

Brevet Professionnel

2^{ème} année

Mathématiques

Fonctions

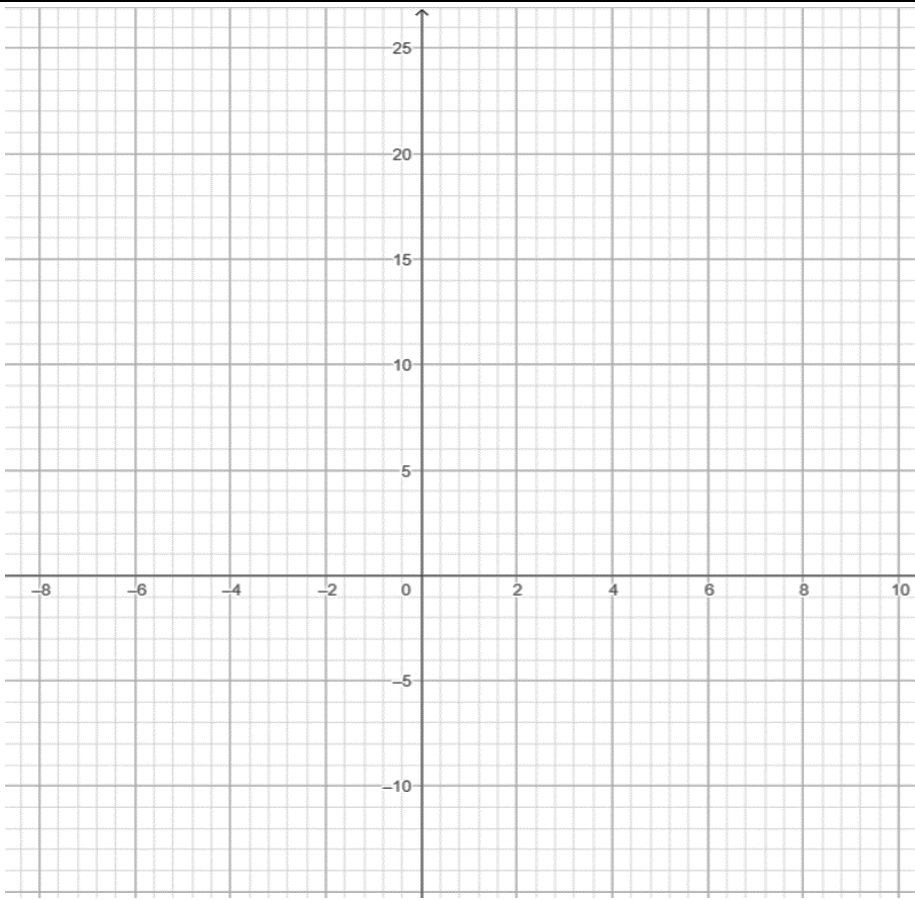
2 – Fonction du second degré

Nom :

Groupe :

1. **Fonction** $x \mapsto x^2$

Après une réflexion sur le signe, le sens de variation, tracer la représentation graphique qui correspond à la fonction.

Fonction carré																									
$x \mapsto x^2$																									
																									
x	$-\infty$ $+\infty$																								
Signe																									
Sens de variation																									
Valeurs																									
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">-5</td> <td style="padding: 5px;">-4</td> <td style="padding: 5px;">-3</td> <td style="padding: 5px;">-2</td> <td style="padding: 5px;">-1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;">5</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$f(x) = x^2$</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$f(x) = x^2$												
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5														
$f(x) = x^2$																									
<p>La fonction carré est définie par $f(x) = x^2$</p> <p>Sa courbe représentative est une parabole.</p>																									

2. Fonctions $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto x^2 + c$

Après une réflexion sur le signe et le sens de variation, coller la représentation graphique qui correspond à la fonction

$x \mapsto ax^2$		$x \mapsto ax^2$	
a positif (ex : a = 2)		a négatif (ex : a = -2)	
x	$-\infty$ $+\infty$	x	$-\infty$ $+\infty$
Signe		Signe	
Sens de variation		Sens de variation	
<p>La courbe représentative est une dont l'axe de est l'axe des ordonnées et dont le est l'origine du repère. Il correspond au si a est positif, au si a est négatif.</p>			

$x \mapsto x^2 + c$		$x \mapsto x^2 + c$	
c positif (ex : c = 2)		c négatif (ex : c = -2)	
x	$-\infty$ $+\infty$	x	$-\infty$ $+\infty$
Signe		Signe	
Sens de variation		Sens de variation	
<p>La courbe représentative est une dont l'axe de est l'axe des ordonnées et dont le est le point S de coordonnées (0, c). Il correspond au si a est positif, au si a est négatif.</p>			

Exercice 1

Soient f et g les fonctions définies sur $[0 ; 3]$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6$

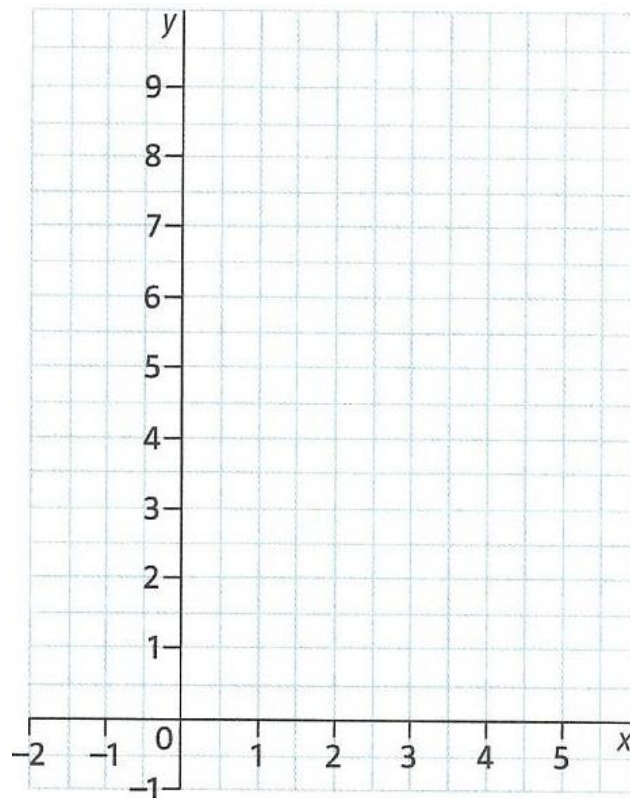
1 – Compléter les tableaux de variation de f et de g .

x	0	3
$f(x) = x^2$		
$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6$		

2 – Compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir les résultats à 0,1 près).

