Brevet Professionnel

2ème année

Mathématiques

Fonctions

2 – Autres fonctions de référence

Nom : ……………………………………………………………………………………

Groupe : ……………………………………………………………………………………

Fonctions

Autres fonctions de référence

1. Fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$

Après une réflexion sur le signe, le sens de variation, coller la représentation graphique qui correspond à la fonction.

Fonction **carré**	Fonction **cube**
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto x^3$

Fonction carré

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe	
Sens de variation	

Valeurs

x					
$f(x) = x^2$					

La fonction **carré** est définie ……………………

………………………… par $f(x) = x^2$

Sa courbe représentative est une **parabole.**

Fonction cube

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe	
Sens de variation	

Valeurs

x					
$f(x) = x^3$					

La fonction **cube** est définie ………………………

……………………….. par $f(x) = x^3$

Fonction **racine carrée**	Fonction **inverse**
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe	
Sens de variation	

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe	
Sens de variation	

Valeurs

x					
$f(x) = \sqrt{x}$					

Valeurs

x					
$f(x) = \dfrac{1}{x}$					

La fonction **racine carrée** est définie ....
.... par $f(x) = \sqrt{x}$

La fonction **inverse** est définie ……………….……..
……………………… par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Entraînement en ligne :
https://learningapps.org/view13107674

2. Fonctions $x \mapsto kx^2$, $x \mapsto x^2 + k$

$x \mapsto kx^2$	$x \mapsto kx^2$
k **positif** (ex : $k = 2$)	k **négatif** (ex : $k = -2$)

x	$-\infty$ $+\infty$	x	$-\infty$ $+\infty$
Signe		*Signe*	
Sens de variation		*Sens de variation*	

La courbe représentative est une …………………… dont **l'axe de** ……………..………………… **est l'axe des ordonnées** et dont **le** ……………………….. **est l'origine du repère.**

Il correspond au minimum si k est positif, au maximum si k est négatif.

$x \mapsto x^2 + k$	$x \mapsto x^2 + k$
k **positif** (ex : $k = 2$)	k **négatif** (ex : $k = -2$)

x	$-\infty$ $+\infty$	x	$-\infty$ $+\infty$
Signe		*Signe*	
Sens de variation		*Sens de variation*	

La courbe représentative est une ……………………… dont **l'axe de** ……………………… **est l'axe des ordonnées** et dont **le** …………………**est le point S de coordonnées (0, k).**

Il correspond au ……………………… si k est positif, au ………….………… si k est négatif.

Exercice 1

Soient f et g les fonctions définies sur $[0{,}5; 3]$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

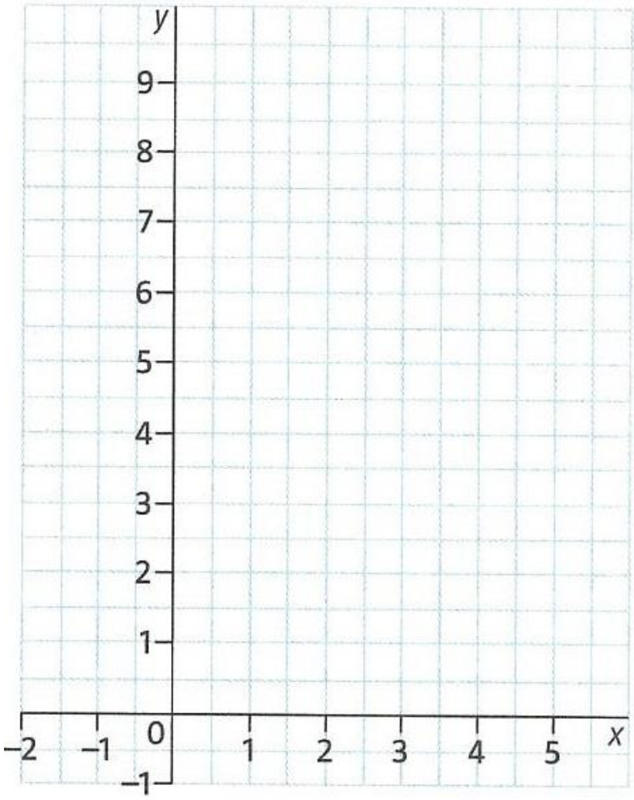
1 – Compléter les tableaux de variation de f et de g.

x	0,5 3
$f(x) = x^2$	
$g(x) = \frac{1}{x}$	

2 – Compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir les résultats à 0,1 près).

x	0,7	0,9	1	1,3	1,5	2	2,5
$f(x)$							
$g(x)$							

3 – Dans le plan rapporté au repère orthogonal ci-après, tracer les représentations graphiques des fonctions f et g.



