ANGLES DE VECTEURS - TRIGONOMETRIE -

. Introduction

Ex 4B.1 : Compléter le tableau suivant :

mesure en degrés		50	18		135		45	153	
mesure en radians	$\frac{8\pi}{15}$			$\frac{3\pi}{20}$		$\frac{\pi}{3}$			$\frac{7\pi}{6}$

Ex 4B.2 : Soit un cercle de rayon 4 cm ; déterminer la longueur des arcs de mesure a = 32° et b = 1,2 rad (arrondir les résultats au centième)

conseil : utiliser la formule : $l = R \times \alpha$

. Angle orienté de deux vecteurs

Ex 4B.3 : Trouver la mesure principale α_i (pour i = 1 ou 2 ou 3 ou 4) de chacun des angles x_i et sur le cercle trigonométrique, placer les points M_i associés aux réels α_i

$$x_1 = \frac{341\pi}{12} \; ; \; x_2 = -379\pi \; ; \; x_3 = \frac{325\pi}{4} \; ; \; x_4 = -\frac{1023\pi}{6}$$

. Sinus et cosinus

Ex 4B.4 : 1) calculer $A = \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3}$

2) simplifier $B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(5\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

conseil : pour A , il faut écrire $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$ sous la forme $\pi - \frac{\pi}{3}$ ou $\pi + \frac{\pi}{3}$ ou ... , de façon à pouvoir utiliser les formules de trigonométrie

FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

. Fonction sinus

Ex 4B.5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\frac{x}{2}$

1) montrer que f est impaire
2) montrer que f est périodique de période 4π ; en déduire un intervalle restreint d'étude pour f
3) dresser le tableau de variation de f sur $[0 ; 2\pi]$
4) dans le repère $(O; \vec{i} ; \vec{j})$, tracer C la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$
5) dans le même repère, compléter C de façon à obtenir sa représentation graphique sur $[-2\pi ; 6\pi]$

(on indiquera les transformations utilisées)

. Fonction cosinus

Ex 4B.6: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 2x$

1) montrer que f est paire
2) montrer que f est périodique de période π ; en déduire un intervalle restreint d'étude pour f
3) dresser le tableau de variation de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
4) dans le repère $(O; \vec{i} ; \vec{j})$, tracer C la courbe représentative de f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
5) dans le même repère, compléter C de façon à obtenir sa représentation graphique sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

(on indiquera les transformations utilisées)

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier

. Introduction

Ex 4B.1 : Si α est la mesure en radians et a celle en degrés ; on a : $a = \dfrac{\alpha \times 180}{\pi}$ et $\alpha = \dfrac{a \times \pi}{180}$

$\dfrac{8\pi}{15}$ rad $= \dfrac{\frac{8\pi}{15} \times 180}{\pi} = \dfrac{8 \times 180}{15} =$ **96°**

$\dfrac{3\pi}{20}$ rad $= \dfrac{\frac{3\pi}{20} \times 180}{\pi} =$ **27°**

$\dfrac{\pi}{3}$ rad $= \dfrac{\frac{\pi}{3} \times 180}{\pi} =$ **60°**

$\dfrac{7\pi}{6}$ rad $= \dfrac{\frac{7\pi}{6} \times 180}{\pi} =$ **210°**

$50° = \dfrac{50 \times \pi}{180} =$ **$\dfrac{5\pi}{18}$ rad**

$18° = \dfrac{18 \times \pi}{180} =$ **$\dfrac{\pi}{10}$ rad**

$135° = \dfrac{135 \times \pi}{180} =$ **$\dfrac{3\pi}{4}$ rad**

$45° = \dfrac{45 \times \pi}{180} =$ **$\dfrac{\pi}{4}$ rad**

$153° = \dfrac{153 \times \pi}{180} =$ **$\dfrac{17\pi}{20}$ rad**

mesure en degrés	**96**	50	18	**27**	135	**60**	45	153	**210**
mesure en radians	$\frac{8\pi}{15}$	**$\frac{5\pi}{18}$**	**$\frac{\pi}{10}$**	$\frac{3\pi}{20}$	**$\frac{3\pi}{4}$**	$\frac{\pi}{3}$	**$\frac{\pi}{4}$**	**$\frac{17\pi}{20}$**	$\frac{7\pi}{6}$