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$							
$g(x)$							

3 – Dans le plan rapporté au repère orthogonal ci-après, tracer les représentations graphiques des fonctions f et g .



4 – Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$

.....
.....

Exercice 2

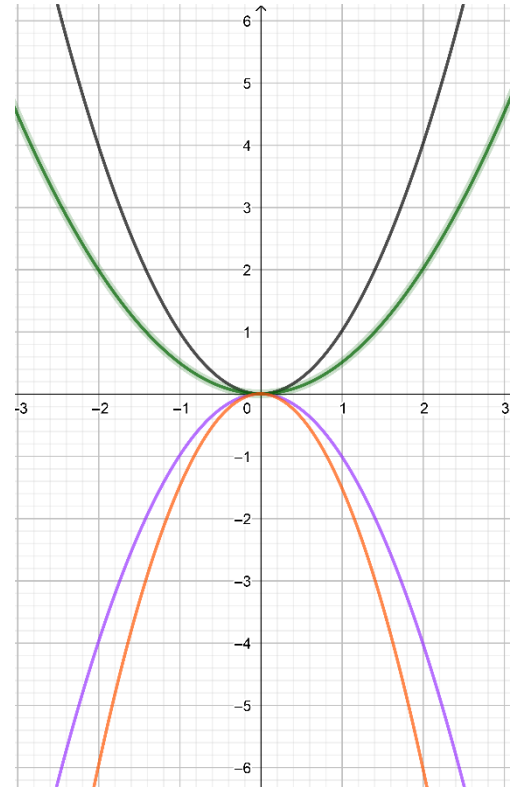
La courbe en noir représente la fonction f définie sur $[-3; 3]$ par $f(x) = x^2$.

Associer à chacune des autres courbes la fonction g , h ou j qu'elle représente sur $[-3; 3]$.

$g(x) = 0,5f(x)$ → courbe

$h(x) = -f(x)$ → courbe

$h(x) = 0,5 f(x)$ → courbe



Exercice 3

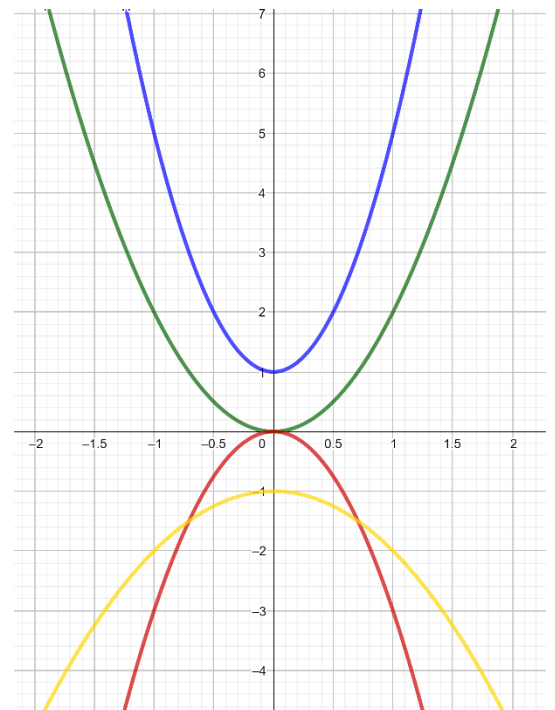
Associer à chacune des fonction la couleur de la courbe correspondante.

$f(x) = 2x^2$ → courbe

$g(x) = -3x^2$ → courbe

$h(x) = 4x^2 + 1$ → courbe

$i(x) = -x^2 - 1$ → courbe



Entraînement en ligne : <https://learningapps.org/view6557772>



4. Fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$

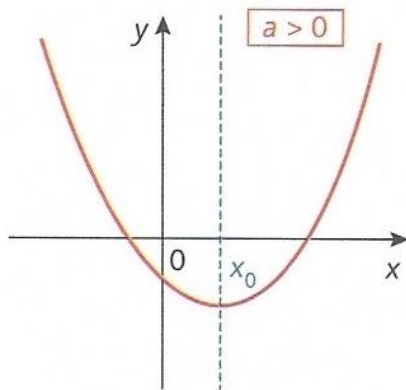
a) Définition Fonction polynôme du second degré

Une fonction polynôme du second degré est définie pour tout nombre réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c des nombres réels (avec $a \neq 0$).

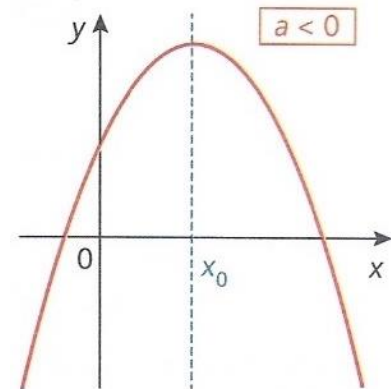
b) Propriétés

La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une **parabole**.
Suivant le **signe du coefficient a** , le tableau de variation et la représentation graphique de la fonction f ont l'allure suivante.

$a > 0$	
x	x_0
f	minimum



$a < 0$	
x	x_0
f	maximum



La fonction f présente un maximum ou un minimum pour :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

c) Influence des paramètres a, b et c

On peut visualiser l'influence des paramètres a, b et c sur :

<https://www.geogebra.org/m/tm7pudh7>



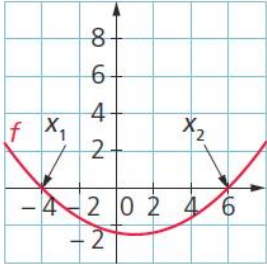
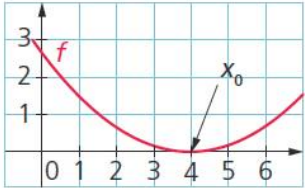
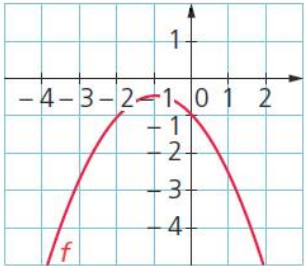
d) Racines d'un polynôme

Définition : Les racines d'une fonction polynôme du second degré $f(x)$ sont les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$.

Résolution : On peut résoudre l'équation par le **calcul** ou par **interprétation graphique**.

Pour résoudre l'équation $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ par le calcul, il faut calculer le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Résolution algébrique	Interprétation graphique
<p>Si $\Delta > 0$, il existe deux solutions réelles distinctes :</p> $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	<p>La représentation graphique de la fonction polynomiale coupe deux fois l'axe des abscisses.</p> 
<p>Si $\Delta = 0$, il existe une solution double :</p> $x_0 = \frac{-b}{2a}$	<p>La représentation graphique de la fonction polynomiale est tangente à l'axe des abscisses.</p> 
<p>Si $\Delta < 0$, il n'existe aucune solution réelle.</p>	<p>La représentation graphique de la fonction polynomiale ne coupe jamais l'axe des abscisses.</p> 

e) Exercices

Exercice 4 : Fonction du second degré ou pas ?