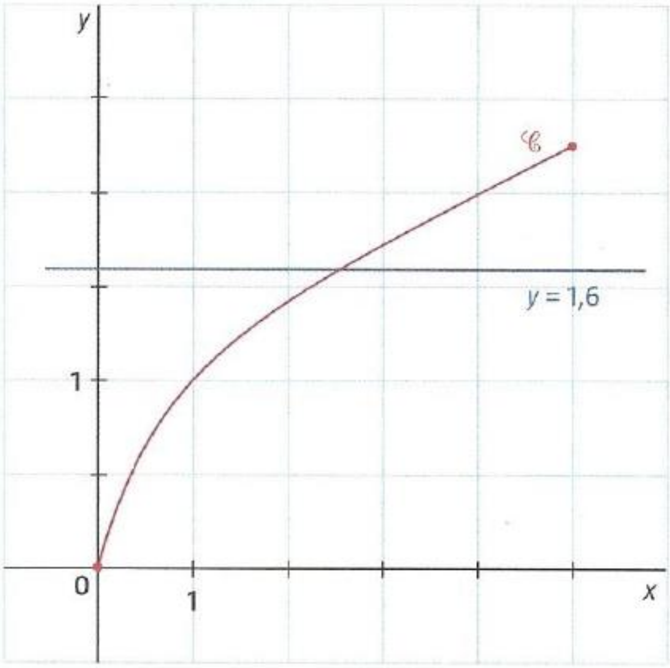
4 – Résoudre graphiquement l'équation f(x) = g(x)

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Exercice 2

On donne un tracé de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f définie sur $[0;5]$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et la droite d'équation $y = 1{,}6$.



On se propose de résoudre l'équation :

$$f(x) = 1{,}6$$

1 – A l'aide du graphique, donner un encadrement de la solution de cette équation par deux nombre entiers consécutifs :

$$\ldots\ldots\ldots < x_0 < \ldots\ldots\ldots$$

2 – Etablir un tableau de valeurs pour déterminer un encadrement de la solution de cette équation à 0,1 près (*avec la calculatrice, faire afficher le tableau, entrer l'expression de* $f(x)$, *entrer 2 comme valeur minimum, 3 comme valeur maximum*).

$$\ldots\ldots\ldots < x_0 < \ldots\ldots\ldots$$

Exercice 3

Soient f, g et h les fonctions définies sur $[-4\,;6]$ par $f(x) = x + 2$ et $g(x) = -f(x)$ et $h(x) = 3f(x)$

Compléter les tableaux de variation de f, g et h.

x	-4 6
$f(x)$	
$g(x)$	
$h(x)$	

Exercice 4

Soient f, g et h les fonctions définies sur $[0{,}5\,;4]$ par $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 3f(x)$ et $h(x) = -2f(x)$.

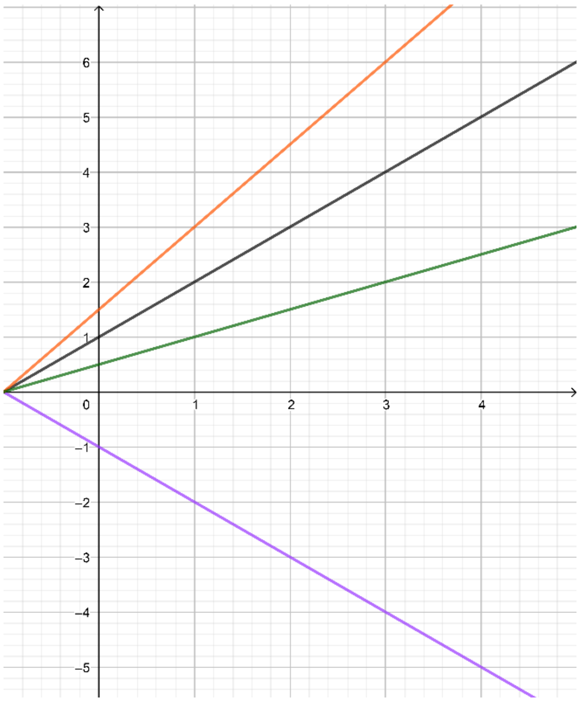
Compléter les tableaux de variation de f, g et h.

x	$0{,}5 \qquad\qquad\qquad\qquad 4$
$f(x)$	
$g(x)$	
$h(x)$	

Exercice 5

La courbe en noir représente la fonction f définie sur $[-1\,;5]$ par $f(x) = x + 1$.

Associer à chacune des autres courbes la fonction g, h ou j qu'elle représente sur $[-1\,;5]$.



$g(x) = -f(x)$ ➔ courbe ……………………….

$h(x) = 1{,}5\,f(x)$ ➔ courbe ……………………….

$h(x) = 0{,}5\,f(x)$ ➔ courbe ……………………….

Exercice 6

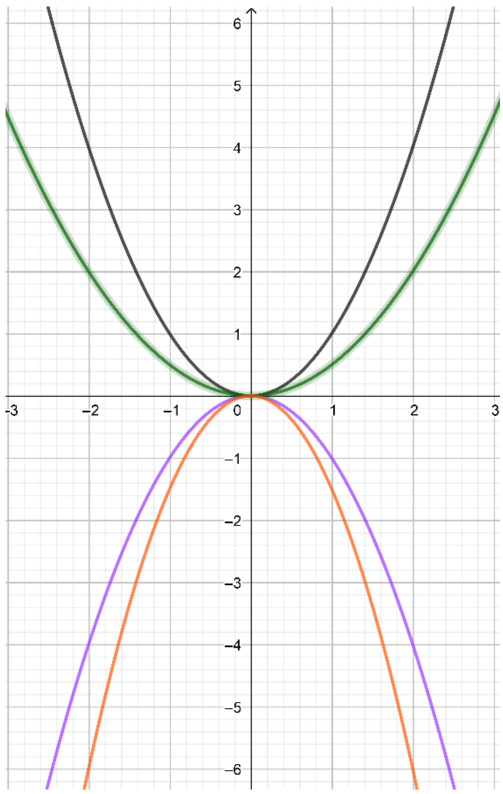
La courbe en noir représente la fonction f définie sur $[-3\,;3]$ par $f(x) = x^2$.

