

BREVET **P**ROFESSIONNEL

Mathématiques

Résoudre un problème

du 1^{er} degré

Equation et inéquation

Nom – Prénom : _____

Section : _____

Equation du 1^{er} degré

I. Notion d'équation

DEFINITIONS : Une **équation** est une **égalité** qui comporte au moins un **nombre de valeur inconnue**, généralement désigné **par une lettre**.

Cette égalité peut être vraie pour certaines valeurs de l'inconnue (l'ensemble des **solutions**) et fausse pour d'autres. L'ensemble des termes à gauche du signe = forme le premier **membre**. L'ensemble des termes qui suivent ce signe forme le second **membre**.

premier membre deuxième membre

Exemple : $3 + x = 11$ est une équation d'inconnue x .

Si $x = 8$, cette égalité est **vraie** : $3 + x = 3 + 8 = 11$

Si $x = 4$, cette égalité est **fausse** : $3 + x = 3 + 4 = 7$ et $7 \neq 11$.

DEFINITION : Une **solution** d'une équation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est **vraie**.

D'après l'exemple précédent, 8 est une solution de l'équation et 4 n'est pas une solution de l'équation.

METHODE : Pour **tester** si un nombre est une solution d'une équation d'inconnue x

- On calcule le membre de gauche en remplaçant x par cette valeur ;
- On calcule le membre de droite en remplaçant x par cette valeur ;
- On observe si les deux membres sont égaux ou non, et on conclut.

Exemple : Soit l'équation $3x + 2 = 4x - 3$

- On veut tester si **9** est une solution de l'équation.

$$3x + 2 = 3 \times 9 + 2 = 27 + 2 = 29$$

$$4x - 3 = 4 \times 9 - 3 = 36 - 3 = 33$$

Les deux membres n'ont pas la même valeur donc 9 n'est pas solution de l'équation.

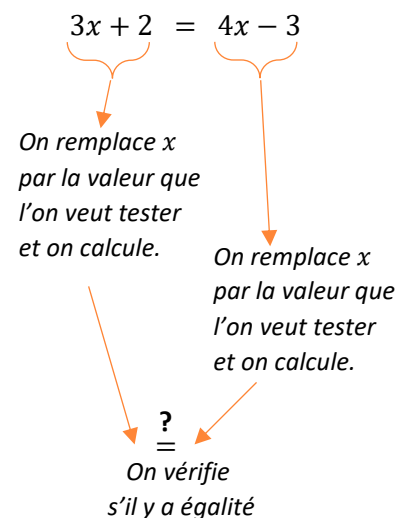
- On veut tester si **5** est une solution de l'équation.

$$3x + 2 = 3 \times 5 + 2 = 15 + 2 = 17$$

$$4x - 3 = 4 \times 5 - 3 = 20 - 3 = 17$$

Les deux membres ont la même valeur donc 5 est solution de l'équation.

Application : Tester si 4 est une solution de l'équation $5x - 1 = 4x + 3$



II. Résoudre une équation

DEFINITION : Résoudre une équation, c'est trouver **toutes les solutions** de cette équation.



Simulations : https://phet.colorado.edu/sims/html/equality-explorer/latest/equality-explorer_fr.html

Résoudre une équation, c'est la transformer en utilisant ses propriétés pour arriver à une expression $x = \dots$

PROPRIETES :

- Une égalité reste vraie lorsque l'on **ajoute** (ou soustrait) un même nombre à chacun de ses membres.
 a, b et k désignent des nombres.

Si $a = b$, alors : $a + k = b + k$ et $a - k = b - k$

- Une égalité reste vraie lorsque l'on **multiplie** (ou divise) chacun de ses membres par un même nombre non nul.
 a, b et k désignent des nombres ($k \neq 0$)

Si $a = b$, alors : $a \times k = b \times k$ et $\frac{a}{k} = \frac{b}{k}$

Exemples :

→ On veut résoudre l'équation $x - 7 = 2$

On ajoute **7** à chacun de ses membres :

$$x - 7 + 7 = 2 + 7$$
$$x = 9$$

Ainsi, 9 est la solution de cette équation.

