

Brevet Professionnel

Mathématiques

Module Statistique et probabilité

Probabilité

Nom :

Groupe :

Compétences et savoirs attendus

Probabilité

Dénombrer à l'aide d'un arbre.	Arbre de dénombrement.
Compléter et exploiter un tableau croisé d'effectifs.	Tableau croisé d'effectifs.
Calculer la probabilité d'un événement par addition des probabilités d'événements élémentaires dans le cas d'équiprobabilité et dans celui de non-équiprobabilité (par exemple à partir d'un tableau croisé d'effectifs).	Probabilité d'un événement dans un univers fini.
Calculer la probabilité d'un événement dans le cas d'une situation aléatoire simple.	
Calculer la probabilité : — de l'événement contraire d'un événement ; — de la réunion d'événements incompatibles.	Événements incompatibles, événements contraires. Probabilité de l'événement $\bar{A}$ contraire d'un événement A : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Probabilité de la réunion d'événements incompatibles.
Calculer des fréquences conditionnelles à partir d'un tableau croisé d'effectifs.	Fréquence conditionnelle.

Sommaire

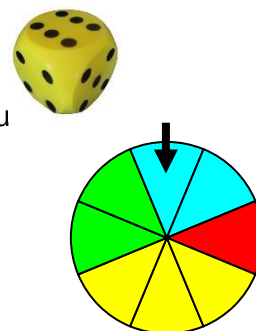
Expérience aléatoire	3
1. Définitions et exemples	3
2. Fréquence d'apparition.....	4
Probabilité d'un évènement	4
1. Arbre des possibles.....	4
2. Probabilité	5
Fréquence théorique	5
Estimation d'une probabilité	5
3. Probabilité d'un évènement contraire	8
4. Cas d'une expérience aléatoire à deux épreuves	8
5. Evènements incompatibles	9
6. Applications.....	9
7. A retenir : Réunion et intersection d'événements	12
Probabilité conditionnelle	12
Exercices	13
Exercice 1:	13
Exercice 2	15
Exercice 3	15
Exercice 4 : Sports d'hiver.....	16

Expérience aléatoire

1. Définitions et exemples

Exemples

- On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure.
- On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
- On fait tourner une roue marquée sur ses secteurs de couleurs différentes et on regarde le secteur marqué par la flèche.



- Chaque exemple correspond à une
- Chaque lancé est une
- Chaque résultat possible est une
- L'ensemble des issues possibles est

Définitions :

Une **expérience** (lancé un dé par exemple) est **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs résultats ou **issues** (1 ou 3 par exemple) et que l'on ne peut pas prévoir, à priori, quel résultat se produira.

L'ensemble des issues d'une expérience s'appelle l'**univers**, noté $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Remarque :

Définitions :

- Un **événement** est constitué d'une ou plusieurs issues d'une même expérience aléatoire.
- Les **événements élémentaires** sont les événements réduits à **une unique issue** de l'expérience.

Exemple : On lance un dé à six faces.

L'évènement E « le résultat est 2 » est un évènement élémentaire.

L'évènement P « Le résultat est un nombre pair » est un évènement qui est constitué par 3 évènements élémentaires (On obtient 2, 4, ou 6)

2. Fréquence d'apparition

Exemple

Chaque élève lance 100 fois un dé à six faces et note les effectifs d'apparition de chaque face dans le tableau :

Faces	1	2	3	4	5	6	Total
Effectifs	20	14	10	22	16	18	100

On regroupe ensuite l'ensemble des résultats de la classe dans un même tableau puis on calcule les fréquences d'apparition de chaque face : nombre d'apparition de chaque face / nombre de lancers

$$\text{Fréquence d'apparition : } f_i = \frac{n_i}{N}$$

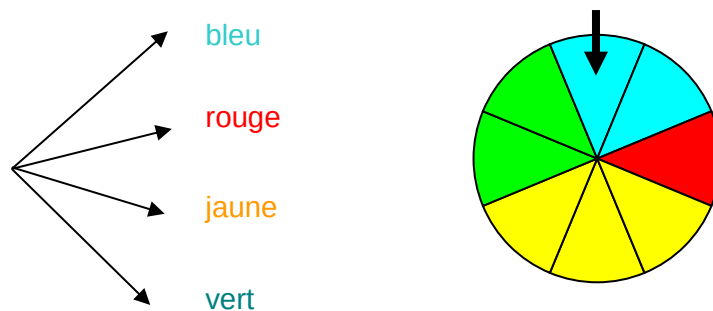
La fréquence peut être exprimée en pourcentage.