<https://learningapps.org/view6557356>



Exercice 5 : Calculer l'abscisse du sommet de la parabole
Associer abscisse du sommet et expression algébrique de la fonction

5.1 - Calculer l'abscisse x_s du sommet de la parabole correspondant à la fonction :

$$f(x) = -3x^2 + 6x - 1$$

.....

.....

5.2 - S'agit-il du minimum ou du maximum ? Justifier.

.....

5.3 – Associer l'abscisse x_s et l'expression algébrique de la fonction.



<https://learningapps.org/view19523221>

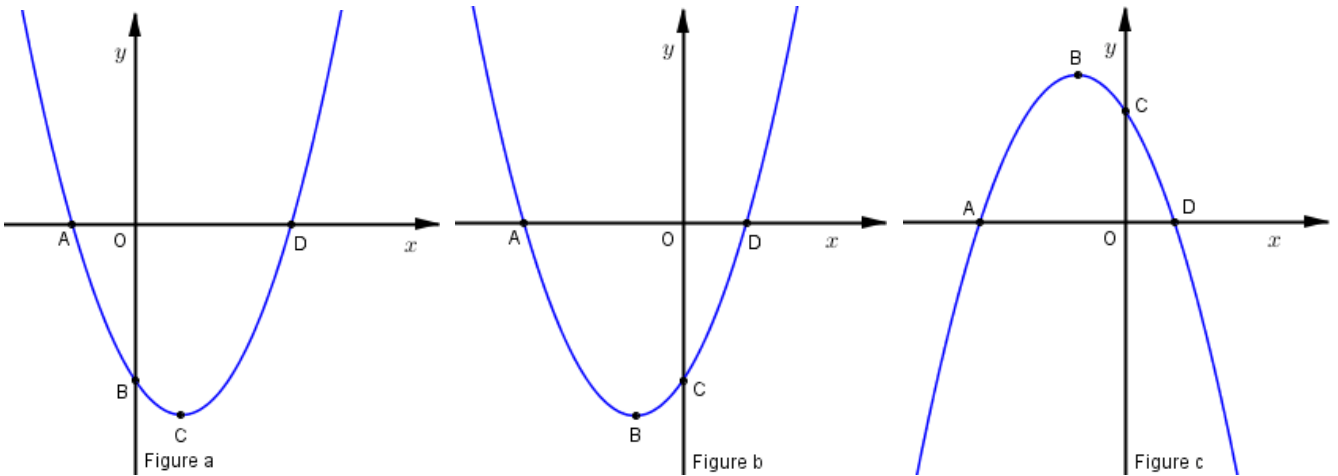
Exercice 6 : Associer expression algébrique et représentation graphique

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 5x^2 - 3x - 2$

Parmi les représentations graphiques suivantes, quelle celle qui correspond à la fonction $h(x)$?

Justifier.

tifier.



.....

.....

.....

.....

Exercice 6 : Associer signe et représentation ou expression algébrique d'une fonction du 2^d degré

<https://learningapps.org/view7381519>



Exercice 7 :

1. Cocher les bonnes réponses.

La fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

1.1. Calculer $f(0)$.

2

5

1

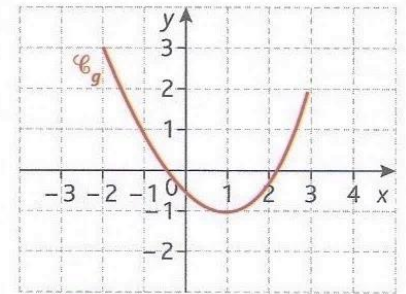
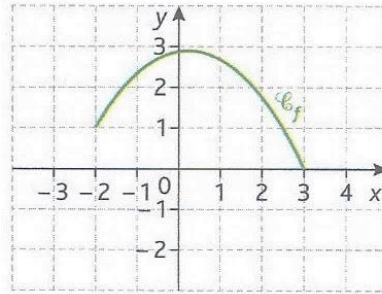
1.2. Calculer $f(1)$.

0

4

5

2. C_f et C_g sont les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-2; 3]$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$.



2.1. Déterminer le signe :

du coefficient a :

du coefficient a' :

2.2. Compléter les tableaux de variation suivants.

x	-2	0,25	3
$f(x)$		2,75	
x	-2	3
$g(x)$			-1

2.3. Rayer l'encadré inexact.

2.3.1. La fonction f croissante / décroissante est sur $[0,25; 3]$.

2.3.2. La fonction g a minimum / maximum un en $x = 1$.

Exercice 8 :

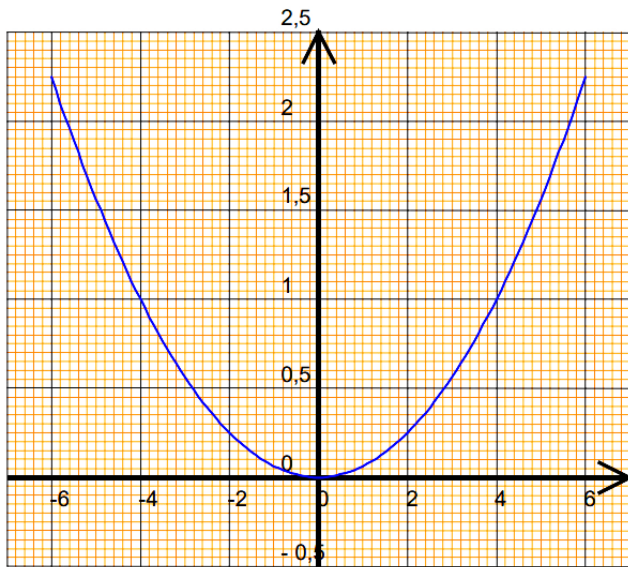
On donne un tracé de la parabole représentative d'une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$).