Ex 4B.2 : On a : $l = R \times \alpha$,

où l est la longueur de l'arc, R le rayon du cercle et α la mesure de l'angle <u>en radians</u>

a = 32° $= \dfrac{32 \times \pi}{180} = \dfrac{8\pi}{45}$ rad donc $l = 4 \times \dfrac{8\pi}{45} = \dfrac{32\pi}{45}$ cm $\approx$ **2,23 cm**

b = 1,2 rad donc $l = 4 \times 1{,}2 =$ **4,8 cm**

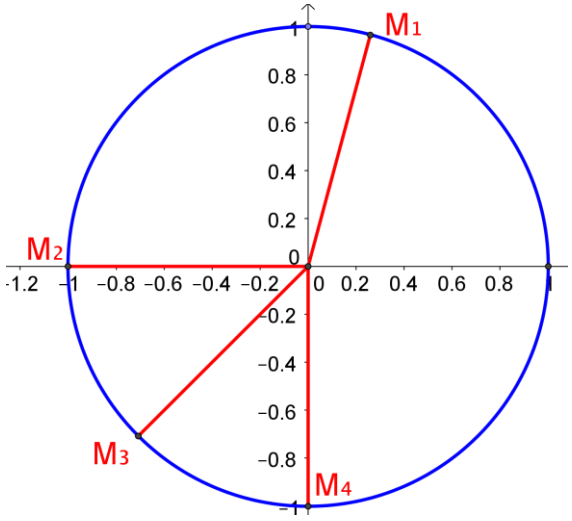
. Angle orienté de deux vecteurs

Ex 4B.3 : $x_1 = \dfrac{341\pi}{12} = \dfrac{336\pi + 5\pi}{12} = \dfrac{28 \times 12\pi}{12} + \dfrac{5\pi}{12} = 28\pi + \dfrac{5\pi}{12} = 14 \times 2\pi + \dfrac{5\pi}{12}$ donc $\alpha_1 = \dfrac{5\pi}{12}$

$x_2 = -379\pi = -380\pi + \pi = -190 \times 2\pi + \pi$ donc $\alpha_2 = \pi$

$x_3 = \dfrac{325\pi}{4} = \dfrac{328\pi - 3\pi}{4} = \dfrac{82 \times 4\pi}{4} - \dfrac{3\pi}{4} = 82\pi - \dfrac{3\pi}{4} = 41 \times 2\pi - \dfrac{3\pi}{4}$ donc $\alpha_3 = -\dfrac{3\pi}{4}$

$x_4 = -\dfrac{1023\pi}{6} = \dfrac{-1020\pi - 3\pi}{6} = -\dfrac{170 \times 6\pi}{6} - \dfrac{3\pi}{6} = -170\pi - \dfrac{\pi}{2} = -85 \times 2\pi - \dfrac{\pi}{2}$ donc $\alpha_4 = -\dfrac{\pi}{2}$



. Sinus et cosinus

Ex 4B.4 : $A=\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\frac{5\pi}{3}$

$A=\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$A=\cos\frac{\pi}{3}-\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)-\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)+\cos\frac{\pi}{3}$

$A=\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}$

$A=4\cos\frac{\pi}{3}$

$B=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(5\pi-x)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$

$B=\cos x+\cos(4\pi+\pi-x)+\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{2}-x\right)$

$B=\cos x+\cos(\pi-x)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)$

$B=\cos x+(-\cos x)+\sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

$B=\cos x-\cos x+\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)-\sin x$

$B=-\cos x-\sin x$

FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

. Fonction sinus

Ex 4B.5 : $f(x)=\sin\frac{x}{2}$

1) $D_f=\mathbb{R}$ et $f(-x)=\sin\frac{-x}{2}=-\sin\frac{x}{2}=-f(x)$ donc ***f* est impaire** ; on peut donc l'étudier sur $\mathbb{R}^+$

