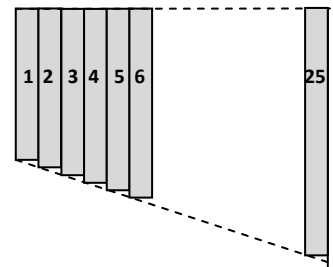


Exercice 2 Les suites arithmétiques

Problème : Un artisan doit réaliser une palissade le long d'une pente à l'aide de planches de bois comme le montre le schéma ci-contre.



Question : L'artisan a commandé une longueur totale de 40 m de planches. En aura-t-il assez ?

Il mesure la hauteur en cm des 6 premières hauteurs et obtient les valeurs suivantes :

n°	1	2	3	4	5	6
Hauteur (cm)	114	117	120	123	126	129

1) On nomme les différentes hauteurs par les termes : u_1, u_2, u_3, \dots

Montrer que ces hauteurs forment une suite arithmétique. On donnera le premier terme u_1 et la raison r .

$$117 - 114 = 3 \quad 120 - 117 = 3 \quad 123 - 120 = 3 \quad 126 - 123 = 3 \quad 129 - 126 = 3$$

La différence est de 3 entre chaque valeur. Il s'agit donc d'une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 114$ et de raison $r = 3$.

2) Exprimer la relation donnant le $n^{\text{ème}}$ terme u_n de cette suite.

$$u_n = 114 + (n-1) \times 3$$

3) En mesurant la longueur totale de la palissade à réaliser, l'artisan détermine qu'il aura besoin de 25 hauteurs.

Calculer la longueur de la 25^{ème} hauteur, soit la valeur du terme u_{25} .

$$\text{Pour } n = 25 : u_{25} = 114 + (25-1) \times 3 = 114 + 24 \times 3 \text{ soit } u_{25} = 186.$$

La 25^{ème} hauteur mesure 186 cm.

4) Calculer la longueur totale de planches dont aura besoin l'artisan en calculant la somme S_{25} des 25 premiers termes de cette suite.

$$S_{25} = \frac{25 \times (114 + 186)}{2} = 3750 \text{ cm soit une longueur totale de } 37,50 \text{ m}$$

5) Répondre à la question du problème.

L'artisan aura besoin d'un total de 37,50 m de planches. En ayant commandé 40 m, il en aura donc suffisamment.

6) Simulation sur un tableur :

a) Donner les formules à saisir dans les cellules B3 et C3 afin de calculer les différentes hauteurs et la longueur totale.

	A	B	C
1	n°	hauteur	Longueur totale
2	1	114	114
3	2	?	?

Cellule B3 : **=B2+3**

Cellule C3 : **=C2+B3**

b) Sur l'ordinateur, ouvrir le tableur **Libre Office Calc**, puis effectuer le travail suivant :

- Recopier le tableau comme ci-dessus.
- A partir des cellules A2 et A3, numéroter les hauteurs jusqu'à 25 (A26).
- Saisir les formules en B3 et C3 puis les recopier jusqu'à B26 et C26.

Le résultat est donné ci-contre. Dans quelle cellule a-t-on la longueur totale de planches ? Relever cette longueur.

Dans la cellule C26, soit une longueur totale de 3750 cm = 37,50 m

Rappel suites arithmétiques
 Terme u_n : $u_n = u_1 + (n-1) \times r$
 Somme des n premiers termes :

$$S_n = \frac{n \times (u_1 + u_n)}{2}$$

	A	B	C
1	n°	hauteur	Longueur totale
2	1	114	114
3	2	117	231
4	3	120	351
5	4	123	474
6	5	126	600
7	6	129	729
8	7	132	861
9	8	135	996
10	9	138	1134
11	10	141	1275
12	11	144	1419
13	12	147	1566
14	13	150	1716
15	14	153	1869
16	15	156	2025
17	16	159	2184
18	17	162	2346
19	18	165	2511
20	19	168	2679
21	20	171	2850
22	21	174	3024
23	22	177	3201
24	23	180	3381
25	24	183	3564
26	25	186	3750

Exercice 3 Fonction polynomiale du 2nd degré

Problème : Dans un pays, la population croit selon les valeurs données ci-contre. L'année 2000 est prise comme référence, rang $x = 0$.

Des démographes ont modélisé l'évolution de cette population par la fonction f telle que :

$$f(x) = -0,0048x^2 + 0,6295x + 54,845$$

x : rang de l'année

$f(x)$: population en millions

Année	Rang x	Population y (en millions)
2000	0	54,8
2010	10	60,7
2020	20	65,5
2030	30	69,4

Question : Cette population atteindra-t-elle un maximum ? Si oui en quelle année ?