Pour chaque cas, déterminer graphiquement :

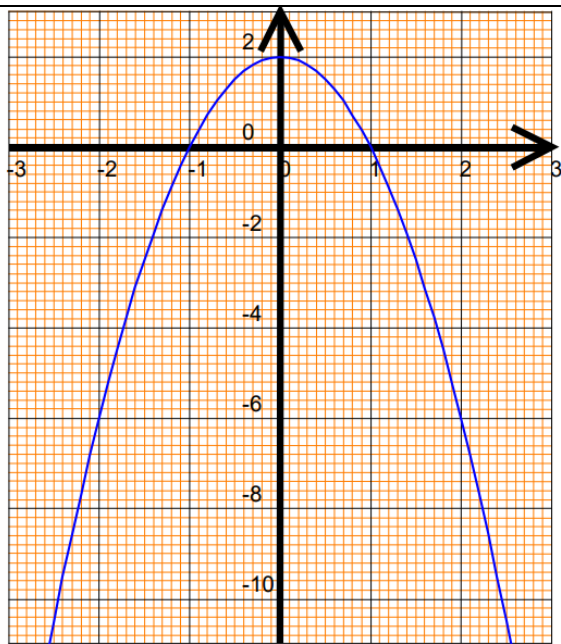
a) le signe du coefficient a .

b) le nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$ et le signe du discriminant Δ .

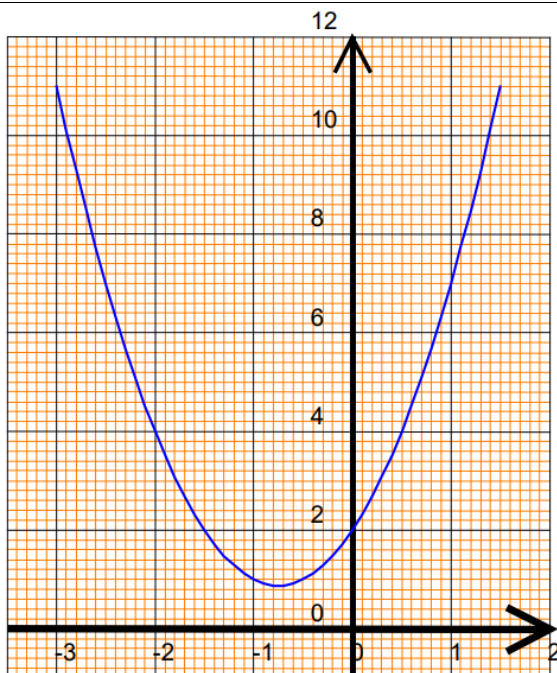
c) Les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 0$.



- signe du coefficient a :
- Signe du discriminant Δ :
- Nombre de solutions à $f(x) = 0$:
- Solutions (éventuelles) :
 - $x_1 =$
 - $x_2 =$



- signe du coefficient a :
- Signe du discriminant Δ :
- Nombre de solutions à $f(x) = 0$:
- Solutions (éventuelles) :
 - $x_1 =$
 - $x_2 =$



- signe du coefficient a :
- Signe du discriminant Δ :
- Nombre de solutions à $f(x) = 0$:
- Solutions (éventuelles) :
 - $x_1 =$
 - $x_2 =$

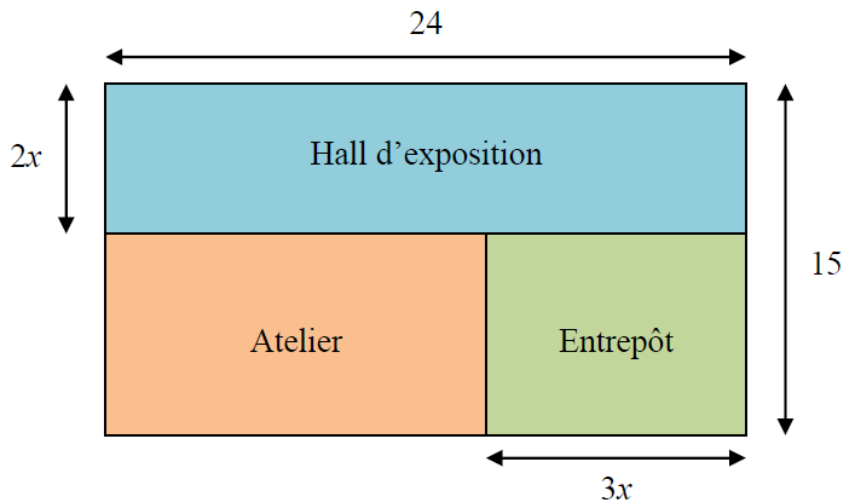
5. Modéliser un problème

Exercice 9

Une entreprise doit aménager un bâtiment industriel, constitué de trois parties : un atelier, un hall d'exposition et un entrepôt.

La figure ci-dessous représente ce bâtiment.

Les cotes sont en mètres. La figure n'est pas à l'échelle.



Première partie : L'aire de l'entrepôt

1) **Calculer**, en m^2 , l'aire totale du bâtiment.

.....
.....
.....

2) **Exprimer** en fonction de x , l'aire $A(x)$ de l'entrepôt.

.....
.....

3) **Calculer**, en m^2 , l'aire de l'entrepôt pour $x = 2$.

.....
.....

Deuxième partie :

L'objectif est de déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de l'entrepôt est maximale.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 7,5]$ par $f(x) = -6x^2 + 45x$.

1) **Résoudre** l'équation $f(x) = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) **Calculer** l'abscisse du sommet de la parabole.

.....

.....

.....

3) **Donner** le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 7,5]$.

.....

