

RAPPEL DE LA STATIQUE

Compétence 2

Objectif : maîtriser les notions de calcul des réactions d'appuis :

Sommaire

- Force, torseur
- Force répartie
- Principe Fondamentale de la Statique (P. F.S)
- Calcul des réactions d'appuis
- Méthode
- Exercices d'application

STATIQUE

La statique couvre l'étude des forces extérieures agissant sur un solide au repos. L'équilibre statique du solide exige que la somme de toutes les forces agissant sur le solide soit égale à zéro. Les équations fondamentales de la statique sont à la base des calculs de la RDM. Malheureusement, beaucoup d'étudiant et d'ingénieurs qui connaissent pourtant ces équations ont de la difficulté à les utiliser efficacement. Cela peut être causé par une pratique insuffisante ou inappropriée, ou par l'incompréhension des principes fondamentaux sur lesquels ces équations sont basées.

Dans ce chapitre, on rappellera les équations d'équilibre statique et comment les utilisées pour déterminer les **réactions d'appuis des structures**, particulièrement des **structures planes isostatiques**.

1- Force, torseur :

Une force est une grandeur vectorielle. Elle est caractérisée par :

- son point d'application ;
- sa ligne d'action (direction) ;
- son sens ;
- son intensité (module) ;

On voit sur la figure 1 la ligne d'action, le sens montré par la flèche, le point d'application (O) et l'intensité de la force qui est représentée par la longueur du vecteur F ($\|\overrightarrow{OA}\|$).

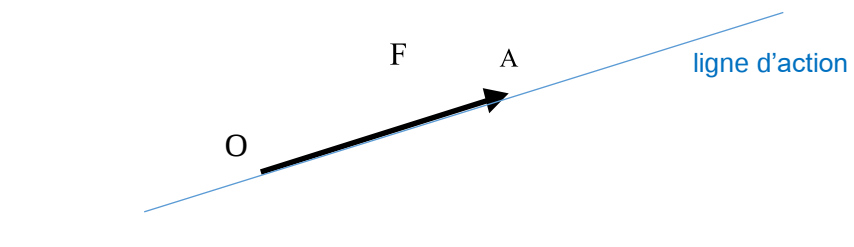


Fig.1

Note : Pour simplifier la présentation, on ne montre pas la petite flèche au-dessus des symboles désignant les forces.

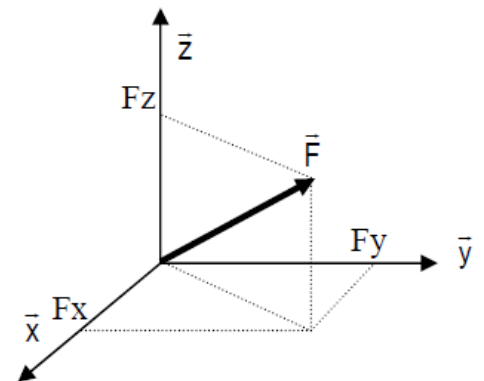
On peut modéliser toute action mécanique par un **torseur (force et moment)** :

Soit : O, A deux point de l'espace.

$$\{\tau\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{M}_O(\vec{F}) \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{OA} \wedge \vec{F} \end{array} \right\}_O \equiv \left\{ \begin{array}{cc} F_x & M_x \\ F_y & M_y \\ F_z & M_z \end{array} \right\}_O$$

Résultante du torseur

Moment du torseur



2- Force globalement équivalente à une force répartie

Propriété : Une force globalement **équivalente à une force répartie** est une **force ponctuelle** égale à la résultante des forces réparties, dont le moment par rapport à un point est le même que celui des forces réparties.



Le remplacement des charges uniformément réparties par leurs n'est effectué que pour le calcul des réactions aux appuis. Pour le calcul des efforts internes aux différentes sections de la structure, on doit utiliser les charges uniformément réparties.

