

Degré de staticité

1 - Définition

La **staticité** est la **caractérisation de l'équilibre** (statique) d'un système, de son **niveau de stabilité**.

La staticité d'un système dépend :

- **du nombre et du type de liaisons** de la structure ;
- **du nombre et du type d'appuis** de la structure.

Il existe trois types de staticité :

- **L'hypostaticité** est un système sans équilibre stable. Il lui manque des liaisons.
 - *soit il n'a pas du tout d'équilibre statique : par exemple un mécanisme*
 - *soit il a un équilibre instable : par exemple une poutre sur un appui simple en son milieu*
- **L'isostaticité** est un système tout juste stable : la suppression d'une seule liaison le rendrait instable.
- **L'hyperstaticité** est un système plus que stable : une ou plusieurs liaisons peuvent être supprimées sans remettre en cause sa stabilité.

> Exemple simple #1 : le tabouret dans l'espace tridimensionnel



S'il n'a que **deux pieds**, il est en **équilibre instable**.

On dira qu'il est **hypostatique**.

Je ne m'assiérais pas dessus.



S'il a **trois pieds**, il a un **unique équilibre stable**.

On dira qu'il est **isostatique**.

Je peux m'asseoir dessus.

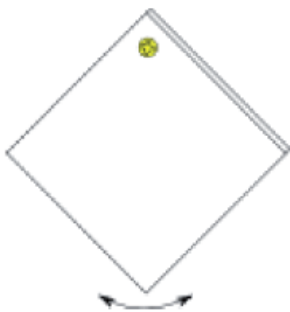


S'il a **quatre pieds**, c'est surabondant : il a un **plusieurs équilibres stables** :

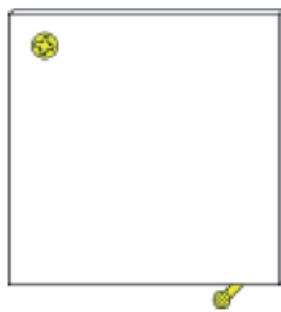
On dira qu'il est **hyperstatique**.

Je peux m'asseoir dessus.

> Exemple simple #2 : le cadre au mur



Fixation hypostatique
(vis seule)



Fixation isostatique
(clou + vis)



Fixation hypertsatique
(plusieur vis)

2 – Staticité dans les structures architecturales

Dans le domaine des **structures architecturales**, les **mécanismes hypostatiques** sont (quasiment toujours) **proscrits** : on ne veut pas que la structure puisse librement se mouvoir.

⇒ Seuls les systèmes **isostatiques** et **hyperstatiques** nous intéressent.

➔ Il faut vérifier que le projet est a minima isostatique, voire hyperstatique

L'**isostaticité** peut être plus **économique** (moins de matière, mise en œuvre plus facile).
 Mais pour des raisons de **sécurité**, on préfère souvent construire des **structures hyperstatiques**.

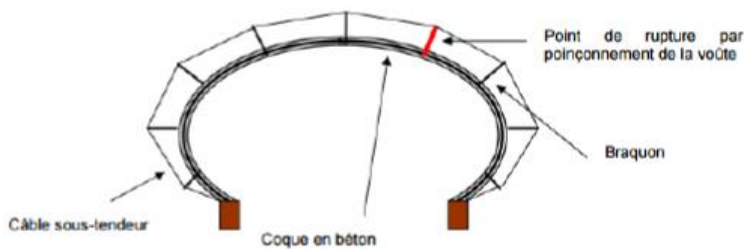
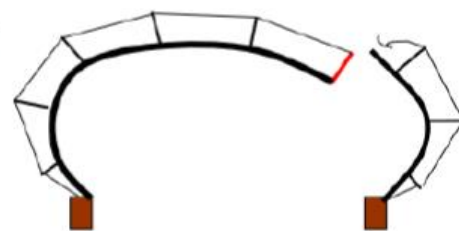


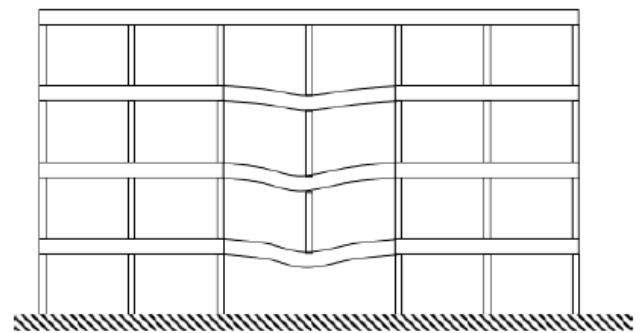
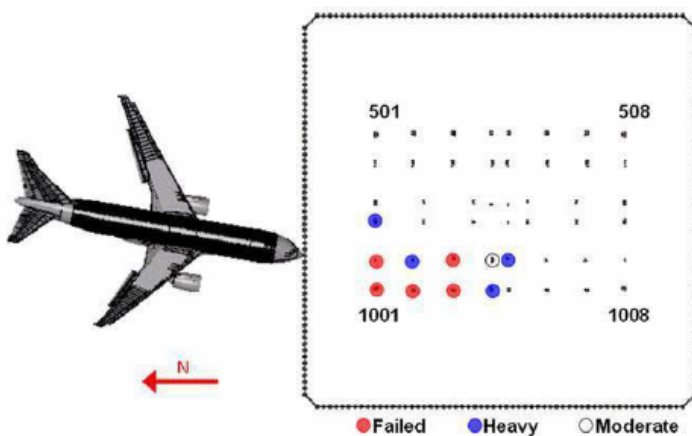
Schéma de la section transversale de la voûte de la jetée de l'aéroport CDG 2^e



Ruine de la section entraînant la ruine générale de la coque

Effondrement terminal 2^e de Roissy (source : <http://www.rdmestp.fr/>)

Pour des raisons de **sécurité**, les **structures sont globalement hyperstatiques**.
 (Cela n'empêche pas de les réaliser avec des trames isostatiques).



Adaptation d'un portique complexe à la ruine d'un de ses appuis

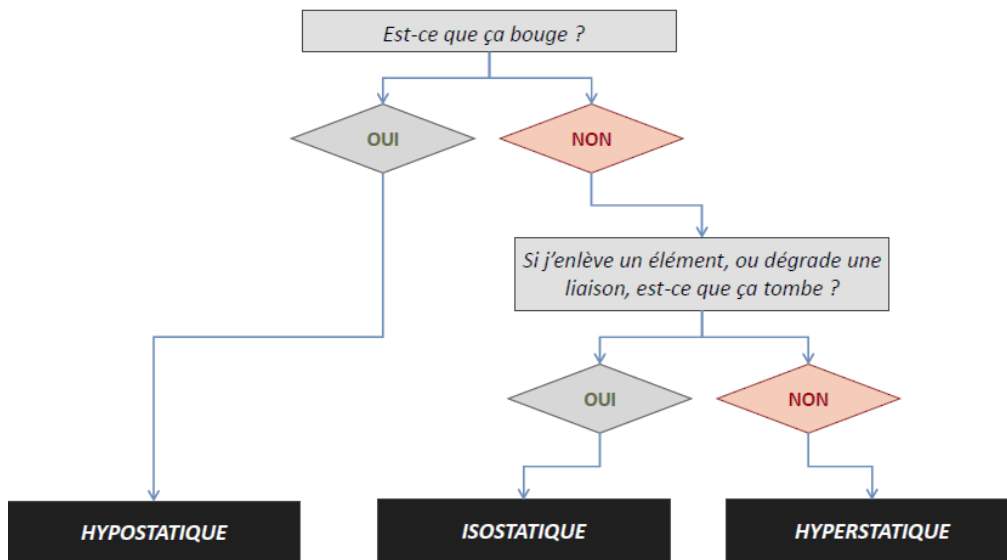
De nombreux poteaux ont été sectionnés dans le WTC mais la structure de la tour résiste pendant une heure environ grâce à son hyperstaticité
 (source : <http://www.ara.com/>)

Il est important de **déterminer la staticité** d'une structure, elle va influencer les méthodes de calcul mises en œuvre.

Si une structure est hyperstatique, il faudra déterminer son **degré d'hyperstaticité h**, c'est-à-dire **le nombre de liaisons surabondantes** et que l'on pourrait donc supprimer pour obtenir une structure isostatique, c'est-à-dire tout juste stable.

2 – Déterminer la staticité d'un système

Cas d'une structure simple



Exemple : Poutre sur 2 appuis :



Cas d'une structure plus complexe

Il faut calculer le degré de staticité :

$$h = i - n \quad (\text{en 2D})$$

i est le nombre d'inconnues statiques :

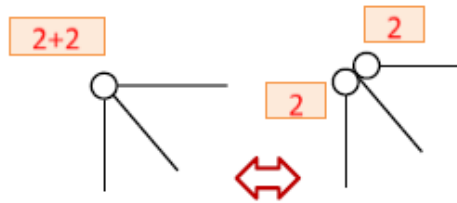
- l'**appui simple** empêche la translation verticale, on a donc **une inconnue** ;
- l'**articulation** empêche les deux translations, on a donc **deux inconnues** ;
- l'**encastrement** immobilise tout (les deux translations et la rotation), on a donc les **trois inconnues**.

Appui simple ou appui glissant	Rotule ou articulation	Encastrement
1 Translation verticale bloquée = 1 inconnue statique	1 Translation verticale bloquée + 1 Translation horizontale bloquée = 2 inconnues statiques	1 Translation verticale bloquée + 1 Translation horizontale bloquée + 1 Rotation en plan bloquée = 3 inconnues statiques

n est le nombre d'équations : Chaque barre permet de connaître trois équations (en 2D) :

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$$

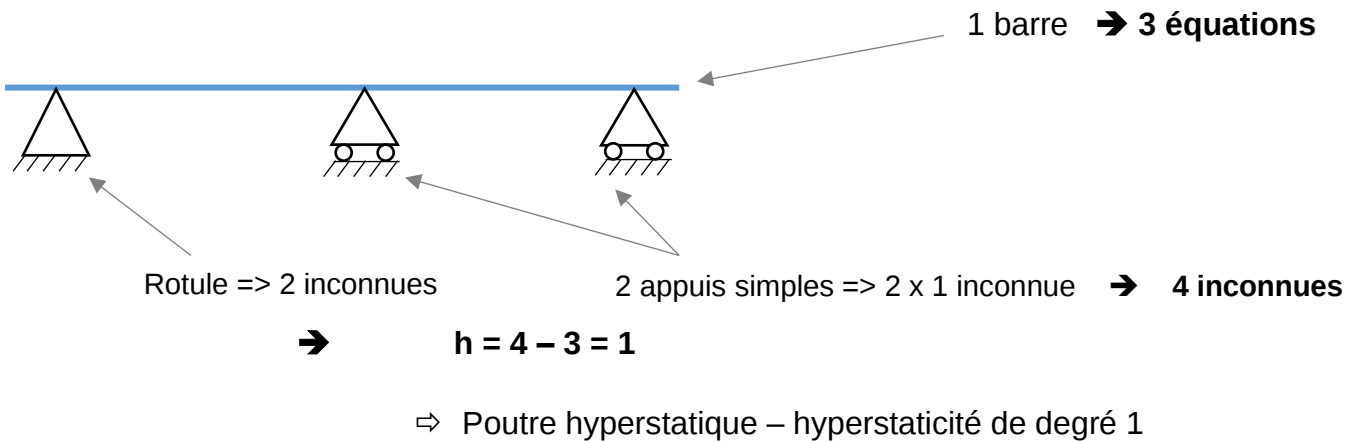
Remarque :



Liaison rotule à 3 barres = considéré
comme 2 barres rotulées sur
lesquelles on vient articuler une
troisième barre : 4 inconnues

Exemples :

a) Poutre sur 3 appuis :



b) Potence :

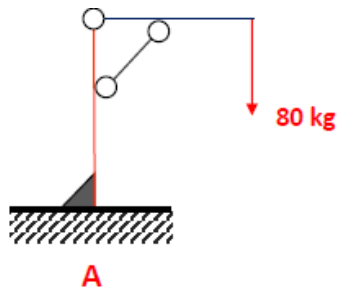


Schéma statique A

i est le nombre d'inconnues statiques :

- 0 appui simple = 0 x 1 inconnue
 - 3 rotules = 3 x 2 inconnues
 - 1 encastrement = 1 x 3 inconnues
- $i = 9$ inconnues**

n est le nombre d'équations :

