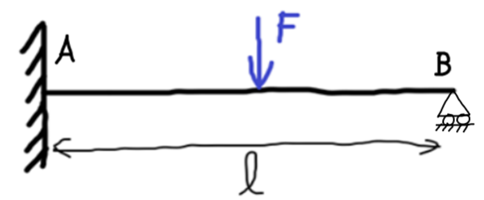
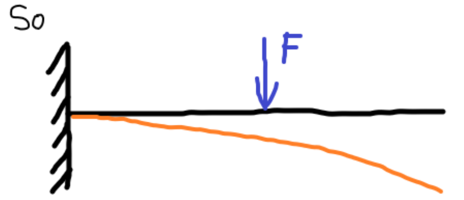
Méthode des forces

Principe de la méthode à partir d'un exemple

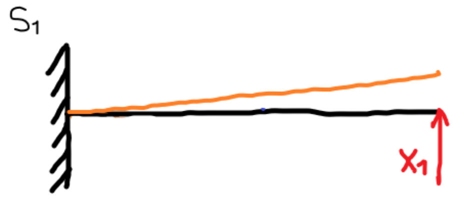
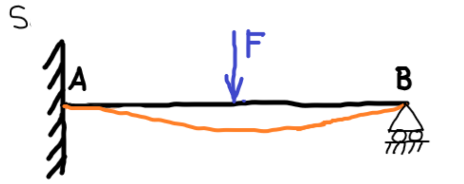
<table>
<tr>
<td></td>
<td>1 – Supprimer l'appui (rendre un degré de liberté) => isostatique

Allure de la déformée -></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="4">Structure hyperstatique (degré 1) => les équations du PFS ne suffisent pas => équation supplémentaire de compatibilité de déplacement

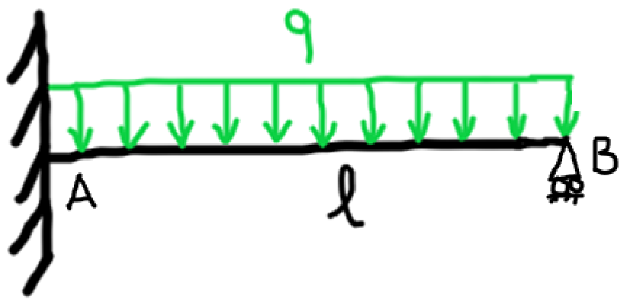
Principe de la méthode des forces :
On supprime la réaction à l'appui B (de manière à obtenir une structure isostatique) et on la remplace par une force qui permet de « relever » l'extrémité de la poutre jusqu'à sa position de départ (au niveau de l'appui B)

La valeur de cette force X1 correspond à la réaction R_{yB}.

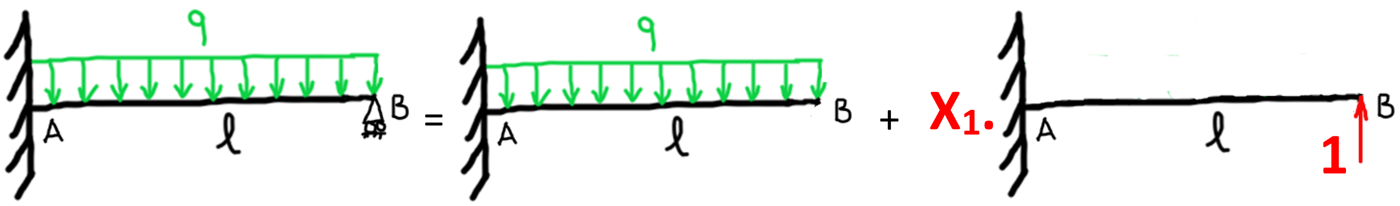
On peut ensuite appliquer le PFS pour calculer les réactions en A.</td>
<td>2 – Structure équivalente sans le chargement avec appui remplacé par une force

Allure de la déformée -></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>3 – Valeur du déplacement vertical en B ?</td>
<td>L'appui en B impose un déplacement vertical nul.</td>
</tr>
<tr>
<td>4 – Allure de la déformée structure hyperstatique</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>5 – Expression de la condition de compatibilité
(déplacement en B nul) -></td>
<td>$\delta_{B(S0)} + \delta_{B(S1)} = 0$</td>
</tr>
</table>