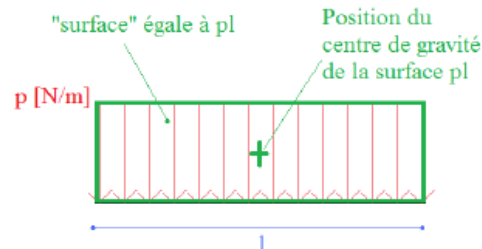
Force répartie	Force globalement équivalente
Force répartie rectangulaire (ou uniformément) p [N/m] l	$p l$ [N] $l/2 \quad l/2$
Force répartie triangulaire p [N/m] l	$\frac{p l}{2}$ [N] $l/3 \quad 2l/3$



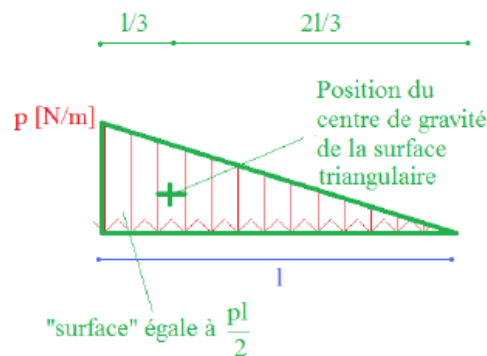
Le tableau précédent est à connaître par cœur ! Car il est très souvent utilisé pour résoudre des problèmes de RDM.

Néanmoins, il est facile de retrouver ces résultats puisque la force ponctuelle est égale à la *surface équivalente* et est située au niveau du centre de gravité de cette même *surface*.

Exemple force rectangulaire répartie



Exemple : force répartie triangulaire



3- Principe fondamental de la Statique

3-1. Énoncé

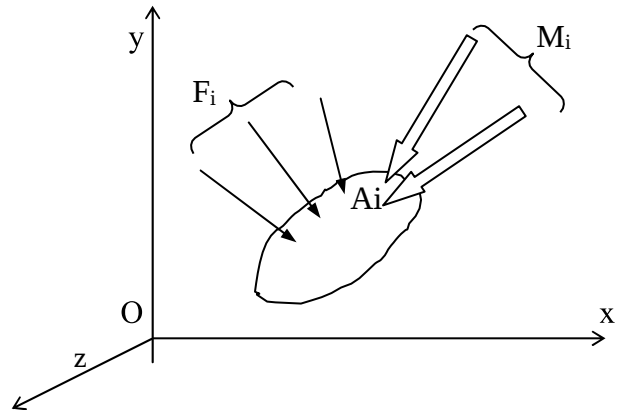
Nous nous plaçons dans le cadre d'une structure isostatique (voir ultérieurement dans le cours).

Pour qu'un système matériel soit en **équilibre**, il faut et il suffit que le torseur τ des **actions extérieures** qui lui sont appliquées soit équivalent à zéro.

$$\left\{ \tau_{\text{ext}} \right\} = \left\{ F \right\} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} + \left\{ M \right\} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \left\{ 0 \right\}$$

3-2. Cas général : dans l'espace

Soit un solide matériel indéformable (S) en équilibre soumis à des forces F_i et à des moments M_i :



Soient :

- un repère orthonormé $\mathcal{R} (O, x, y, z)$;
- x_i, y_i, z_i les coordonnées de A_i , **point d'application** de la force F_i ;
- F_x, F_y, F_z les composantes de la **force** F_i ;
- M_x, M_y, M_z les composantes du **moment** M_i .

Traduisons le **principe fondamental de la statique (PFS)** en écrivant que le torseur des actions extérieures est équivalent à zéro :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_i = 0 \\ \sum M_i + \sum M_i \text{ OA}_i \wedge F_i = 0 \end{array} \right.$$

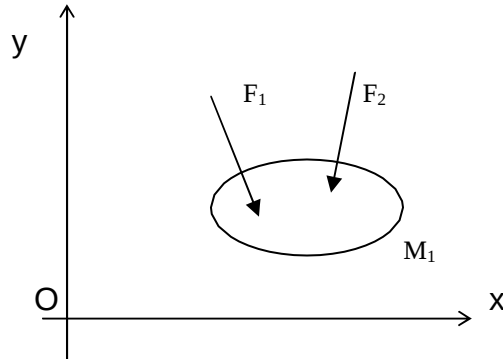
Remarque : Cette égalité torsorielle est vraie quel que soit le point choisi pour exprimer le torseur des actions externes (ce point est appelé point de calcul).

Ces deux relations vectorielles, projetées sur les axes du repère R conduisent aux six équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum M_x + \sum (yF_z - zF_y) = 0 \\ \sum M_y + \sum (zF_x - xF_z) = 0 \\ \sum M_z + \sum (xF_y - yF_x) = 0 \end{array} \right.$$

3-3. Cas particulier : dans le plan

Si toutes les forces sont dans un même plan, il est judicieux de choisir un repère R tel que le plan (Ox, Oy) coïncide avec le **plan des forces**.



