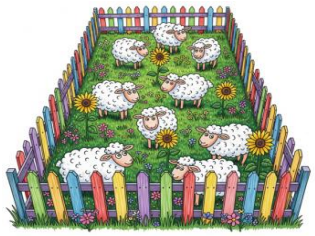
6	Mathématiques	1ère Bac Pro
	Devoir	**Les fonctions dérivées - CORRECTION**

Un éleveur de brebis possède le matériel nécessaire pour construire 300 m de clôture. Il souhaite réaliser un parc rectangulaire afin d'enfermer ses bêtes.

Problème : Quelles devront être les dimensions du rectangle afin que les brebis disposent de l'aire la plus grande ?



Partie A Les différents rectangles

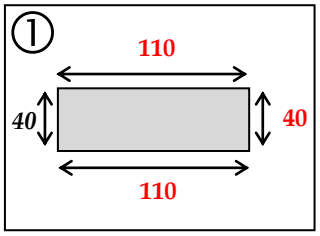
1) **S'approprier** Il calcule l'aire d'un parc de longueur $L = 120\ m$ et de largeur $l = 30\ m$. Vérifier que le périmètre de ce rectangle est bien de 300 m. Calculer ensuite son aire A en m².

Périmètre : $p = 120\times2 + 30\times2 = 240 + 60 = 300\ m$.

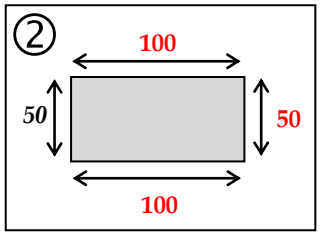
Un rectangle de longueur 120 m et de largeur 30 m a bien pour périmètre 300 m.

Aire : $A = 120\times30 = 3600\ m^2$.

2) **Analyser/Raisonner** Calculer les aires des rectangles dans les deux configurations ci-contre.



Rectangle 1 : $A = 110\times40 = 4400\ m^2$

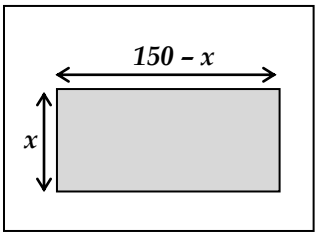


Rectangle 2 : $A = 100\times50 = 5000\ m^2$

3) **Valider** Les différents rectangles ont-ils la même aire ? Justifier.

Selon leurs différentes dimensions, les rectangles dont le périmètre est de 300 m n'ont pas les mêmes aires.

4) **Analyser/Raisonner** Le cas général d'un rectangle de largeur x et de périmètre 300 est donné ci-contre. Sa longueur est alors de $150-x$. Montrer que l'aire A du rectangles est :



$$A = -x^2 + 150x.$$

$A = (150 - x) \times x$

$A = 150x - x^2$

$A = -x^2 + 150x$

Partie B Etude de la fonction

Soit la fonction f donnant l'aire du rectangle en fonction de sa largeur x définie sur l'intervalle $[0 ; 150]$:

$$f(x) = -x^2 + 150x$$

1) **Réaliser** Déterminer la fonction dérivée $f'(x)$

$f'(x) = -2x + 150$

Déterminer la valeur x_0 pour laquelle la dérivée est nulle.

$f'(x) = 0$ $\quad -2x + 150 = 0$ $\quad -2x = -150$ $\quad x = \frac{-150}{-2}$ $\quad x_0 = 75$

Etudier le signe de la fonction dérivée $f'(x)$.

On calcule la valeur de la fonction dérivée pour chacune des bornes de l'intervalle [0 ; 150].

$f'(0) = -2\times0 + 150 = 150$ *(positif)* $\qquad f'(150) = -2\times150 + 150 = -150$ *(négatif)*

Si $x < 75$, alors $f'(x) > 0$ et si $x > 75$, alors $f'(x) < 0$

Construire le tableau de variation.

$f(0) = -0^2 + 150\times0 = 0$

$f(75) = -75^2 + 150\times75 = 5625$

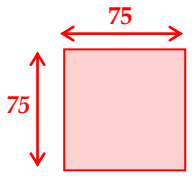
$f(150) = -150^2 + 150\times150 = 0$

x	0		75		150
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variation de f	0	↗	5625	↘	0

2) **Réaliser** Donner la largeur x pour laquelle l'aire du rectangle est la plus grande. En déduire sa longueur pour un périmètre de 300 m.

Le rectangle dont l'aire est la plus grande est celui de largeur $x = 75$ m.

Dans ce cas la longueur sera : $L = \frac{300-2\times75}{2}$ soit $L = 75$ m.



Valider Que constate-t-on ?

Longueur et largeur sont identiques. Le rectangle dont l'aire est la plus grande est finalement le carré.

3) **Valider** **Communiquer** Répondre à la question du problème.

Avec 300 m de cloture, et afin d'avoir l'aire la plus grande, l'éleveur de brebis devra construire un parc de forme carré de 75 m de côté.

Dans ce cas l'aire sera de 5625 m².

4) **Analyser/raisonner** A partir des conclusions, indiquer quel parc rectangulaire d'aire la plus grande peut-on avoir avec les longueurs de clôture suivantes :

a) 220 m de cloture

Il faut construire un parc carré de côté 220 / 4 = 55 m.

b) 320 m de cloture

Il faut construire un parc carré de côté 320 / 4 = 80 m.