Exemple :



a - On décompose la poutre ainsi :



b - On exprime la condition de déplacement nul en B :

$$\Delta_{10} + X_1 . \delta_{11} = 0$$

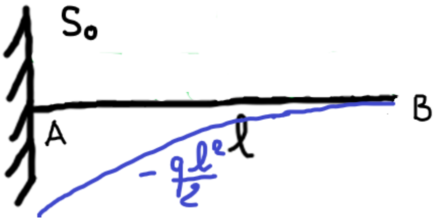
Avec Δ_{10} la déformation dans le sens de X_1 causé par le **chargement initial** F (X_0)

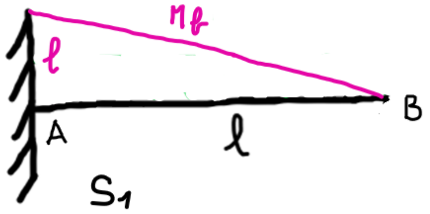
δ_{11} la déformation dans le sens de X_1 causé par le chargement X1

c – On exprime les déformations en utilisant les intégrales de Mohr

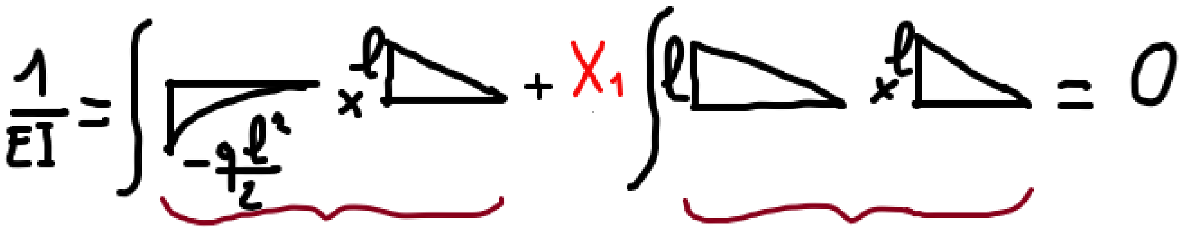
$$\frac{1}{EI}\int_{struct} M_{S1} \times M_{S0} + X_1 \times \frac{1}{EI}\int_{struct} M_{S1} \times M_{S1} = 0$$

d - On cherche les diagrammes des moments de flexion M_f correspondant aux structures S_0 et S_1



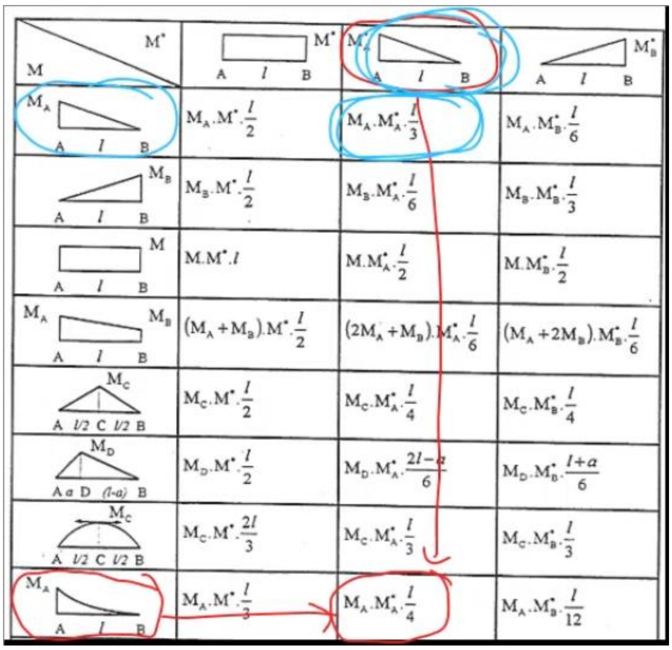


⇨



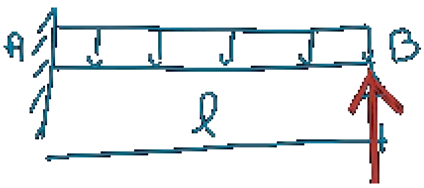
Lecture dans le tableau des intégrales de Mohr ➔

$$\frac{1}{EI} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{ql^2}{2} \times l \times \frac{l}{4}\right) + X_1 . \frac{1}{EI}\left(l \times l \times \frac{l}{3}\right)$$



