

Brevet Professionnel

1^{ère} année

Mathématiques

Fonction

Nom :

Groupe :

Objectifs

Établir le tableau de variations d'une fonction à partir de sa courbe représentative.	Tableau de variations.
Associer courbes représentatives et tableaux de variations de fonctions.	
Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle.	Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle.
Exploiter l'équation d'une courbe pour : — vérifier l'appartenance d'un point à cette courbe ; — calculer l'ordonnée d'un point de cette courbe connaissant son abscisse.	Courbe représentative d'une fonction f : la courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan, dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient $y = f(x)$.
Résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = g(x)$ où f et g sont des fonctions définies sur le même intervalle. Cas particulier où $g(x) = k$, k réel donné.	Interprétation graphique d'une équation du type $f(x) = g(x)$.
Résoudre graphiquement une inéquation du type $f(x) \geq g(x)$ où f et g sont des fonctions définies sur le même intervalle. Cas particulier où $g(x) = k$, k réel donné.	Interprétation graphique d'une inéquation du type $f(x) \geq g(x)$.

1. Variation d'une fonction

Une fonction est **croissante** : si quand x **augmente**, $f(x)$ **augmente**.

Une fonction est **décroissante** : si quand x **augmente**, $f(x)$ **diminue**.

Les variations d'une fonction peuvent être présentées dans un **tableau de variation**.

Un tableau de variation résume les informations essentielles concernant les variations d'une fonction sur son ensemble de définition.

Le sens de variation est indiqué par une flèche.

Exemple :

Cocher les bonnes réponses.

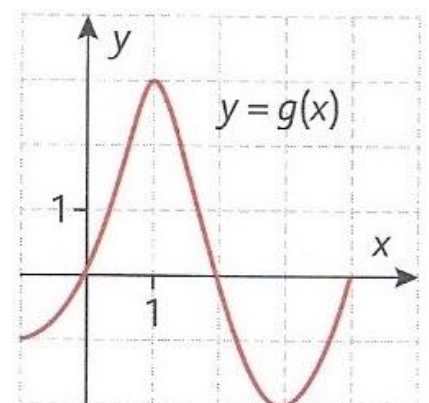
1. La fonction numérique g est définie par la représentation graphique ci-contre.

1.1. Quel est l'ensemble de définition de cette fonction ?

☐ $[-2 ; 3]$

☐ $[-1 ; 4]$

☐ $[0 ; 4]$



1.2. Quelle est l'image de 3 ?

☐ -2

☐ 1

☐ 3

1.3. Donner les intervalles sur lesquels la fonction est croissante.

☐ $[0 ; 2]$

☐ $[-1 ; 1]$

☐ $[3 ; 4]$

2. Le **tableau de variation** de la fonction f est donné ci-dessous.

x	0	2	4	5
f	0	3	-2	1

2.1. Sur quels intervalles la fonction est-elle **croissante** ?

☐ $[0 ; 2]$

☐ $[0 ; 3]$

☐ $[4 ; 5]$

2.2. Quelle est la valeur du **maximum** de la fonction f ?

☐ 2

☐ 3

☐ 5

2.3. Quelle est la valeur de $f(4)$?

☐ -2

☐ 4

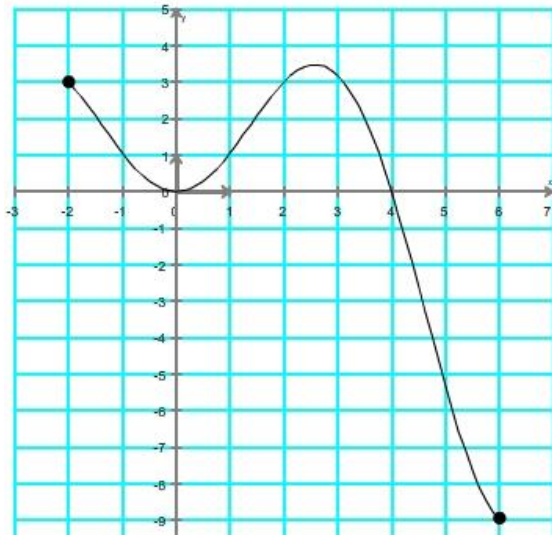
☐ 5

Réaliser un tableau de variations à partir d'une courbe

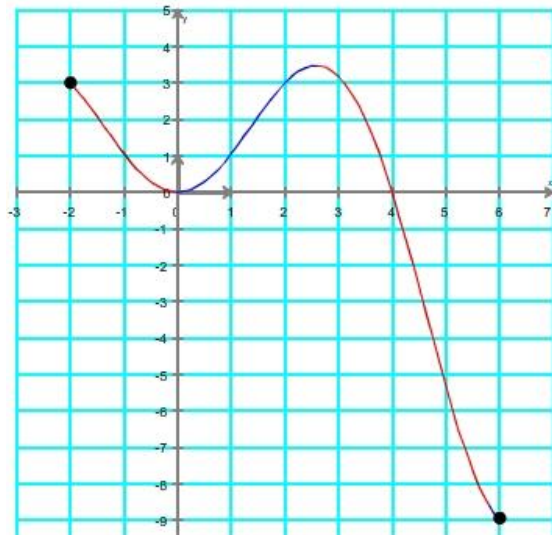
- **Etape 1:** distinguer les **zones** où la fonction est **croissante** ou **décroissante**.
- **Etape 2:** pour chacune des zones déterminer l'intervalle des **abscisses** qui lui est associé
→ première ligne du tableau de variations.
- **Etape 3:** Pour chaque intervalle faire correspondre une flèche montante (fonction croissante) ou une flèche descendante (fonction décroissante).
- **Etape 4:** Utiliser la courbe pour trouver **l'image** par f de chaque nombre figurant dans la première ligne (ordonnée) puis la reporter dans la deuxième ligne (soit l'origine d'une flèche, soit à sa pointe).