On peut vérifier ce résultat en remplaçant x par 9 dans l'équation : $9 - 7 = 2$; donc 9 est bien la solution de cette équation.

→ On veut résoudre l'équation $\frac{x}{2} = 5$

On multiplie par **2** chacun de ses membres :

$$\frac{x}{2} \times 2 = 5 \times 2$$
$$x = 10$$

Ainsi 10 est la solution de cette équation.

On vérifie ce résultat en remplaçant x par 10 : $\frac{10}{2} = 5$

Application : Résoudre les équations suivantes

$$3x + 7 = 25$$

$$-8x - 1 = 27$$

$$-8x - 1 = 2x + 9$$

.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....
.....

III. Equations – Exercices

Résoudre les équations du type $x + a = b$ suivantes :

- $x + 6 = 13$
- $6 + x = 11$
- $x + 6 = -6$
- $x - 5 = 2$
- $23 - x = 20$
- $x - 1 = -1$
- $x - 7 = 4$
- $x + 7 = 1$
- $x - 2 = -8$
- $x + 4 = 7$
- $x - 4 = -5$
- $x - 3 = 8$
- $x + 3 = -4$

Résoudre les équations du type $ax = b$ suivantes :

- $4x = 16$
- $5x + 6 = 11$
- $-5x - 10 = 65$
- $5x = 10$
- $4x - 5 = 7$
- $-7x - 21 = -21$
- $3x = 9$
- $6x + 1 = -5$
- $-2x = 14$
- $3x + 4 = 6$
- $-3x + 5 = 26$

Entraînements en ligne :

<https://learningapps.org/view20310657>

<https://learningapps.org/view18472091>



Résoudre les équations du type $ax + b = cx + d$ suivantes :

- $4x = 16x - 24$

- $3x + 5 = \frac{x}{2}$

- $2x + 15 = -3x$

- $5x + 6 = \frac{x+3}{2}$

- $5x + 5 = -4 - 2x$

- $2x + 5 = x - 2 + \frac{1}{2}x$

- $-4x - 2 = 4x + 8$

- $2(x + 5) = x + 6$

Modéliser une situation par une équation du 1^{er} degré

I. Modéliser une situation

METHODE : Pour **modéliser** une situation à l'aide d'une **équation**

- on choisit **l'inconnue** x en fonction de ce que l'on cherche
- on **traduit** les données de l'énoncé du problème par une équation
- on **résout** l'équation
- on **interprète** le résultat.

Exemple 1 :

Pour fabriquer des étagères, Kylian a acheté 3 planches identiques. Il a payé 45€ ? Combien coûte 1 étagère ?

L'inconnue x correspond

La traduction en équation est :

On résout l'équation :

On interprète et on conclue :

Exemple 2 :

Léa a acheté 19 bonbons de trois parfums différents : à la fraise, à la réglisse et à la menthe. Elle constate qu'elle a 4 bonbons à la menthe et deux fois plus de bonbons à la réglisse qu'à la fraise. Combien a-t-elle de bonbons à la fraise ?

On choisit l'inconnue :

On traduit l'énoncé du problème par une équation :

.....
.....
.....
.....

On résout l'équation :

.....
.....
.....
.....

On interprète le résultat :

II. Modéliser une situation - Exercices

Problème 1 : Paul a ajouté 17 à son âge, a multiplié le résultat par 2 et a trouvé 48. Quel âge a-t-il ?

.....

.....

.....

.....

.....

Problème 2 : Le périmètre d'un triangle isocèle est égal à 35 mm. La base mesure 7mm de moins que chacun des côtés isocèles. Calculer les dimensions du triangle. On désignera par x la mesure d'un côté isocèle.

.....

.....

.....

.....

.....