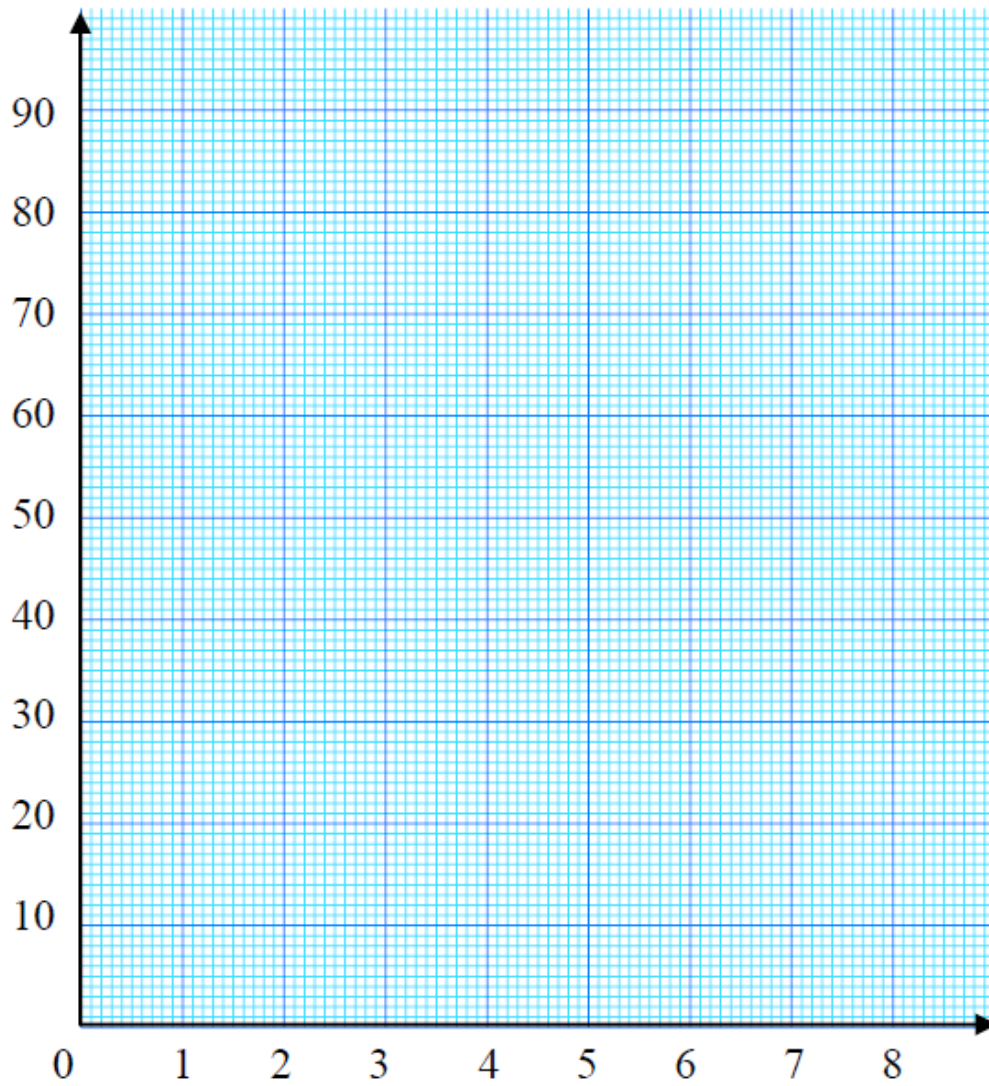
4) **Compléter** le tableau de variation de la fonction f .

x	0	7,5
Variation de f			

5) **Compléter** le tableau de valeurs.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	7,5
$f(x) = -6x^2 + 45x$			66				54	21	

6) **Tracer** la courbe représentant la fonction f dans le repère suivant ou à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel.



7) Pour x appartenant à l'intervalle $[0 ; 7,5]$, on sait que l'aire $A(x)$ de l'entrepôt est égale à $f(x)$.
 À l'aide de l'étude faite précédemment, **donner** la valeur de l'aire maximale de l'entrepôt.

.....

.....

.....

8) **Déterminer** les dimensions, longueur et largeur, de l'entrepôt qui correspondent à son aire maximale.

.....

.....

.....

(D'après sujet de Bac Pro Aménagement Finition Session juin 2009)

Exercice 10 Vente d'électricité à EDF

Véronique a fait installer des panneaux photovoltaïques sur le toit de sa maison. Elle a la possibilité de revendre l'électricité produite.

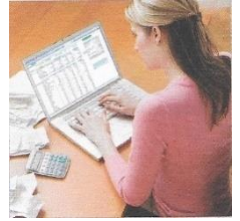
Des études statistiques ont permis de modéliser sur une année, la gain mensuel G de cette vente, à l'aide de la relation :

$$G(n) = -3,3n^2 + 39,6n + 90$$

où n représente le rang du mois.

Le mois de janvier correspond à $n = 1$.

On considère la fonction $f(x) = -3,3x^2 + 39,6x + 90$ définie sur l'intervalle $[1 ; 12]$.



Problématique : Quelle est la période pour laquelle le bénéfice est maximal ?

1. Compléter le tableau de valeurs suivants (arrondir les résultats à 0,1).

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x)$												

2. Tracer la courbe représentative de la fonction $f(x)$.

3. En déduire la période pour laquelle le bénéfice semble maximal.

.....

.....

.....

.....

4. Calculer la valeur de x pour laquelle la fonction est maximale.

.....

.....

.....

.....



5. Comparer la valeur obtenue avec les résultats précédents. Conclure.

.....

.....

Exercice 11 Distance de freinage

En décembre 2016, en Vendée, un gigantesque carambolage a eu lieu sur une voie rapide. L'accident a été provoqué par un épais brouillard rendant la visibilité inférieure à 50 m. On cherche à estimer à quelle vitesse un conducteur pouvait rouler en sécurité le jour de cet accident.

La distance d'arrêt DA en mètres d'un véhicule pour un conducteur vigilant dépend de la vitesse v du véhicule en mètres par seconde selon la relation suivante :

$$DA = \frac{v^2}{17} + 2v$$

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 40]$ par l'expression algébrique

$$f(x) = \frac{x^2}{17} + 2x$$

Partie I

Un automobiliste qui n'a pas adapté sa vitesse aux conditions météorologiques roule à 130 km/h sur cette voie rapide, soit 36 m/s.

1. Vérifier qu'une vitesse de 130 km/h correspond bien à 36 m/s.

.....
.....

2. Calculer $f(36)$.

.....
.....

3. En déduire la distance d'arrêt de cet automobiliste.

.....
.....

4. Expliquer s'il conduit en sécurité.

.....
.....

Partie II

Plusieurs automobilistes interrogés après l'accident avaient adapté leur vitesse.

