Mathématiques BMI 1

Exercices	Les fonctions – Dérivées

Exercice 1

Donner les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

1	$f(x) = -3x + 1$	**8**	$f(x) = 5\ln(x)$
2	$f(x) = x^2$	**9**	$f(x) = \frac{3}{x}$
3	$f(x) = 5x^2$	**10**	$f(x) = \frac{3}{x^2}$
4	$f(x) = x^3$	**11**	$f(x) = \frac{2}{x^4}$
5	$f(x) = 2x^3$	**12**	$f(x) = 5x^2 - \frac{2}{x} + 1$
6	$f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x - 5$	**13**	$f(x) = 4e^x$
7	$f(x) = 4x^4 - 7x + 3$	**14**	$f(x) = 3\sqrt{x}$

Exercice 2

Donner les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto -x + 2$

2) $f : x \mapsto x^2 + 3x^4$

3) $f : x \mapsto \sqrt{x} + 1$

4) $f : x \mapsto \dfrac{5}{x^2}$

5) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

6) $f : x \mapsto \sin x - x\cos x$

7) $f : x \mapsto \sin x \cos x$

8) $f : x \mapsto \dfrac{2x + 4}{x - 1}$

9) $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2x^2 - 2}$

10) $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$

11) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 + 2\sqrt{x}}$

12) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

Exercice 3

Donner les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

13) $f : x \mapsto \cos(2x + 3)$

14) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

15) $f : x \mapsto \left(x^2 - 2x + 3\right)^2$

16) $f : x \mapsto \left(\dfrac{x - 1}{3x^2 + 1}\right)^3$

17) $f : x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

18) $f : x \mapsto \sin^2(2x)$

Etude d'une fonction

Le principe de l'étude d'une fonction f est d'utiliser sa fonction dérivée $f\,'$ afin de déterminer les points extremums et les différents sens de variation de la représentation graphique de la fonction f.

Rappel :

> Si $f\,'(x) = 0$, la fonction f admet un **extremum** (minimum ou maximum)
> Si $f\,'(x)$ est **positive** sur un intervalle, la fonction f est **croissante** sur cet intervalle.
> Si $f\,'(x)$ est **négative** sur un intervalle, la fonction f est **décroissante** sur cet

Soit la fonction f telle que $f(x) = x^2 - 10x + 15$ étudiée sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

1) La fonction dérivée.

Déterminer la fonction $f\,'$ dérivée de la fonction f. (Voir tableau page précédente)

……

2) Etude du signe de la fonction dérivée

- Déterminer la valeur x_0 pour laquelle $f\,'(x) = 0$.

……

……

- Calculer et compléter : $f\,'(0) =$ ………… $f\,'(10) =$ …………

La fonction dérivée est nulle pour l'abscisse $x_0 =$ ….

La fonction dérivée est positive pour $x_0 >$ ….. La fonction dérivée est négative pour $x_0 <$ …..

La fonction f est : ☐ croissante ☐ décroissante sur l'intervalle $[0\,;$ …… $]$
☐ croissante ☐ décroissante sur l'intervalle $[$ …… $;\,10\,]$

La fonction f admet : ☐ un minimum ☐ un maximum pour l'abscisse $x_0 =$ …..

3) Le tableau de variation

Calculer $f(0)$, $f(x_0)$ et $f(10)$ et compléter le tableau de variation :

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ 10
Signe de $f\,'(x)$	
Variation de f	

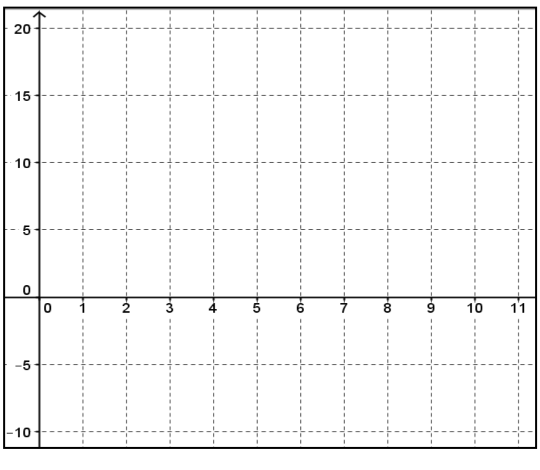
Donner les coordonnées du point S minimum de la représentation graphique de la fonction f.

$S($ ………… ; ………… $)$

4) La représentation graphique

$A(\,0\,;$ ……… $)$ et $B(\,10\,;$ ……… $)$

Placer les points A, S et B sur le graphique ci-contre puis donner l'allure de la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.



Exercice 4

Soit la fonction f telle que $f(x) = 2x^3 - 3x^2 \ -1$

Mener l'étude de cette fonction.

1) Domaine de définition.
2) Vérification d'une éventuelle parité ou imparité
3) Limites aux bornes.
4) Fonction dérivée.
5) Etude de la fonction dérivée.
6) Tableau de variation (Signe dérivée + variation de f).
7) Représentation graphique.

Correction :

1) La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2) Les limites aux bornes du domaine sont les suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

car $f : x \mapsto x^3\left(2 - \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right)$ et $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} 2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} = 2$.

3) La dérivée de f est $f' : x \mapsto 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.

4) Un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est du signe de a (ici positif) sauf entre les racines, d'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 5

Soit la fonction f telle que $\boldsymbol{f(x)} = \frac{x^2}{2x^2-2}$

Mener l'étude de cette fonction.

1) Domaine de définition.
2) Vérification d'une éventuelle parité ou imparité
3) Limites aux bornes.
4) Fonction dérivée.
5) Etude de la fonction dérivée.
6) Tableau de variation (Signe dérivée + variation de f).
7) Représentation graphique.

Correction :

1) **a)** L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

b) La fonction f est paire, donc on l'étudie sur $D = [0; 1[\ \cup\ ]1; +\infty[$.

c) On a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2-2} = 0$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{2x^2-2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{2x^2-2} = -\infty \text{ car } \lim_{x\to 1^-} 2x^2-2 = 0^-$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{2x^2-2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{2x^2-2} = +\infty \text{ car } \lim_{x\to 1^+} 2x^2- = 0^+$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \text{ (limite à l'infinie d'une fonction rationnelle)}$$

d) La fonction f est continue et dérivable sur D car elle est une fonction rationnelle.

e) Pour tout $x \in D$, on a $f'(x) = -\frac{4x}{(2x^2-2)^2}$, donc $f'(x) < 0$ pour tout x dans D. Le tableau de variations est donc le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$