Exemple : on souhaite réaliser un tableau de variations à partir de la courbe suivante

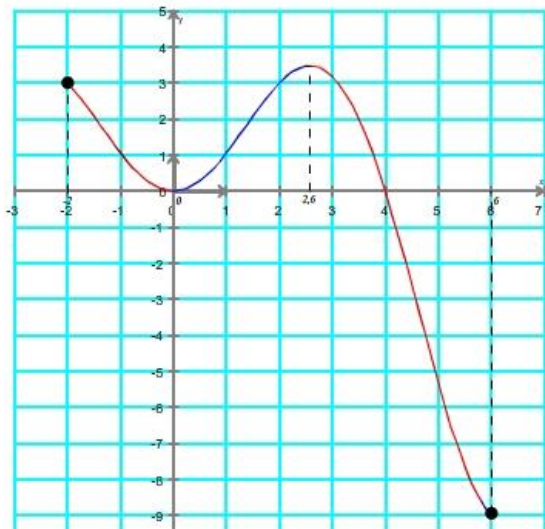
Etape 1



Etape 2



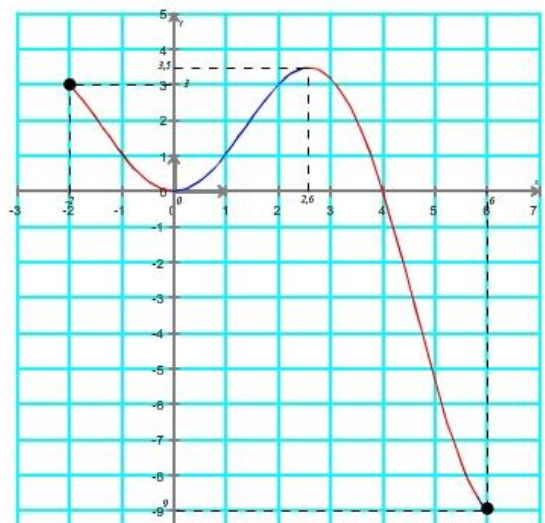
Etape 3



x	-2	0	2,6	6
$f(x)$				

x	-2	0	2,6	6
$f(x)$				

Etape 4



x	-2	0	2,6	6
$f(x)$	3	0	3,5	-9

Tracer la courbe d'une fonction à partir de son tableau de variation

Etape 1: Relever dans le tableau de variation les **coordonnées** des points correspondant à chaque **extremum**

Etape 2: reporter ces point sur le graphique.

Etape 3: Tracer la courbe, sachant qu'entre deux points la fonction est monotone (soit toujours croissante, soit toujours décroissante).

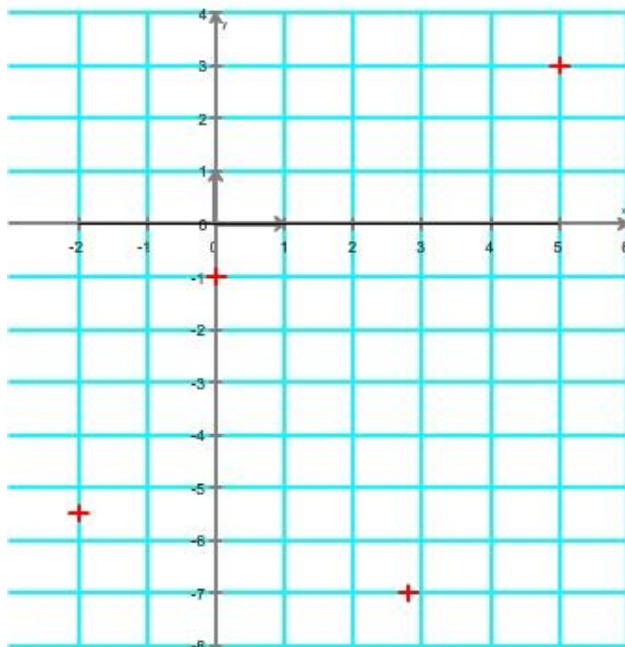
Exemple de tracer d'une courbe à partir du tableau de variations suivant:

x	-2	0	2,8	5
f(x)	-5,5	-1	-7	3

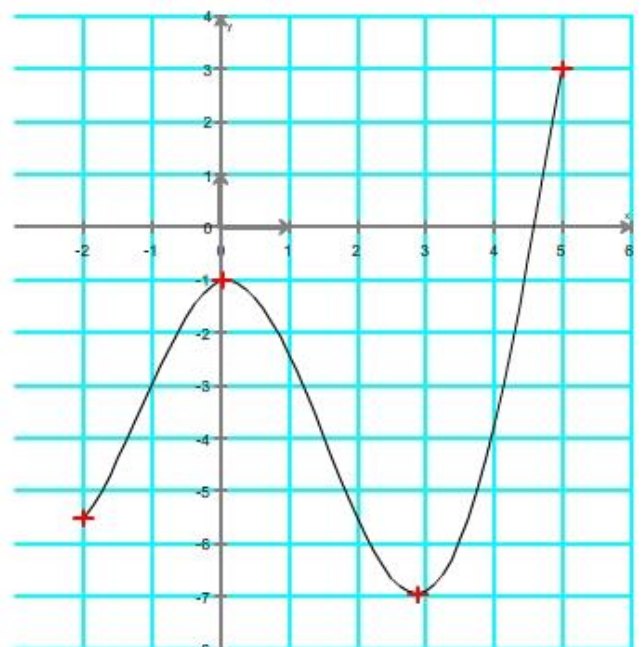
Etape 1

Les points à reporter sur le graphique ont pour coordonnées: (-2;-5,5), (0 ; -1), (2,8 ; -7) et (5 ; 3)

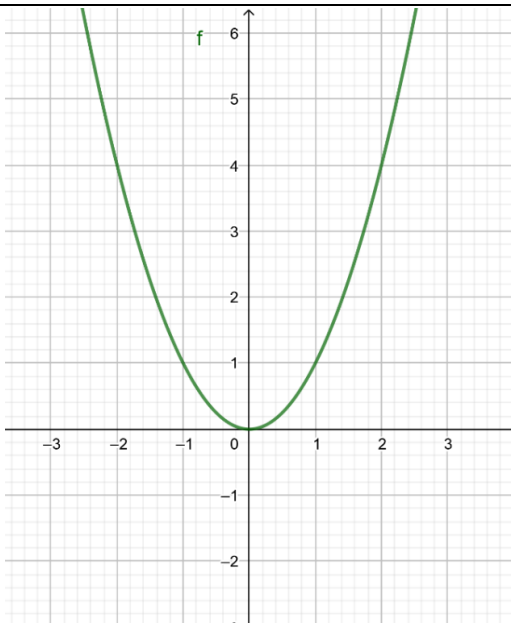
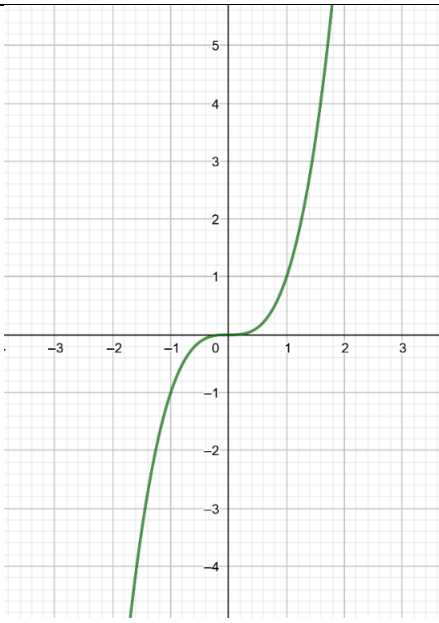
Etape 2

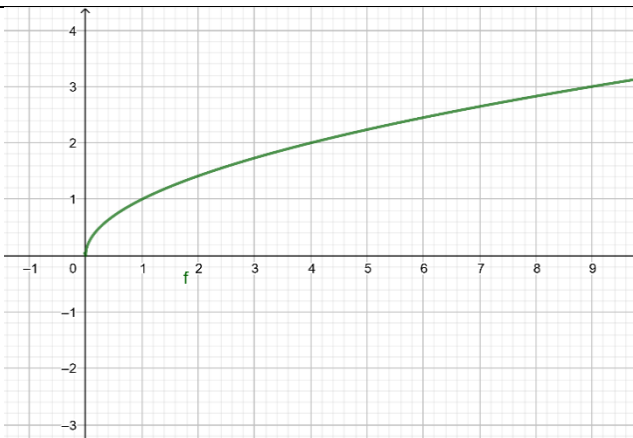
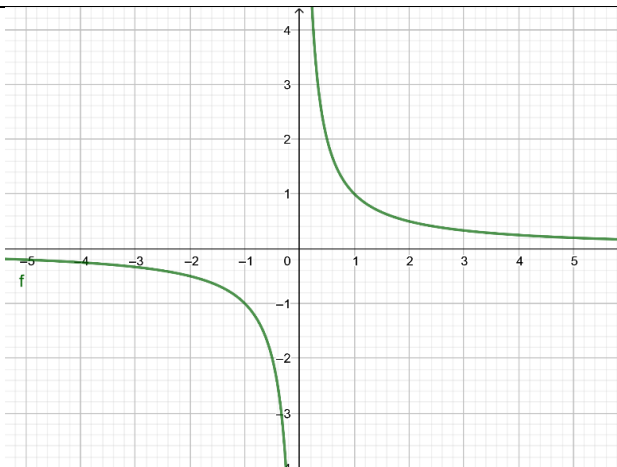