Associer à chacune des autres courbes la fonction g, h ou j qu'elle représente sur $[-3\,;3]$.

$g(x) = 0{,}5f(x)$ ➔ courbe ……………………….

$h(x) = -\,f(x)$ ➔ courbe ……………………….

$h(x) = 0{,}5\,f(x)$ ➔ courbe ……………………….



3. Addition de fonctions $f(x) + g(x)$

Lorsque 2 fonctions f et g **ont le même sens de variation** sur l'intervalle $[a\,;b]$, alors le sens de variation de la fonction $f+g$ **sera celui de f et g sur ce même intervalle** $[a\,;b]$.

Exercice 7

Soient 2 fonctions f et g croissantes sur $[a\,;b]$.

La fonction $f+g$ sur $[a\,;b]$ est :

- ☐ croissante
- ☐ décroissante
- ☐ on ne sait pas

Exercice 8

Soient 2 fonctions f et g décroissantes sur $[a\,;b]$.

La fonction $f+g$ sur $[a\,;b]$ est :

- ☐ croissante
- ☐ décroissante
- ☐ on ne sait pas

Exercice 9

Soit f une fonction croissante sur $[a\,;b]$ et g une fonction décroissante sur $[a\,;b]$. La fonction $f+g$ sur $[a\,;b]$ est :

- ☐ croissante
- ☐ décroissante
- ☐ on ne sait pas

Exercice 10

A Soit $M(-2\,;4)$ un point appartenant à la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et $N(-2\,;1)$ un point appartenant à la courbe représentative d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.
Quel point appartient à la courbe représentative de la fonction $f+g$?

☐ $A(-2\,;3)$ ☐ $B(-2\,;5)$ ☐ $D(-4\,;5)$

B Soit les fonctions f, g et h définies sur $[-4\,;0[$ par $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$ et $h(x)=\dfrac{1}{x}$.

a) Peut-on affirmer que la fonction $f+g$ est strictement croissante sur $[-4\,;0[$?

☐ Oui ☐ Non

b) Peut-on affirmer que la fonction $f+h$ est strictement décroissante sur $[-4\,;0[$?

☐ Oui ☐ Non

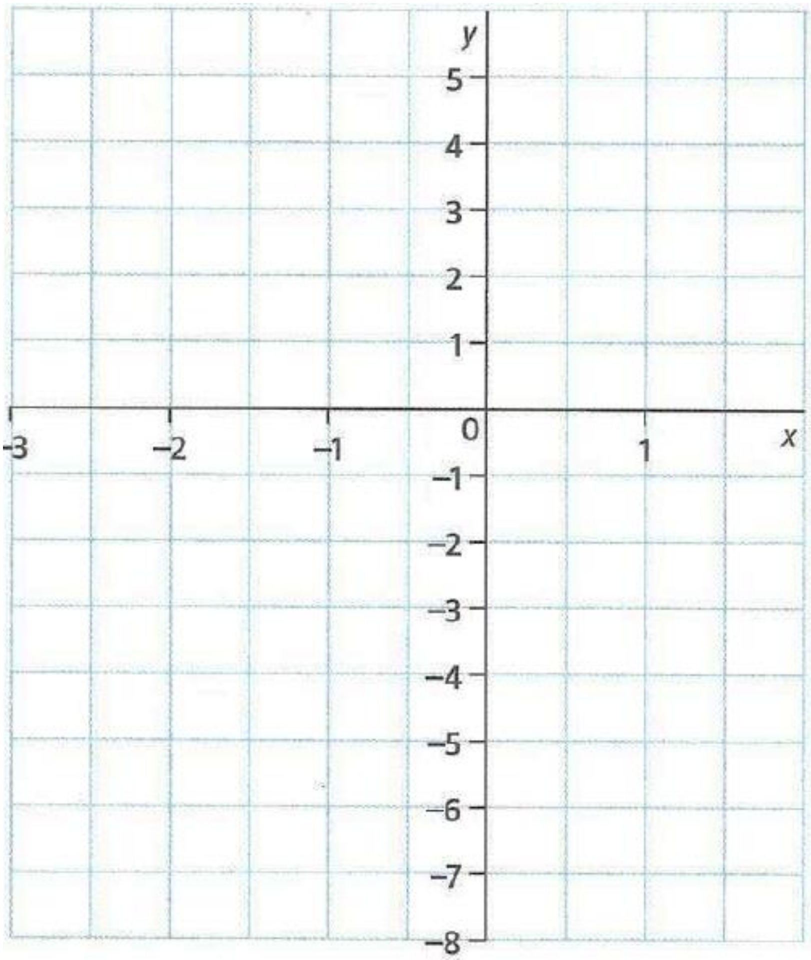
c) Peut-on affirmer que la fonction $g+h$ est strictement décroissante sur $[-4\,;0[$?

☐ Oui ☐ Non

Exercice 11

1) Dans le plan rapporté au repère orthogonal ci-dessous, tracer les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $[-2\,;1]$ par $f(x) = x^3$ et $g(x) = -x \quad + 3$ après avoir complété les tableaux de valeurs suivants (résultat arrondis à 0,1 près).

