



RESISTANCE DES MATERIAUX

BTS BATIMENT

CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS PLANES

Compétence 2

Objectif : maîtriser les notions de base de la RDM :

Calcul du moment statique, moment quadratique, calcul du centre de gravité.

Sommaire

- **Moment statique et centre de gravité**
 - Exercice d'application
- **Moment quadratique et centre de gravité**
 - Exercices d'application

Chapitre 2

CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS PLANES

2.1. Introduction

La résistance qu'une barre offre à différentes formes de déformations dépend souvent non seulement du matériau dont il est fait et de ses dimensions, mais aussi de la configuration de son axe, de la forme des sections transversales ainsi que de leur disposition par rapport aux charges de sollicitations. Examinons les caractéristiques géométriques principales des sections transversales d'une barre en faisant abstraction des propriétés physiques de celle-ci. Ces caractéristiques sont : aire des sections transversales, moment statique, moment quadratique, moment résistant, rayon de giration.

Dans la suite de ce chapitre nous développerons les notions de : **moment statique, centre de gravité, moment quadratique**

2. 1 Moment statique et centre de gravité

2.1a Définition du moment statique

Une première notion que nous utiliserons en résistance des matériaux est la notion de **Moment statique** noté **S**. Nous le définirons uniquement dans le cas des surfaces.

Définition : le moment statique S_X d'une section S d'aire A (fig.2.1), par rapport à un axe $\{Ox\}$, est défini par l'expression : $S_X = \int \mathbf{Y} \cdot d\mathbf{s}$

surface

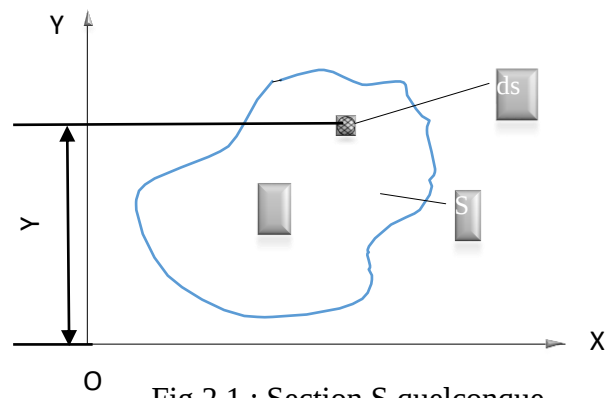


Fig.2.1 : Section S quelconque

Si on connaît les coordonnées $(X_G ; Y_G)$ du centre de gravité G de la section S, on démontre que son moment statique S_x par rapport à l'axe [OX] est égal à :

$$S_x = A \cdot Y_G$$

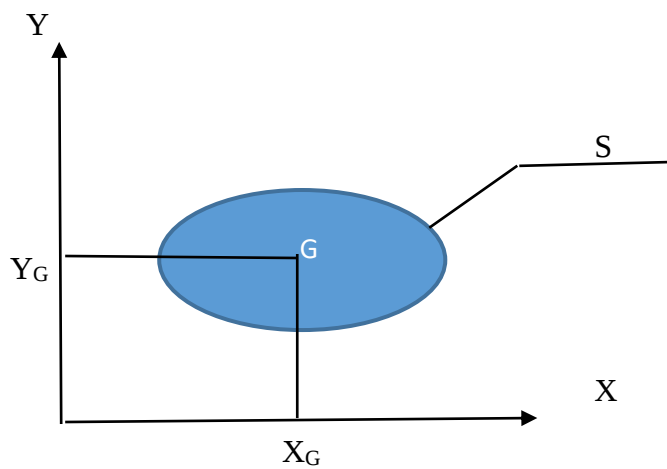


Fig. 2.2 : Section S avec coordonnées de G connues

De même le moment statique S_y par rapport à l'axe {OY}, est égal à :

$$S_y = A \cdot X_G$$

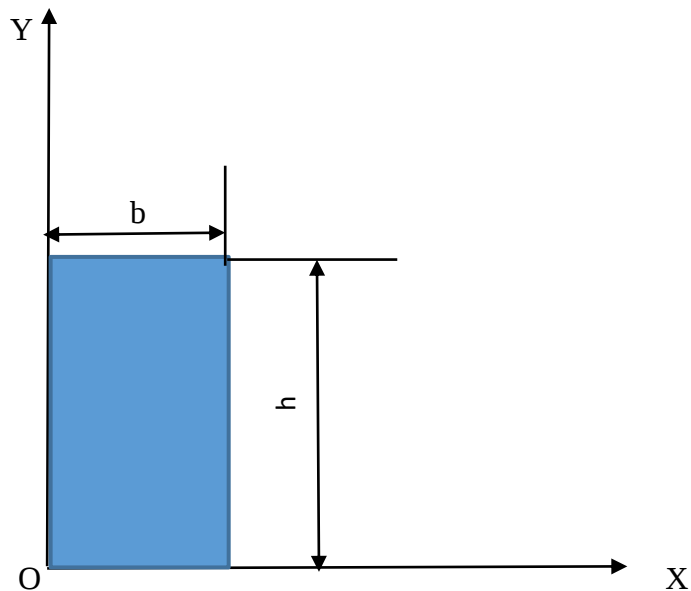
Remarque

L'unité de moment statique sera le cube de l'unité de longueur en général le :

m^3 pour le bâtiment

mm^3 pour la structure métallique

- Pour une section rectangulaire définie et placée dans les conditions montrées sur la figure ci-contre, on établit les relations suivantes :

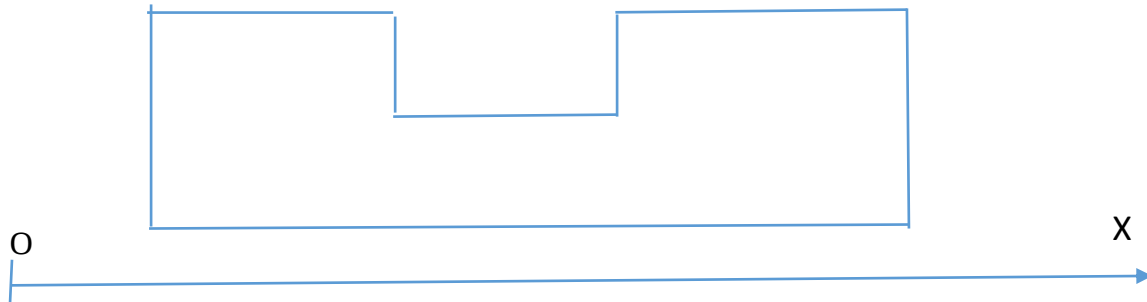


$$S_x = \frac{bh^2}{2}$$

$$S_y = \frac{hb^2}{2}$$

- On peut décomposer la surface d'une section en plusieurs surfaces simples S1 ; S2 ; S3Sn

Section S



$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

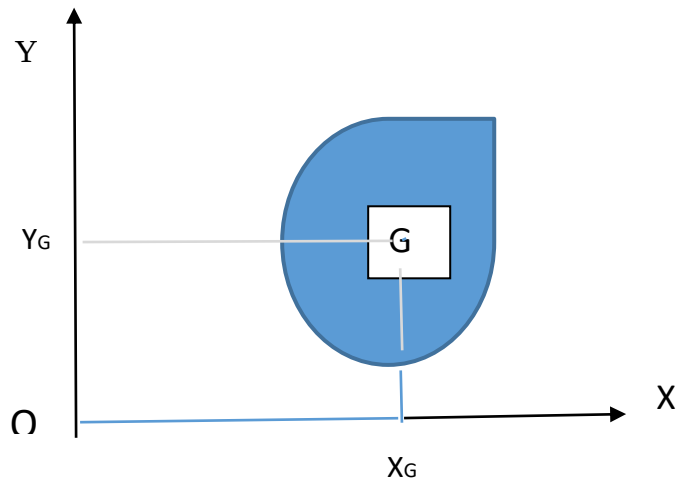


Le moment statique S_x d'une section S par rapport à un axe {OX} est égal à la somme (algébrique) des moments statiques élémentaires issus de la décomposition.