M \ M*	M* (A l B)	M^*_A (A l B)	M^*_B (A l B)
M_A (A l B)	$M_A . M^* . \frac{l}{2}$	$M_A . M^*_A . \frac{l}{3}$	$M_A . M^*_B . \frac{l}{6}$
M_B (A l B)	$M_B . M^* . \frac{l}{2}$	$M_B . M^*_A . \frac{l}{6}$	$M_B . M^*_B . \frac{l}{3}$
M (A l B)	$M . M^* . l$	$M . M^*_A . \frac{l}{2}$	$M . M^*_B . \frac{l}{2}$
M_A M_B (A l B)	$(M_A + M_B) . M^* . \frac{l}{2}$	$(2M_A + M_B) . M^*_A . \frac{l}{6}$	$(M_A + 2M_B) . M^*_B . \frac{l}{6}$
M_C (A l/2 C l/2 B)	$M_C . M^* . \frac{l}{2}$	$M_C . M^*_A . \frac{l}{4}$	$M_C . M^*_B . \frac{l}{4}$
M_D (A a D (l-a) B)	$M_D . M^* . \frac{l}{2}$	$M_D . M^*_A . \frac{2l-a}{6}$	$M_D . M^*_B . \frac{l+a}{6}$
M_C (A l/2 C l/2 B)	$M_C . M^* . \frac{2l}{3}$	$M_C . M^*_A . \frac{l}{3}$	$M_C . M^*_B . \frac{l}{3}$
M_A (A l B)	$M_A . M^* . \frac{l}{3}$	$M_A . M^*_A . \frac{l}{4}$	$M_A . M^*_B . \frac{l}{12}$

$$X_1 = \frac{3ql}{8}$$



$$\boldsymbol{\frac{3ql}{8}}$$

Généralisation

Struct = Struct iso **S₀** + X_1 . struct iso S_1 $\xrightarrow{1}$

+ X_2 . struct iso S_2 $\uparrow 1$

+ X_3 . struct iso S_3 $\curvearrowleft 1$

……… + X_n . struct iso S_n

$$0 = \Delta_{10} + X_1 . \delta_{11} + X_2 . \delta_{12} + X_3 . \delta_{13} + \cdots + X_n . \delta_{1n}$$

$$0 = \Delta_{20} + X_1 . \delta_{21} + X_2 . \delta_{22} + X_3 . \delta_{23} + \cdots + X_n . \delta_{2n}$$