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1
$f(x)$	-8						
$g(x)$	5						



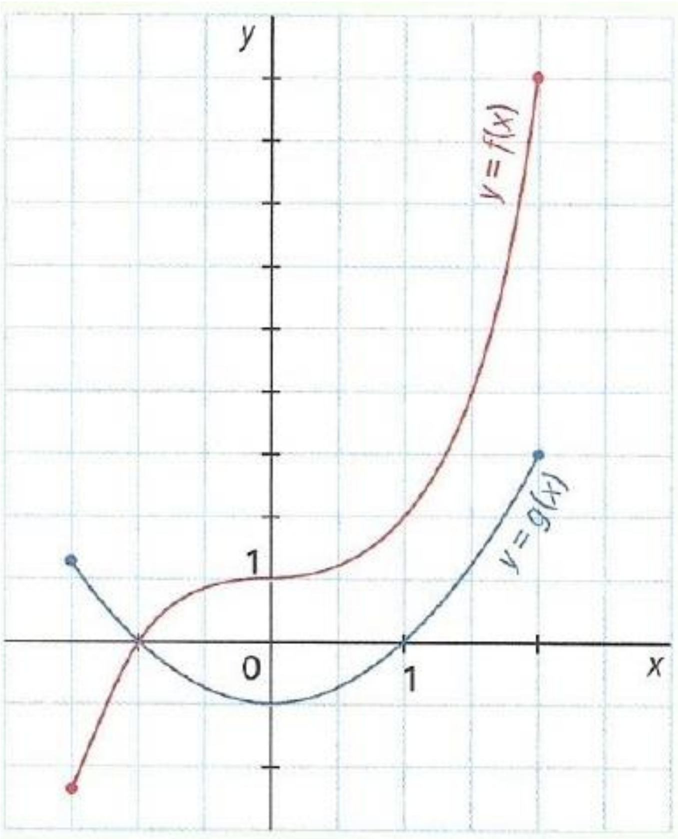
2) Tracer, dans le même repère, la courbe représentative de la fonction $h(x) = f(x) + g(x)$ définie sur $[-2\,;1]$ par après avoir complété le tableau de valeurs suivant.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1
$h(x)$	$-8 + 5 = -3$						

4. Inéquations de fonctions $f(x) > 0$ et $f(x) \geq g(x)$

a) Résolution graphique

Exemple : On donne un tracé des courbes représentatives des fonctions $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ définies sur $[-1,5\,;2]$ par $\boldsymbol{f(x) = x^3 + 1}$ et $\boldsymbol{g(x) = x^2 - 1}$



- Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\boldsymbol{f(x) > 0}$?

☐ $]-1,5\,;2[$ ☐ $]-1\,;1[$ ☐ $]-1;2]$ ☐ $[-1\,;2]$

- Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\boldsymbol{g(x) < 0}$?

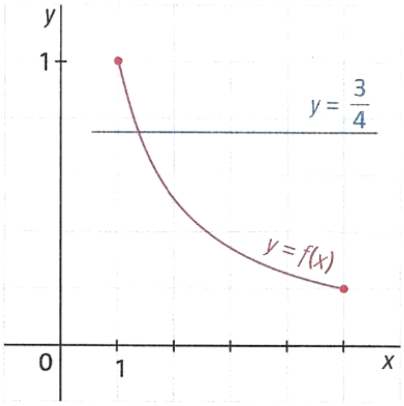
☐ $]-1,5\,;2[$ ☐ $]-1\,;1[$ ☐ $]-1;2]$ ☐ $[-1\,;2]$

- Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\boldsymbol{f(x) \geq g(x)}$

☐ $]-1,5\,;2[$ ☐ $]-1\,;1[$ ☐ $]-1;2]$ ☐ $[-1\,;2]$

Exercice 12

On donne un tracé de la courbe représentative de la fonction f définie sur $[1 ; 5]$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et de la droite d'équation $y = \frac{3}{4}$.



On se propose de résoudre graphiquement l'équation $f(x) = \frac{3}{4}$, puis l'inéquation $f(x) \geqslant \frac{3}{4}$.

1. À l'aide du graphique, donner un encadrement de la solution x_0 de cette équation par deux nombres entiers consécutifs : .... $< x_0 <$ ....

2. a) Établir un tableau de valeurs pour déterminer un encadrement de la solution x_0 de cette équation à 0,1 près. Pour cela, utiliser la calculatrice ou le tableur.

• Avec la calculatrice, faire afficher le tableau.
– Entrer l'expression de $f(x)$.
– Entrer 1 comme valeur minimum, 2 comme valeur maximum et 0,1 comme pas de calculs entre deux valeurs de x.

• Avec le tableur, ouvrir une feuille de calcul.
– Écrire x dans la cellule A1 et $f(x)$ dans la cellule B1.
– Entrer la valeur 1 dans la cellule A2, la valeur 1,1 dans la cellule A3, sélectionner les cellules A2 et A3, puis tirer la poignée de remplissage vers le bas jusqu'à la valeur 2.
– Entrer la formule $\boxed{\text{=1/A2}}$ dans la cellule B2, puis faire glisser cette formule vers le bas à l'aide de la poignée de remplissage.

b) En déduire un encadrement à 0,1 près de la solution de l'équation $f(x) = \frac{3}{4}$.

3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant \frac{3}{4}$.

4. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = \frac{3}{4}$ pour déterminer la valeur exacte de x_0.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

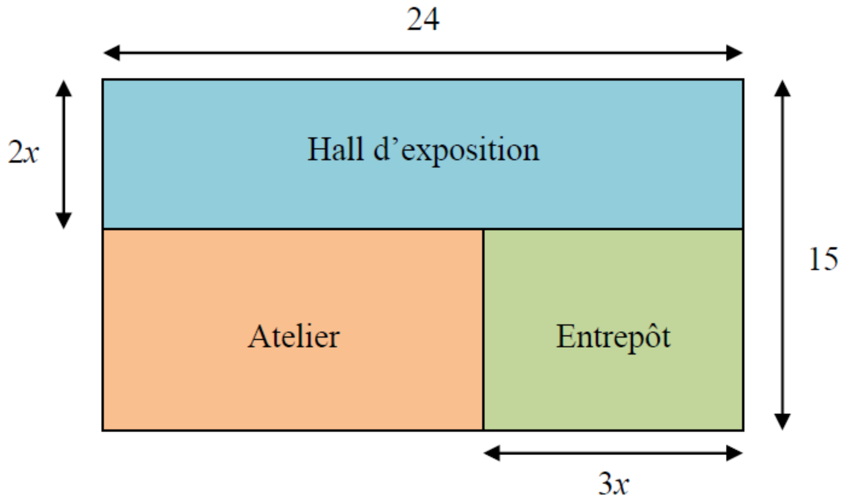
5. Modéliser un problème

Exercice 13

Une entreprise doit aménager un bâtiment industriel, constitué de trois parties : un atelier, un hall d'exposition et un entrepôt.

La figure ci-dessous représente ce bâtiment.

Les cotes sont en mètres. La figure n'est pas à l'échelle.



Première partie : L'aire de l'entrepôt

1) **Calculer**, en m2, l'aire totale du bâtiment.

....

....

....

2) **Exprimer** en fonction de x, l'aire A(x) de l'entrepôt.

....

....

3) **Calculer**, en m2, l'aire de l'entrepôt pour x = 2.

....

....

Deuxième partie :

L'objectif est de déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de l'entrepôt est maximale.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 7,5] par $f(x) = -6x^2 + 45x$.

1) **Résoudre** l'équation $f(x) = 0$.

Rappels :

Équations du second degré
$ax^2 + bx + c = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac$ Si $\Delta > 0$, deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ Si $\Delta = 0$, deux solutions confondues : $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ Si $\Delta < 0$, aucune solution.

....

....

....

....

....

....

2) **Calculer** l'abscisse du sommet de la parabole.

Le sommet d'une parabole d'équation $y = a\,x^2 + bx + c$ se trouve sur son axe de symétrie.

Son abscisse est $-\frac{b}{2a}$

....

....

....

....

3) **Donner** le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 7,5].

....

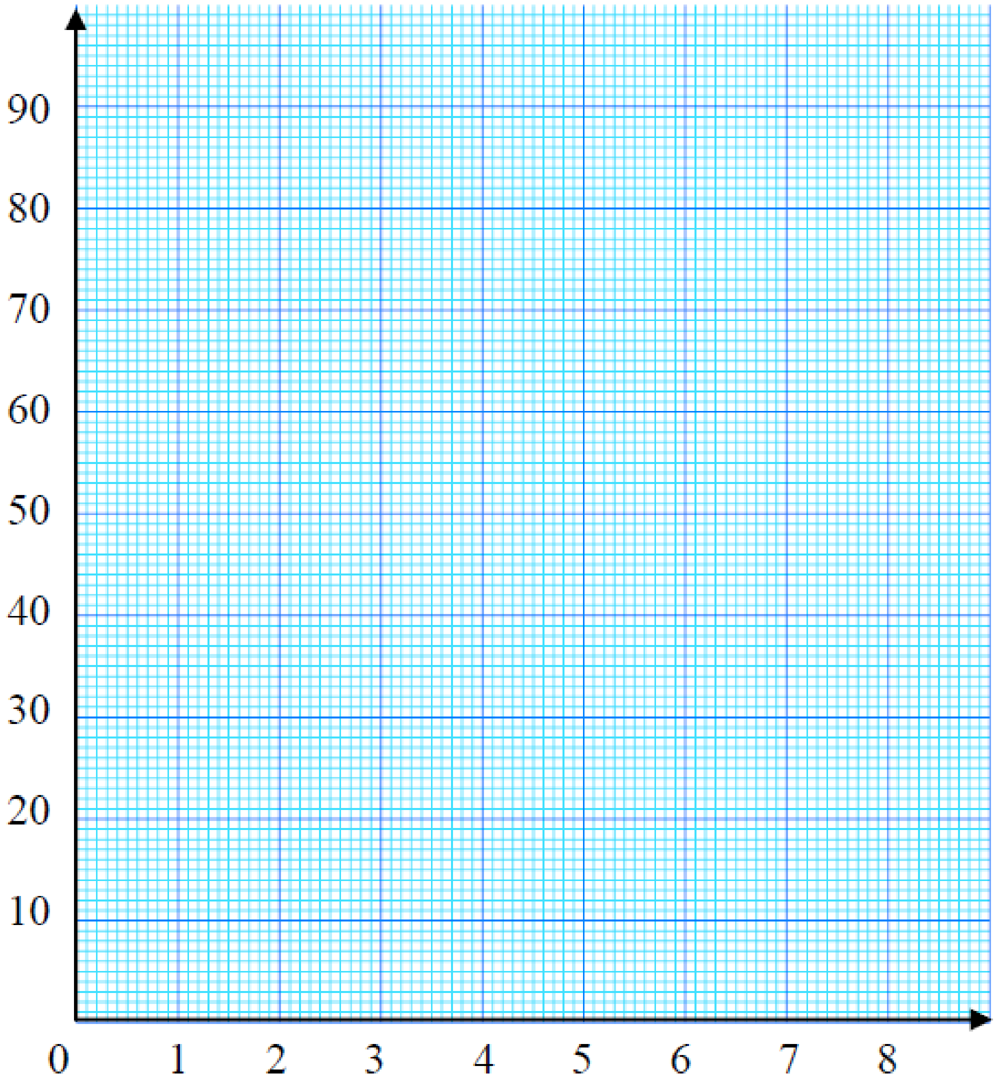
4) **Compléter** le tableau de variation de la fonction f.