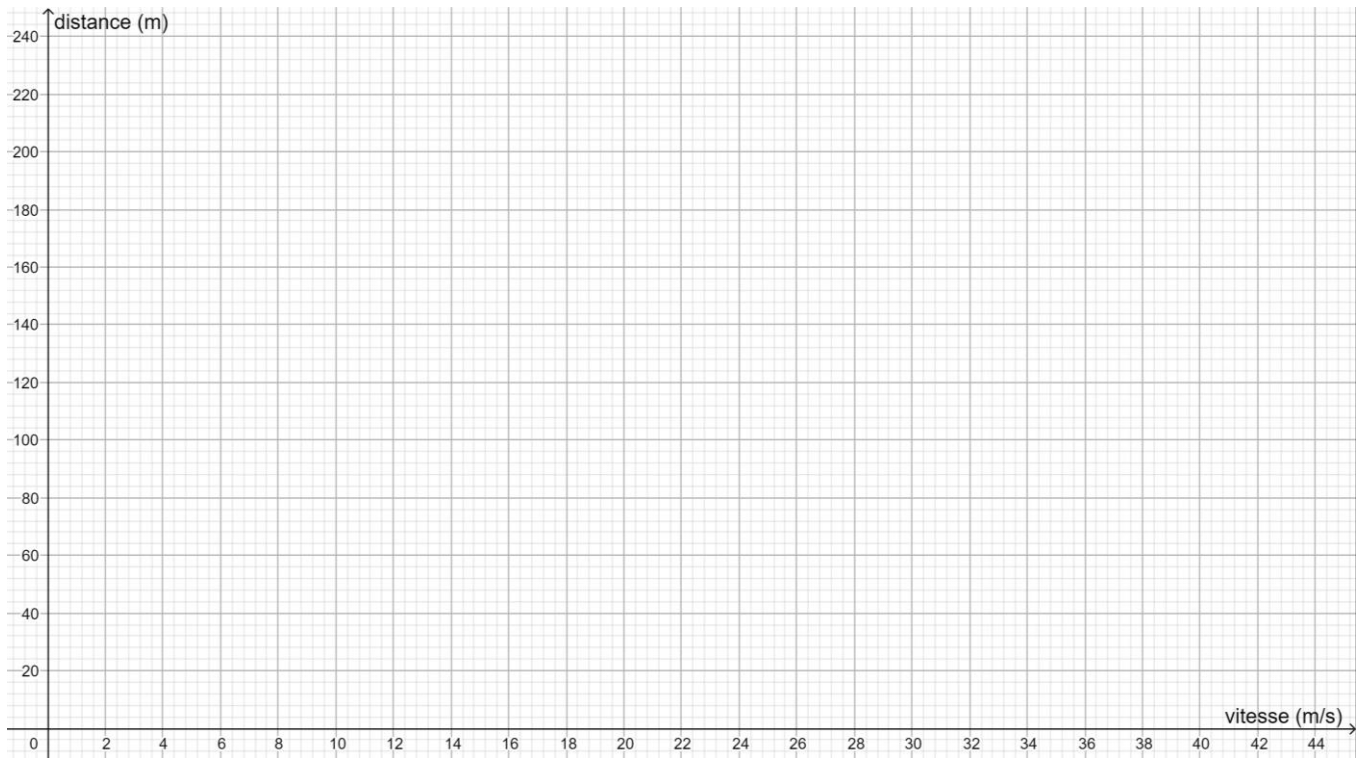
L'automobiliste A a déclaré rouler à 110 km/h, le B à 50 km/h, le C à 70 km/h et le D, à 90 km/h.

5. Compléter le tableau de valeurs suivant.

On arrondira les résultats au mètre.

Automobiliste	A	B	C	D
Vitesse (km/h)	110	50	70	90
x	30	14	19	25
$f(x)$				

6. Tracer la courbe C représentative de la fonction f dans le repère ci-contre.



7. Lire graphiquement la vitesse à laquelle un automobiliste pouvait rouler en sécurité le jour de l'accident.

8. En déduire quel(s) automobiliste(s) respectai(en)t les règles de sécurité.

Partie III

On veut retrouver le résultat de la question 3 de la partie II par le calcul.

9. Expliquer pourquoi résoudre l'équation $f(x) = 50$ permet de résoudre le problème.

10. Résoudre l'équation

$$\frac{x^2}{17} + 2x - 50 = 0$$

.....
.....
.....
.....

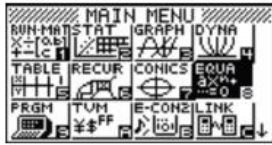
11. Conclure à quelle vitesse un automobiliste pouvait rouler en sécurité le jour de l'accident.

Exercice 12 : Résoudre une équation du second degré avec la **calculatrice**

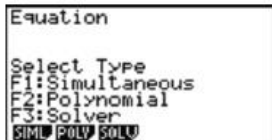
Trouvez la (ou les) solution(s) de l'équation du second degré suivante : $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Avec une Casio

– Aller dans le menu **EQUA**.



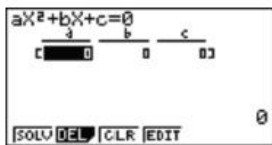
– Choisir **POLY**, comme « polynôme ».



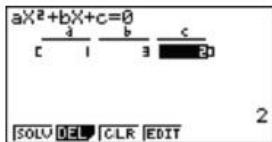
– Choisir **2**, comme « second degré ».



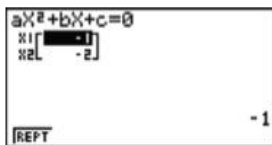
– Entrer les coefficients a , b et c du trinôme.



– Appuyer sur **SOLV**.

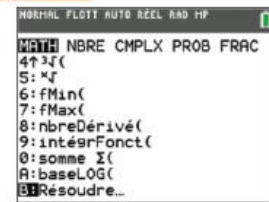


– Relever les solutions.

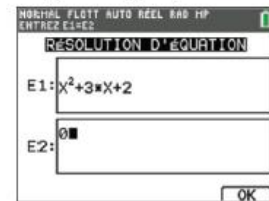


Avec une Texas Instruments

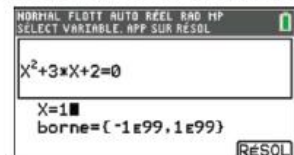
– Appuyer sur la touche **MATH** de la calculatrice et aller dans **Résoudre**.



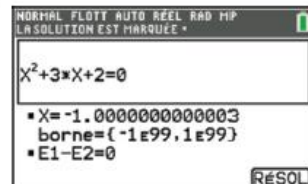
– Saisir l'équation, puis appuyer sur la touche **OK**.



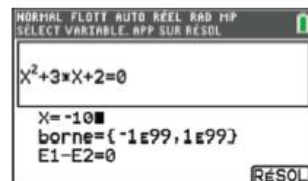
– Saisir un nombre quelconque pour x (l'algorithme de la calculatrice a besoin d'une valeur initiale de départ), puis appuyer sur la touche **RÉSOL**.



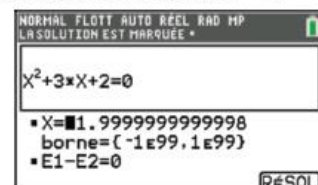
– Relever la première solution : **-1**.



– Entrer un autre nombre quelconque pour x , la valeur initiale de départ pour une éventuelle deuxième solution.



– Relever la deuxième solution : **-2**.