Dans notre exemple nous aurons :

$$S_x = S_{1x} + S_{2x} + S_{3x}$$

- Si on connaît les moments statiques S_x et S_y d'une section S d'aire A par rapport aux deux Axes {OX, OY}, on pourra déterminer les coordonnées XG et YG du centre de gravité de la section.

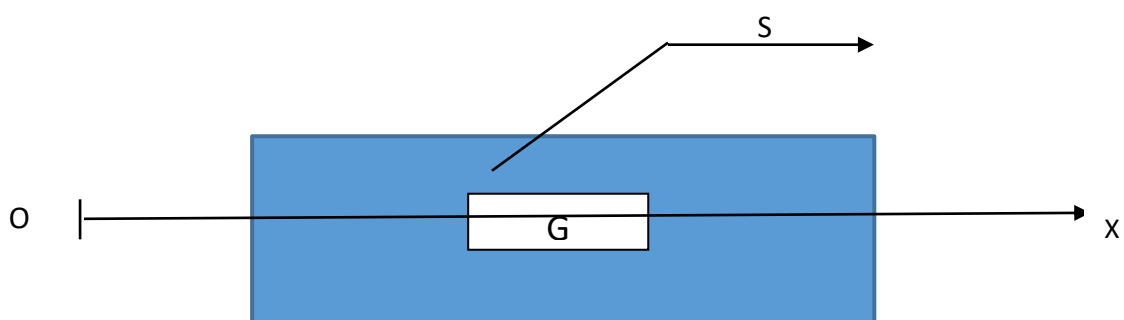


$$X_G = \frac{S_Y}{A}$$

$$Y_G = \frac{S_X}{A}$$

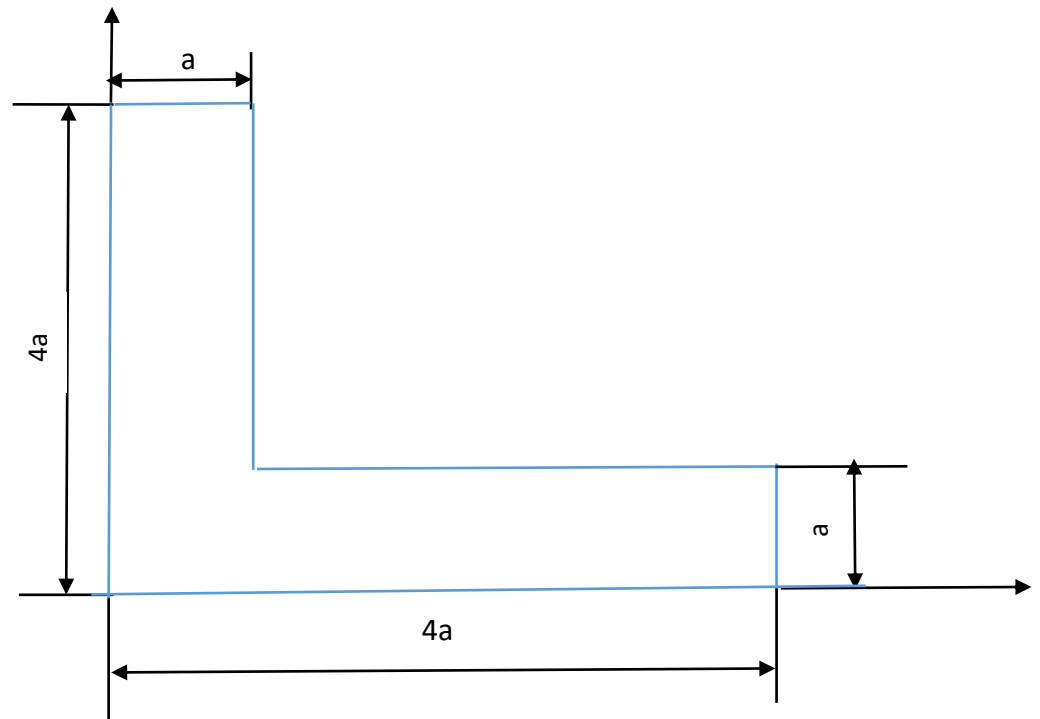
Notons enfin que le moment statique S_x d'une section S par rapport à un axe $\{Ox\}$ passant par son centre de gravité G est égal à Zéro.

$$S_x = 0$$



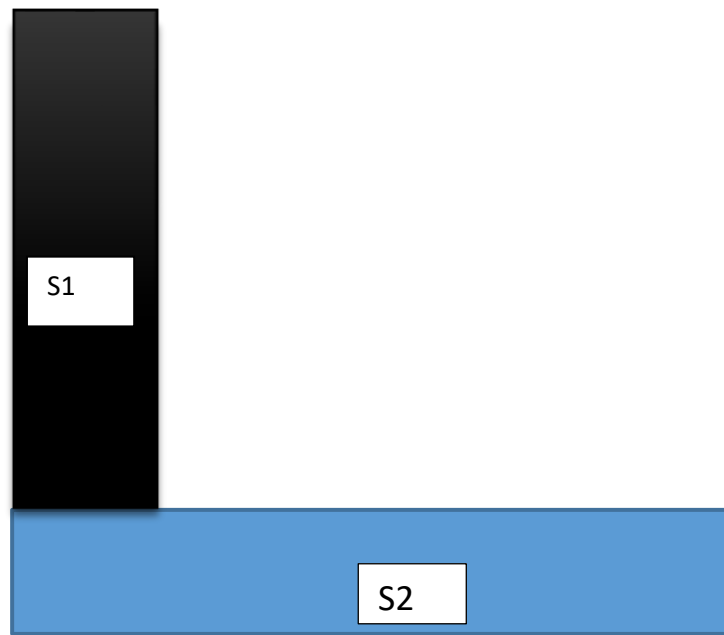
Problème résolu

On se propose de déterminer les coordonnées X_G et Y_G du centre de gravité G de la section d'aire A d'une équerre définie par la figure ci-contre.



1- Décomposition de la section S_1

On décompose la section S en deux surfaces S_1 et S_2 d'aires respectives A_1 et A_2 et définition des Axes de référence.