x	0	…….	7,5
Variation de f			

5) **Compléter** le tableau de valeurs.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	7,5
$f(x) = -6x^2 + 45x$			66				54	21	

6) **Tracer** la courbe représentant la fonction *f* dans le repère suivant ou à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel.



7) Pour *x* appartenant à l'intervalle [0 ; 7,5], on sait que l'aire A(*x*) de l'entrepôt est égale à *f*(*x*). À l'aide de l'étude faite précédemment, **donner** la valeur de l'aire maximale de l'entrepôt.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

8) **Déterminer** les dimensions, longueur et largeur, de l'entrepôt qui correspondent à son aire maximale.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

(*D'après sujet de Bac Pro Aménagement Finition Session juin 2009*)

Exercice 14

Partie A : **Etude d'une fonction**

Soient fonctions $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{h}$ définies sur $[15\,;90]$ par :

$$f(x) = \frac{270}{x}$$

$$g(x) = -0{,}48x + 44{,}5$$

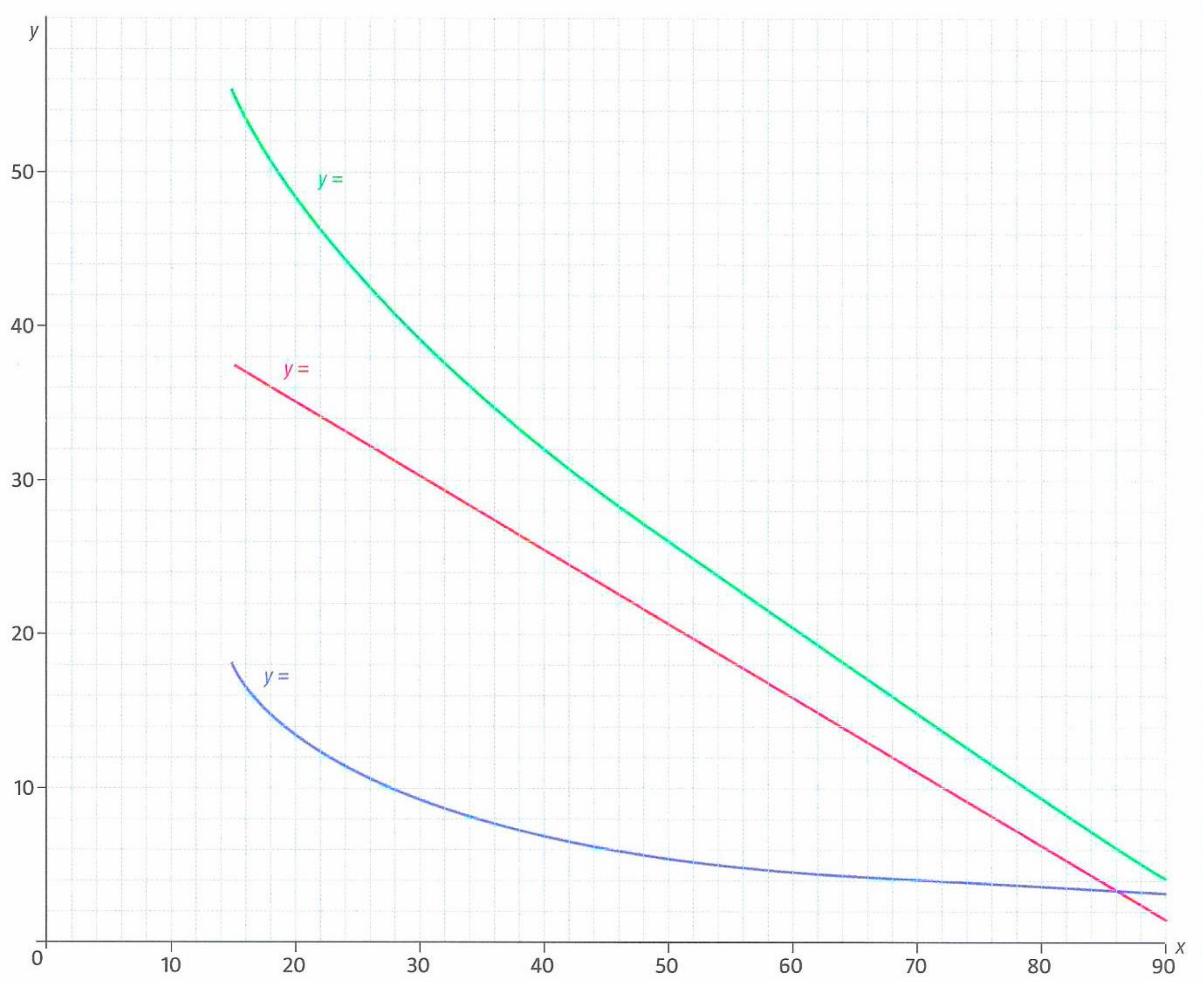
$$h(x) = f(x) + g(x)$$

1 – Dresser le tableau de variation de la fonction $\boldsymbol{h}$

Tableau de variation de h

x	
$h(x)$	

2 - Les courbes représentatives des fonctions f, g et h sont tracées ci-dessous. Ecrire à côté de chaque courbe son équation.



