Documents sauvegardés

Lundi 24 janvier 2022 à 11 h 40

1 document

Sommaire

Documents sauvegardés • 1 document

SCIENCE&VIE

Nom de la source
Science et Vie (site web)
Type de source
Presse • Presse Web
Périodicité
En continu
Couverture géographique
Nationale
Provenance
Montrouge, Ile-de-France, France

Dimanche 16 janvier 2022

Science et Vie (site web) • 2592 mots

Voici les 7 plus grands problèmes de math jamais résolus

ADRIEN DENÈLE

S'il y a bien une chose qui passionne les mathématiciens

À l'aube du nouveau millénaire, le 24 mai 2000, 7 problèmes furent présentés au Collège de France, à Paris, par un comité scientifique d'experts mondiaux à l'initiative de l'Institut de mathématiques Clay. Cet institut, fondé par Landon T. Clay en 1998, cherchait ainsi à promouvoir les sciences mathématiques auprès du grand public. Alors que des mathématiciens du monde entier s'y attellent depuis vingt et un ans, un seul de ces problèmes a trouvé son maître ! La récompense à elle seule peut valoir la peine de s'y intéresser : 7 millions de dollars sont mis en jeu, soit 1 million par problème résolu. Pour autant, cela n'est pas le moteur principal. Pour preuve, le seul à avoir résolu l'un de ces problèmes, Grigori Perelman (voir " La conjecture de Poincaré "), a décliné son prix !

>> Vidéo : Quels sont les 7 problèmes du millénaire ?

"

LA RÈGLE : IL FAUT PROUVER QU'UN THÉORÈME EST VRAI, FAUX, OU BIEN QU'IL N'EST TOUT SIMPLEMENT PAS POSSIBLE DE LE DÉMONTRER.

"1. P versus PStatut : non résolu depuis 1971QUEL EST LE PROBLÈME ?

Le problème de " P vs NP " dépasse la frontière mathématique et s'inscrit dans le domaine informatique. On peut le résumer en disant qu'il s'agit de quantifier la rapidité d'un algorithme. Que signifient donc P et NP ? En logique informatique, ces lettres désignent deux classes de complexité d'un problème. Et toute la question est de savoir si " P = NP " est vrai ou non, ou s'il est impossible de le prouver.

Prenons un exemple concret afin de simplifier ce problème. Nous sommes habitués à trouver des solutions rapides à des problèmes en apparence très complexes. Pas besoin d'être musicien pour savoir si une partition est juste ou non, ou d'être cuisinier pour savourer un plat. Alors que si l'on vous demande de préparer une recette ou d'écrire une partition, la difficulté sera bien plus grande. " P = NP " renvoie à cette question : est-il tout aussi difficile de trouver une solution que de la vérifier ? Le problème a été formulé par Stephen Cook (à gauche) et Leonid Levin (à droite) en 1971.

POURQUOI C'EST SI COMPLEXE ?

On le voit, le problème de P = NP est presque aussi mathématique que philosophique ! Il touche à l'un des fondements de la raison humaine, soit notre capacité à discerner rapidement le vrai du faux face à notre compréhension instinctive de la solution. Bien entendu, en termes mathématiques, la question est tout autre. La classe P se définit comme celle des problèmes pouvant être résolus à l'aide d'un algorithme déterministe, dans un temps dit polynomial (proportionnel à la taille N du problème). Or, jusqu'à présent, personne n'a pu trouver ce fameux algorithme appliqué à NP, surtout à la classe dite NP-Complet.

LES PISTES POUR LE RÉSOUDRE : LE DÉMINEUR !

Une piste ludique pour résoudre le problème a été amenée par Richard Kaye, de l'université de Birmingham, en Angleterre. Il s'agit d'utiliser... le jeu du démineur ! Ce classique du divertissement pré-internet, présent sur de multiples versions du système d'exploitation Windows, permet en effet d'aborder le problème. Dans ce jeu, on doit trouver où se cachent les mines sur une large grille. En choisissant la première au hasard, soit on explose, soit on trouve des indices sur la position de la suivante (à l'aide de chiffres, pour indiquer combien de cases adjacentes ont une mine). Sa logique peut être traduite en termes mathématiques, pour faciliter la compréhension de P = NP.

© © BBVA - DR2. L'hypothèse de Riemann Statut : non résolue depuis 1859QUEL EST LE PROBLÈME ?