Problème 3 : Xavier a 3 ans de plus que son petit frère et 5 ans de moins que l'ainé de la famille. Sachant que la somme des âges des trois frères est 26 ans déterminer l'âge de Xavier. On notera x l'âge de Xavier.

.....

.....

.....

.....

.....

Problème 4 : On partage 9 800 € entre 3 personnes. La première reçoit 240€ de moins que la seconde et part du troisième est égale aux trois quarts de la somme des parts des deux autres. Calculer la part de chaque personne.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Problème 5 : Un magicien demande à un spectateur : « pensez à un nombre, multipliez-le par 2, retranchez 3 au résultat, multipliez- le tout par 6. Le spectateur annonce 294. A quel nombre pensait-il ?

Problème 6 : Trois cousins ont respectivement 32, 20 et 6 ans. Dans combien d'années l'âge de l'ainé sera-t-il égal à la somme des deux autres ?

Problème 7 : Un élève a acheté 5 livres de poche et un marque-page. Il a donné 25€ et on lui a rendu 3,80€. Sachant que le marque-page a coûté 0,20€, quel est le prix d'un livre de poche ?

Entraînements en ligne :

☆ Associer énoncé et équation :

<https://learningapps.org/view9680119>



☆☆ QCM (« qui veut gagner des millions »)

<https://learningapps.org/view3543723>



☆☆ Associer énoncé, solution et équation

<https://learningapps.org/view15327437>



☆☆☆ QCM

<https://learningapps.org/view20455108>



☆☆☆☆ Associer énoncé et équation

<https://learningapps.org/view18201751>



Inéquation du 1^{er} degré

I. Symboles à connaître

Les expressions suivantes sont appelées **inégalités** :

- $a < b$ signifie « a est **strictement inférieur** à b »
- $a > b$ signifie « a est **strictement supérieur** à b »
- $a \leq b$ signifie « a est **inférieur ou égal** à b »
- $a \geq b$ signifie « a est **supérieur ou égal** à b »

Exemples :

- On peut dire : $2 < 4$ et $4 > 2$
- Si x est un nombre tel que $x \geq -2$, x représente un nombre supérieur à -2 mais qui peut aussi être égal à -2 .
- Si y est un nombre tel que $y < 3$, y représente un nombre inférieur à 3 mais qui ne peut pas être égal à 3 .

II. Inéquation

- Une inéquation se présente sous la forme d'une inégalité contenant l'un des symboles $<$, $>$, $\leq$ ou $\geq$.
- Elle contient, comme les équations, des lettres, des nombres, et des symboles algébriques. Par exemple :
 - $2x + 2 < x - 5$
- Le vocabulaire est le même que pour les équations : membre de gauche, membre de droite, inconnue et solution de l'inéquation.
- Une **solution** de l'inéquation est un nombre qui rend **l'inéquation vraie**.
Par exemple avec l'inéquation au-dessus, les solutions seront les nombres pour lesquels le membre de gauche $2x + 2$ est strictement inférieur au membre de droite $x - 5$.

III. Tester une inéquation

Comme pour les équations, il faut calculer le membre de gauche et le membre de droite séparément en remplaçant l'inconnue par le nombre.
Il faut ensuite comparer et conclure.

Exemple – Méthode :

Est-ce que $x = -2$ est une solution de l'inéquation $3x + 7 > -2x + 2$?

Pour cela, il faut la tester en remplaçant x par -2 dans chaque membre.

- Calculons séparément chaque membre

$$3x + 7 = 3 \times -2 + 7 = -6 + 7 = 1$$

$$-2x + 2 = 2 \times -2 + 2 = -4 + 2 = -2$$

- Comparons

1 n'est pas strictement supérieur à -2.

- Concluons

$x = -2$ n'est pas une solution de l'inéquation.

Applications :

Vérifier que $x = 0$ est une solution de l'inéquation ci-dessus.

.....

.....

.....

Que se passe-t-il pour $x = -1$?

.....

.....

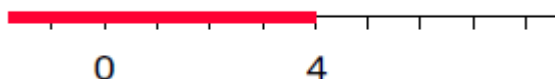
.....

