами $r_1 + r$ і $r - r_1$. Геометричним місцем центрів кіл радіуса r, що дотикаються до кола ω_2, є два кола з центром M і радіусами $r_2 + r$ і $r - r_2$. Центром шуканого кола є точка перетину цих двох геометричних місць. На малюнку 95 – це точки A і B. **139.** *Вказівка*: нехай ABC – шуканий трикутник (мал. 96), O – центр вписаного кола, r – його радіус. Побудуйте допоміжний трикутник AOM, у якого $\angle AMO = 90°$, $\angle MAO = \frac{1}{2} \angle A$, $MO = r$. **140.** *Вказівка*: нехай ABC – шуканий трикутник, O – центр вписаного кола, OM – його радіус. Через точку M проведіть дотичну до даного кола. Побудуйте допоміжні прямокутні трикутники із спільним катетом OM та відповідно кутами $\frac{1}{2} \angle A$, $\frac{1}{2} \angle C$ (мал. 97). **141.** *Вказівка*: шукане геометричне місце точок – пряма, що проходить через точку A і перпендикулярна до прямої c. **142.** *Вказівка*: нехай BM – бісектриса кута ABC. Точки, рівновіддалені від сторін даного кута, лежать на бісектрисі BM. Шуканим геометричним місцем точок є частина площини, що лежить у внутрішній області кута (мал. 98). **143.** *Вказівка*: побудуйте кут 60° та проведіть бісектрису цього кута. **144.** *Вказівка*: нехай a, b, c – довжини сторін даного трикутника (мал. 99), r, r_1, r_2 – радіуси шуканих кіл. Тоді $a = r + r_1$, $b = r + r_2$, $c = r_1 + r_2$. Звідси виразіть радіуси шуканих кіл через довжини сторін трикутника. **146.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою паралельності прямих. **147.** *Вказівка*: нехай O – центр кола. Побудуйте пряму, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої OM. **148.** *Вказівка*: нехай O – центр кола (мал. 100), a – дана пряма. Побудуйте пряму a_1, що проходить через точку O перпендикулярно до прямої a. Пряма, що проходить через точку M перетину кола і прямої a_1 паралельно прямій a, – шукана дотична. **149.** *Вказівка*: нехай $\angle A$ – даний кут. Точка O – центр шуканого кола, який лежить на бісектрисі даного кута (мал. 101). Розгляньте трикутник AOM. $AO = 2OM = 2r$. **150.** *Вказівка*: побудуйте пряму, що проходить через дану точку M перпендикулярно до бісектриси даного кута ABC (мал. 102). **151.** *Вказівка*: геометричне місце центрів кіл даного радіуса r, що дотикаються до даної прямої, є пара прямих l_1 і l_2, які паралельні даній прямій і віддалені від неї на відстань r (мал. 103). Нехай O – центр даного кола, R – його радіус. Геометричним місцем центрів кіл радіуса r, що дотикаються до даного кола, є два кола з радіусами $R + r$ і $R - r$ і центром O. Центром шуканого кола є точка перетину цих двох геометричних місць. На малюнку 103 – це точки X і Y. Дві паралельні прямі і два кола можуть перетинатися найбільше у 8 точках, тому кількість розв'язків може змінюватися від 0 до 8. **152.** *Вказівка*: оскільки шукане коло дотикається до паралельних прямих l і m (мал. 104), то його центр M лежить на прямій n, яка паралельна даним прямим і рівновіддалена від них. Радіус R шуканого кола дорівнює половині відстані між прямими l і m. З іншого боку, шукане коло дотикається до даного кола з центром O і радіусом r. Отже, точка M лежить або на колі з центром O і радіусом $R + r$, або на колі з центром O і радіусом $R - r$.