Quelle sera alors la taille de cette population ?

A l'aide de la calculatrice et des fiches :

Tableau de valeurs – Représentation graphique d'une fonction

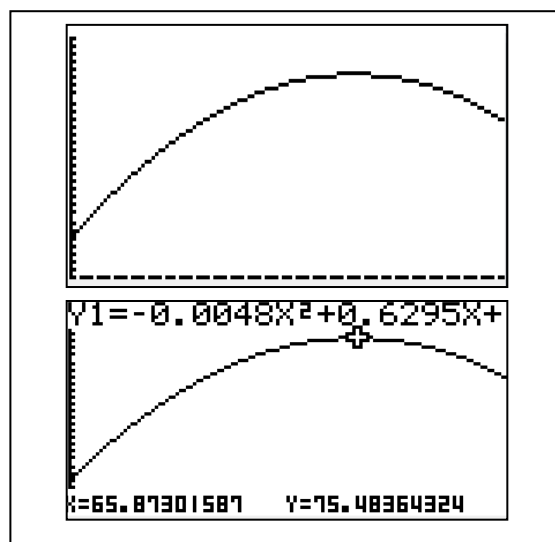
Résoudre une équation du second degré

- 1) Sur la calculatrice, saisir la fonction f puis à l'aide des fonctionnalités, afficher puis compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir à 0,1) :

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$f(x)$	54,8	60,7	65,5	69,4	72,3	74,3	75,3	75,4	74,5	72,6

- 2) Sur la calculatrice, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 90]$ avec les réglages de fenêtre ci-dessous.

Xmin : 0
Xmax : 100
Ymin : 50
Ymax : 80



Donner l'allure de la courbe obtenue ci-contre.

- 3) A l'aide des fonctionnalités de la calculatrice, relever les coordonnées du point maximum de la fonction. Arrondir à 0,1.

M(**65,9**; **75,5**)

D'après la valeur du rang x , en déduire la valeur correspondante de l'année.

65,9 est proche de 66 et ce rang correspond à l'année 2066.

- 4) La fonction f est une fonction polynômiale du 2nd degré du type : $f(x) = ax^2 + bx + c$. Donner les coefficients a , b et c :

$$a = -0,0048$$

$$b = 0,6295$$

$$c = 54,845$$

- 5) Le sommet M d'une parabole a pour abscisse $x_0 = \frac{-b}{2a}$ et pour ordonnée $f(x_0)$. Retrouver par calcul les coordonnées de M.

$$x_0 = \frac{-0,6295}{2 \times (-0,0048)} = \frac{0,6295}{0,0096} = 65,57 \approx 66$$

$$f(x_0) = f(66) = -0,0048 \times 66^2 + 0,6295 \times 66 + 54,845 \approx 75,5$$

- 6) Répondre à la question du problème.

Cette population atteindra bien un maximum vers l'année 2066 et sa population devrait être alors d'environ 75,5 millions.

Exercice 4 Racines d'un polynôme du 2nd degré

Problème : Le bénéfice d'une entreprise qui fabrique des spas, en milliers d'euros, dépend du nombre de spas fabriqués et vendus par mois selon le polynôme du second degré :

$$f(x) = -x^2 + 130x - 4125 \text{ sur l'intervalle } [0 ; 90].$$

x : Nombre de spas $f(x)$: Bénéfice en milliers d'euros

Question : Combien de spas doit-elle vendre par mois afin de réaliser un bénéfice positif ?

1) Donner les coefficients a , b et c de la fonction f .

$$a = -1$$

$$b = 130$$

$$c = -4125$$

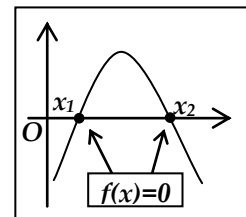
2) A l'aide des fonctionnalités de la calculatrice, déterminer les racines x_1 et x_2 de la fonction f , c'est à dire les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$.

$$x_1 = 55$$

$$x_2 = 75$$

3) Compléter le tableau ci-dessous en donnant le signe de f (+ ou -).

x	0	55	75	90
Signe de $f(x)$	-	+	-	



4) Répondre à la question du problème.

L'entreprise réalise un bénéfice lorsque $f(x)$ est positive. Il faut donc qu'elle fabrique et vende entre 55 et 75 spas par mois. En dessous de 55 et au-dessus de 75, le bénéfice est négatif, elle perd de l'argent.