Etape 3



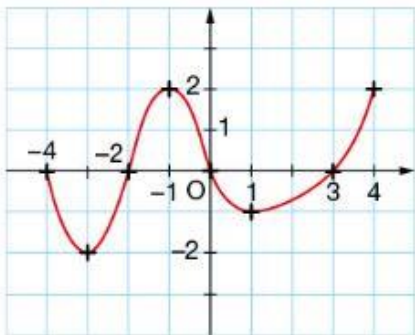
Application : Fonctions de référence

Fonction carré		Fonction cube	
$x \mapsto x^2$		$x \mapsto x^3$	
			
x	$-\infty$ $+\infty$	x	
Sens de variation		Sens de variation	
Sa courbe représentative est une parabole .			

Fonction racine carrée		Fonction inverse	
$x \mapsto \sqrt{x}$		$x \mapsto \frac{1}{x}$	
			
x		x	
Sens de variation		Sens de variation	

Exercice 1 :

f est la fonction définie par ce graphique.



Compléter le tableau de variation de la fonction f

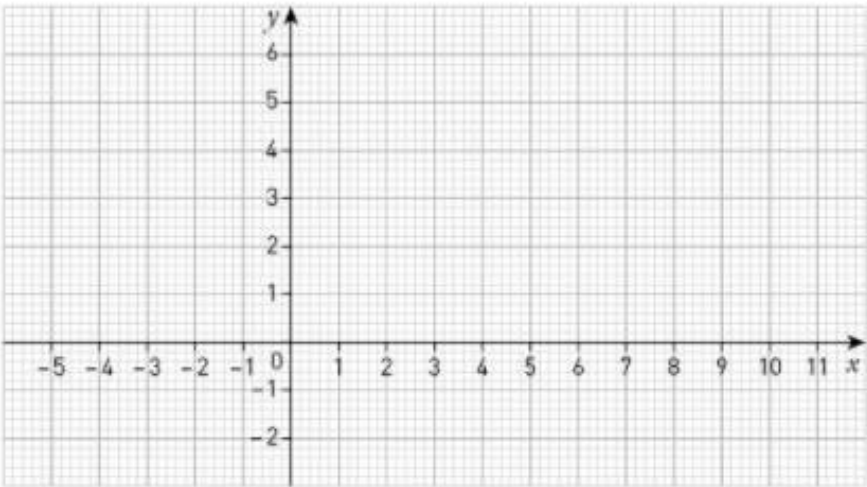
x	-4	4
Variation de f		

Exercice 2 :

On considère une fonction qui a le tableau de variations suivant.

x	-3	0	4	7
f	-1	4	-2	3

Tracer dans le repère ci-contre une représentation graphique possible pour cette fonction.



Entraînement en ligne :

<https://learningapps.org/view13107674>



Exercice 5 – Chiffre d'affaire - avec le tableur / grapheur

Le gérant d'une entreprise a constaté que les dépenses de publicité n'augmentaient pas toujours son chiffre d'affaires.

Il charge son comptable d'optimiser son budget publicité.

Celui-ci note x les sommes (en milliers d'euros) dépensées en publicité et modélise les variations correspondantes du chiffre d'affaires par la fonction f définie par :

$$f(x) = -x^2 + 12,5x + 15 \text{ avec } x \in [0; 8].$$

$f(x)$ représente le chiffre d'affaires en milliers d'euros.



Problématique : Comment évolue le chiffre d'affaires de l'entreprise ?

Partie A : Représenter graphiquement cette fonction avec un tableur-grapheur

1. **Ouvrir** le fichier « 2_publicite.xls » où figurent, dans la colonne **A**, les valeurs de x de 0 à 8.

2. **Saisir** la formule de calcul dans la cellule **B2** : $=-(A2^2)+12,5*A2+15$.

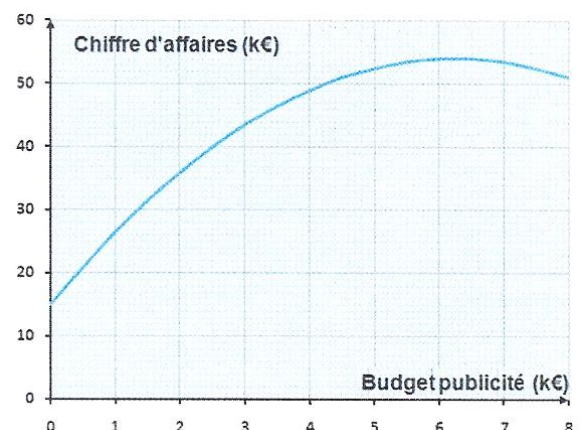
Recopier jusqu'à **B18**.

3. **Sélectionner** les cellules **A2** à **B18**.

- **Afficher** la représentation graphique : **Insertion** puis **Graphique** ;
- **Choisir** le graphique en **Nuages de points avec courbe lissée**.