РОЗДІЛ 2

§ 5

153. 1) а) ≈ 0,7 рад, ≈ 1,05 рад, ≈ 1,4 рад; б) ≈ 44,44 град, ≈ 66,67 град, ≈ 88,89 град; в) ≈ 3,54 румб, ≈ 5,31 румб, ≈ 7,09 румб; 2) а) ≈ 0,48 рад, ≈ 0,88 рад, ≈ 1,78 рад; б) ≈ 30,56 град, ≈ 56,11 град, ≈ 113,33 град; в) 2,44 румб, ≈ 4,47 румб, 9,03 румб. **154.** а) Так; б) так; в) ні. **155.** $\frac{2}{9}d$, $\frac{25}{30}d$, $\frac{17}{18}d$ або 20°, 75°, 85°. **156.** $\frac{1}{6}d$, $\frac{7}{18}d$, $\frac{13}{9}d$ або 15°, 35°, 130°. **157.** а) $\frac{1}{3}d$, $\frac{5}{3}d$, $\frac{1}{3}d$, $\frac{5}{3}d$; б) $\frac{2}{7}d$, $\frac{12}{7}d$, $\frac{2}{7}d$, $\frac{12}{7}d$; в) $\frac{5}{8}d$, $\frac{11}{8}d$, $\frac{5}{8}d$, $\frac{11}{8}d$. **158.** а) 40° або 140°; б) 90°; в) 140° або 40°. *Вказівка*: потрібно розглянути 4 випадки (мал. 105). **159.** 1) *Вказівка*: за умовою задачі дані кути не рівні (мал. 106), тому їх сума дорівнює 180°. Нехай $\angle 1 = 2x$, тоді $\angle 2 = 3x$. Маємо: $2x + 3x = 180°$, $5x = 180°$, $x = 36°$. Звідси градусні міри шуканих кутів дорівнюють $2 \cdot 36° = 72°$ та $3 \cdot 36° = 108°$; 2) 30° і 150°. **160.** 1) *Вказівка*: позначимо один із кутів через x, а другий через y. Тоді $x + y = 180°$, а $x - y = 58°$. Додавши отримані рівності, дістанемо: $2x = 238°$. Звідси $x = 119°$, $y = 180° - 119° = 61°$; 2) 95°30′ і 84°30′. **161.** *Вказівка*: позначимо один із кутів x, а другий y. Тоді $\frac{1}{3}x = \frac{1}{2}y$, а $x + y = 180°$. Звідси: $y = 72°$, $x = 108°$. **162.** 60°, 60°, 120°. **163.** а) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 135° : 3 = 45°$ (мал. 107); б) *Вказівка*: потрібно розглянути два випадки (мал. 108, 109). У першому випадку: $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 335° : 3 = 111°40'$. У другому випадку: $\angle 1 = \angle 2 = 155°$, $\angle 3 = 180° - 155° = 25°$.

§ 6

164. 0,5 см, 8,5 см, 4,5 см, 4,5 см (мал. 110). **166.** а) 2 см, 3 см, 6 см (мал. 111); б) 6 м, 9 м, 18 м; в) $p - b$, $p - a$, p, де p – півпериметр. *Вказівка*: скористайтеся властивостями зовнівписаних кіл. **167.** 8 м і 15 м. **168.** *Вказівка*: оскільки центри зовнівписаних кіл лежать на перетині бісектрис зовнішніх кутів трикутника (мал. 112), а бісектриси вертикальних кутів утворюють розгорнутий кут, то вершини трикутника ABC лежать на сторонах трикутника MND. Оскільки кути ABK і ABC – суміжні, то їх бісектриси BM і BL утворюють прямий кут. **169.** 3 кола.

§ 7

170. Якщо сума двох кутів дорівнює 180°, то вони суміжні. Це твердження не є правильним (мал. 113). **171.** Якщо два кути рівні, то вони вертикальні. Це твердження не є правильним (мал. 114). **172.** Якщо прямі паралельні, то бісектриси внутрішніх односторонніх кутів утворюють із січною кути, які в сумі дорівнюють 90°. Це твердження є правильним. Обидва твердження разом можна сформулювати так: бісектриси внутрішніх односторонніх кутів утворюють із січною кути, які в сумі дорівнюють 90°, тоді і тільки тоді, коли прямі паралельні. **173.** Якщо прямі паралельні, то бісектриси внутрішніх різносторонніх кутів не перетинаються. Це твердження є правильним. Обидва твердження разом можна сформулювати так: бісектриси внутрішніх різносторонніх кутів не перетинаються тоді і тільки тоді, коли прямі паралельні. **174.** Якщо пряма, проведена через вершину рівнобедреного трикутника до його основи, поділяє трикутник на два трикутники з рівними периметрами, то ця пряма містить медіану даного трикутника. Це твердження є правильним. Обидва твердження разом можна сформулювати так: пряма, проведена через вершину рівнобедреного трикутника до його основи, поділяє трикутник на два трикутники з рівними периметрами тоді і тільки тоді, коли вона містить медіану до основи даного трикутника. **175.** Якщо два трикутники мають по рівному куту, то і два інших їх кути рівні. Це твердження не є правильним (мал. 115). **176.** Якщо пряма відтинає на сторонах кута рівні відрізки, то вона перпендикулярна до бісектриси цього кута. Це твердження є правильним. Обидва твердження разом можна сформулювати так: пряма відтинає на сторонах кута рівні відрізки тоді і тільки тоді, коли вона перпендикулярна до бісектриси цього кута. **177.** Якщо трикутник рівнобедрений, то його медіана, проведена до основи, є висотою. Це твердження є правильним. Обидва твердження разом можна сформулювати так: медіана трикутника є його висотою тоді і тільки тоді, коли трикутник рівнобедрений і його основою є сторона, до якої проведено медіану. **178.** Якщо пряма, проведена через вершину трикутника, паралельна протилежній його стороні, то вона містить бісектрису відповідного зовнішнього кута трикутника. Це твердження є правильним. **179.** Якщо трикутник прямокутний, то його медіана дорівнює половині сторони, до якої вона проведена. Це твердження не є правильним, бо не кожна медіана прямокутного трикутника має таку властивість. **180.** Якщо хорди MK і PN кола рівні і паралельні, то MN і KP – діаметри цього кола. Це твердження не є правильним, бо висновок залежить від порядку розміщення на колі точок M, K, P і N. **181.** Якщо з точки кола проведено дві хорди і діаметр, який ділить кут між хордами навпіл, то дані хорди є рівними. Це твердження є правильним. **182.** Якщо два трикутники мають рівні периметри, то вони рівні. Це твердження не є правильним (мал. 116).