Dans ces conditions, la projection sur les axes des équations du principe fondamental de la statique fournit **trois équations** scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_X = 0 \\ \sum F_Y = 0 \\ \sum M_Z + \sum (xF_Y - yF_X) = 0 \end{array} \right.$$

Note : Pour établir les équations d'équilibre statique, on admet que les solides ou les structures considérées sont rigides, c'est-à-dire qu'ils ne changent pas de géométrie ou de forme sous l'action des forces, qu'ils sont indéformables.

4 - Calculs des réactions d'appuis

4.1 - Action - réaction

Principe d'action-réaction

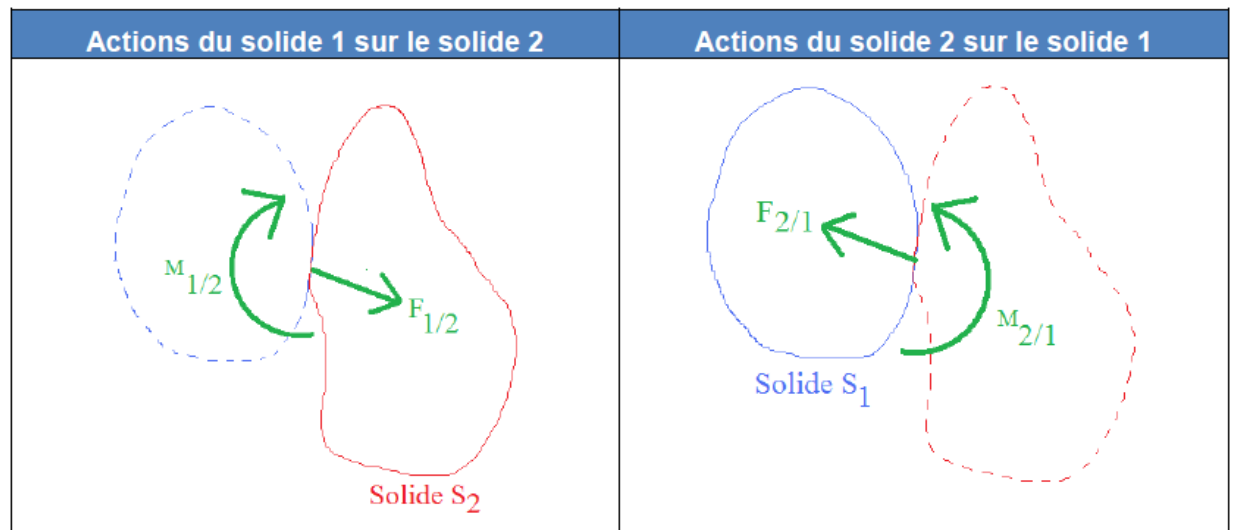
Lorsque deux solides S1 et S2 sont en contact, ils exercent l'un sur l'autre des actions de contact. Les actions de S1 sur S2 ont les mêmes **directions et intensité**, mais sont de **sens contraire** par rapport aux actions de S2 sur S1.

Exemple : dans le cas où le contact entre deux solides S_1 et S_2 permet la transmission d'une force et d'un moment, nous avons : $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$ et $\vec{M}_{1/2} = -\vec{M}_{2/1}$

Ou en conformité avec l'approche de ce cours, il vient qu'à chaque coupure, la somme en force et en moment, est nulle :

$$\vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1} = 0$$

$$\vec{M}_{1/2} + \vec{M}_{2/1} = 0$$

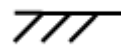


4.2- Liaisons

a- Définition des liaisons internes et externes

Les liaisons peuvent être des liaisons **entre poutres** ou bien **entre une poutre et l'extérieur** ; elles seront dénommées respectivement liaisons **internes** et liaisons **externes**.

Notation : L'**extérieur** sera noté par le symbole :



b- Etude cinématique

Définition d'une étude cinématique : Une étude cinématique est l'étude d'une liaison entre deux solides S_1 et S_2 **en étudiant les mouvements possibles** entre ces deux solides.



Il s'agit bien de **mouvements possibles et non réels**, étant entendu qu'en génie civil, les solides ne sont (généralement) pas en mouvement par rapport à d'autres (exception des calculs dynamique qui ne font pas l'objet de ce cours).

Quand un solide n'est pas lié à un autre, il possède **6 degrés de liberté** : 3 translations selon les axes x, y et z (T_x , T_y , T_z), et 3 rotations autour des axes x, y et z (R_x , R_y , R_z).