IV. Représentation des solutions sur une droite graduée

Quelles sont les solutions de l'inéquation $x + 1 \leq 5$?

Si on remplace x par des valeurs comme -1, 0, 3 puis 4, on comprend que les solutions de l'inéquation sont tous les nombres inférieurs ou égal à 4.

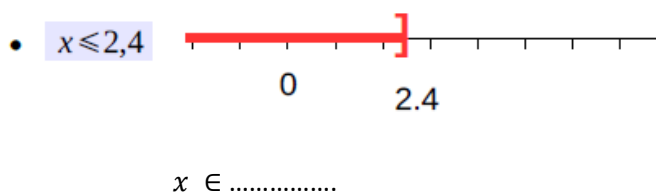
Il y en a une infinité, il est intéressant de les représenter sur une droite graduée (solutions en rouge) :



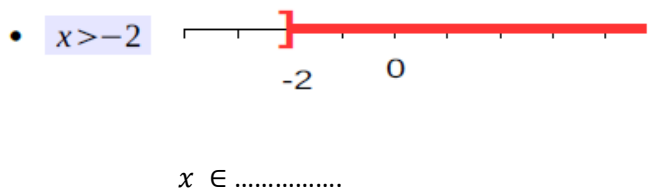
Pour faire la différence entre $< et \leq$ ou $> et \geq$ et indiquer si un nombre fait partie des solutions ou pas, on utilise un crochet en lui donnant une **orientation par rapport au trait rouge** :

- Crochet vers le trait rouge $\rightarrow$ le nombre fait partie des solutions
- Crochet vers l'extérieur du trait rouge $\rightarrow$ le nombre ne fait pas partie des solutions

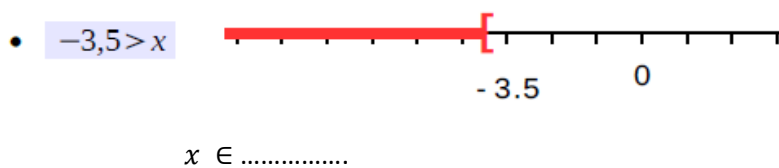
Exemples :



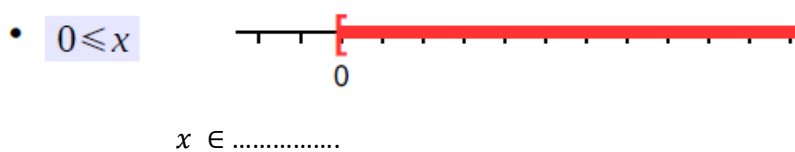
2,4 fait partie des solutions car le symbole $\leq$ signifie inférieur ou égal. Pour le coder graphiquement, le crochet est tourné vers le trait rouge, c'est à dire vers les solutions.



-2 ne fait pas partie des solutions car le symbole $>$ signifie strictement inférieur. Pour le coder graphiquement, le crochet est tourné à l'opposé du trait rouge, il tourne le dos aux solutions.



Le crochet est tourné à l'opposé du trait rouge, il tourne le dos aux solutions, car -3,5 n'est pas une solution.



Le crochet est tourné vers le trait rouge, c'est à dire vers les solutions, car 0 est une solution.

V. Résolution d'inéquations simples

DEFINITION : Résoudre une inéquation, c'est trouver **toutes les solutions** de cette inéquation.

Pour résoudre une inéquation, on la transforme en utilisant ses propriétés pour arriver à une expression $x < .$ ou $x \leq .$ ou $x > .$ ou $x \geq .$

Activité 1 :

Résoudre $x + 5 \geq 12$

C'est chercher tous les nombres qui répondent à la question suivante :

« Quel nombre dois-je ajouter à 5 pour trouver un résultat supérieur ou égal à 12 ? ».

