Гладких Анастасия, 11 «А» класс

РЕФЕРАТ

На тему: «Теорема о трёх перпендикулярах»

Введение

Геометрия — одна из важнейших областей математики, изучающая свойства фигур, пространственных форм и взаимосвязей между ними. В стереометрии (разделе геометрии, изучающем фигуры в пространстве) особое внимание уделяется взаимному расположению прямых и плоскостей. Одной из центральных и часто используемых теорем в этой области является теорема о трёх перпендикулярах. Эта теорема широко применяется в задачах на построение, доказательство и вычисление расстояний в пространстве.

Сформулируем теорему

Пусть дана плоскость, прямая, проходящая вне этой плоскости, и наклонная, проведённая из точки вне плоскости к прямой в плоскости. Если проекция наклонной на плоскость перпендикулярна данной прямой, то и сама наклонная перпендикулярна этой прямой.

Более строгое формулирование:

Пусть в плоскости α проведена прямая b, а из точки A, не лежащей в этой плоскости, к прямой b проведена наклонная AB. Если проекция этой наклонной AC перпендикулярна прямой b, то и сама наклонная AB перпендикулярна b.

Обратная теорема

Если наклонная перпендикулярна прямой в плоскости, то и её проекция на плоскость перпендикулярна этой прямой.

Доказательство теоремы

Рассмотрим точку A вне плоскости α, прямую b в плоскости α и точку B на прямой b. Пусть из точки A опущена перпендикуляр AC на плоскость α. Пусть C — основание перпендикуляра, а AB — наклонная к прямой b. Точка B лежит на прямой b, а проекция AB на плоскость — это отрезок CB. Если CB ⊥ b, то, по теореме, AB ⊥ b.

Доказательство основано на свойствах прямоугольных треугольников и перпендикуляров в пространстве. Основная идея в том, что если проекция отрезка на плоскость образует прямой угол с данной прямой, то сам отрезок образует прямой угол с ней тоже.

Геометрический смысл

Теорема о трёх перпендикулярах позволяет определить, перпендикулярна ли наклонная прямая к данной прямой в плоскости, опираясь лишь на её проекцию. Это даёт возможность использовать двумерные чертежи для анализа трёхмерных объектов — одно из ключевых преимуществ в инженерной графике, архитектуре и черчении.

Применение теоремы

1. Решение задач в стереометрии.

Теорема применяется при доказательствах перпендикулярности прямых, построении высот и вычислении расстояний между точками и плоскостями.

2. Построение ортогональных проекций.

В инженерной графике при выполнении чертежей важно правильно изображать проекции пространственных фигур на плоскость. Теорема помогает определить истинную длину отрезка и его ориентацию.

3. Практика в архитектуре и строительстве.

При проектировании зданий, мостов, лестниц и других конструкций важно точно понимать пространственные отношения. Теорема помогает правильно расположить элементы конструкции.

Примеры задач

Пример 1:

Дана плоскость α и прямая b в этой плоскости. Из точки A, не лежащей в плоскости, проведён отрезок AB к точке B на прямой b. Основание перпендикуляра из A на плоскость — точка C. Если $CB \perp b$, то $AB \perp b$.

Пример 2:

Найти угол между прямой и плоскостью. Можно использовать теорему о трёх перпендикулярах: если известно, что проекция прямой на плоскость перпендикулярна другой прямой в плоскости, то угол между прямой и этой другой прямой будет прямым.

Графическое объяснение

Для лучшего понимания желательно построить чертёж:

1. Плоскость α с прямой b.

2. Точка A вне плоскости.

3. Проведён перпендикуляр AC на плоскость α.

4. Отрезок AB как наклонная к прямой b.

5. CB — проекция AB на плоскость, перпендикулярна b.

Заключение

Теорема о трёх перпендикулярах — фундаментальный инструмент в стереометрии. Она даёт возможность устанавливать пространственные взаимосвязи между точками, прямыми и плоскостями с помощью их проекций. Понимание и умение применять эту теорему открывает доступ к решению большого класса задач и играет важную роль в геометрическом мышлении.

Список литературы

1. Атанасян Л. С. И др. — Геометрия, 10–11 классы.

2. Погорелов А. В. — Элементарная геометрия. Стереометрия.

3. Бродский И. С. — Сборник задач по геометрии.