3 – En laissant apparents les traits utiles à la lecture :

a) – Déterminer graphiquement $h(60)$ (arrondir à l'unité)

....

b) – Déterminer graphiquement l'équation $h(x) = 32$

....

Partie B : **Application**

Lucie, chercheuse, a mis eu point un nouveau modèle de lave-linge à programmation « hybride ». Un sélecteur informe la carte électronique de la température choisie par le consommateur. Une société de d'électroménager met sur le marché ce nouveau modèle.

La résistance, en kΩ, du capteur de température de cet appareil est donnée par

$R = \dfrac{270}{\theta} - 0{,}48\,\theta + 44{,}5$ où θ est la température comprise entre 15°C et 90°C.

Utiliser les résultats de la partie A pour répondre aux questions suivantes :

1- Quelle est la résistance correspondant à une température de 60°C ?

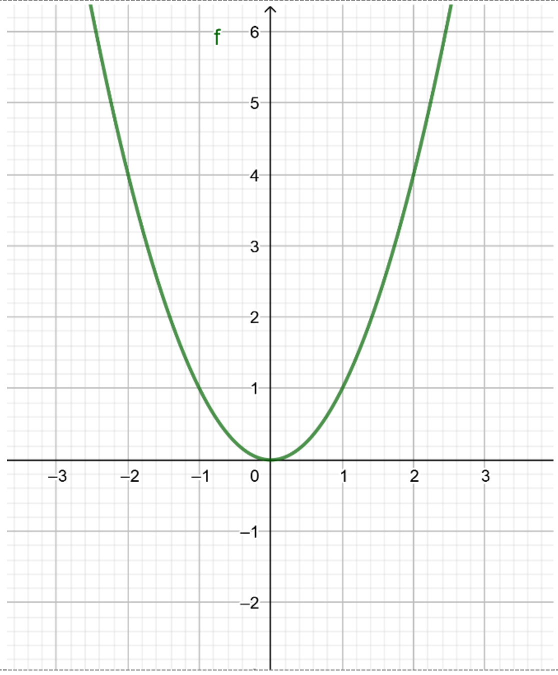
....

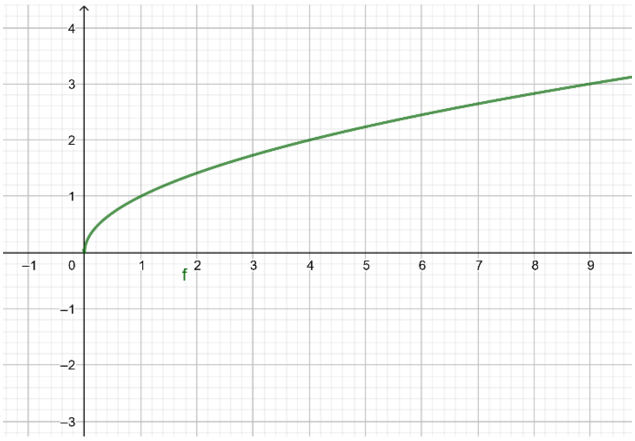
....

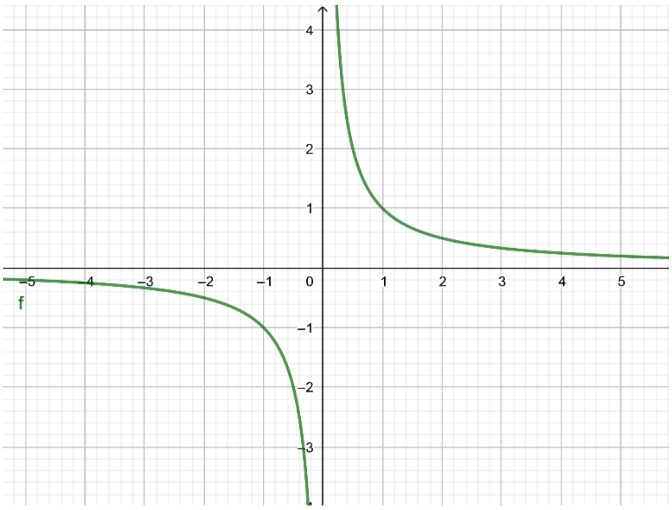
2- Quelle est la température correspondant à une résistance de 32 kΩ