Probabilité d'un événement

1. Arbre des possibles

Exemple :

Lorsqu'on fait tourner la roue, quatre issues sont possibles. On le schématise sur l'arbre des possibles :



Définition :

L'**arbre des possibles** permet de visualiser **toutes les issues** d'une expérience aléatoire.

2. Probabilité

Fréquence théorique



Activité : Lancés de dé

<https://www.geogebra.org/m/YmWkYV8J>

- a. Relevez la fréquence d'apparition (en %) de la face 1 et de la face 6 pour 10, 100, 1000, 10000 lancés :

Nombre de lancés	10	100	1000	10000
Fréquence face 1				
Fréquence face 2				

- b. Que remarque-t-on ?
-

Définition :

Les fréquences obtenues d'un événement **E** se rapprochent d'une valeur théorique lorsque le nombre d'expérience augmente (**Loi des grands nombres**). Cette valeur s'appelle la **probabilité** de l'événement **E**.

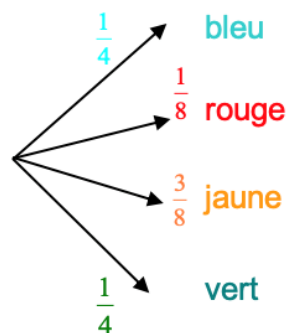
Estimation d'une probabilité

Exemple :

2 secteurs sur 8 sont de couleur bleue. Lors d'une expérience aléatoire, il y a donc 2 chances sur 8 d'obtenir un secteur de couleur bleue.

On dit que la probabilité d'obtenir un secteur bleu est égale à $\frac{2}{8}$, soit $\frac{1}{4}$.

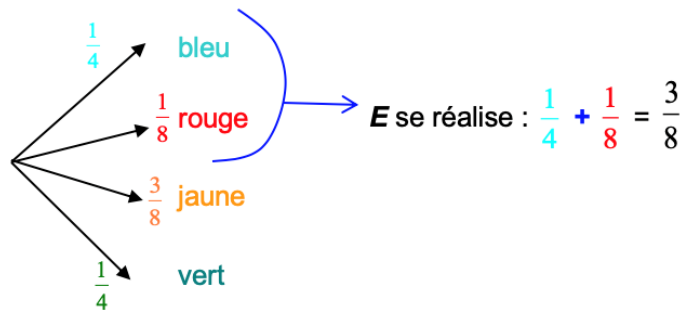
On inscrit sur l'arbre des possibles les probabilités des différentes issues.



Exemple :

Soit l'événement **E** « La roue s'arrête sur un secteur bleu ou rouge ».

Quelle est la probabilité que cet événement se réalise ?



On dit que la probabilité que l'événement **E** se réalise est égale à $\frac{3}{8}$ et on note :

$$P(E) = \frac{3}{8}$$

Dans l'exemple, :

- « La roue s'arrête sur un secteur bleu ou rouge » est un événement.
- « La roue s'arrête sur un secteur bleu » est un événement élémentaire.

La **probabilité** d'un évènement se calcule par :

$$p = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

Méthode : Dénombrer pour calculer une probabilité

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

Soit **E** l'événement : « On tire un as ».

Quelle est la probabilité que l'événement **E** se réalise ?

Il a 32 issues possibles.

L'événement **E** possède 4 issues possibles : As de cœur, as de carreau, as de trèfle et as de pique.

La probabilité que l'événement **E** se réalise est donc égale à : $P(E) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Méthode : Calculer une probabilité en utilisant un arbre des possibles

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.

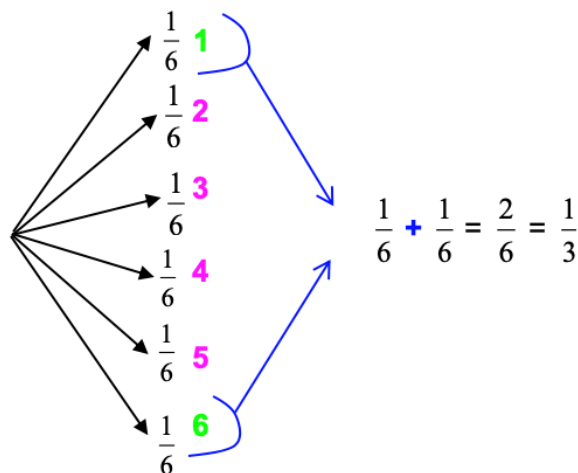
Soit E l'événement : « La face du dessus est un 1 ou un 6 ».

Quelle est la probabilité que l'événement E se réalise ?

On construit l'arbre des possibles de l'expérience aléatoire :

Chaque issue à la même probabilité : il y a une chance sur six de sortir un 1, un 2, ... ou un 6.