<https://youtu.be/O9tNms7JmCg>

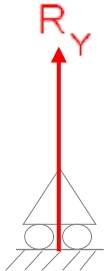
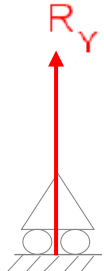


Les réactions aux appuis sont les actions mécaniques qui suppriment des degrés de liberté, c'est-à-dire qui **empêchent le mouvement**.

Appui simple

Cinématique : une translation (axe x ou y) et une rotation autorisée.

⇒ **Réactions d'appuis** : force selon la **direction** dans laquelle **le déplacement est empêché**.

2D	3D
	

Exemple d'appui simple 2D : poutre (en gris) sur deux appuis (en marron)

Condition d'appui analysée

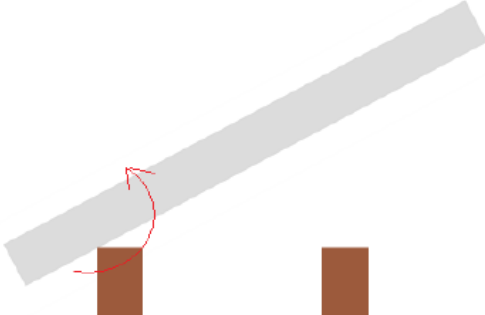


Etude cinématique

- Le déplacement horizontal est-il possible ? OUI



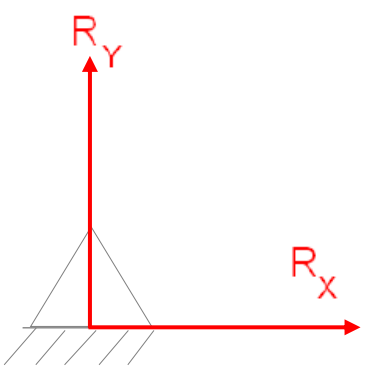
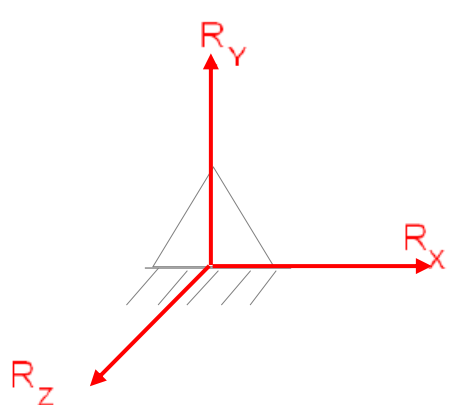
- Le déplacement vertical est-il possible ? NON pas dans le sens haut vers le bas qui est le sens qui nous intéresse en génie civil. Il existe donc une réaction d'appui verticale.
- La rotation est-elle possible ? OUI



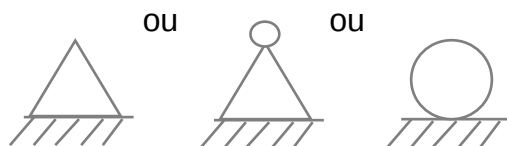
Appui double / rotulé

Cinématique : aucune translation dans le plan, et une rotation autorisée.

⇒ **Réactions d'appuis** : forces dans toutes les directions (composante selon x, composante selon y qui **empêchent le mouvement selon x et y**).

2D	3D
	

Notation :

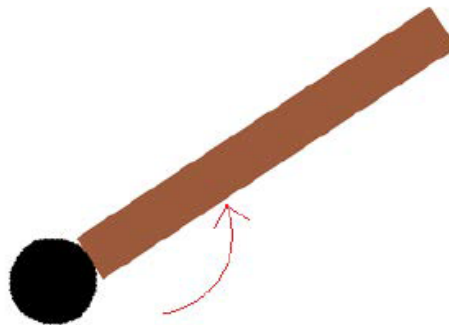


Exemple d'une rotule: porte (en marron) rotulée par un gond (en noir)



Etude cinématique

- Le déplacement horizontal est-il possible ? NON, le gond bloque ce déplacement. Il existe donc une réaction d'appui horizontale.
- Le déplacement vertical est-il possible ? NON, le gond bloque ce déplacement. Il existe donc une réaction d'appui verticale.
- La rotation est-elle possible ? OUI



Remarque : l'exemple précédent est une rotule 2D au sens génie civil. Il ne s'agit pas d'une liaison glissière qui n'est pas utilisée en génie civil courant.