4. Le service comptabilité obtient le graphique ci-contre.

Mettre en forme le graphique obtenu sur le tableur pour obtenir un graphique semblable.



Partie B : Exploiter la représentation graphique obtenue

1. **Évaluer** le montant du budget publicité pour obtenir un chiffre d'affaires maximum.

.....

.....

2. **Traduire** l'évolution du chiffre d'affaires par le tableau de variation de la fonction f .

x	0		8
$f(x)$	$f(0) = \dots$	$f(\dots) = \dots$	$f(8) = \dots$

3. **Indiquer** sur quel intervalle de valeurs de x la fonction est :

croissante :

décroissante :

4. Un vendeur affirme : « L'augmentation du budget publicité augmente le chiffre d'affaires ».

Dire sur quel intervalle cette affirmation est vérifiée.

.....

.....

2. Résolution graphique d'équations du type $f(x) = g(x)$

C_f et C_g sont respectivement les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal.

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D .

Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ consiste à déterminer **tous les nombres** x de D qui ont **la même image par f et par g** .

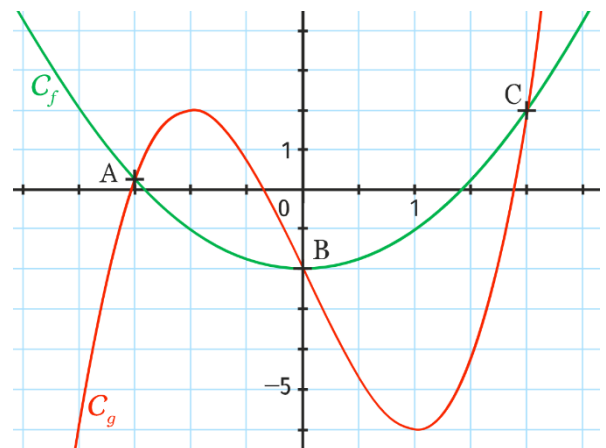
Exemple

On considère les deux représentations graphiques dans le repère orthogonal ci-contre. Ces courbes ont exactement trois intersections A, B et C d'abscisses respectives $-1,5$; 0 et 2 .

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est donc $S = \{ -1,5 ; 0 ; 2 \}$.

Propriété

Graphiquement, les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des **points d'intersection** des courbes représentatives de f et de g .



Exercice 6

Soient f et g les fonctions définies sur $[0,5; 3]$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

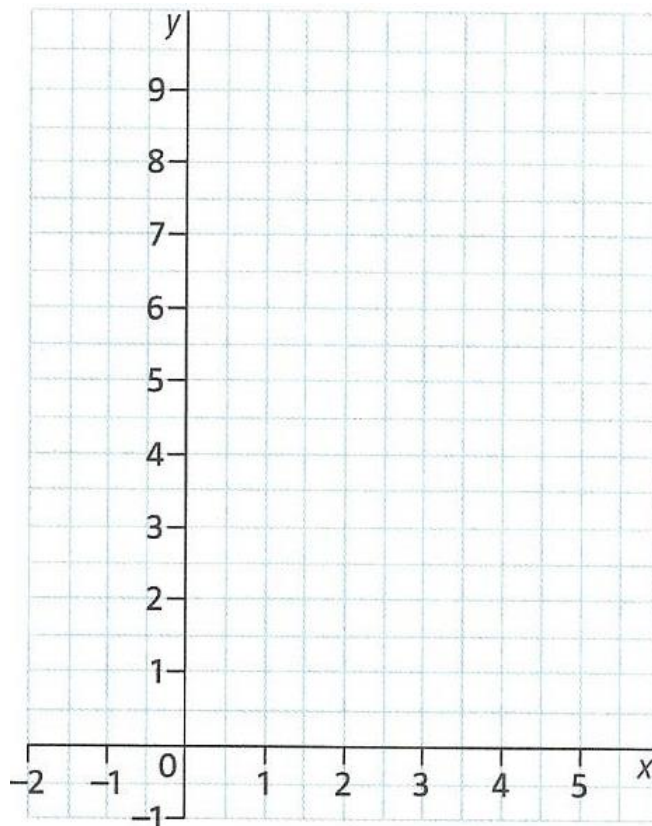
1 – Compléter les tableaux de variation de f et de g .

x	0,5	3
$f(x) = x^2$		
$g(x) = \frac{1}{x}$		

2 – Compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir les résultats à 0,1 près).

x	0,7	0,9	1	1,3	1,5	2	2,5
$f(x)$							
$g(x)$							

3 – Dans le plan rapporté au repère orthogonal ci-après, tracer les représentations graphiques des fonctions f et g .