On trouve logiquement que x doit être

On peut écrire :

$$x + 5 \geq 12$$

$$x + 5 \dots \dots \geq 12 \dots \dots$$

$$x \geq \dots \dots$$

Activité 2 :

Résoudre $2x \leq 10$

C'est chercher tous les nombres qui répondent à la question suivante :

« Quel nombre dois-je multiplier par 2 pour trouver un résultat inférieur ou égal à 10 ? ».

On trouve logiquement que x doit être ;

On peut écrire :

$$2x \leq 10$$

$$2x \leq 10$$

.....

$$x \leq \dots\dots$$

Activité 3 :

Résoudre $-x < 2$

C'est chercher tous les nombres qui répondent à la question suivante :

« Quel nombre dois-je multiplier par -1 pour trouver un résultat strictement inférieur à 2 ? ».

On trouve logiquement que x doit être.....

On peut écrire :

$$-x \leq 2$$

.....

$$x \dots\dots$$

PROPRIETES :

- Une inégalité reste **vraie** lorsque l'on **ajoute** (ou **soustrait**) un même nombre à chacun de ses membres.

a, b et k désignent des nombres.

ex : Si $a < b$, alors : $a + k < b + k$ et $a - k < b - k$

- Une inégalité reste **vraie** lorsque l'on **multiplie** (ou **divise**) chacun de ses membres par un même nombre non nul **positif**.

a, b et k désignent des nombres ($k > 0$)

Si $a < b$, alors : $a \times k < b \times k$ et $\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$

- Une inégalité **est inversée** lorsque l'on **multiplie** (ou **divise**) chacun de ses membres par un même nombre non nul **négatif**.

a, b et k désignent des nombres ($k < 0$)

Si $a < b$, alors : $a \times k > b \times k$ et $\frac{a}{k} > \frac{b}{k}$



Exemples :

On veut résoudre l'inéquation

$$\begin{aligned}2x - 7 &< 5 \\2x - 7 + 7 &< 5 + 7 \\2x &< 12 \\\frac{2x}{2} &< \frac{12}{2} \\x &< 6\end{aligned}$$

On veut résoudre l'inéquation

$$\begin{aligned}-3x - 9 &\geq 12 \\-3x - 9 + 9 &\geq 12 + 9 \\-3x &\geq 21 \\\frac{-3x}{-3} &\leq \frac{21}{-3}\end{aligned}$$

On divise par un nombre négatif → inversion du sens de l'inéquation

VI. Résolution d'inéquations simples - Exercices

Résoudre les inéquations du type $x + a < b$ suivantes :

- $x + 4 < 12$
- $x + 4 \leq 7$
- $21 - x > 17$
- $x - 5 \geq 4$
- $x + 8 < 13$
- $x + 7 \geq -1$
- $x - 12 > -20$
- $7 + x < 11$
- $x - 4 \leq -5$

Résoudre les équations du type $ax = b$ suivantes :

- $5x \leq 20$
- $-2x > 16$
- $-5 + 4x > 7$
- $-3x > 9$
- $3x + 4 \geq 6$
- $2x \leq -12$
- $-5x + 6 < 11$

Entraînements en ligne :

<https://learningapps.org/view7757930>

<https://learningapps.org/view12592083>



Résoudre les équations du type $ax + b = cx + d$ suivantes :

- $4x + 24 < 16x$

- $-5x + 6 < -8x + 9$

- $2x \geq -3x - 15$

- $-4x + 6 > 8x + 12$

Modéliser une situation par une inéquation du 1^{er} degré

I. Modéliser une situation

METHODE : Pour **modéliser** une situation à l'aide d'une **inéquation**

- on choisit **l'inconnue** x en fonction de ce que l'on cherche
- on **traduit** les données de l'énoncé du problème par une inéquation
- on **résout** l'inéquation
- on **interprète** le résultat.

Exemple 1 :

Un camion pesant à vide 2 tonnes doit passer sur un pont limité à 6 tonnes.
Combien de caisses de 118 kg peut-il transporter ?

Choix de l'inconnue

Soit x on a :

Chargement du camion :

Poids total du camion :

Mise en inéquation

On sait que le poids du camion

On peut traduire cette donnée par l'inéquation :

.....

Résolution de l'inéquation

.....

.....

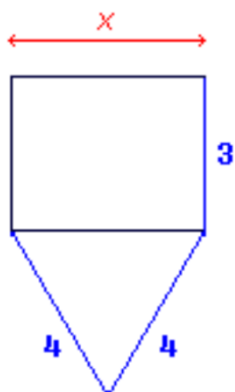
.....

Réponse à la question

Le nombre de caisses doit être

II. Modéliser une situation par une inéquation – Exercices

Exercice 1



Pour quelles valeurs de x le périmètre du rectangle est-il plus grand que celui du triangle isocèle ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 2

Voici les tarifs de l'eau dans deux communes :

Tarif A pour la commune A : abonnement de 32€ puis $1,13€/m^3$

Tarif B pour la commune B : abonnement de 14€ puis $1,72€/m^3$

A partir de quelle consommation d'eau, le tarif A est-il plus avantageux que le tarif B ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 3

Un cinéma propose plusieurs tarifs.

Formule A : 9 € par film.

Formule B : un abonnement annuel de 55 € puis 4 € par film.

1. A partir de combien de film la formule B est-elle plus avantageuse que la formule A ?

.....

.....

.....

.....

.....

Ce cinéma propose aussi un troisième tarif.

Formule C : un abonnement annuel de 162 € pour un nombre illimité de films.

2. A partir de combien de films la formule C est-elle plus avantageuse que la formule B ?

.....

.....

.....

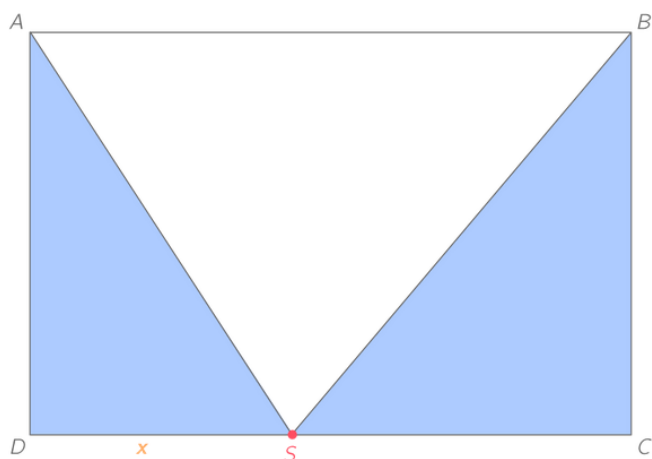
.....

Exercice 4

Soit un rectangle $ABCD$, avec $AB = 6$ et $BC = 4$. Le point S appartient au segment $[DC]$, et on pose :

$$DS = x.$$

Pour quelle valeur de x l'aire du triangle ADS est-elle au plus égale à la moitié de l'aire du triangle BCS ?



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 5 :

Arthur a eu 12, 9 et 13 aux trois premiers devoirs de mathématiques ce trimestre. (Son professeur met toujours des nombres entiers comme notes ; il s'agit de notes sur 20.) Arthur souhaite avoir au moins 13 de moyenne ce trimestre. Il reste un quatrième et dernier devoir.

Quelle note doit-il obtenir ? (On donnera toutes les possibilités.)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 6 :

La somme de 3 nombres entiers consécutifs est comprise entre 12 et 17.
Quelles sont les valeurs possibles du plus grand de ces trois nombres ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 7

La société CARANTAL loue pour le week-end une voiture de catégorie A au tarif suivant :
un forfait de 110€ plus 0,01€ du kilomètre parcouru.

La société LOCOTO loue une voiture du même type pour la même durée au tarif suivant :
un forfait de 95€ plus 0,02€ du kilomètre parcouru.

Pour quels kilomètres a-t-on intérêt à s'adresser à la société CARANTAL ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....