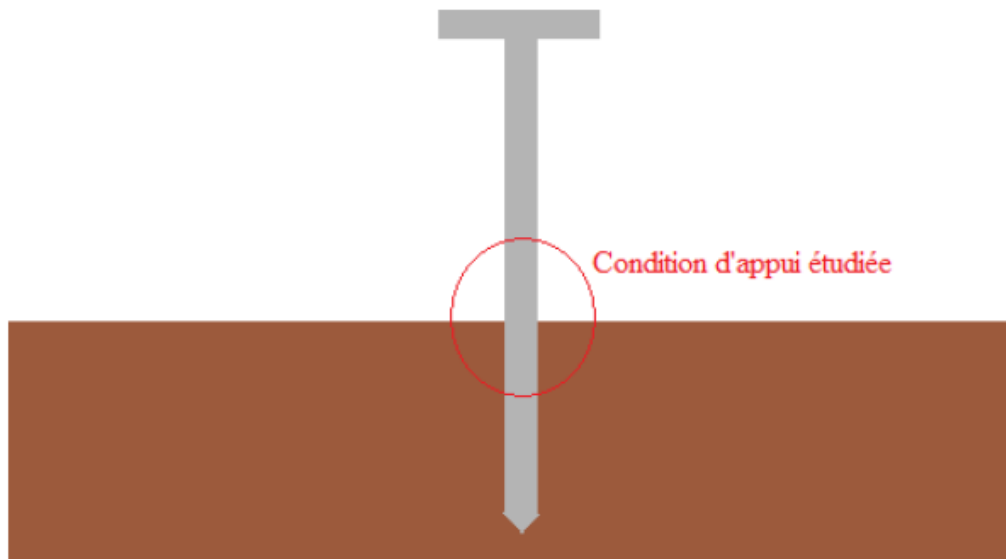
Encastrement

Cinématique : Aucun mouvement possible

⇒ **Réactions d'appuis** : forces et moment selon toutes les directions

2D	3D

Exemple d'un encastrement : clou (en gris) planté dans une planche (en marron)

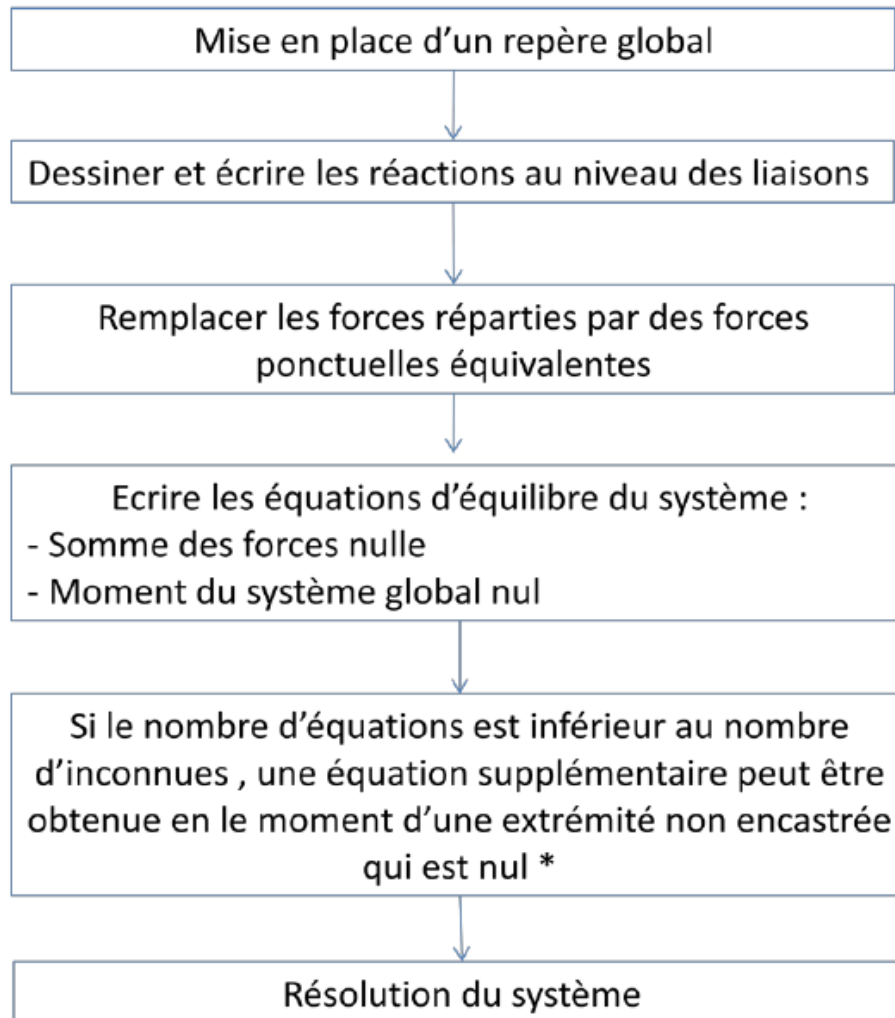


Etude cinématique

- *Le déplacement horizontal est-il possible ? NON. Il existe donc une réaction d'appui horizontale.*
- *Le déplacement vertical est-il possible ? NON. Il existe donc une réaction d'appui verticale.*
- *La rotation est-elle possible ? NON. Il existe donc une réaction d'appuis en moment.*