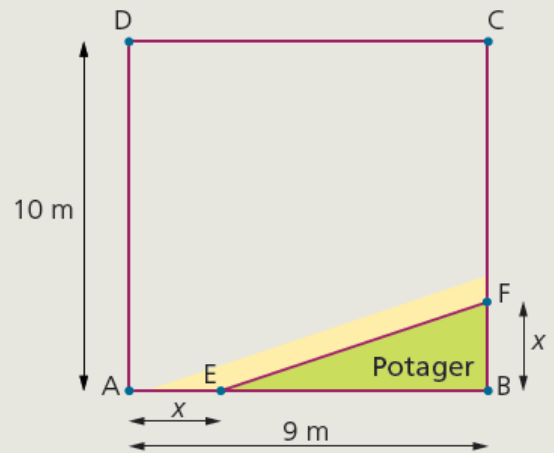
D'après Mathématiques Vuibert – 1^{ère} Bac Pro Enseignement agricole

Exercice 13 : Résoudre un problème à l'aide de **GéoGebra**

Optimiser la superficie d'un potager

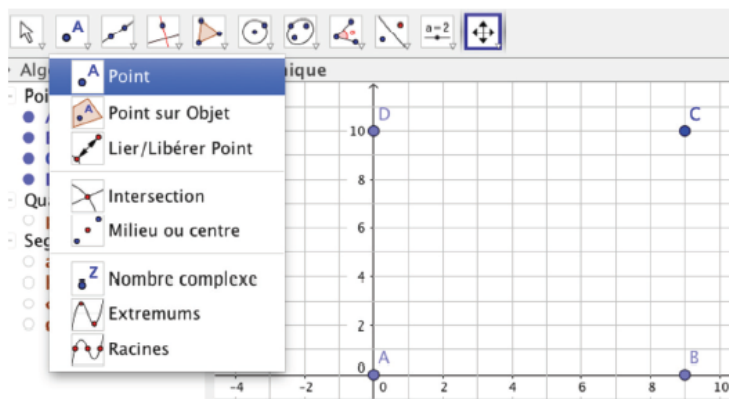
M. Jean possède un jardinet en zone urbaine de forme rectangulaire de 10 m sur 9 m. Il souhaite créer un potager dans un coin de ce jardinet délimité par des pavés. La contrainte suivante lui est imposée : la distance AE doit être égale à la distance BF.

Quelle est la plus grande superficie de potager possible ?

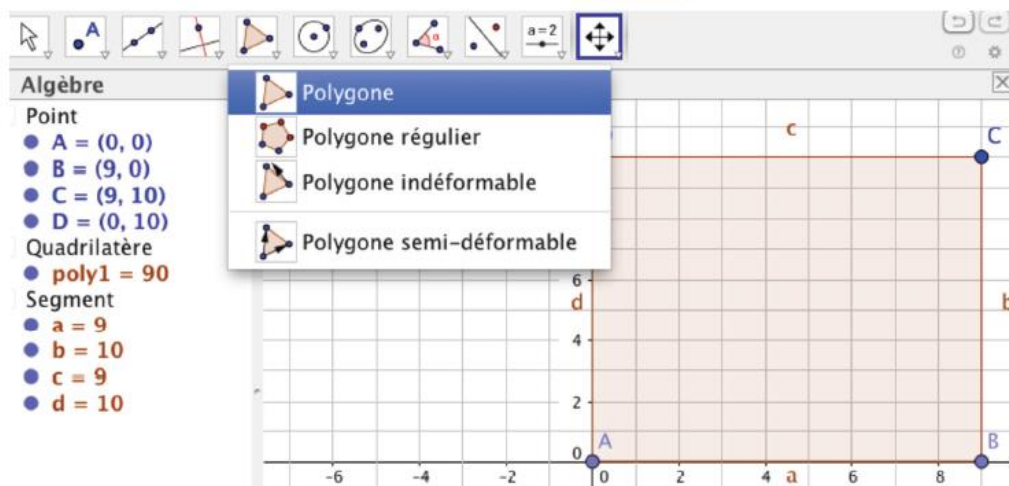


On cherche d'abord à représenter le plan du potager sous GeoGebra.

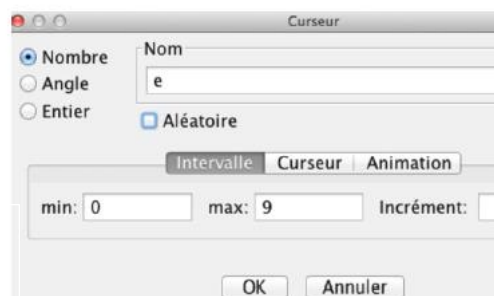
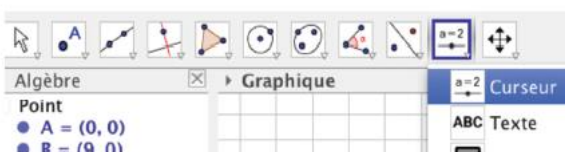
- Placer les 4 points A, B, C et D à l'aide du quadrillage.



- Relier le rectangle ABCD de 9 m sur 10 m à l'aide de l'outil **Polygone**.



- Utiliser un curseur variant de 0 à 9.



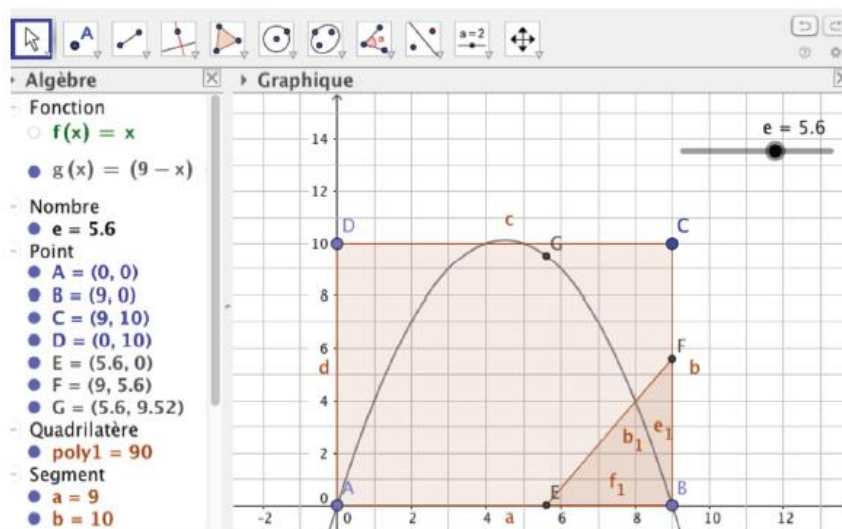
Ce curseur permet de faire **varier la position de E** entre A et B, La valeur e correspond à son abscisse.

- Dans la zone **Saisie**, placer le point E en saisissant : $E = (\dots ; \dots)$
- Dans la zone **Saisie**, placer le point F, en saisissant : $F = (\dots ; \dots)$
- À l'aide de l'outil **Polygone**, tracer le triangle BEF. Son aire s'affiche dans la zone **Algèbre/Triangle**.
- Observer qu'en pointant le curseur et en le faisant varier de 0 à 9, l'aire du triangle BEF, c'est-à-dire celle du potager, varie.
- Conjecturer pour quelle valeur de x la surface du potager est maximale.