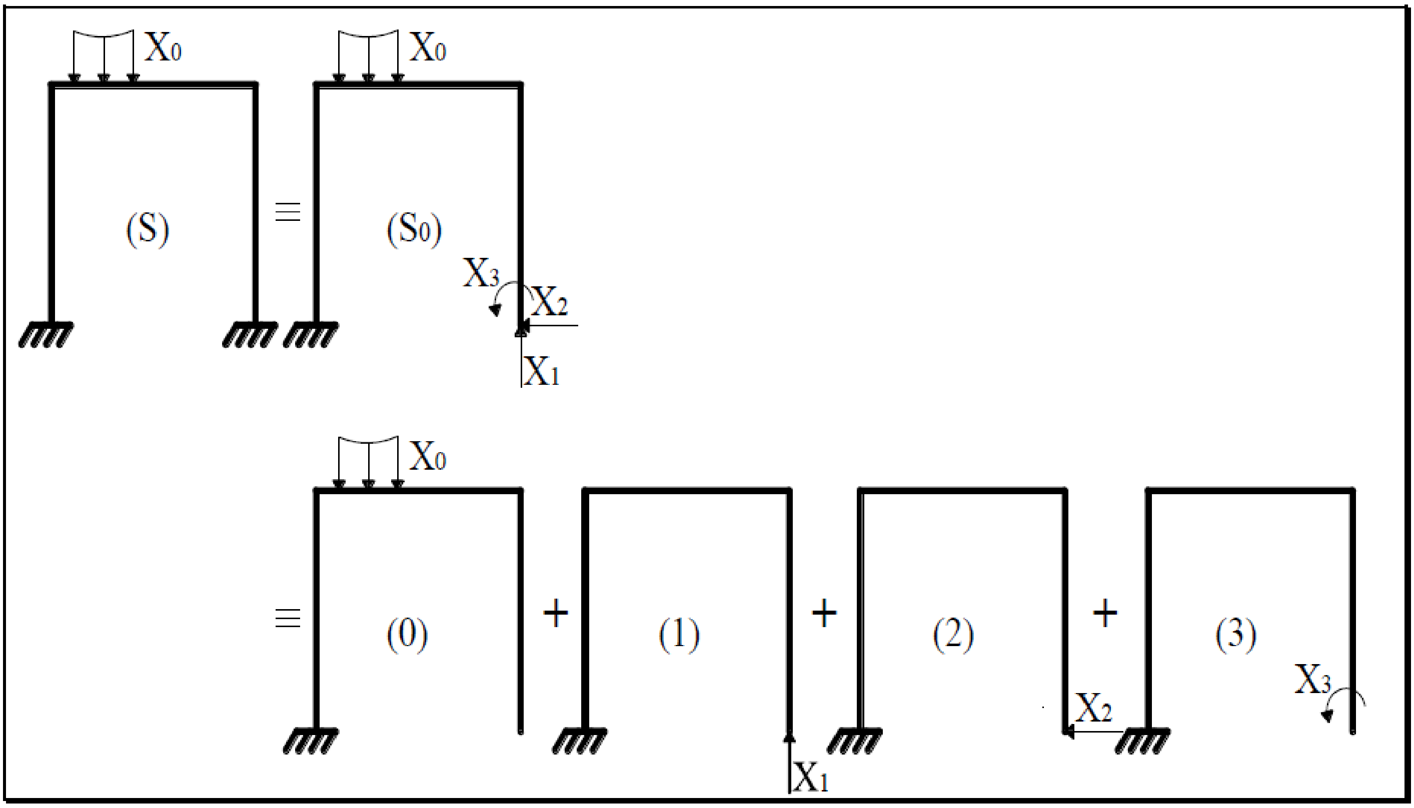
$$\ldots .$$

$$0 = \Delta_{n0} + X_1 . \delta_{n1} + X_2 . \delta_{n2} + X_3 . \delta_{n3} + \cdots + X_n . \delta_{nn}$$

Avec Δ_{i0} la déformation (déplacement ou rotation) **dans le sens de X_i** causé par le **chargement initial** X_0

δ_{ij} la déformation (déplacement ou rotation) **dans le sens de X_i** causé par le **chargement Xj**

Exemple :



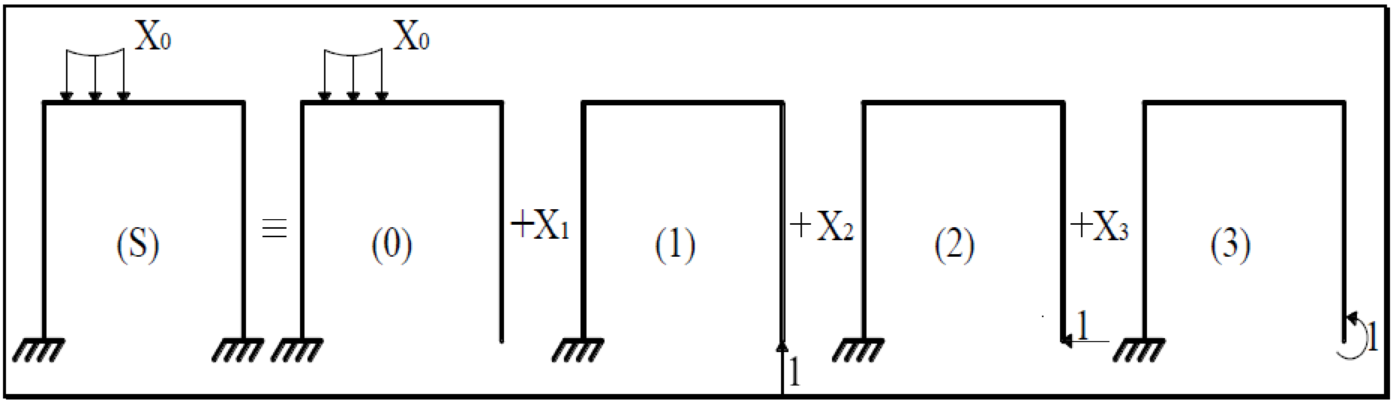
Décomposition de la structure isostatique équivalente par le principe de superposition