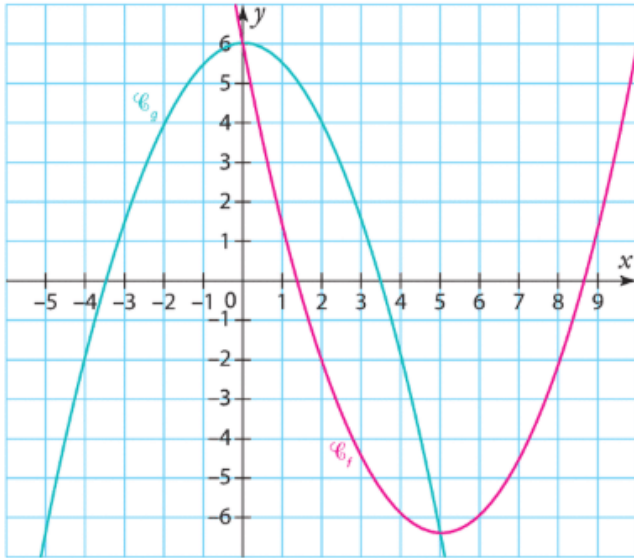
4 – Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$

.....

Exercice 7 :

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ dont les courbes C_f et C_g sont représentées ci-dessous dans un repère du plan.

- 1) Etudier la position relative des courbes C_f et C_g .
- 2) En déduire les solutions des équations et inéquations suivantes.
 - a) $f(x) = g(x)$.
 - b) $f(x) > g(x)$.
 - c) $f(x) < g(x)$.

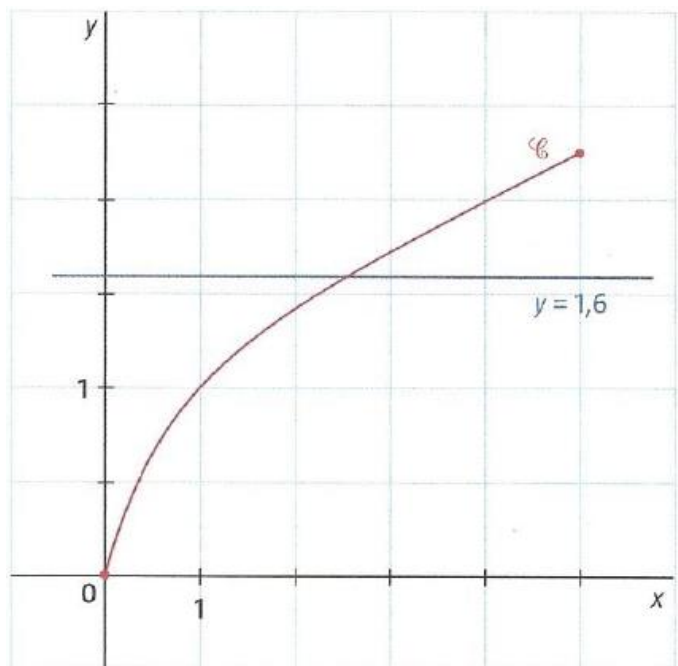


Exercice 8

On donne un tracé de la courbe c représentative de la fonction f définie sur $[0; 5]$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et la droite d'équation $y = 1,6$.

On se propose de résoudre l'équation :

$$f(x) = 1,6$$



1 – A l'aide du graphique, donner un encadrement de la solution de cette équation par deux nombre entiers consécutifs :

$$\dots\dots\dots < x_0 < \dots\dots\dots$$

2 – Etablir un tableau de valeurs pour déterminer un encadrement de la solution de cette équation à 0,1 près (avec la calculatrice, faire afficher le tableau, entrer l'expression de $f(x)$, entrer 2 comme valeur minimum, 3 comme valeur maximum).

$$\dots\dots\dots < x_0 < \dots\dots\dots$$

3. Inéquations de fonctions $f(x) \geq g(x)$

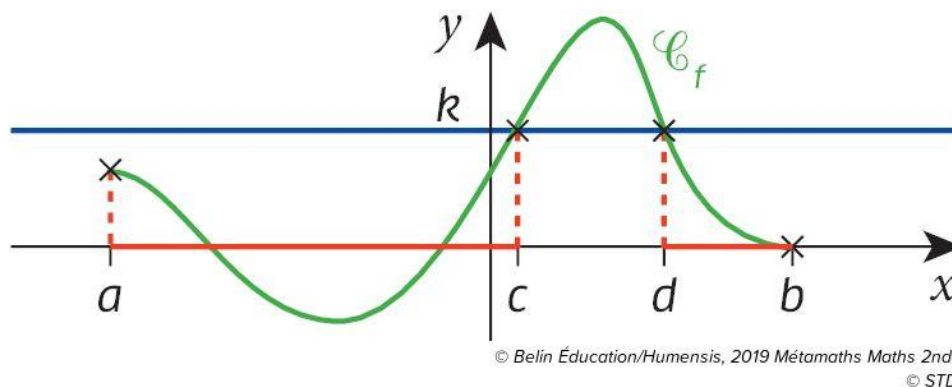
Résolution graphique d'une inéquation $f(x) < k$

Une fonction f , définie sur un intervalle $[a ; b]$, est donnée par sa courbe $\mathcal{C}_f$ et k est un réel quelconque.

- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < k$ sur $[a ; b]$, c'est trouver les **abscisses** de tous les points de la courbe de f dont l'ordonnée est **strictement inférieure** à k .

Méthode

On trace la droite formée de tous les points d'ordonnée k .