L'hypothèse de Riemann est sans doute l'un des problèmes mathématiques les plus célèbres. Posée en 1859 par Georg Friedrich Bernhard Riemann, un mathématicien allemand née n 1826, elle s'attache au mystère de la distribution des nombres premiers parmi les nombres entiers. Leur définition est simple : il s'agit des nombres uniquement divisibles par le chiffre 1 ou par eux-mêmes. Comme 1 n'est pas considéré comme premier, la liste commence par 2, puis 3. Mais 4, ainsi que tous les autres chiffres et nombres pairs supérieurs, est divisible par 2 ; il est donc exclu. Viennent ensuite 5, 7, 11... Plus on avance, plus les nombres premiers se raréfient. Si on a pu déterminer leur distribution jusque dans les grands nombres, c'est Bernhard Riemann qui va mettre au point une méthode de calcul apparemment fiable. Il utilise pour cela une fonction, nommée zêta de Riemann (?), qui fournit la répartition des nombres premiers parmi les entiers, position qui a été vérifiée depuis pour les premiers milliers de milliards de nombres premiers !

POURQUOI C'EST SI COMPLEXE ?

Même si le calcul semble valider l'hypothèse, cela ne satisfait pas les mathématiciens, qui cherchent à l'établir par la démonstration.

Voici à quoi ressemble la fonction zêta de Riemann : ?(s) = 1/1s + 1/2s + 1/3s + 1/4s + ...

Une forme donc relativement simple, et pourtant, personne n'a trouvé la solution à ce jour.

LES PISTES POUR LE RÉSOUDRE

De nombreuses pistes ont été lancées pour tenter de résoudre la fonction -dont quelques avancées à partir de la formule de Jensen, utilisée pour l'étude des fonctions entières -, mais, pour l'instant, aucune n'a abouti.

© © DPA/PICTURE-ALLIANCE3. Théorie de Yang-MillsStatut : non résolue depuis 1950QUEL EST LE PROBLÈME ?

Mathématiques et physique sont toujours étroitement liées. Souvent, les maths précèdent la physique en élaborant des équations purement théoriques, que les physiciens appliquent ensuite à la réalité. Dans le cas des équations Yang-Mills, c'est l'inverse ! Ici, la physique concernée est celle de l'infiniment petit, la mécanique quantique, ainsi que ses liens avec l'électromagnétisme. Les équations de Yang-Mills se veulent une généralisation de ces lois appliquées à la mécanique quantique. La théorie a été formulée par deux physiciens, Chen Ning Yang (à droite) et Robert Mills (à gauche), au milieu des années 1950.Tout va bien pour la description physique de leur théorie. En revanche, sur le plan mathématique, deux éléments restent à démontrer pour empocher le fameux prix du millénaire. Tout d'abord, prouver qu'il existe bien une théorie quantique des jauges. Ensuite, mettre en évidence un écart de masse fini (" mass gap ") entre le plus bas niveau d'excitation possible dans la jauge de Yang-Mills par rapport au vide. Ou, dit autrement, comprendre pourquoi certaines particules quantiques ont une masse non nulle alors que, selon les équations de la relativité générale, cela les empêcherait de se mouvoir à la vitesse de la lumière (ce qu'elles font pourtant).

POURQUOI C'EST SI COMPLEXE ?

Les équations de Yang-Mills sont des jauges (comme un champ électrique) dites non abéliennes (dont les éléments ne sont pas associés l'un à l'autre). Sur le plan mathématique, toute la difficulté réside dans la normalisation de ces différents éléments -en un mot : passer d'une théorie élégante sur le plan géométrique à une formalisation mathématique solide.

LES PISTES POUR LE RÉSOUDRE

La recherche d'une solution à la théorie de Yang-Mills a déjà permis de faire progresser les mathématiques des champs quantiques, avec par exemple la théorie de chromodynamique quantique. Désormais, il faut encore affiner les résultats et en trouver les solutions. Mais, pour véritablement comprendre la théorie sur le plan physique, il faudra sans doute en inventer une nouvelle !

© © PETER A. FRISCH - SCIENCE PHOTO LIBRARY4. La conjecture de HodgeStatut : non résolue depuis 1950QUEL EST LE PROBLÈME ?

La conjecture de Hodge est l'un des problèmes du millénaire les plus mathématiques. Pour le comprendre, il faut posséder des notions pointues dans le domaine de la théorie des variétés différentielles et autres complexes de chaînes. La conjecture en elle-même, telle que formulée par le mathématicien écossais William Vallance Hodge (1903- 1975), s'énonce ainsi : sur une variété algébrique complexe projective et non singulière, n'importe quelle classe de Hodge est une combinaison rationnelle linéaire de coefficients rationnels de cycles algébriques.