On dit qu'il y a **équiprobabilité**.



Ainsi $P(E) = \frac{1}{3}$

La probabilité que l'événement E se réalise est de $\frac{1}{3}$.

Il y a donc une chance sur trois d'obtenir un 1 ou un 6 en lançant un dé.

Propriétés :

- 1) La probabilité $P(E)$ d'un événement E est telle : $0 \leq P(E) \leq 1$.
- 2) La **somme des probabilités des événements élémentaires** est égale à 1.
- 3) La probabilité d'un événement est la **somme des probabilités des événements élémentaires** qui le constituent.

Définition :

L'ensemble des probabilités de ces événements élémentaires constitue ce qu'on appelle la **loi de probabilité**.

3. Probabilité d'un événement contraire

Exemple :

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.

Soit E l'événement : « La face du dessus est un 1 ou un 6 ».

Alors l'événement contraire de E est : « La face du dessus est un 2, un 3, un 4 ou un 5 ». Cet événement est noté $\bar{E}$.

Propriété :

La probabilité de l'**événement contraire** d'un événement E est : $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$.

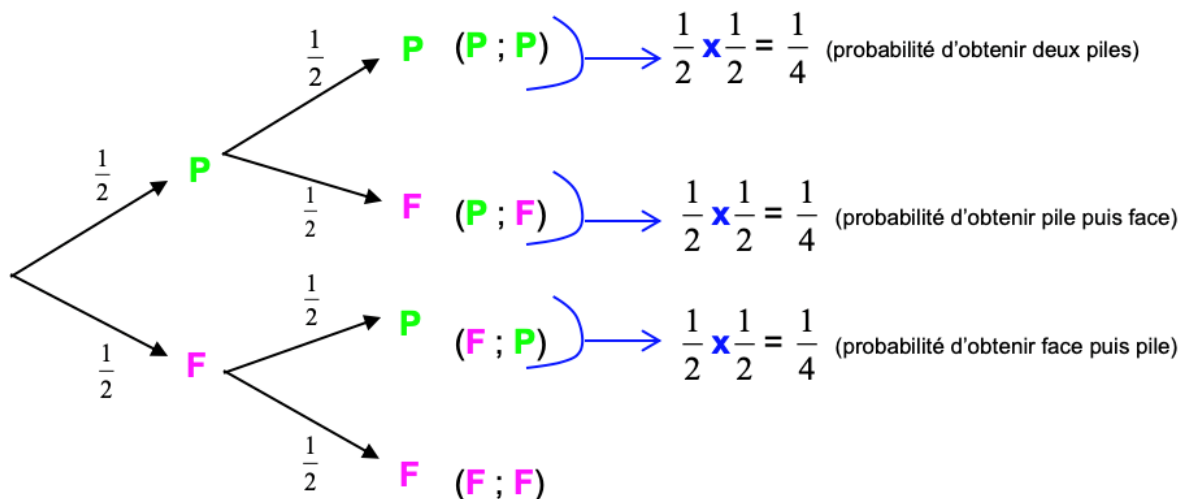
4. Cas d'une expérience aléatoire à deux épreuves

Méthode : Calculer une probabilité d'une expérience à deux épreuves

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. Il s'agit d'une expérience aléatoire à deux épreuves.

Soit E l'événement : « On obtient au moins une fois la face PILE. »

Calculer $P(E)$.



Sur un même chemin, on **multiplie** les probabilités.

Puis on additionne les probabilités calculées à l'extrémité des chemins :

$$P(E) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

La probabilité que l'événement E se réalise est de $\frac{3}{4}$.

Il y a donc trois chances sur quatre d'obtenir au moins une fois « PILE » lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

5. Evènements incompatibles

Définition

Deux événements sont dits **incompatibles** s'ils ne **peuvent pas être réalisés en même temps**.

Exemple : Dans le tirage d'une carte au hasard dans un jeu classique de 32 cartes : Deux événements incompatibles sont par exemple : « un roi est tiré » et « un 10 est tiré ».

6. Applications

a) Evènement contraire

Dans chacune de situations décrites ci-dessous, énoncer **l'évènement contraire** de l'évènement donné.

- Dans une classe, on choisit deux élèves au hasard. A : « Les deux élèves sont des filles ».
.....
- 2) Dans un groupe de suisses et de belges, on discute avec une personne. B : « La personne est un homme belge ».
.....

b) Evènements incompatibles

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. On tire une boule de l'urne. On note :

A : « Tirer une boule blanche ».

B : « Tirer une boule ni blanche ni rouge ».