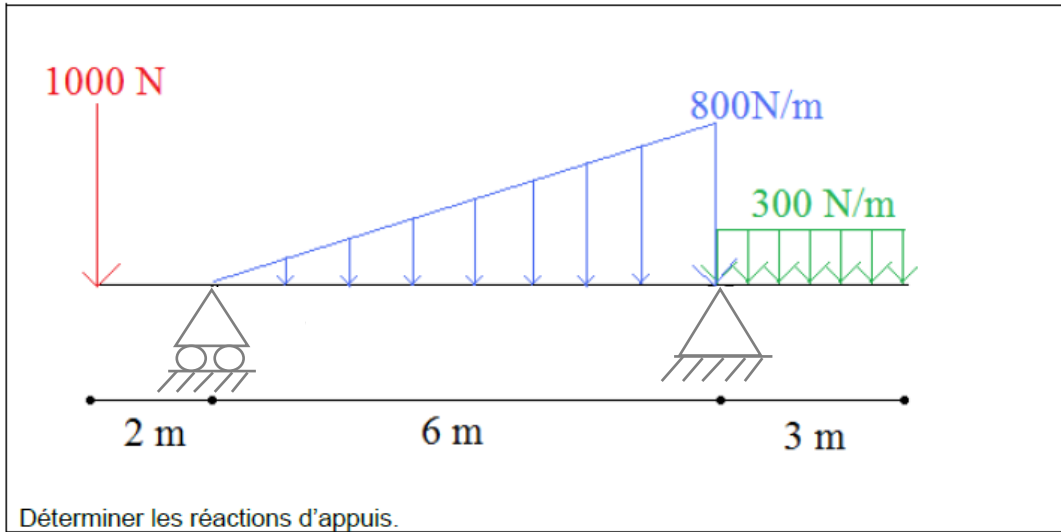
5 - Méthode

Logigramme :



5 - Applications

Exemple 1

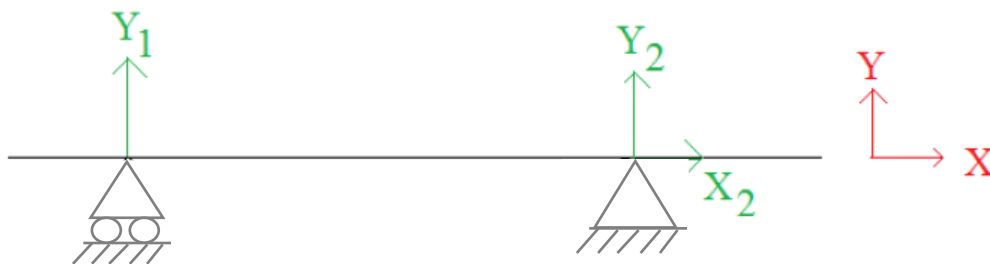


Mise en place d'un repère global



Dessiner et écrire les réactions d'appuis

Au niveau de l'appui simple, il n'existe qu'une seule réaction verticale en force.
Au niveau de la rotule, il existe une réaction verticale et une réaction horizontale.



Remplacer les forces réparties par des forces ponctuelles équivalentes

Charge répartie rectangulaire :

Elle vaut 300N/m et sollicite 3 m, donc la charge ponctuelle équivalente vaut : $300 \times 3 = 900 \text{ N}$

La position de la charge ponctuelle équivalente est placée au centre de gravité de la charge répartie, c'est-à-dire qu'elle est placée au centre du rectangle et donc à 1,5 m à droite de l'appui rotule.