La structure hyperstatique initiale (S) est un portique bi-encastré soumis à un chargement initial X_0 et de degré d'hyperstaticité k=3.

La structure isostatique équivalente (S_0) est soumise aux chargements X_0 et aux k chargements Xi.

D'après le principe de superposition on peut écrire : Le système (S_0) est égal à la somme des systèmes (0, 1, 2 et 3).

Et selon le principe de proportionnalité :



Si on note :

- M(x) : l'expression du moment fléchissant de (S) soumise à X_0 ;
- M_0(x) : l'expression du moment fléchissant de (S_0) soumise à X_0 ;
- M_1(x) : l'expression du moment fléchissant de (S_0) soumise à $X_1=1$;
- M_2(x) : l'expression du moment fléchissant de (S_0) soumise à $X_2=1$;
- M_3(x) : l'expression du moment fléchissant de (S_0) soumise à $X_3=1$.

⇨

$$M(x) = M_0(x) + X_1 M_1(x) + X_2 M_2(x) + X_3 M_3(x)$$

De même pour l'effort tranchant et l'effort normal, on peut écrire :

$$V(x) = V_0(x) + X_1 V_1(x) + X_2 V_2(x) + X_3 V_3(x)$$

$$N(x) = N_0(x) + X_1 N_1(x) + X_2 N_2(x) + X_3 N_3(x)$$

Principe de la compatibilité des déformations :

À fin que la compatibilité des déformations entre la structure (S) et la structure (S_0) soit assurée, on doit écrire pour chaque coupure de (S) une équation de compatibilité.

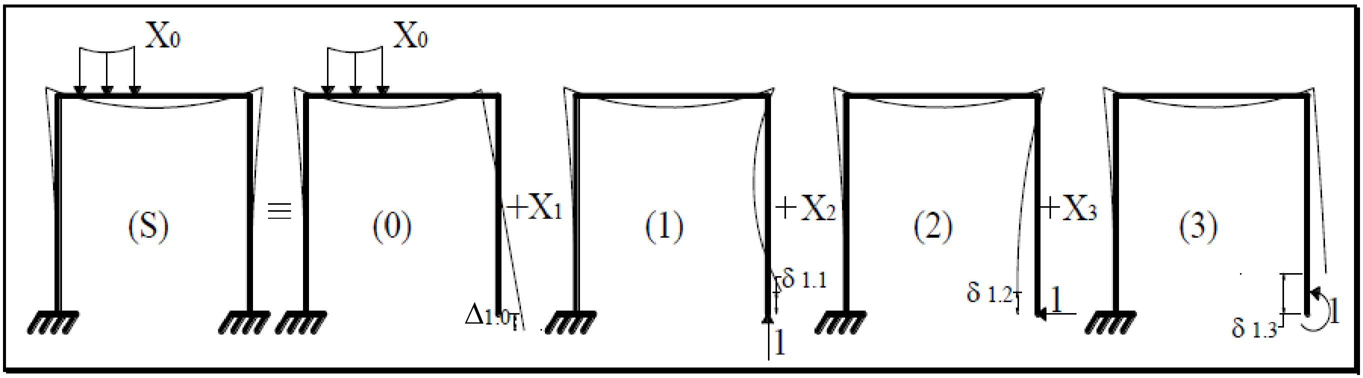
Si on note :

$\delta_{i,j}$: les déformations (déplacements ou rotations) du point de coupure de (S_0), **dans le sens de X_i** causés par **le chargement X_j**.

$\delta_{i,0}$: les déformations (déplacements ou rotations) du point de coupure de (S_0), **dans le sens de Xi** causés par **le chargement initial X_0**.