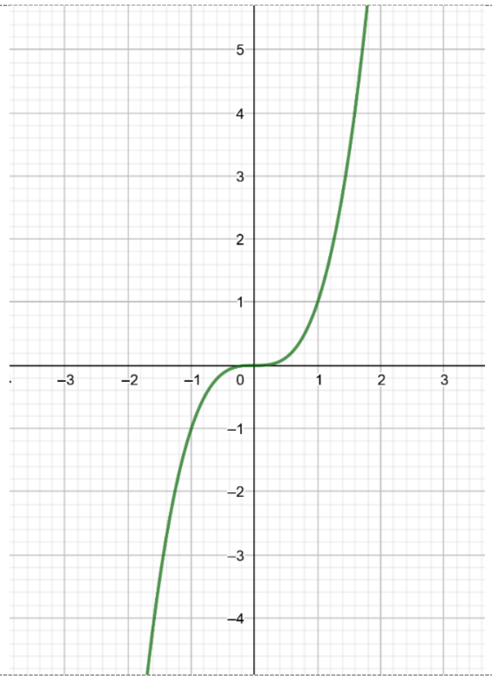
....

....

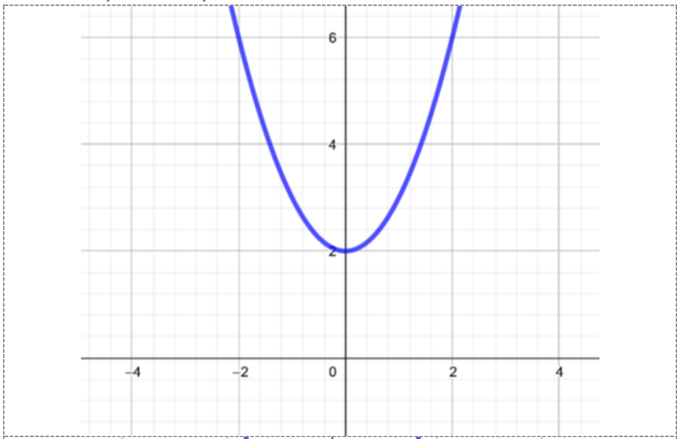

f
6
5
4
3
2
1
0
−3
−2
−1
1
2
3
−1
−2

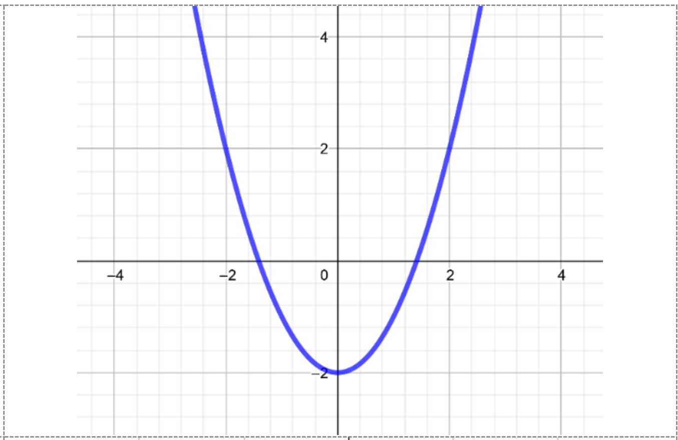

4
3
2
1
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
f
−1
−2
−3

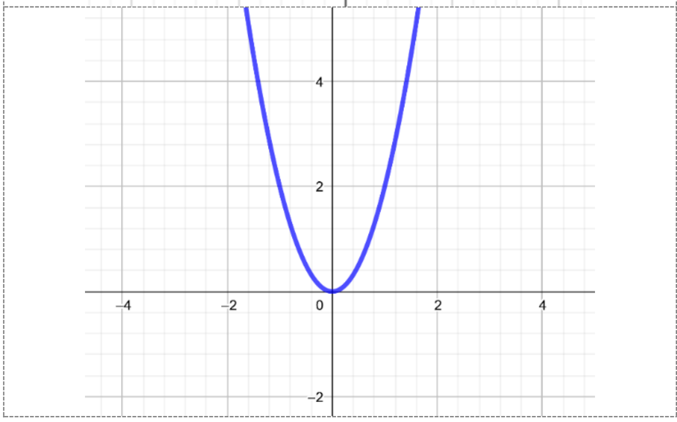

4
3
2
1
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
f
−1
−2
−3

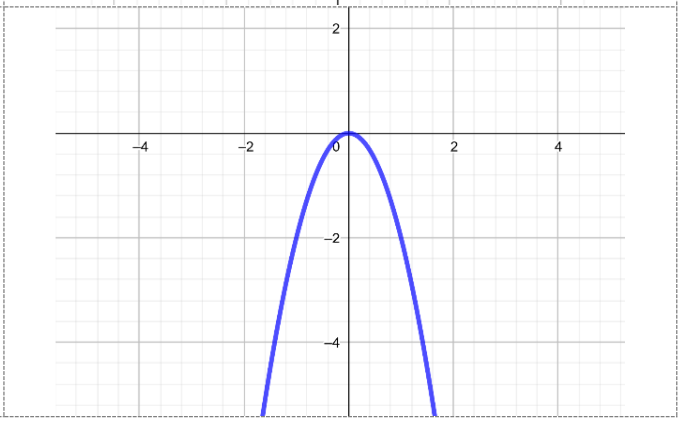

5
4
3
2
1
−3
−2
−1
0
1
2
3
−1
−2
−3
−4

Verso page à découper


6
4
2
–4
–2
0
2
4


4
2
–4
–2
0
2
4
–2


4
2
–4
–2
0
2
4
–2


2
–4
–2
0
2
4
–2
–4