- 3 barres x 3 équations par barre
- $n = 9$ équations**

Degré de staticité :

$$h = i - n = 9 - 9 = 0 \quad : \text{isostatique}$$

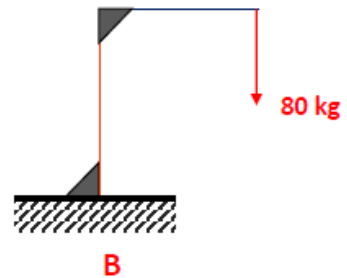


Schéma statique B

i est le nombre d'inconnues statiques :

- 0 appui simple = 0 x 1 inconnue
 - 0 rotules = 0 x 2 inconnues
 - 2 encastrement = 2 x 3 inconnues
- $i = 6$ inconnues**

n est le nombre d'équations :

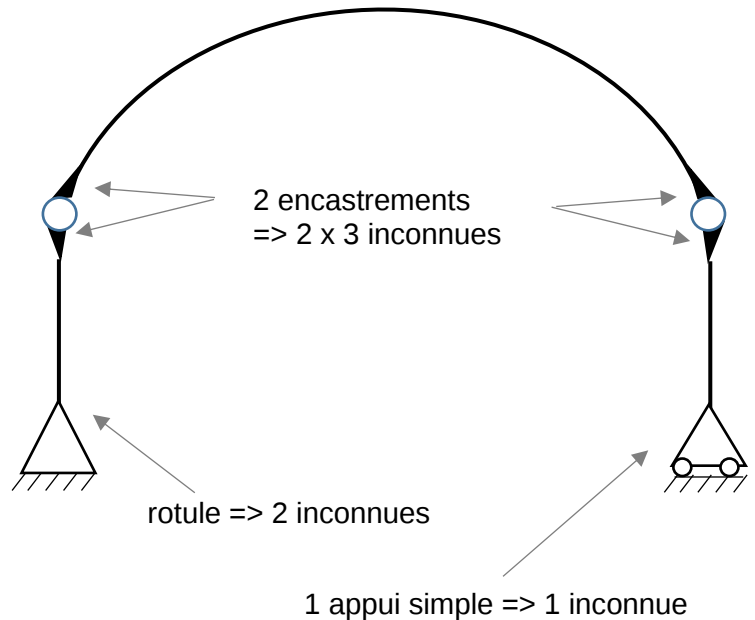
- 2 barres x 3 équations par barre
- $n = 6$ équations**

Degré de staticité :

$$h = i - n = 6 - 6 = 0 \quad : \text{isostatique}$$

c) Portique en lamellé collé

Prenons un portique en lamellé collé, posé sur poteaux et lié par des couronnes de boulons. Les pieds de poteaux reposent sur des ferrures. On considère aux appuis, d'un côté une liaison articulation et de l'autre une liaison simple.



$$2 \times 3 + 2 + 1 = 9 \rightarrow 9 \text{ inconnues}$$

$$3 \text{ « barres »} \Rightarrow 3 \times 3 \text{ équations} \rightarrow 9 \text{ équations}$$

$$\rightarrow h = 9 - 9 = 0$$

$\Rightarrow$ Structure isostatique

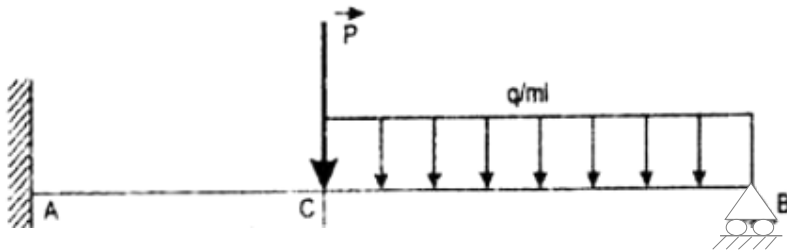
Exemple de suppression d'inconnues

$p = \underline{3} \times 2 = \underline{6}$ $q = \underline{3} + 2 + 2 = 7$ $p < q : \text{Hyperstatique}$	$p = \underline{3} \times 2 = \underline{6}$ $q = 2 \times 3 = 6$ $p = q : \text{Isostatique}$	$p = \underline{3} \times 2 = \underline{6}$ $q = 2 + 2 + 1 = 5$ $p > q : \text{Hypostatique}$

2 – Exercices

Déterminer le degré de staticité des structures suivantes :

a)



b)