2- Calcul de l'aire A

$$A_1 = 3a \times a$$

$$A_2 = 3a \times a$$

$$A = 7a^2$$

3- Calcul de X_G

$$S_{1Y} = \frac{3a}{2} \times a^2 = \frac{3a^3}{2}$$

$$\left[S_Y = \frac{19a^3}{2} \right]$$

$$S_{2Y} = \frac{1}{2} a \times (4a)^2 = 8a^3$$

$$X_G = \frac{S_Y}{A} = \frac{\frac{19a^3}{2}}{7a^2}$$

$$X_G = 1,36 a$$

Calcul de Y_G

$$S_{1X} = A_1 \times 2,5 a = 3a^2 \times 2,5a = 7,5 a^3$$

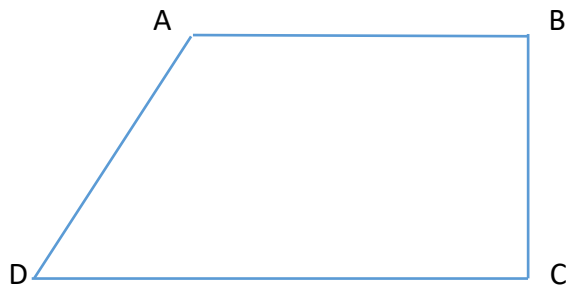
$$S_{2X} = \frac{4a}{2} \times a^2 = 2a^3$$

$$Y_G = \frac{S_X}{A} = \frac{\frac{19a^3}{2}}{7a^3}$$

$$Y_G = 1,36 a$$

$$G (1,36 a, 1,36 a)$$

Problème 1

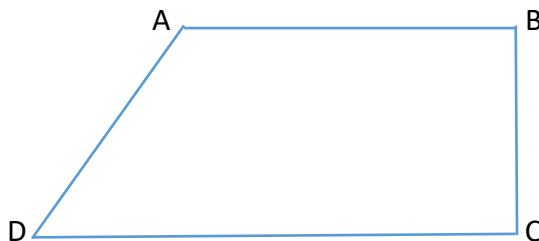


Déterminer par le calcul les coordonnées du centre de gravité de la figure ci-contre

$$AB = BC = 3 \text{ cm}$$

$$DC = 6 \text{ cm}$$

- 1- Décomposer la section s en éléments simples et définir un système d'axes (xDy) orthonormé.



- 2- Calculez les aires des éléments précédemment définis et exprimer l'aire de la section S.

.....

.....

.....

.....

1- Déterminer la valeur de Y_G .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2- Déterminer la valeur de Y_G .

.....

.....

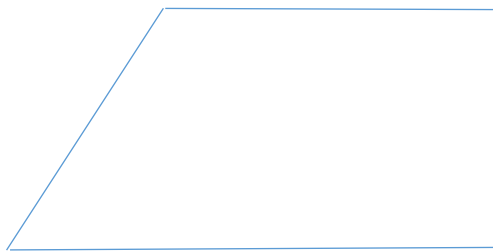
.....

.....

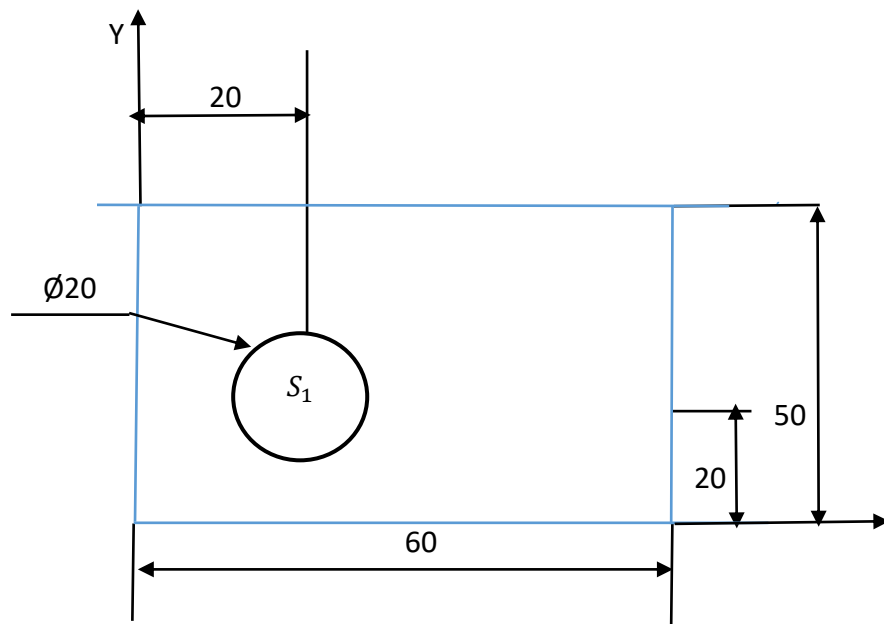
.....

.....

3- Dessiner le centre de gravité G sur la figure ci-après.



Problème2



Déterminer les coordonnées X_G et Y_G du centre de gravité G de la section S d'aire A , définie par la figure ci- après, composé d'un rectangle et d'un trou (**disque enlevé**). On se propose de déterminer les coordonnées de centre de gravité G de la section à partir du système d'axes $[Ax]$ et $[Ay]$

1- En posant

A_1 = Aire du rectangle

A_2 = Aire du disque

Exprimer l'aire de la section S en fonction de A_1 et A_2

.....

Calculer cette aire en mm^2 .

.....

.....

.....

2- Peut-on conduire les calculs nécessaires à la détermination des coordonnées de G à partir d'un système d'axes issu du centre C du disque ? justifier votre réponse.

.....

.....

.....

.....

3- Déterminer à présent les coordonnées de G dans le repère (x A y)

.....

.....

.....

.....

.....

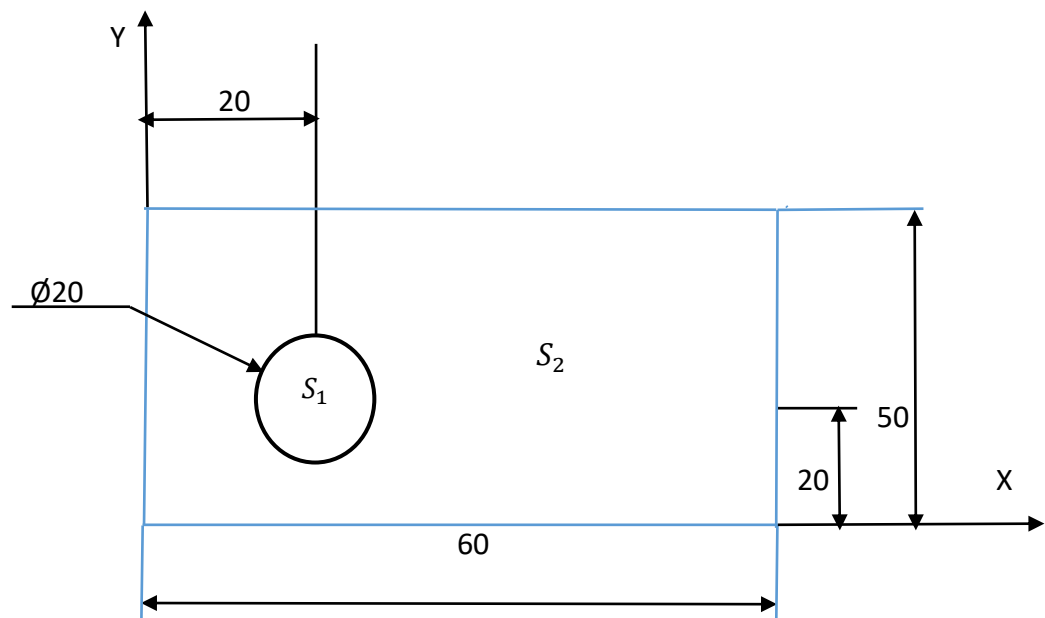
.....

.....

.....

.....

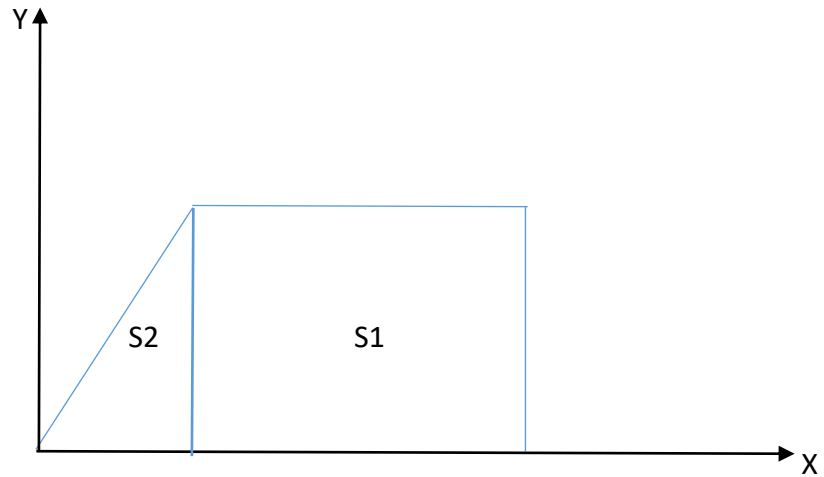
4- Dessiner le centre de gravité G sur la figure ci- après.



Corrigés

Corrigé 1

1.1 Découpage de S en deux surfaces S1 et S2 et définition des Axes de référence.



1.2 Calcul de l'aire A de S

$$A_1 = 3 \times 3 = 9$$

$$13,5 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 3 \times \frac{3}{2} = 4,5$$

1.3 Détermination de Y_G

- Calcul de S_X

$$S_{1X} = 3 \times \frac{3^2}{2} = 13,5$$

$$S_X = 18 \text{ cm}^2$$

$$S_{2X} = 3 \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = 4,5$$

- Calcul de Y_G

$$Y_G = \frac{S_X}{A} = \frac{18}{13,5}$$

$$Y_G = 1,33 \text{ Cm}$$

1.4 Détermination de X_G

- Calcul de S_Y

$$S_{1Y} = 9 \times 4,5 = 40,5$$

$$S_{2Y} = 4,5 \times 2 = 9$$

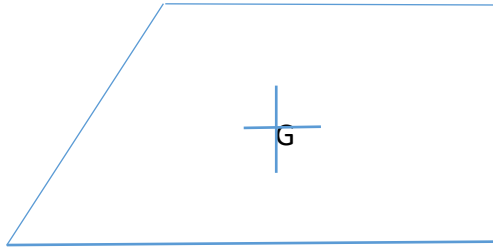
$$S_Y = 49,5 \text{ cm}^2$$

- Calcul de X_G

$$X_G = \frac{S_Y}{A} = \frac{49,5}{13,5}$$

$$X_G = 3,66 \text{ cm}$$

- Dessin de G sur la figure



Corrigé 2

2.1 Expression et valeur de A

$$A = A_1 - A_2$$

$$A_1 = 60 \times 50 = 3000$$

$$A_2 = 3,14 \times 10^2 = 314$$

$$A = 2686 \text{ mm}^2$$

2.2 Conduite des calculs

On ne peut pas conduire ces calculs à partir de $[C_X]$ et $[C_Y]$. En effet dans l'expression $S_X = S_{X_1} - S_{X_2}$, S_X ne peut être déterminé car S_{X_2} s'annulant par rapport à $[C_X]$, on aurait $S_X = S_{X_1}$, ce qui est impossible.

- Calcul relatif à X_G

$$S_{Y_1} = \frac{50 \times 60^2}{2} = 90\,000$$

$$S_{Y_2} = 3,14 \times 100 \times 20 = 6280$$

$$S_Y = S_{Y_1} - S_{Y_2}$$

$$S_Y = 83\,720 \text{ mm}^2$$

$$X_G = \frac{S_Y}{A} = \frac{83\,720}{2\,686}$$

$$X_G = 31,17 \text{ mm}$$

- Calcul relatif à Y_G

$$S_{X_1} = \frac{60 \times 50^2}{2} = 75\,000$$

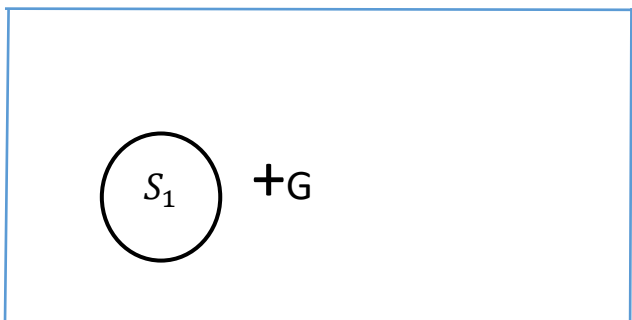
$$S_{X_2} = 3,14 \times 100 \times 20 = 6280$$

$$S_X = S_{X_1} - S_{X_2}$$

$$S_X = 68\,720 \text{ mm}^2$$

$$Y_G = \frac{S_X}{A} = \frac{68\,720}{2\,686}$$

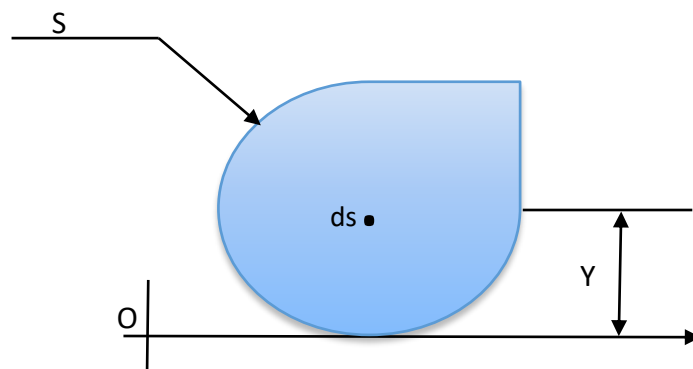
$$Y_G = 25,58 \text{ mm}$$



Moment Quadratique

- Le moment quadratique I_X d'une section S d'aire A, par rapport à un axe (O_X) , est défini par l'expression :

$$I_X = \int_{surface} y^2 \cdot ds$$



L'unité du moment quadratique I_X sera la puissance 4 de l'unité de longueur en général :

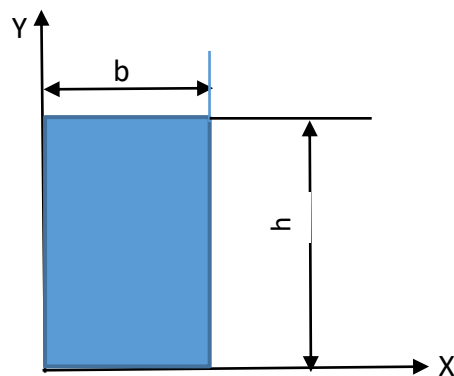
m^4 pour le Génie Civil.

mm^4 pour la structure métallique.

- Pour une section rectangulaire définie et placée dans les conditions montrées ci-après, on établit les relations suivantes :

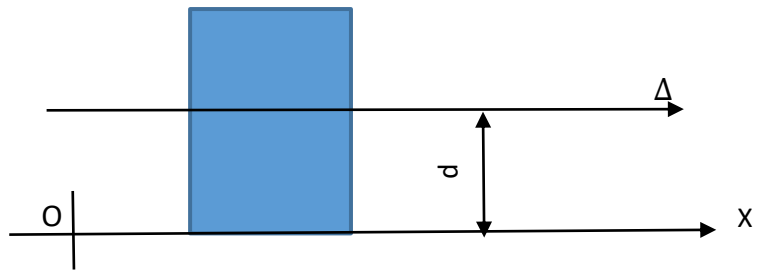
$$I_X = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

$$I_Y = \frac{h \cdot b^3}{3}$$



- Selon la théorie de Huygens, on établit une relation entre I_X et I_Δ par rapport à un axe quelconque (Δ) , défini dans la figure ci – après.

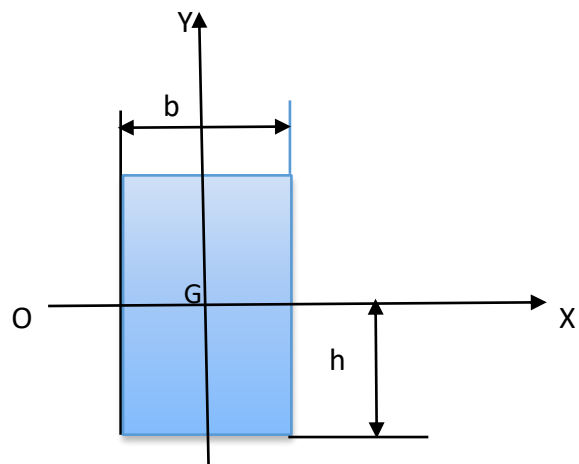
$$I_X = I_\Delta + A \cdot d^2$$



- Compte tenu du théorème de Huygens, les moments quadratiques d'une section S (définie par la figure ci-après) par rapport à deux axes $[G_X]$ et $[G_Y]$ passant par son centre de gravité G. ont pour expressions :

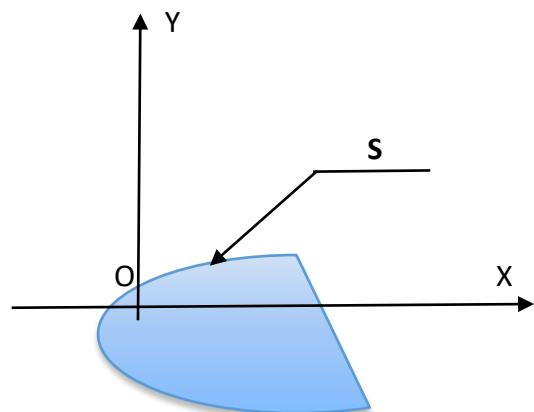
$$I_X = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$I_Y = \frac{h \cdot b^3}{12}$$



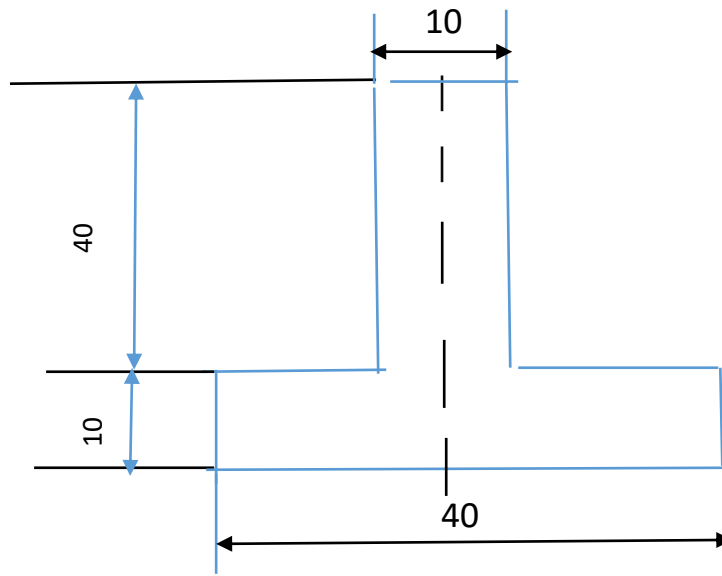
On appelle Moment quadratique polaire I_O d'une section S la somme des moments quadratiques I_X et I_Y de cette section par rapport aux axes $[O_X]$ et $[O_Y]$ définis dans la figure ci-après.

$$I_O = I_X + I_Y$$

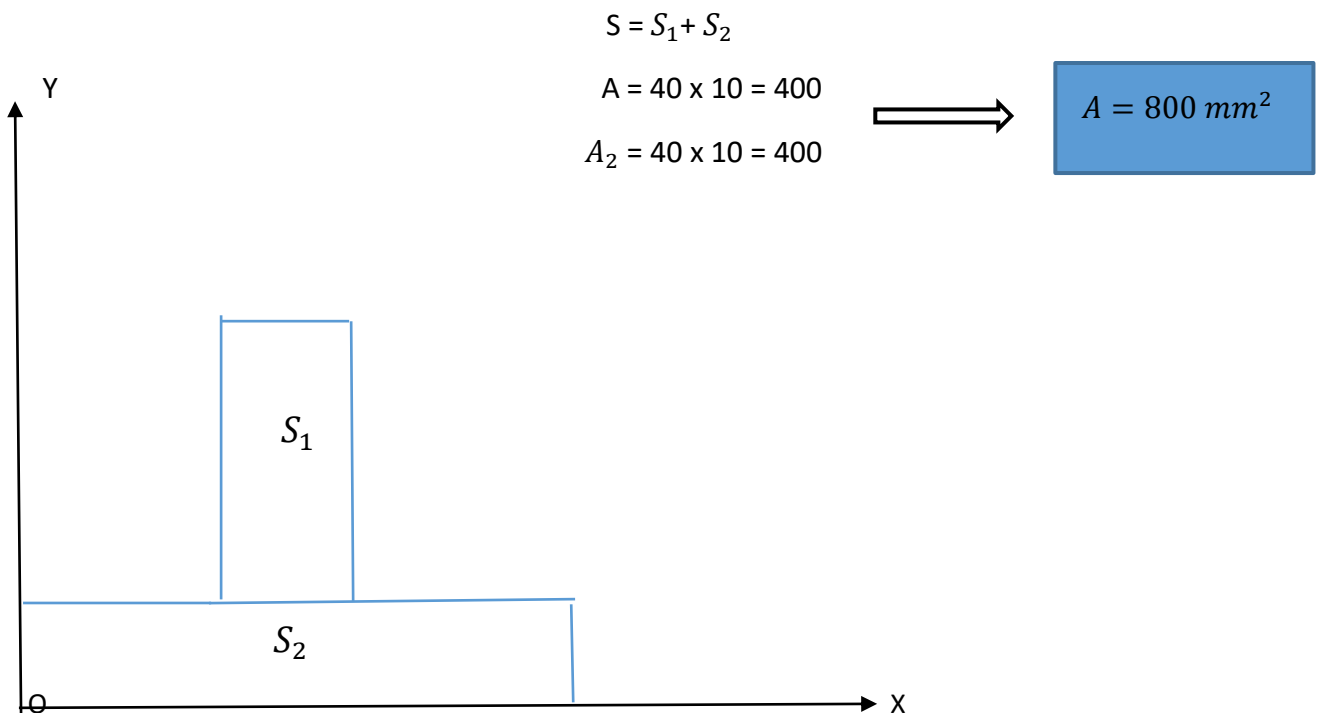


Problème résolu

On se propose de déterminer le **moment quadratique polaire** I_G , au centre de gravité **G** d'une section **S** en forme de T, définie par la figure ci-après.

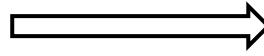


- 1- Décomposer la section **S** en surfaces élémentaires S_1 et S_2 . Définir un système d'axes (XOY) orthonormés.



- 2- Calculer les moments quadratiques I_X et I_Y de la section **S**.

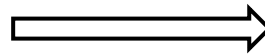
- $I_X = \frac{10 \times 40^3}{12} + 400 \times 30^2 = \frac{124}{3} 10^4$



$$I_X = \frac{128}{3} 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{2X} = \frac{40 \times 10^3}{3} = \frac{4}{3} 10^4$$

- $I_{1Y} = \frac{40 \times 10^3}{12} + 400 \times 20^2 = \frac{49}{3} 10^3$



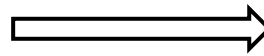
$$I_Y = \frac{113}{3} 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{2Y} = \frac{10 \times 40^3}{12} = \frac{64}{3} 10^3$$

3- Calcul les moments statiques S_X et S_Y de la section S.

- $S_{1X} = 400 \times 30 = 12. 10^3$

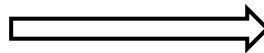
$$S_{2X} = 400 \times 5 = 2. 10^3$$



$$S_X = 14. 10^3 \text{ mm}^3$$

- $S_{1Y} = 400 \times 20 = 8. 10^3$

$$S_{2Y} = \frac{10 \times 40^2}{2} = 8. 10^3$$



$$S_Y = 16. 10^3 \text{ mm}^3$$

En déduire les coordonnées du centre de gravité **G** de la section **S**.

- $X_G = \frac{S_Y}{A} = \frac{16000}{8}$

$$X_G = 20 \text{ mm}$$

- $Y_G = \frac{S_X}{A} = \frac{14000}{800}$

$$Y_G = 17,5 \text{ mm}$$

4-Calculer les moments quadratiques $I_{\Delta 1}$ et $I_{\Delta 2}$ de la section S.

- $$I_{\Delta 1} = I_X - A \cdot Y_G^2$$

$$= 426\,000 - 800 \times 17.5^2 =$$

$$I_{\Delta 1} = 245\,000 \text{ mm}^2$$

- $$I_{\Delta 2} = I_Y - A \cdot X_G^2$$

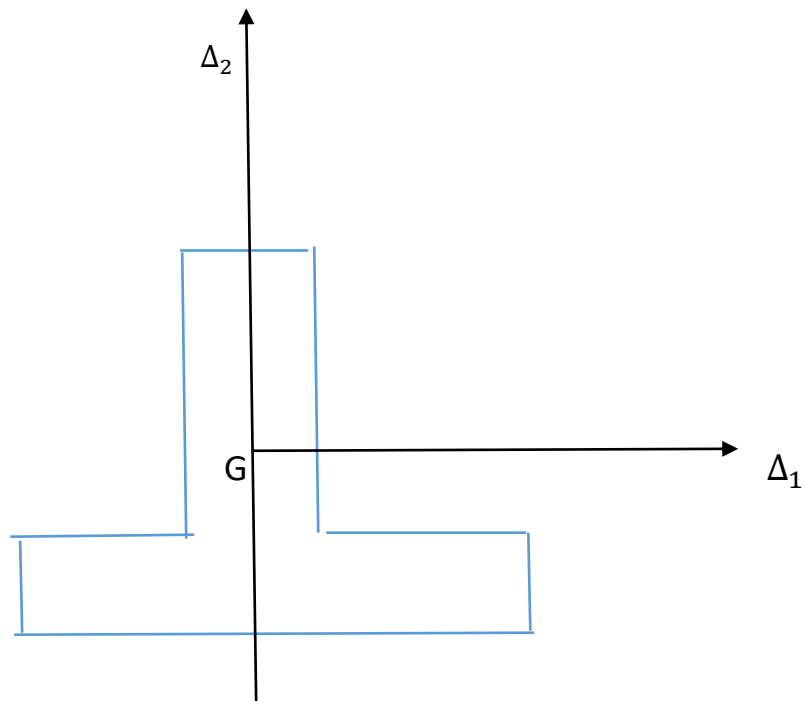
$$= 376\,667 - 800 \times 20^2 =$$

$$I_{\Delta 2} = 56\,667 \text{ mm}^2$$

En déduire le moment quadratique polaire I_G issu de G

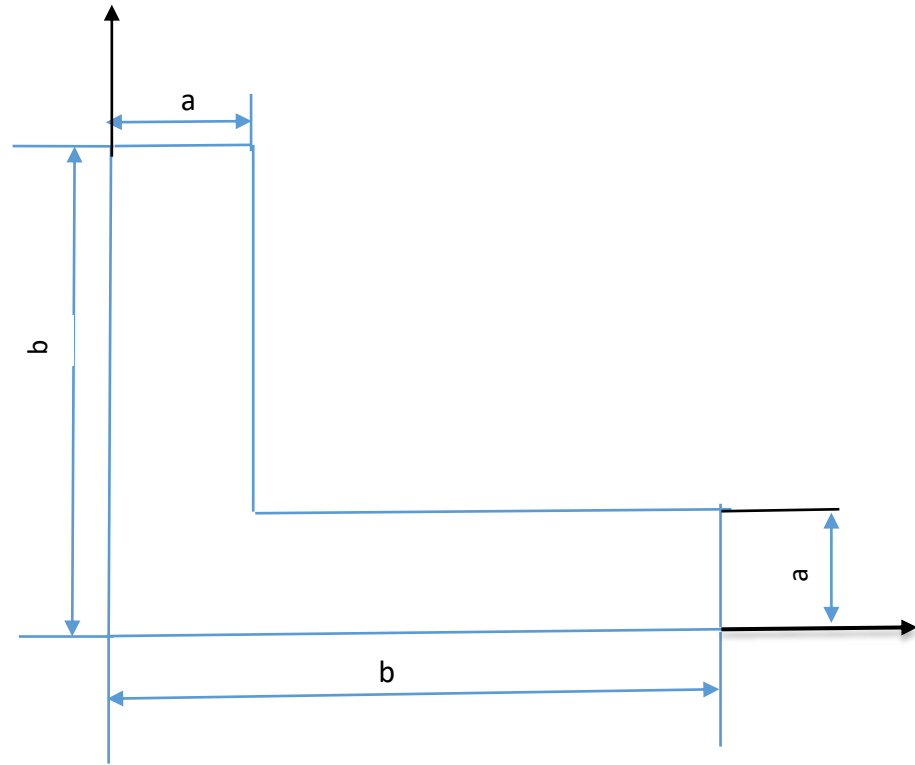
$$I_G = I_{\Delta 1} + I_{\Delta 2} = 245\,000 + 56\,667$$

$$I_G = 301\,667 \text{ mm}^2$$



Problème 3

On se propose de trouver le moment quadratique I_X d'une section S définie et placée dans les conditions de la figure ci- contre.



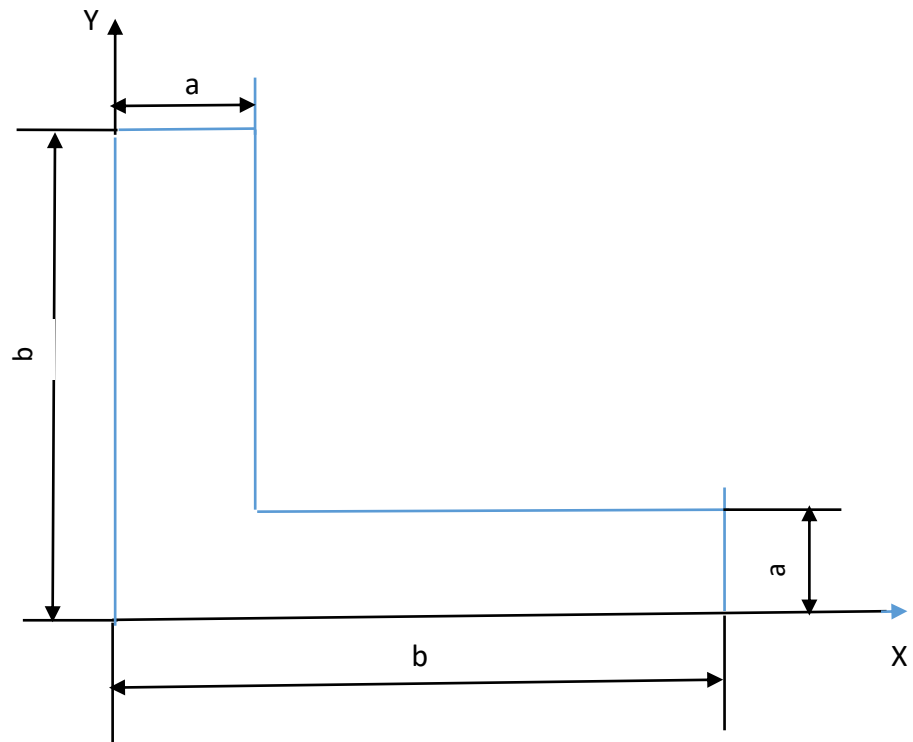
- 1- Décomposer la section en deux sections élémentaires S_1 et S_2 judicieusement choisies pour faciliter le calcul simple de I_X . Justifier votre choix.

.....

.....

.....

.....



- Calculer les aires de S_1 et S_2 , puis calculer la valeur de A.

.....

.....

.....

2- Calculer I_{x1} puis I_{x2}

.....

.....

.....

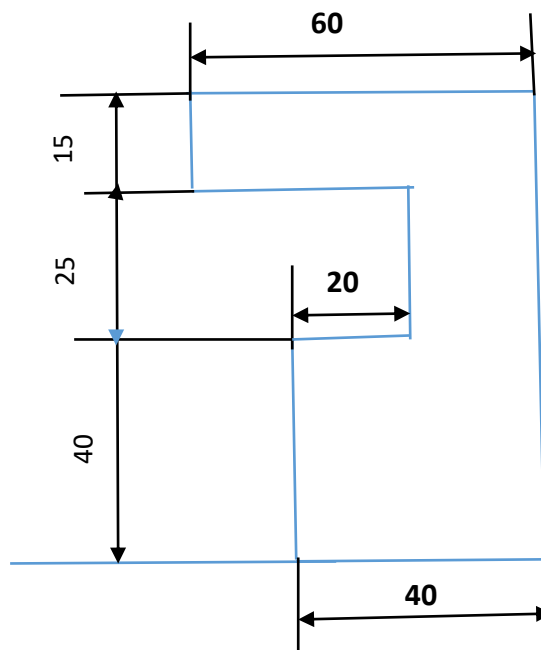
.....

En déduire la valeur de I_x

.....

.....

Problème 4



- 1- Décomposer cette section en une somme algébrique de trois sections élémentaires, en utilisant la figure donnée dans l'énoncé de ce problème. Expliquez votre démarche.

.....

.....

Exprimer dans une relation le résultat de votre décomposition.

.....

Calculer les aires A_1 et A_2 et A_3 . En déduire l'aire A de la section S .

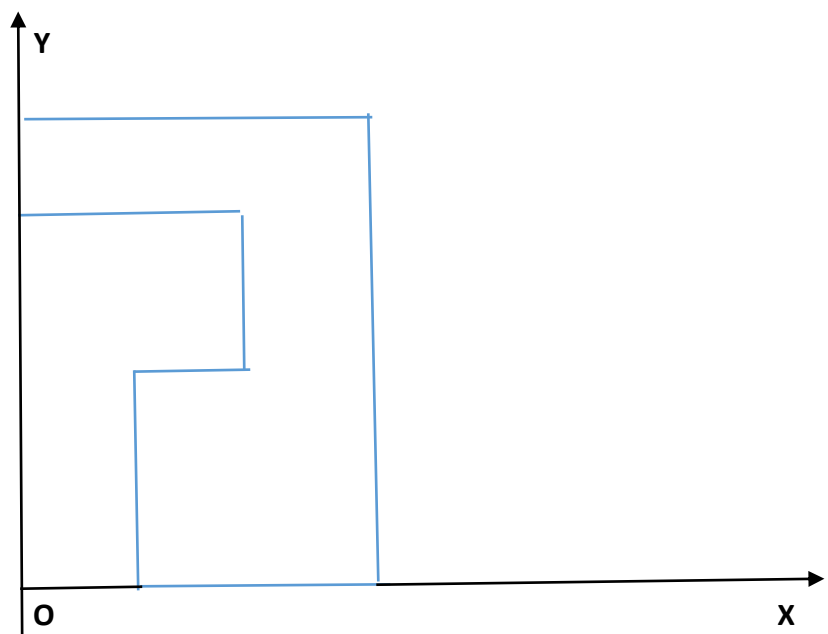
.....

.....

.....

.....

- 2- On considère maintenant le système d'axes (XOY) orthonormé défini à partir de la section S . Déterminer l'ordonnée Y_G du centre de gravité G de la section.



- Calcul du moment statique S_X

.....

.....

.....

.....

- Calcul de Y_G

.....

.....

- Compte tenu de l'échelle des axes, dessiner sur la figure précédente l'axe (Δ).

3- Calculer à présent le moment quadratique I_X de la section S, en se souvenant des trois relations fondamentales suivantes :

$$I_X = \frac{b \cdot h^3}{3} \quad \text{ou} \quad I_X = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad \text{ou} \quad I_X = I_\Delta + A \cdot y^2$$

- Calcul de I_{X1} , I_{X2} et I_{X3}

.....

.....

.....

.....

- Valeur de I_X

.....

.....

.....

4- Calculer le moment quadratique I_Δ de la section S.

.....

.....

.....

.....