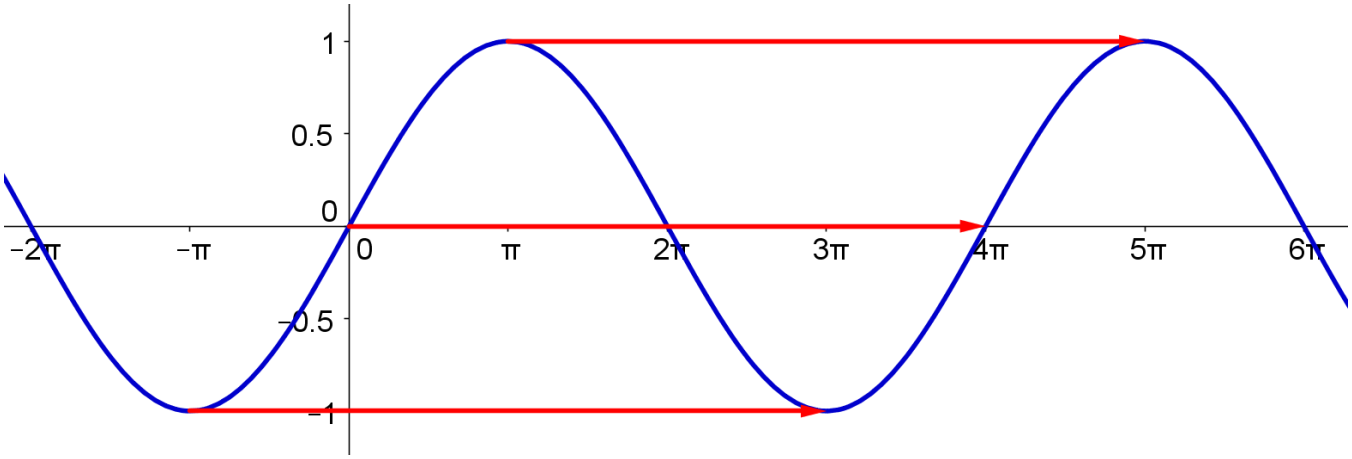
2) $f(x+4\pi)=\sin\frac{x+4\pi}{2}=\sin\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)=\sin\frac{x}{2}=f(x)$ donc ***f* est périodique de période 4π** ; on peut donc l'étudier sur un intervalle d'amplitude 4π, par exemple : $[-2\pi;2\pi]$

Ainsi grâce à la parité et à la périodicité de f, on en déduit l'intervalle d'étude : **I** = $[0;2\pi]$

3) En s'inspirant du tableau de la fonction sinus, on obtient :

x	0		π		2π
f	0	↗	1	↘	0

4) et 5) f est impaire donc C est symétrique par rapport à l'origine O du repère ; on en déduit C sur $[-2\pi;0]$ et f est périodique de période 4π donc par translation de vecteur $4\pi\vec{i}$, on en déduit C sur $[2\pi;6\pi]$. Voici la représentation de f sur $[-2\pi;6\pi]$:



. Fonction cosinus

Ex 4B.6 : $f(x)=\cos 2x$

1) $D_f=\mathbb{R}$ et $f(-x)=\cos(-2x)=\cos 2x=f(x)$ donc **f est paire** ; on peut donc l'étudier sur $\mathbb{R}^+$

2) $f(x+\pi)=\cos\left[2(x+\pi)\right]=\cos\left[2x+2\pi\right]=\cos 2x=f(x)$

donc ***f* est périodique de période π** ; on peut donc l'étudier sur un intervalle d'amplitude π, soit par exemple : $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Grâce à la parité et à la périodicité de f, on en déduit l'intervalle d'étude : **I** = $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

3) en s'inspirant du tableau de la fonction cosinus, on obtient :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f	1	↘	0	↘	-1

4) et 5) f est paire donc C est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

→on en déduit C sur $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$

f est périodique de période π donc par translation de vecteur $\pi\vec{i}$, on en déduit C sur $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$

d'où la représentation de f sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$:

