Semaine 3 : fraction irréductible

(3-4 heures de travail)

Cette semaine, nous poursuivons (et terminons) le travail commencé sur l'arithmétique. Pour rappel, la semaine dernière, nous avons travaillé :

- la décomposition en produit de facteurs premiers
- le plus grand diviseur commun (PGCD)

Cette semaine, 3 **nouvelles parties** : correction des exercices, une nouvelle méthode, des exercices-types et bilan. **À toi d'organiser ton travail dans la semaine, tu n'es pas obligé de tout faire le même jour.**

Partie 1 : retour sur le travail de la semaine précédente

Correction des exercices

41 $100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5$ et $102 = 2 \times 17 \times 3$

42 **a.** Ce n'est pas la décomposition en produit de facteurs premiers, car 8 et 4 ne sont pas premiers.
b. On part de $224 = 7 \times 8 \times 4$
$224 = 7 \times 2^3 \times 2^2$
$224 = 2^5 \times 7$

43 On part de $256 = 16 \times 16$
$256 = 2^4 \times 2^4$
$256 = 2^8$

44 **a.** On utilise le fait que $45 = 5 \times 9$ et donc $45 = 5 \times 3^2$
b. On utilise le fait que 65 est divisible par 5.
$65 = 5 \times 13$
c. $34 = 2 \times 17$
d. $48 = 2 \times 24 = 2 \times 3 \times 8 = 2^4 \times 3$

45 **a.** $56 = 7 \times 8 = 7 \times 2^3$
b. $42 = 6 \times 7 = 2 \times 3 \times 7$
c. $93 = 3 \times 31$
d. $110 = 10 \times 11 = 2 \times 5 \times 11$

46 **a.** $550 = 5 \times 11 \times 10 = 5 \times 11 \times 2 \times 5 = 2 \times 5^2 \times 11$
b. $320 = 32 \times 10 = 2^5 \times 2 \times 5 = 2^6 \times 5$
c. $425 = 5 \times 85 = 5 \times 5 \times 17 = 5^2 \times 17$
d. $1\,000 = 10 \times 10 \times 10 = 2^3 \times 5^3$

47 **a.** $27 \times 24 = 3^3 \times 3 \times 2^3 = 2^3 \times 3^4$
b. $26 \times 28 = 2 \times 13 \times 2 \times 2 \times 7 = 2^3 \times 7 \times 13$
c. $63 \times 23 = 7 \times 3^2 \times 23$

48 **a.** $64 \times 15 \times 10 = 2^6 \times 3 \times 5 \times 2 \times 5 = 2^7 \times 3 \times 5^2$
b. $28^2 \times 49 = (7 \times 2^2)^2 \times 7^2 = 7^4 \times 2^4$
c. $21^2 \times 35^4 = (3 \times 7)^2 \times (7 \times 5)^4 = 3^2 \times 7^2 \times 7^4 \times 5^4 = 3^2 \times 5^4 \times 7^6$

94 $140 = 2^2 \times 5 \times 7$ et $150 = 2 \times 3 \times 5^2$
Les nombres premiers 2 et 5 divisent 140 et 150.
Le plus grand diviseur commun à 140 et 150 est donc 10.

96 **a.** $1484 : 2 = 742$
$742 : 2 = 371$
$371 : 7 = 53$ et 53 est un nombre premier.
Donc $1484 = 2^2 \times 7 \times 53$
$1\,060 : 2 = 530$
$530 : 2 = 265$
$265 : 5 = 53$ et 53 est un nombre premier.
Donc $1\,060 = 2^2 \times 5 \times 53$
b. Les longueurs 1 484 cm et 1 060 cm sont divisibles par 2, 4, 53, 8, 106 et 212.
Comme le jardinier souhaite que la distance entre deux rosiers soit comprise entre 100 cm et 200 cm, le seul choix possible est 106 cm.

108 **1.** 3 003 par 20 : R = 3
3 731 par 20 : R = 11
2. a. 3 003 par 90 : R = 33
Cela ne convient pas.
b. On peut décomposer 3 003 et 3 731 en produit de facteurs premiers.
$3\,003 : 3 = 1\,001$
$1\,001 : 7 = 143$
$143 : 11 = 13$ et 13 est premier.
$3\,003 = 3 \times 7 \times 11 \times 13$
$3731 : 7 = 533$
$533 : 13 = 41$ et 41 est premier.
$3\,731 = 7 \times 13 \times 41$
Le plus grand diviseur commun à 3 003 et 3 731 est $7 \times 13 = 91$.
Ils feront 91 ballotins.
$3\,003 : 91 = 33$ et $3\,731 : 91 = 41$.
Il y aura dans chaque ballotin 33 dragées au chocolat et 41 dragées aux amandes.

111 On note n le nombre d'enfants.
$397 = n \times x + 37$
$598 = n \times y + 13$
Le nombre n est donc un diviseur de $397 - 37 = 360$ et de $598 - 13 = 585$.
$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
$585 = 3^2 \times 5 \times 13$
Un diviseur commun, le plus grand possible, est $3^2 \times 5 = 45$
45 enfants, au maximum, étaient présents.

Entraînement

Si tu penses ne pas bien avoir compris certaines notions, c'est le moment de les retravailler. Tu peux regarder de nouveaux les vidéos et répondre aux questionnaires des parties qui n'ont pas été réussies.

Partie 2 : fractions irréductibles

Définitions

→ Simplifier une fraction, c'est l'écrire sous la forme d'une autre fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres (entiers) plus petits.

→ Une fraction est dite irréductible si on ne peut pas la simplifier.

Exemples :

- •5 / 10 n'est pas une fraction irréductible, on peut la simplifier en 1 / 2.
- •1 / 2 est une fraction irréductible.
- •14 / 3 est une fraction irréductible.

Rappel : simplifier une fraction

Regarde les deux vidéos suivantes qui nous rappellent la méthode pour simplifier une fraction.

https://www.youtube.com/watch?v=g5oV2wC6RfU

https://www.youtube.com/watch?v=6ce96Tze9nI

À présent, pour t'assurer que c'est bien clair pour toi, réponds à ce questionnaire. Tu peux utiliser un brouillon pour t'aider à réfléchir. La correction sera disponible immédiatement après que tu aies validé tes réponses.

https://forms.gle/AtYeVqJbjLnGpr3M8

Méthode

Afin d'obtenir à coup sûr une fraction irréductible, il existe une méthode qui utilise la décomposition en produit de facteurs premiers. Regarde les deux vidéos suivantes pour comprendre comment faire.

https://www.youtube.com/watch?v=nG_ZyTOoCRc

https://www.youtube.com/watch?v=qZaTIiAWkA0

À présent, pour t'assurer que c'est bien clair pour toi, réponds à ce questionnaire. Tu peux utiliser un brouillon pour t'aider à réfléchir. La correction sera disponible immédiatement après que tu aies validé tes réponses.

https://forms.gle/qgigq9VboBowS9Lr5

Exercices

Pour t'entraîner à utiliser ce que l'on vient de voir, fais les exercices suivants, puis vérifie ton travail avec la correction.

Attention : ne regarde pas la correction sans avoir cherché, cela ne serait pas efficace !

→ exercices 54-55-56-57 page 49 du livre.

Correction

54 On utilise les critères de divisibilité pour simplifier les fractions :

a. $\dfrac{60}{40} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{2}{3}$

b. $\dfrac{126}{180} = \dfrac{14}{22} = \dfrac{7}{11}$

c. $\dfrac{105}{90} = \dfrac{21}{18} = \dfrac{7}{6}$

55 **a.** On cherche les facteurs communs au numérateur et au dénominateur

$\dfrac{2^3\times5\times11}{2\times3\times5^2} = \dfrac{2^2\times11}{3\times5} = \dfrac{44}{15}$

b. $\dfrac{2^2\times3^4\times5^2\times7}{2^4\times3^2\times5^2\times7^2} = \dfrac{3^2}{2^2\times7} = \dfrac{9}{28}$

56 **a.** $\dfrac{520}{390} = \dfrac{2^3\times5\times13}{2\times3\times5\times13} = \dfrac{2^2}{3} = \dfrac{4}{3}$

b. $52 = 520 : 10 = 2^2 \times 13$

$\dfrac{52}{390} = \dfrac{2^2\times13}{2\times3\times5\times13} = \dfrac{2}{3\times5} = \dfrac{2}{15}$

c. $26 = 52 : 2 = 2 \times 13$ et $39 = 390 : 10 = 3 \times 13$

$\dfrac{26}{39} = \dfrac{2\times13}{3\times13} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$

On pouvait aussi simplifier par 13.

d. $1\,040 = 520 \times 2 = 2^4 \times 5 \times 13$ et

$780 = 390 \times 2 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13$.

$\dfrac{1\,040}{780} = \dfrac{2^4\times5\times13}{2^2\times3\times5\times13} = \dfrac{2^2}{3} = \dfrac{4}{3}$

On pouvait aussi écrire plus simplement :

$\dfrac{1\,040}{780} = \dfrac{52}{390} = \dfrac{4}{3}$

57 On décompose 224 et 280 en produit de facteurs premiers :

$224 = 4 \times 56 = 4 \times 8 \times 7 = 2^2 \times 2^3 \times 7 = 2^5 \times 7$

$280 = 4 \times 70 = 4 \times 2 \times 35 = 2^3 \times 5 \times 7$

$\dfrac{224}{280} = \dfrac{2^5\times7}{2^3\times5\times7} = \dfrac{2^2}{5} = \dfrac{4}{5}$

Partie 3 : exercices-types

Faire les exercices suivants du livre :
85 p 52 - 88/93/94 p 53 - 103 et 105 p 55 - 108 et 111 p 56

Correction : Attention : ne regarde pas la correction sans avoir cherché, cela ne serait pas efficace !

85 **1. a.** $5^2 - 1 = 25 - 1 = 24$
24 est un multiple de 4 : $24 : 4 = 6$
$13^2 - 1 = 169 - 1 = 168$
168 est un multiple de 4 ; $168 : 4 = 42$
b. $7^2 - 1 = 49 - 1 = 48$
48 est aussi un multiple de 4 ; $48 : 4 = 12$
c. Si l'on choisit un nombre premier différent de 2, alors le résultat de ce programme de calcul est un multiple de 4.
2. a. On obtient : $p^2 - 1$
b. p est un nombre premier différent de 2, il est donc impair. Sinon, il serait divisible par 2.
$p + 1$ est le nombre qui suit p, il est donc pair.
De même, $p - 1$ est pair.
c. On utilise une identité remarquable :
$(p + 1) \times (p - 1) = p^2 - 1$
$(p + 1)$ et $(p - 1)$ sont tous les deux pairs.
Donc $(p + 1)$ est un multiple de 2 ainsi que $(p - 1)$.
Le produit $(p + 1) \times (p - 1)$ est donc divisible par 4.

93 **a.** $28 = 2^2 \times 7$
b. Les diviseurs de 28 sont 1, 2, 4, 7, 14 et 28.

×	1	7
1	1	7
2	2	14
2^2	$2^2 = 4$	28

c. $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$
Le nombre 28 est un nombre parfait.

94 $140 = 2^2 \times 5 \times 7$ et $150 = 2 \times 3 \times 5^2$
Les nombres premiers 2 et 5 divisent 140 et 150.
Le plus grand diviseur commun à 140 et 150 est donc 10.

105 La proportion des élèves mangeant au moins cinq fruits et légumes par jour est : $\dfrac{126}{588}$.
126 et 588 ont des diviseurs communs.
- On peut simplifier en utilisant les critères de divisibilité :
$$\frac{126}{588} = \frac{126:2}{588:2} = \frac{63}{294} = \frac{63:3}{294:3} = \frac{21}{98} = \frac{21:7}{98:7} = \frac{3}{14}$$
- On peut décomposer en produit de facteurs premiers :
$126 = 2 \times 3^2 \times 7$ et $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$
$$\frac{126}{588} = \frac{2\times3^2\times7}{2^2\times3\times7^2} = \frac{3}{2\times7} = \frac{3}{14}$$

111 On note n le nombre d'enfants.
$397 = n \times x + 37$
$598 = n \times y + 13$
Le nombre n est donc un diviseur de $397 - 37 = 360$ et de $598 - 13 = 585$.
$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
$585 = 3^2 \times 5 \times 13$
Un diviseur commun, le plus grand possible, est $3^2 \times 5 = 45$
45 enfants, au maximum, étaient présents.

88 **a.** $8 = 5 + 3$
Cette conjecture est vraie pour le nombre 8.
b. $36 = 5 + 31$ ou $36 = 7 + 29$ ou $36 = 13 + 23$ ou $36 = 17 + 19$.
Cette conjecture est vraie pour les nombres précédents.
c. $48 = 5 + 43$
$48 = 7 + 41$
$48 = 11 + 37$
$48 = 17 + 31$
$48 = 19 + 29$

103 **a.** $\dfrac{1\,848}{2\,040}$ n'est pas irréductible puisque 1 848 et 2 040 sont au moins divisibles par 2.
b. $1848 : 8 = 231$
$231 : 3 = 77$
$77 : 7 = 11$ et 11 est premier.
Donc $1\,848 = 2^3 \times 3 \times 7 \times 11$.
$2040 : 8 = 255$
$255 : 3 = 85$
$85 : 5 = 17$ et 17 est premier.
Donc $2040 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 17$.
c. Les diviseurs communs sont 2^3 et 3.
$$\frac{1\,848}{2\,040} = \frac{2^3\times3\times7\times11}{2^3\times3\times5\times17} = \frac{7\times11}{5\times17} = \frac{77}{85}$$

108 **1.** 3 003 par 20 : R = 3
3 731 par 20 : R = 11
2. a. 3 003 par 90 : R = 33
Cela ne convient pas.
b. On peut décomposer 3 003 et 3 731 en produit de facteurs premiers.
$3\,003 : 3 = 1\,001$
$1\,001 : 7 = 143$
$143 : 11 = 13$ et 13 est premier.
$3\,003 = 3 \times 7 \times 11 \times 13$
$3731 : 7 = 533$
$533 : 13 = 41$ et 41 est premier.
$3\,731 = 7 \times 13 \times 41$
Le plus grand diviseur commun à 3 003 et 3 731 est $7 \times 13 = 91$.
Ils feront 91 ballotins.
$3\,003 : 91 = 33$ et $3731 : 91 = 41$.
Il y aura dans chaque ballotin 33 dragées au chocolat et 41 dragées aux amandes.