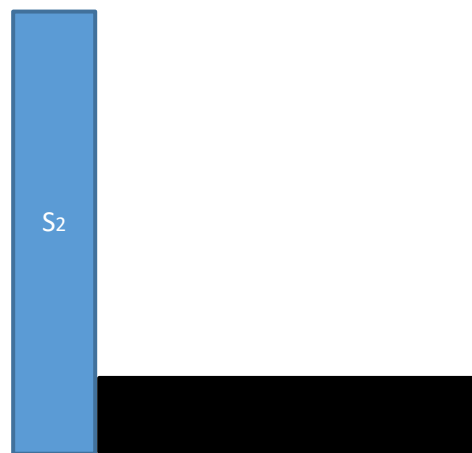
.....

.....

Corrigé 3

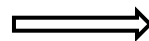
1- Décomposition de la section S et calcul des aires.

$$I_X = \frac{b \cdot h^3}{3}$$



Calcul des aires A , A_1 et A_2

$$A_1 = a \cdot b$$

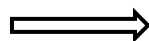


$$A = 2 a b - a^2$$

$$A_2 = a \cdot (b - a) = a \cdot b - a^2$$

3- Calcul de I_{X1} , I_{X2} puis I_X

$$I_{X1} = \frac{a \cdot b^3}{3}$$



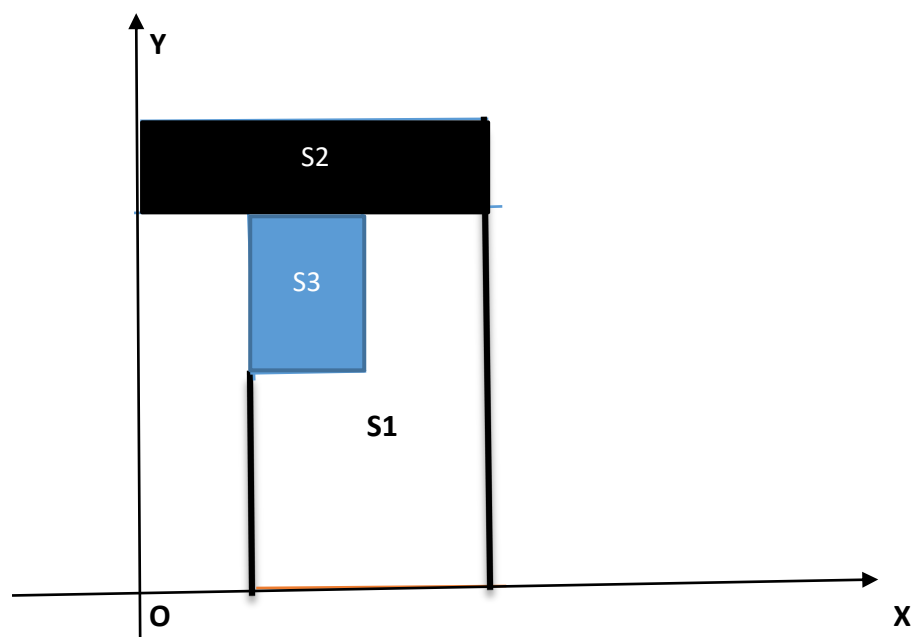
$$I_x = (ab^3 + a^3b - a^4) / 3$$

$$I_{X2} = \frac{(b-a)}{3} a^3$$

Corrigé 4

- 1- On décompose la section S selon trois rectangles bien positionnés par rapport à la base, ce qui facilite la conduite de calculs.

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$



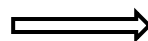
- Calcul des aires

$$A = A_1 + A_2 - A_3$$

$$A_1 = 40 \times 65 = 2600$$

$$A_2 = 60 \times 15 = 900$$

$$A_3 = 20 \times 25 = 500$$



$$A = 3\,000 \text{ mm}^2$$

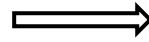
2- Détermination de l'ordonnée Y_G du centre G

- Calcul du moment statique S_x

$$S_{X1} = 40 \times 65^2 / 2 = 60\,500$$

$$S_{X2} = 60 \times 15 \times 72,5 = 65\,250$$

$$S_{X3} = 20 \times 25 \times 52,5 = 26\,250$$



$$S_X = 99\,500 \text{ mm}^3$$

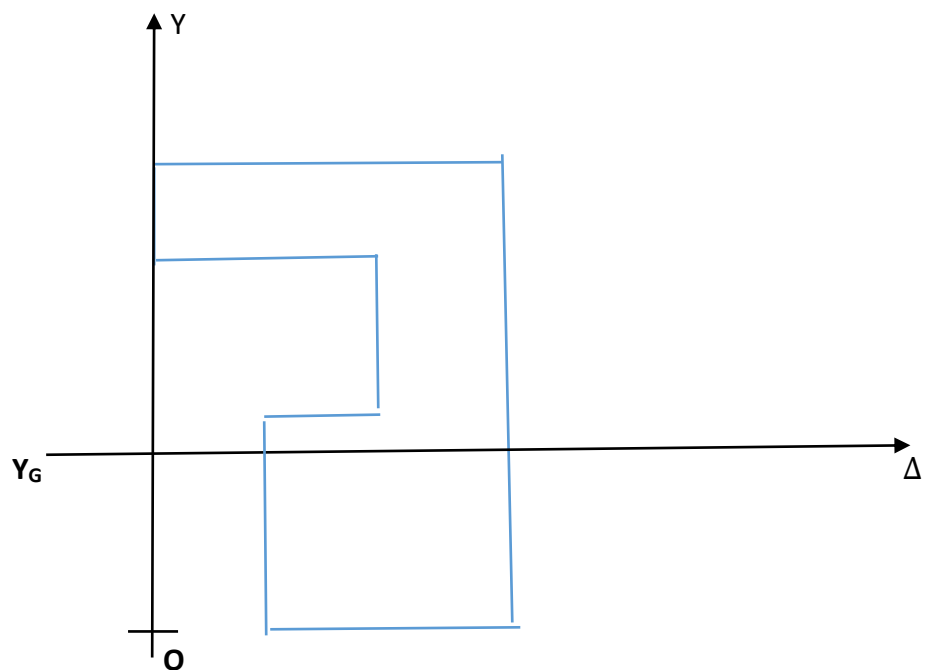
$$S_X = S_{X1} + S_{X2} - S_{X3}$$

- Calcul de Y_G

$$Y_G = \frac{S_X}{A} = \frac{99\,500}{3\,000}$$

$$Y_G = 33,16 \text{ mm}$$

- Tracé de l'axe (Δ)



3- Détermination du moment quadratique I_X de la section

- Calcul de I_{X1} , I_{X2} et I_{X3}

$$I_{X1} = 40 \times 65^3 / 3 = 3\,661\,666 \text{ mm}^4$$

$$I_{X2} = 60 \times 15^3 / 3 + 3\,000 \times 72,5^2 = 15\,785\,625 \text{ mm}^4$$

$$I_{X3} = 20 \times 25^3 / 12 + 500 \times 52,5^2 = 1\,404\,167 \text{ mm}^4$$

- Valeur de I_X

$$I_X = I_{X1} + I_{X2} + I_{X3} = 3\,661\,666 + 15\,785\,625 - 1\,404\,167$$

$$I_X = 18\,043\,124 \text{ mm}^4$$

- Valeur de I_{Δ} =

$$I_{\Delta} = I_X - A Y_G^2 = 18\,043\,124 - 3000 \times 33,16^2$$

$$I_{\Delta} = 14\,744\,367 \text{ mm}^2$$