Pour l'exemple de portique bi-encastré, au point D on a un encastrement donc les trois déformations en D sont nulles (u_D=0, v_D=0 et θ_D=0), or pour (S_0) choisie, on a libéré le point D. pour avoir une compatibilité des déformations :

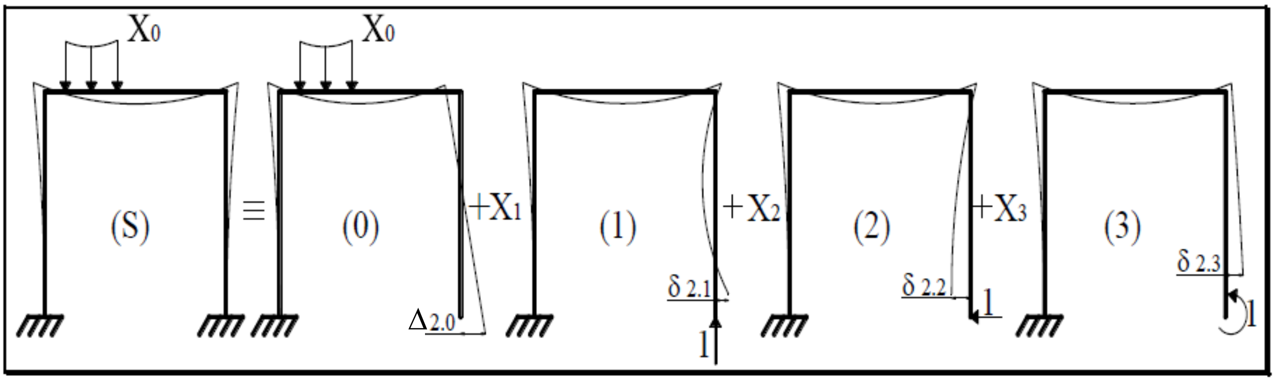
Déplacement du point de coupure dans le sens X_1:



Déplacements dans le sens de X1

$$0 = \Delta_{10} + X_1 . \delta_{11} + X_2 . \delta_{12} + X_3 . \delta_{13}$$

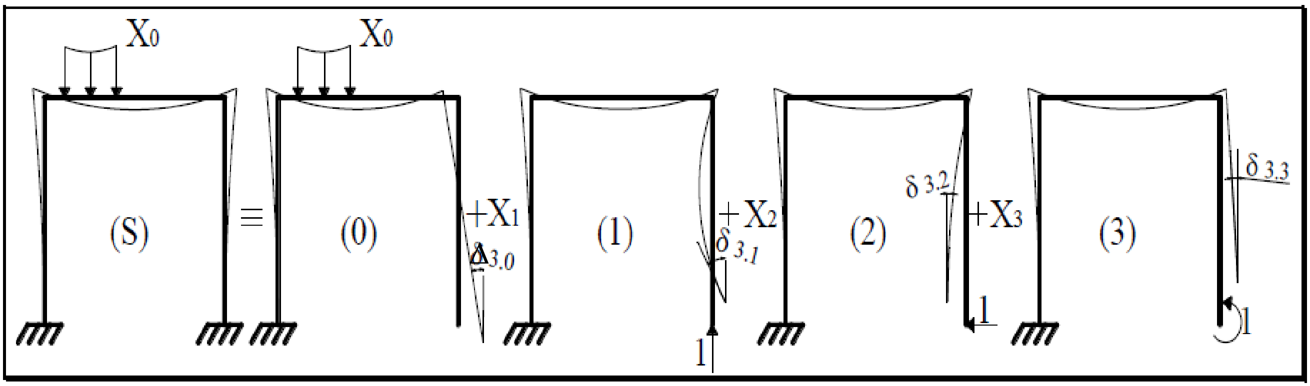
Déplacement du point de coupure dans le sens X_2 :



Déplacements dans le sens de X2

$$0 = \Delta_{20} + X_1 . \delta_{21} + X_2 . \delta_{22} + X_3 . \delta_{23}$$

Déplacement du point de coupure dans le sens X_3:



Déplacements dans le sens de X3

$$0 = \Delta_{30} + X_1 . \delta_{31} + X_2 . \delta_{32} + X_3 . \delta_{33}$$