POURQUOI C'EST SI COMPLEXE ?

La conjecture de Hodge est extrêmement complexe à résoudre et relie trois parties des mathématiques : l'analyse, la topologie et la géométrie algébrique. En très résumé, on peut dire que cela concerne donc des formes géométriques impossibles, qui n'existent que sur un plan mathématique, et, même au sein des mathématiques, dans un aspect très théorique (sous la forme de nombres complexes, et donc avec des parties imaginaires).

LES PISTES POUR LE RÉSOUDRE

Contrairement à celle des autres problèmes du millénaire, la résolution de la conjecture de Hodge semble au point mort. Les dernières avancées remontent aux années 1990, et, depuis, plus rien. Mais pour de nombreux mathématiciens, cette conjecture est celle qui recèle en elle le plus de pistes pour développer le futur des mathématiques et de la géométrie.

© © KMLS/ ADOBESTOCK - AURYN DRIKSON/ADOBE STOCKL'énigme de la percolation

Voici un problème actuel, non inclus dans la liste des 7 problèmes du millénaire. Il s'agit de mettre sur papier un phénomène physique aux implications très théoriques : la percolation. Imaginez une pierre dotée de multiples fissures internes que l'on plonge dans l'eau : existe-t-il un chemin pour que l'eau rejoigne son coeur ? On peut imaginer d'autres scénarios, par exemple avec des chemins de courants électriques, mais l'idée reste de calculer la probabilité d'avoir au moins 1 chemin. Lorsque l'on regarde un faible nombre de chemins, la probabilité est difficile à calculer. En revanche, si l'on considère un nombre infini de chemins, la probabilité passe, à une valeur critique, de 0 à 1.

Le passage à l'infini permet de faciliter la compréhension ! En revanche, pour ce qui est de formaliser ce fait de manière mathématique, le problème reste ouvert.

© © KMLS/ ADOBESTOCK - AURYN DRIKSON/ADOBE STOCK5. La conjecture de Birch et Swinnerton-DyerStatut : non résolue depuis 1965QUEL EST LE PROBLÈME ?

Bryan Birch (à gauche) et Peter Swinnerton-Dyer (à droite) sont deux mathématiciens britanniques qui, au début des années 60, tentent de développer les mathématiques grâce aux ordinateurs. Ils s'intéressent aux fonctions permettant de décrire les courbes elliptiques. Leur conjecture s'énonce ainsi : l'expansion de Taylor de L (C, s) avec s = 1 à la forme L (C, s) = c (s > 1) r + ordres supérieurs. Avec L (C, 1) = 0 équivaut à C (Q) infini.

Ce qui peut se traduire par le fait de tenter de compter l'ensemble des points de valeur rationnelle sur une courbe elliptique.

POURQUOI C'EST SI COMPLEXE ?

Ce problème est multi millénaire, si l'on remonte à ses origines. Comme le rappelle l'Institut Clay sur son site, l'Antiquité grecque s'intéressait déjà aux équations du cercle, tel que $x^2 + y^2 = z^2$, équations qui seront résolues par Euler au XVIIIe siècle. Dans la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, la taille du groupe de points rationnels se voit reliée à l'attitude de la fonction zêta associée. Si le zêta de la valeur du point s = 1 vaut 0, on peut en déduire qu'il existe une infinité de points rationnels (et donc de solutions), alors qu'à l'inverse, si elle n'est pas égale à 0, c'est qu'ils ne sont qu'un nombre fini. Hélas, personne n'a encore réussi à démontrer ce fait.

LES PISTES POUR LE RÉSOUDRE

Pour l'heure, la conjecture n'a été démontrée que dans de rares cas particuliers, mais pas de manière générale.

© © OXFORD MATHEMATICAL INSTITUTE - ST CATHARINE'S COLLE- GE, CAMBRIDGE6. La conjecture de PoincaréLa seule résolue, en

2003 !QUEL EST LE PROBLÈME ?

Henri Poincaré (1854- 1912) reste à ce jour le plus grand mathématicien français. Il est connu pour avoir présidé la Société mathématique de France, et mené d'importants travaux sur le calcul infinitésimal et la théorie du chaos. Il a même bien failli élaborer une théorie de la relativité avant Albert Einstein ! On lui doit également une conjecture qui porte son nom parmi les 7 problèmes du millénaire. Celle-ci fait partie d'un domaine qu'il a initié : la topologie, soit l'art d'étudier la géométrie sous un angle algébrique, avec fonctions différentielles et limites. L'énoncé de sa conjecture est le suivant : si une variété compacte à trois dimensions a la propriété que chacune de ses courbes closes puisse être déformée en un point, faut-il en déduire que cette variété est homomorphique sur la sphère S3 ?