Charge répartie triangulaire :

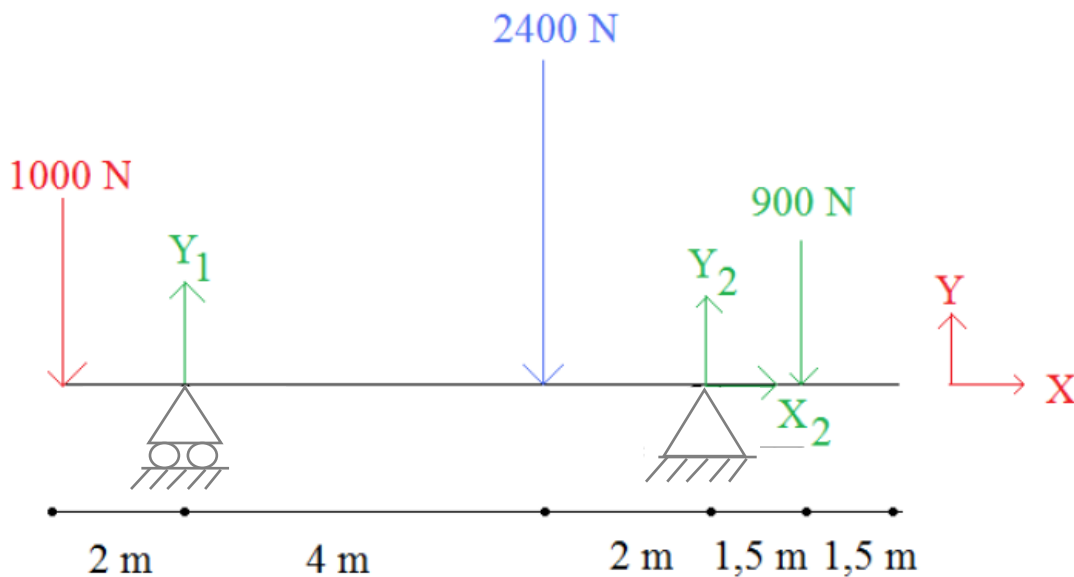
Elle vaut au maximum 800N/m et sollicite 6 m, donc la charge ponctuelle vaut : $800 \times \frac{6}{2} = 2400 \text{ N}$

La position de la charge ponctuelle équivalente est placée au centre de gravité de la charge répartie, c'est-à-dire qu'elle est placée au $\frac{2}{3}$ de la *pointe du triangle* : à 4 m à droite de l'appui simple (et donc à 2 m à gauche de l'appui rotule).



il ne faut pas oublier les charges qui sont déjà ponctuelles dans le problème.

Il vient alors :



Ecrire les équations d'équilibre du système

Somme des forces horizontales nulles : $X_2 = 0$

Somme des forces verticales nulles : $Y_1 + Y_2 - 1000 - 2400 - 900 = 0$

$$\Leftrightarrow Y_1 + Y_2 - 4300 = 0$$

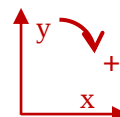
Calcul d'un moment global pour obtenir une équation supplémentaire

Il y a 3 inconnues et 2 équations. Cette étape est donc obligatoire pour résoudre le système.

Pour éliminer Y_1 de cette équation, le moment global au niveau de l'appui 1 est calculé. Le moment global (en tenant compte de la partie droite et la partie gauche) au niveau de cet appui est nul.

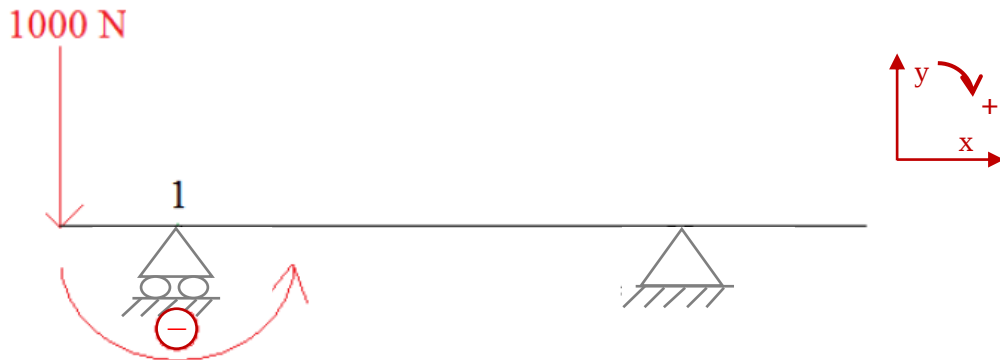
Rappel :

- le moment en valeur absolue vaut la force multipliée par le bras de levier.
 - Le signe est fonction du sens dans lequel fait tourner la force considérée
- Le signe positif est dans le sens suivant :

