

Mathématiques BMI 1

Les vecteurs - Produits scalaires

Calcul vectoriel dans le plan - dans l'espace

$$\vec{v} \cdot \vec{v}' = xx' + yy'$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v}' = xx' + yy' + zz'$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{v}' \neq \vec{0}$:

$$\vec{v} \cdot \vec{v}' = \|\vec{v}\| \times \|\vec{v}'\| \times \cos(\vec{v}, \vec{v}')$$

$\vec{v} \cdot \vec{v}' = 0$ si et seulement si $\vec{v} \perp \vec{v}'$

Exercice 1

Dans un repère orthonormé, on donne les coordonnées des trois points suivants : $A(-2; 2)$, $B(2; 5)$ et $C(5; 1)$

- 1) Calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{AC} .
- 2) Calculer les normes $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $\|\overrightarrow{AC}\|$. Arrondir à 0,1.
- 3) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$. Quelle est la nature du triangle ABC ?
- 4) Calcul de l'angle BAC .
 - a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
 - b) Sachant que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(BAC)$, calculer l'angle BAC . Arrondir à $0,1^\circ$.
 - c) En déduire l'angle ACB .

Exercice 2

Dans un repère orthonormé, on donne les coordonnées de trois points A , B et C : $A(35; 19)$, $B(7; 125)$ et $C(113; 96)$

- 1) Calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
- 2) Calculer les normes des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} arrondies à 0,1.
- 3) Quelle est la nature du triangle ABC ?
- 4) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- 5) Calculer $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et en déduire l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en degré arrondi à l'unité.
- 6) Le triangle ABC est proche de quel type de triangle ?

Exercice 3

Soit les vecteurs avec leurs coordonnées : $\vec{u}(5; -2; 4)$, $\vec{v}(4; 2; -4)$ et $\vec{w}(x; y; 3)$.

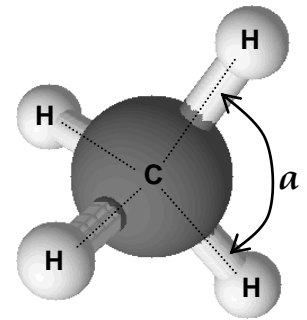
- a) Déterminer l'équation à deux inconnues x et y pour que $\vec{u} \perp \vec{w}$.
- b) Déterminer l'équation à deux inconnues x et y pour que $\vec{v} \perp \vec{w}$.
- c) Résoudre le système de deux équations à deux inconnues et donner les coordonnées du vecteur \vec{w} .

Exercice 4

La molécule de méthane est composée de 5 atomes : un atome de carbone autour duquel sont reliés 4 atomes d'hydrogène régulièrement espacés.

On souhaite connaître l'angle a compris entre deux liaisons hydrogènes.

Une application informatique nous donne les coordonnées de l'atome de carbone et de 2 atomes d'hydrogène dans un repère orthonormé :



Atome	Coordonnées		
	abscisse	ordonnée	hauteur
carbone C	-1,4	0,7	1,1
hydrogène H_1	-6,5	8,1	-5,4
hydrogène H_2	4,9	6,1	8,5

- Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CH_1}$ et $\overrightarrow{CH_2}$.
- Calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{CH_1}$ et $\overrightarrow{CH_2}$. Arrondir à 0,1.
- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CH_1} \cdot \overrightarrow{CH_2}$ arrondi à 0,1.
- A partir des valeurs précédentes, calculer $\cos(a)$. Arrondir à 0,001.
- En déduire la valeur de l'angle a en degré arrondi à l'unité.

Exercice 5

- Considérons les points A , B et C d'un plan, repérés par leurs coordonnées dans un repère orthonormal (ou orthonormé).

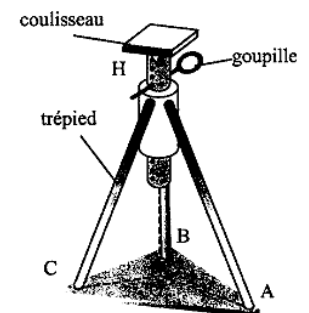
Le vecteur \overrightarrow{AC} est définie par les coordonnées $(13; -22,5; 0)$.

- Déterminer les coordonnées du point A .
- Déterminer les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} .
- Déterminer les coordonnées du vecteur \overrightarrow{BC} .
- Calculer la norme du vecteur \overrightarrow{BC} .

Point	Coordonnées
A	$(x_A; y_A; 0)$
B	$(-13; -7,5; 0)$
C	$(13; -7,5; 0)$
H	$(0; 0; 40)$

- Une chandelle, utilisée pour soutenir une automobile est constituée d'un trépied $ABCH$ et d'un coulisseau réglable en hauteur par l'intermédiaire d'une goupille.

La chandelle est schématisée dans l'espace et représentée dans un repère orthonormé (O, x, y, z) . Les points A , B , C et H sont repérés par leurs coordonnées.



- Calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{BH} et \overrightarrow{CH} .
- Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CH}$.
- Montrer que les normes des vecteurs \overrightarrow{BH} et \overrightarrow{CH} sont égales et que leur mesure arrondie au centième est 42,72.
- En utilisant une expression du produit scalaire, calculer la mesure de l'angle BHC (au degré près).