On cherche tous les points de la courbe qui sont **en dessous** de cette droite. On lit leurs abscisses, qui sont les solutions (en rouge sur l'axe des abscisses).

Avec la courbe ci-dessus, l'ensemble des solutions s'écrit $S = [a ; c[\cup]d ; b]$.

L'ensemble des solutions d'une inéquation est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

Résolution graphique d'une inéquation $f(x) < g(x)$

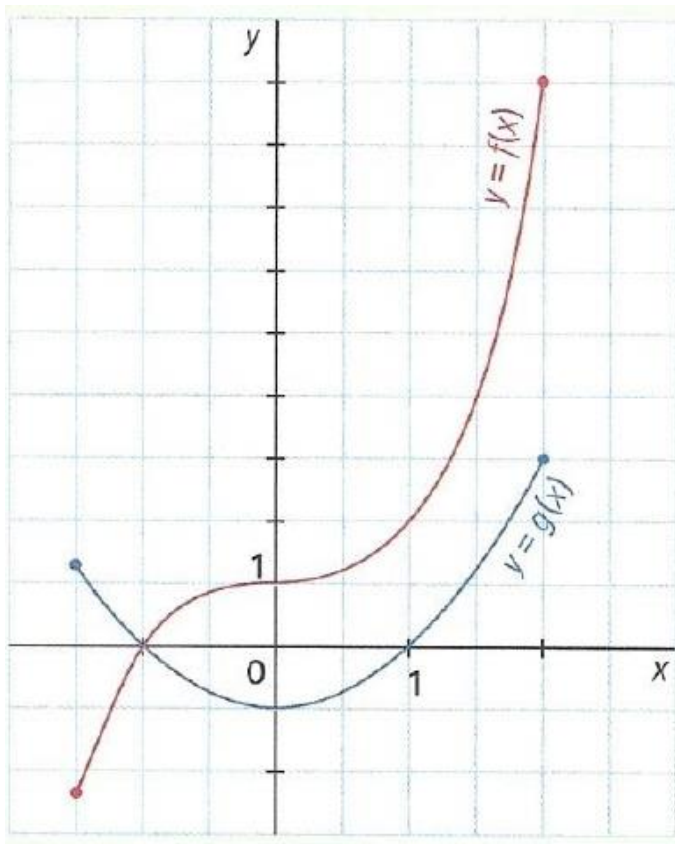
Dans le même repère, on trace les courbes représentatives des fonctions f et g sur un intervalle.

On repère les points de la courbe de f **en dessous** des points de même abscisse de la courbe de g .

Leurs abscisses vérifient $f(x) < g(x)$. L'ensemble de ces abscisses constitue **l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$** .

Application

On donne un tracé des courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $[-1,5 ; 2]$ par $f(x) = x^3 + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$

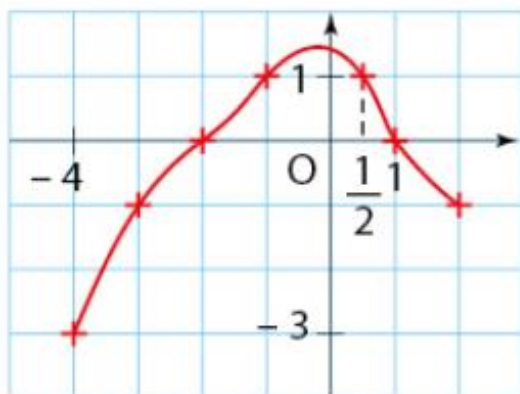


- Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$?
☐ $] -1,5 ; 2[$ ☐ $] -1 ; 1[$ ☐ $] -1 ; 2]$ ☐ $[-1 ; 2]$
- Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) < 0$?
☐ $] -1,5 ; 2[$ ☐ $] -1 ; 1[$ ☐ $] -1 ; 2]$ ☐ $[-1 ; 2]$
- Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$?
☐ $] -1,5 ; 2[$ ☐ $] -1 ; 1[$ ☐ $] -1 ; 2]$ ☐ $[-1 ; 2]$

Exercice 9

f est la fonction définie sur $[-4; 2]$ par la courbe ci-contre.

Résoudre graphiquement les inéquations :



a) $f(x) \geq 1$

b) $f(x) > 0$

c) $f(x) \leq -1$

Exercice 10

Voici les courbes représentatives d'une fonction f et d'une fonction g définies sur $[-2; 3]$.

Résoudre graphiquement les équations et inéquations.