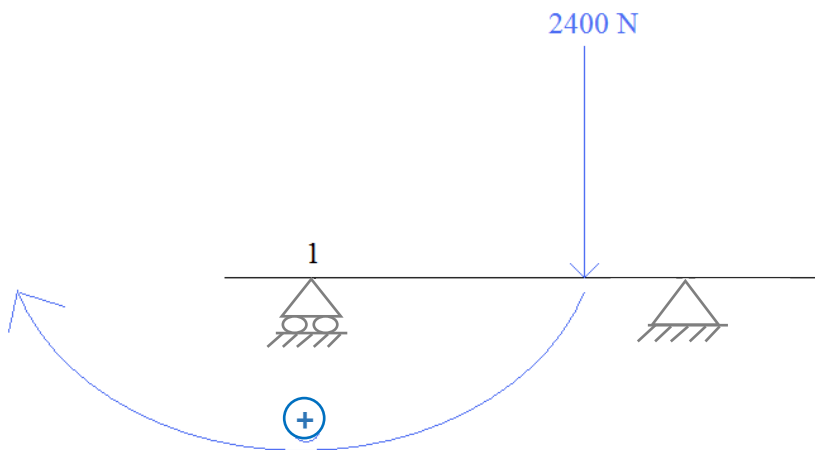


Exemple :

La force de 1000 N fait tourner dans le sens négatif le nœud au niveau de l'appui 1 avec un bras de levier de 2 m.



La force de 2400 N fait tourner dans le sens positif le nœud au niveau de l'appui 1 avec un bras de levier de 4 m.



En procédant de même pour les autres forces, on obtient :

$$-1000 \times 2 + 2400 \times 4 - Y_2 \times 6 + 900 \times (6 + 1,5) = 0$$

$$\Leftrightarrow Y_2 \approx 2392 \text{ N}$$

Remarque :

Il aurait tout à fait été possible de prendre en compte que le moment était nul au niveau de l'appui rotule. Ou encore au niveau des deux extrémités libres. Le résultat final aurait été (heureusement...) identique.

Résolution du système

$$\begin{cases} Y_1 + Y_2 - 4300 = 0 \\ Y_2 \approx 2392 \text{ N} \\ X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} Y_1 \approx 1908 \text{ N} \\ Y_2 \approx 2392 \text{ N} \\ X_2 = 0 \text{ N} \end{cases}}$$

Exemple 2

✓ Calculer les réactions d'appui de la poutre suivante :

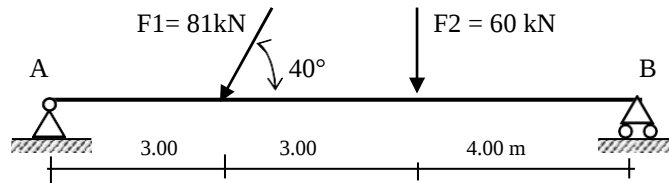


Fig.1

Solution :

On montre sur la figure suivante les composantes suivant x et y des réactions d'appui en A et B, les intensités de la force F_2 et les composantes de la force F_1 .

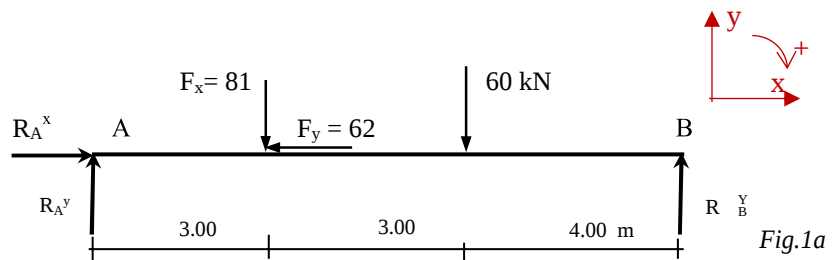


Fig.1a

On a :

$$\begin{cases} \sum F_x = R_A^x - F_1 \cdot \cos \alpha = 0 & (1) \\ \sum F_y = R_A^y + R_B^y - F_1 \cdot \sin \alpha - F_2 = 0 & (2) \\ \sum M_{/A} = -10 \cdot R_B^y + 3 F_1 \cdot \sin \alpha + 6 \cdot F_2 = 0 & (3) \end{cases}$$

De ces trois équations, on trouve que :

$$R_A^y = 60.4 \text{ kN} \quad R_B^y = 51.6 \text{ kN} \quad R_A^x = 62 \text{ kN}$$

Note : Les résultats étant positifs, le sens choisi pour les réactions aux appuis est bon.