En résumé, le but consiste à toujours retrouver la forme d'une sphère, même cachée au sein de multiples dimensions.

POURQUOI C'EST SI COMPLEXE ?

Poincaré lui-même avait ajouté, après avoir énoncé cette conjecture, que "cette question nous entraînerait trop loin". Il pressentait la difficulté qu'il posait au monde mathématique, en 1904, par ce problème qui nécessiterait de nombreux calculs et une bonne dose d'imagination en multi dimensions pour en venir à bout !

LA SOLUTION DE PERELMAN

La conjecture de Poincaré est la seule qui soit résolue parmi les 7 problèmes du millénaire. On le doit à Grigori Perelman (née n 1966 à Leningrad, en Union soviétique). Ce génie est revenu aux arguments les plus géométriques de la topologie, par laquelle on peut confondre une sphère et un beignet (en réalité, un demi-cylindre relié : un tore) si tous deux sont en deux dimensions. À l'aide d'habiles stratagèmes, et grâce à un siècle d'efforts avant lui, il est parvenu à résoudre la conjecture, qui porte désormais aussi le nom de théorème de Perelman.

© © SCIENCE PHOTO LIBRARY - KRISHNAVEDALA - ALAMY/ HÉMIS. FR© © SCIENCE PHOTO LIBRARY - KRISHNAVEDALA - ALAMY/HÉMIS. FRGrigori Perelman, l'homme qui a enfin résolu la conjecture de Poincaré, détonne dans le milieu scientifique. Loin de chercher à profiter de la célébrité acquise par son exploit, il fuit les interviews, se montre rarement en public, et il

7. Les équations de Navier-StokesStatut : non résolues depuis le XIXe siècle-QUEL EST LE PROBLÈME ?

Les équations de Navier-Stokes sont liées à la mécanique des fluides, et plus précisément au mouvement des vagues lorsqu'un bateau se déplace. Si on les regarde de près, on se rend compte qu'elles suivent le bateau, de la même manière que les ondulations formées par le déplacement d'un avion le suivent. Si la physique parvient à décrire ce mouvement, les mathématiques, elles, peinent à suivre ! L'enjeu est donc d'élaborer une mathématique nouvelle pour expliquer ce phénomène. De plus, il n'a toujours pas été prouvé mathématiquement que des solutions existent bien dans tous les cas pour les équations de Navier-Stokes.

Le problème date du XIXe siècle, lorsque les mathématiciens et physiciens Henri Navier (à gauche) et George Stokes (à droite) mirent au point les équations qui régissent le mouvement des vagues sur l'eau.

POURQUOI C'EST SI COMPLEXE ?

Si les solutions de l'équation sont déjà utilisées, leur compréhension théorique reste inconnue, le plus souvent à cause du phénomène de turbulences qu'elles impliquent.

Le problème posé par l'Institut Clay liste de multiples étapes à prouver pour remporter le prix. Il faudra d'abord prouver l'existence et la continuité des solutions sur l'ensemble des nombres réels, en plus de trouver les solutions en elles-mêmes.

LES PISTES POUR LE RÉSOUDRE

Des solutions furent trouvées pour le problème à une ou deux dimensions, mais, à ce jour, aucune n'a réussi à passer le cap des équations non linéaires en trois dimensions.

© © DR - ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO -KMLS/ ADOBESTOCK - AURYN DRIKSON/ ADOBE STOCKLes 23 problèmes de Hilbert

Avant les 7 problèmes du millénaire de l'Institut Clay, il y eut les 23 problèmes de Hilbert.

Le mathématicien allemand David Hilbert les expose en 1900 à Paris, suite à un congrès regroupant les meilleurs experts de l'époque, dont son "rival" Henri Poincaré. On y trouvait de nombreux problèmes, comme l'hypothèse du continu (finalement prouvée indécidable), l'axiomatisation de la physique (toujours non résolue), ou des conjectures, dont celle de Riemann qui a rejoint les 7 problèmes du millénaire. Sur les 23, seuls 5 ne sont toujours pas résolus. Les autres ont tous, à leur manière, fait progresser les sciences mathématiques, des équations non linéaires aux géométries complexes.

© © DR - ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO -KMLS/ ADOBESTOCK - AURYN DRIKSON/ ADOBE STOCK

Cet article est paru dans Science et Vie (site web)

https://www.science-et-vie.com/sciences-fondamentales/de-grands-et-beaux-problemes-a-resoudre-64132