§ 8

183. *Вказівка*: за допомогою косинця добудуйте на відрізку AB як на основі рівнобедрений трикутник. З вершини C проведіть висоту CH до AB. Точка H – шукана. **184.** *Вказівка*: нехай у ΔABC $\angle B = 3\angle A$ (мал. 117). $AB = a$, $AC = b$. Проведіть з точки B до прямої AC відрізок BE такий, що $\angle CBE = \angle BCA$. ΔCBE – рівнобедрений, тому $CE = BE$. ΔBAE – рівнобедрений, оскільки кожен з кутів ABE і AEB дорівнює подвоєному куту ECB ($\angle BEA$ – зовнішній кут ΔCEB). Отже, $AB = AE = a$, $EC = b - a$. ΔBAE

можна побудувати за трьома сторонами. Для побудови вершини C на продовженні сторони AE відкладіть відрізок $EC = b - a$. Задача має розв'язок за умови, що $3a > b > a$. **185.** *Вказівка*: проведіть кола з центрами в точках A і B і радіусом AB. Пряма, що проходить через точки перетину цих кіл, перетинає AB у точці C. Точка C – середина AB. Проведіть коло з центром C і радіусом AB, яке перетинає побудовані кола у двох парах точок. Через ці пари точок проведіть прямі (мал. 118). **186.** *Вказівка*: за допомогою циркуля і лінійки проведіть у даному колі хорду довжиною a. Поділіть її навпіл (нехай, дістанемо точку M). Проведіть коло з центром M і радіусом m. Це коло може перетинати дане коло в одній або двох точках, або не перетинати його. **187.** *Вказівка*: див. задачу 186. **188.** *Вказівка*: поділіть відрізок AB довжиною a навпіл (нехай, дістанемо точку M). Проведіть коло з центром M і радіусом m. На відстані d проведіть пряму l, паралельну AB. Коло може перетинати пряму l в одній або двох точках, або не перетинати її. **189.** *Вказівка*: проведіть бісектрису даного кута. Побудуйте коло з центром у точці A і радіусом, що дорівнює радіусу даного кола. Це коло може мати з бісектрисою одну, дві або жодної спільної точки. Проведіть коло з центром в отриманій точці і радіусом, що дорівнює радіусу даного кола. **190.** *Вказівка*: проведіть бісектрису даного кута. Центр шуканого кола лежить на цій бісектрисі. **191.** *Вказівка*: шуканими є коло, вписане у трикутник, а також три зовнівписаних кола. **192.** *Вказівка*: нехай l – дана пряма, O – довільна точка цієї прямої. Відкладіть на прямій l відрізки OA і OB довжиною 1 см. Від точки O відкладіть ще два відрізки OK і OL довжиною 1 см так, щоб точки K і L лежали по одну сторону від даної прямої (мал. 119). Нехай C – точка перетину прямих AK і BL, а M – прямих AL і BK. Тоді пряма CM – шуканий перпендикуляр до прямої l.

ЗМІСТ