- Pour vérifier cette conjecture, on exprime algébriquement la surface du potager :

On nommera $g(x)$ la fonction exprimant la surface du potager en fonction de x.

- Dans la zone **Saisie**, saisir la fonction $g(x) = \dots\dots\dots$
- Placer un point G de coordonnées $(e, g(e))$.



- En faisant varier le curseur, placer le point G au sommet de la courbe représentative de la fonction g . Relever alors la valeur du curseur.
- Vérifier que cette valeur correspond à celle conjecturée précédemment.
- En déduire la surface maximale du potager en précisant pour quelle distance AE elle est obtenue.

D'après Mathématiques Vuibert – 1^{ère} Bac Pro Enseignement agricole

Exercice 14 : Remplir automatiquement un tableau de valeurs avec Excel

1. Comment faire pour ne pas avoir à recommencer la totalité du travail chaque fois que l'on doit changer de polynôme ?
2. Comment calculer, de façon automatique, un grand nombre de valeurs de $P(x)$?

► Comment résoudre le problème à l'aide d'un tableur ?

1. Pour tabuler les valeurs d'un trinôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$, on va :
 - Choisir trois cellules où entrer les valeurs de a , b et c .
 - Choisir une ligne pour saisir les différentes valeurs de x .
 - Entrer une fonction permettant de calculer la valeur de $ax^2 + bx + c$ pour chaque x choisi.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Coefficients								
2	a	1	x	-5	-4	-2	-1	0	1
3	b	2	f(x)	= \$B2*D2^2+\$	3	-5	-6	-5	-2
4	c	-5							
5									

Dans cet exemple : a , b et c sont respectivement placés dans les cellules **B2**, **B3** et **B4**.

Les valeurs de x sont sur la ligne 2 et les valeurs à calculer pour $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont sur la ligne 3.

2. Dans la cellule **D3**, on tape la formule suivante : `= $B2*D2^2+$B3*D2+$B4` avant de la copier sur le reste de la ligne.

Dans la formule saisie, le symbole **\$** devant les cellules **B2**, **B3** et **B4** exprime le fait que, dans un trinôme du second degré, les coefficients a , b et c sont **fixés**. En effet, lorsque l'on copie la formule sur les cellules suivantes de la ligne 3, seule la valeur **D2** doit être incrémentée en **E2**, **F2**, **G2**, etc.

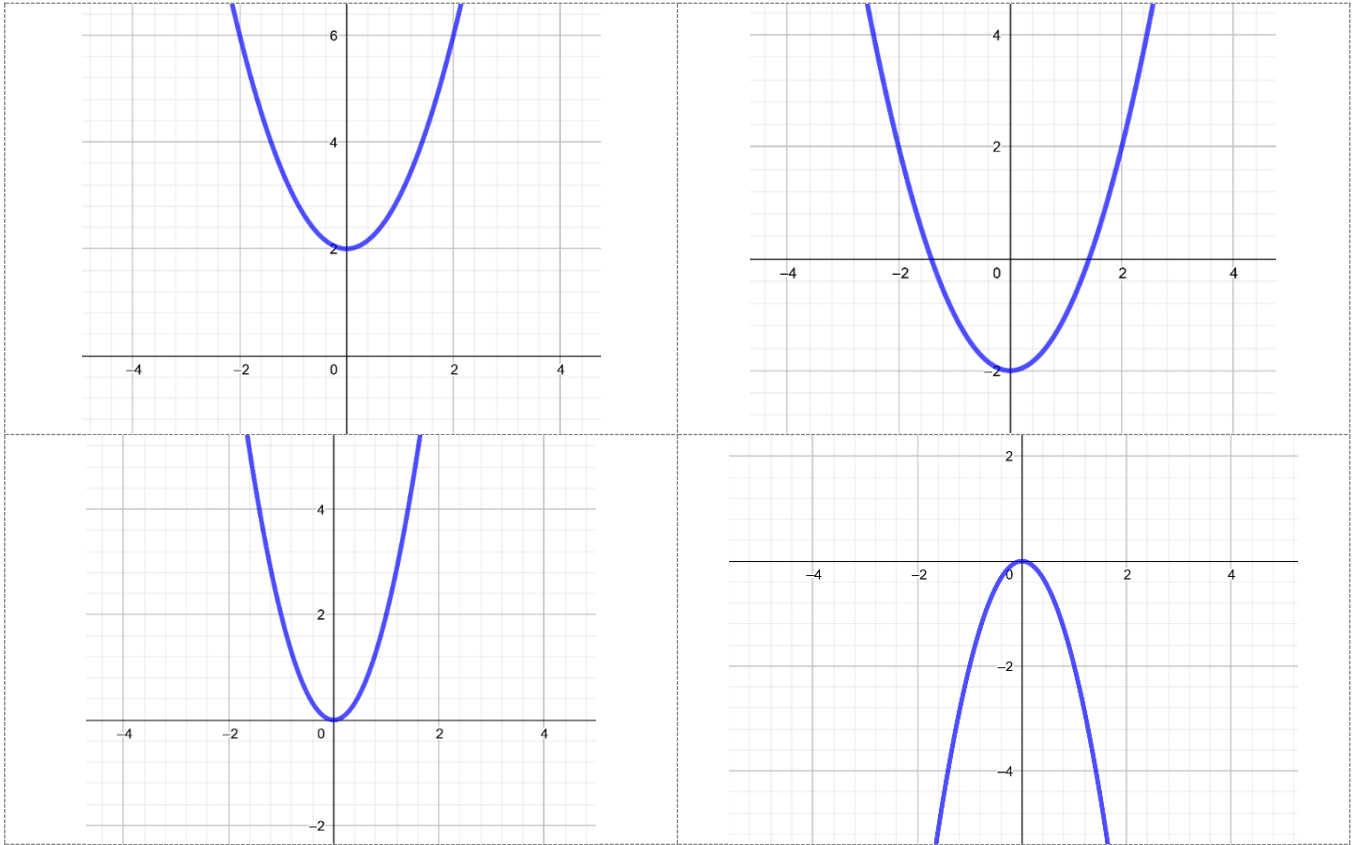
Dans cet exemple, on a la tabulation du trinôme $x^2 + 2x - 5$ pour 7 valeurs différentes de x .

On peut constater qu'aucune des valeurs de x choisies n'est une **racine** de ce trinôme, mais qu'une de ses racines est comprise entre -4 et -2 et que l'autre est comprise entre 1 et 10 .

Pour aller plus loin : Tracer la courbe correspondant à $f(x)$

D'après Mathématiques Vuibert – 1^{ère} Bac Pro Enseignement agricole

A découper chapitre 2



A découper chapitre 3