C : Tirer une boule noire ou une boule rouge ».

- A et B sont-ils incompatibles ?
.....

- B et C sont-ils incompatibles ?
.....

c) La bonne figure

Thomas et Laura jouent avec un jeu de 32 cartes avec la règle suivante : chaque joueur tire une carte ; il gagne si c'est une figure. Thomas joue en premier. Il se demande combien il a de chances de gagner.

Problématique : Quelle sont les chances de gagner pour Thomas ?

Partie A : Déterminer la probabilité

1. Sans tenir compte de la couleur, **indiquer** toutes les cartes différentes d'un jeu de 32 cartes.
.....

2. L'évènement A permettant de gagner est le tirage d'une figure.

Écrire les résultats correspondant à l'évènement A.

A = { ; ; }

3. Calculer la probabilité $p(A)$ de l'événement A.

.....

.....

4. L'événement contraire de A est noté $\bar{A}$.

4.1. Définir par une phrase l'événement $\bar{A}$.

.....

.....

4.2. Déterminer la probabilité de l'événement $\bar{A}$.

.....

.....

d) La roue de la chance

Pour la fête du lycée, un groupe d'élèves organisent une loterie en faisant tourner la roue ci-contre.

En fonction des lots, les joueurs peuvent miser :

- Sur un numéro ;
- Sur « pair » ou « impair » ;
- Sur une couleur.

Avant de jouer, Nolwenn et Erwan veulent évaluer leurs chances de gagner.



Problématique : Quelles sont les chances de gagner à la loterie ?

Partie A : Calcul de probabilités

1. Déterminer l'univers, c'est-à-dire l'ensemble des résultats possibles :

- De l'expérience aléatoire « obtenir un numéro ».

.....

- De l'expérience aléatoire « obtenir une couleur ».

.....

2.1. Compléter le tableau ci-dessous en déterminant les probabilités d'obtenir les numéros indiqués.

Numéro x	2	4	6	8
Probabilité $p(x)$				

2.2. Cocher la bonne réponse. Les événements du tableau sont-ils équiprobables ?

☐ Oui

☐ Non

3. Soit l'événement A : « obtenir un nombre pair. »

3.1. Déterminer la probabilité $p(A)$.

.....

3.2. Établir une relation mathématique pour déterminer $p(A)$ à partir du tableau qui rassemble les probabilités $p(2)$, $p(4)$, $p(6)$ et $p(8)$.

.....

4. Soit l'événement B : « obtenir la couleur noire. » **Déterminer** la probabilité $p(B)$.

.....

Partie B : Différentes mises

1. Nolwenn mise sur « Pair » et Erwan sur « Noir ».

1.1. Donner le numéro qui va leur permettre de gagner ensemble.

.....

1.2. Donner la probabilité d'obtenir ce numéro.

.....

1.3. On note $p(A \cap B)$ cette probabilité.

Vérifier la relation suivante : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

.....

.....

.....

2. Erwan mise à la fois sur « Noir » et sur « Pair ».

2.1. Donner les numéros qui vont lui permettre de gagner.

.....

2.2. Déterminer la probabilité de sortie de ces numéros.

.....

2.3. On note $p(A \cup B)$ cette probabilité. **Vérifier** la relation suivante :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

.....

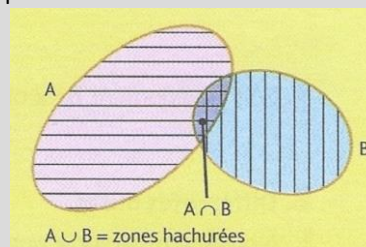
.....

.....

L'intersection des événements A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des résultats qui réalisent à la fois les deux événements A et B.

La réunion des événements A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des résultats qui réalisent l'un ou l'autre des événements A et B.

La représentation des ensembles permet de visualiser la situation.



7. A retenir : Réunion et intersection d'événements

A et B sont deux **événements** d'une expérience aléatoire.

- L'**intersection** des événements, notée $A \cap B$, est l'ensemble des résultats qui réalisent **à la fois les deux événements A et B**.

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

- La **réunion** des événements, notée $A \cup B$, est l'ensemble des résultats qui **réalisent l'un ou l'autre** des événements A et B.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

- Deux événements sont **incompatibles** si leur réalisation simultanée est impossible. Si deux événements A et B sont incompatibles,

$$p(A \cap B) = 0.$$

Probabilité conditionnelle

Définition :

On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A**, la probabilité que l'événement B se réalise **sachant que l'événement A est réalisé**. On la note : $P_A(B)$.

Activité : Calculs à l'aide d'un tableau croisé

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B. Le tableau présente les résultats de l'étude :

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

Le **tableau croisé d'effectifs** permet de définir l'intersection de deux événements.

	B	$\bar{B}$
A	$A \cap B$	$A \cap \bar{B}$
$\bar{A}$	$\bar{A} \cap B$	$\bar{A} \cap \bar{B}$

1) On choisit au hasard un patient et on considère les événements suivants :

A : « Le patient a pris le médicament A. »

G : « Le patient est guéri. »

Calculer : a) $P(A)$ b) $P(G)$ c) $P(G \cap A)$ d) $P(\bar{G} \cap A)$

.....

.....

.....

.....

2) a) On choisit maintenant au hasard un patient guéri.

Calculer la probabilité que le patient ait pris le médicament A **sachant qu'il est guéri**.

.....

.....

b) On choisit maintenant au hasard un patient traité par le médicament B. Calculer la probabilité que le patient soit guéri **sachant qu'il a pris le médicament B**.

.....

.....

.....

Exercices

Exercice 1:

1. Cocher la bonne réponse. Dans un jeu de 52 cartes, quelle est la probabilité de tirer :

1.1. L'as de trèfle ?

☐ 0,019

☐ 0,038

☐ 0,077

1.2. Un valet ?

☐ 0,038

☐ 0,12

☐ 0,077

Exercice 2

Une entreprise compte 80 salariés, dont 55% hommes. Parmi ceux-ci, 25% sont des cadres.

On sait de plus que, au total dans cette société, 20% des salariés sont des cadres.

Compléter le tableau

des effectifs suivant :

	Employés	Cadres	Total
Femmes			
Hommes			
Total			

- 1) On croise un salarié au hasard, quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

.....
.....

- 2) Dans une réunion ne concernant que les cadres, et sachant qu'il n'y a pas d'absent, quelle est la probabilité pour qu'une personne choisie au hasard soit une femme ?

.....
.....

Exercice 3

On lance un dé à six faces, numérotées de 1 à 6, bien équilibré. La règle du jeu est la suivante : si le chiffre obtenu est inférieur ou égal à 2, on le relance une deuxième fois et on ajoute alors le nouveau chiffre obtenu au premier ; si le chiffre obtenu est supérieur ou égal à 3, on conserve ce résultat.

Le but du jeu est d'obtenir au final le plus grand nombre.

- 1) Représenter toutes les issues possibles à l'aide d'un arbre.

- 2) Combien y a-t-il d'issues élémentaires ?

.....
.....

- 3) Quel est le plus grand score que l'on peut obtenir ? Quelle est la probabilité de l'obtenir ?

.....
.....

- 4) Quelle est la probabilité d'obtenir un score supérieur ou égal à 6 ?

.....

Exercice 4 : Sports d'hiver

Manu travaille dans un magasin d'une station de sports d'hiver.

Il gère la location des skis, des snowboards et des luges et remplit chaque jour une fiche pour chaque matériel pour assurer leur suivi.

Dans la journée, il a loué 25 paires de skis, 15 snowboards et 10 luges. Au retour du matériel, il constate que 40 % des skis, le tiers des snowboards et 3 luges ont été abîmés pendant la journée.



Problématique : Quelle est le pourcentage de snowboard abîmés ?

1. En utilisant les renseignements précédents, **compléter** le tableau croisé d'effectifs suivant.

État \ Type	Paires de skis P	Snowboard S	Luges L	Total
Matériel abîmé A				
Matériel en bon état $\bar{A}$				
Total	25	15	10	

2. Manu prend une fiche au hasard parmi celles du matériel loué dans la journée. **Déterminer** les probabilités des événements suivants :

A : « le matériel est abîmé »

$p(A) = \dots\dots\dots$

$\bar{A}$: « le matériel est en bon état »

$p(\bar{A}) = \dots\dots\dots$

S : « le matériel est un snowboard »

$p(S) = \dots\dots\dots$

$A \cap S$: « le matériel est un snowboard abîmé »

$p(A \cap S) = \dots\dots\dots$

3. Manu sépare les fiches de tous les matériels abîmés des fiches de ceux en bon état. Parmi ces fiches, **déterminer** la probabilité pour que :

- un snowboard soit dans le matériel abîmé : $p_A(S) = \dots\dots\dots$
- une luge soit dans le matériel en bon état : $p_{\bar{A}}(L) = \dots\dots\dots$

4. Le responsable du magasin estime que la probabilité qu'un snowboard soit abîmé est supérieure à 30 %. Pour vérifier cette affirmation, **donner** la valeur de cette probabilité conditionnelle notée $p_S(A)$.

$p_S(A) = \dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