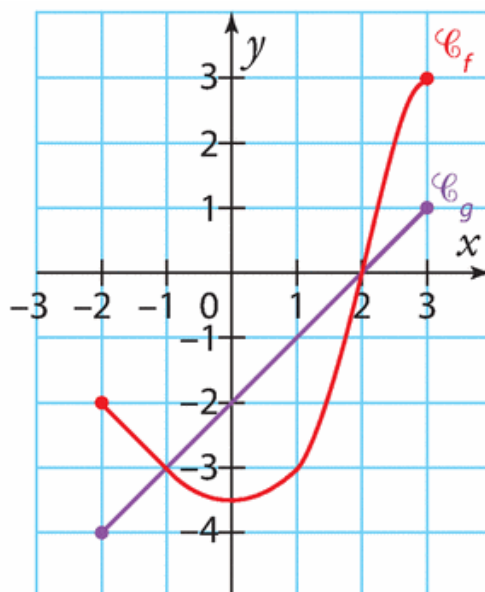
a) $g(x) = f(x)$

b) $g(x) \leq f(x)$

c) $f(x) < -3$

d) $g(x) < 2$

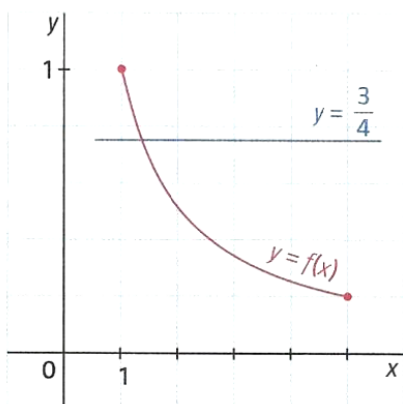
e) $f(x) \geq -2$



Exercice 11



On donne un tracé de la courbe représentative de la fonction f définie sur $[1 ; 5]$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et de la droite d'équation $y = \frac{3}{4}$.



On se propose de résoudre graphiquement l'équation $f(x) = \frac{3}{4}$, puis l'inéquation $f(x) \geq \frac{3}{4}$.

1. À l'aide du graphique, donner un encadrement de la solution x_0 de cette équation par deux nombres entiers consécutifs : $< x_0 <$

2. a) Établir un tableau de valeurs pour déterminer un encadrement de la solution x_0 de cette équation à 0,1 près. Pour cela, utiliser la calculatrice ou le tableur.

- Avec la calculatrice, faire afficher le tableau.
 - Entrer l'expression de $f(x)$.
 - Entrer 1 comme valeur minimum, 2 comme valeur maximum et 0,1 comme pas de calculs entre deux valeurs de x .
- Avec le tableur, ouvrir une feuille de calcul.
 - Écrire x dans la cellule A1 et $f(x)$ dans la cellule B1.
 - Entrer la valeur 1 dans la cellule A2, la valeur 1,1 dans la cellule A3, sélectionner les cellules A2 et A3, puis tirer la poignée de remplissage vers le bas jusqu'à la valeur 2.
 - Entrer la formule $=1/A2$ dans la cellule B2, puis faire glisser cette formule vers le bas à l'aide de la poignée de remplissage.

b) En déduire un encadrement à 0,1 près de la solution de l'équation $f(x) = \frac{3}{4}$.

3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq \frac{3}{4}$.

4. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = \frac{3}{4}$ pour déterminer la valeur exacte de x_0 .

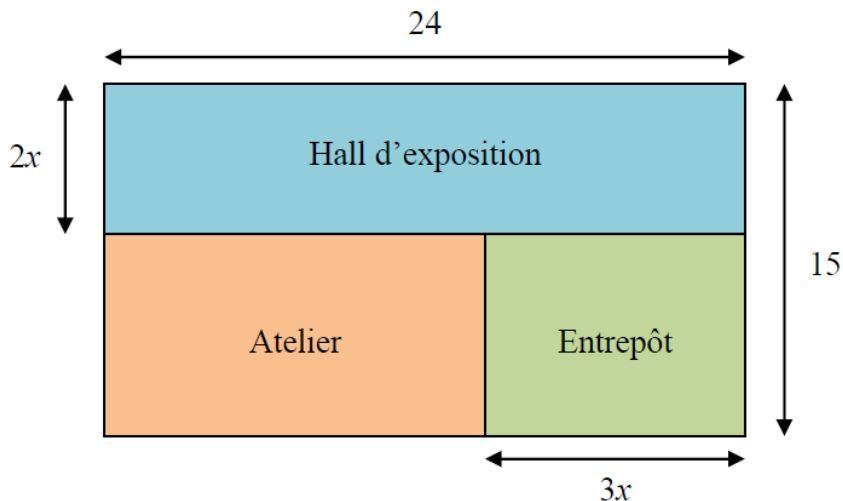
4. Modéliser un problème

Exercice 12

Une entreprise doit aménager un bâtiment industriel, constitué de trois parties : un atelier, un hall d'exposition et un entrepôt.

La figure ci-dessous représente ce bâtiment.

Les cotes sont en mètres. La figure n'est pas à l'échelle.



Première partie : L'aire de l'entrepôt

1) **Calculer**, en m², l'aire totale du bâtiment.

.....

.....

.....

2) **Exprimer** en fonction de x , l'aire $A(x)$ de l'entrepôt.

.....

.....

3) **Calculer**, en m², l'aire de l'entrepôt pour $x = 2$.

.....

.....

Deuxième partie :

L'objectif est de déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de l'entrepôt est maximale.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 7,5]$ par $f(x) = -6x^2 + 45x$.

1) **Résoudre** l'équation $f(x) = 0$.

Rappels :

Équations du second degré
$ax^2 + bx + c = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac$
Si $\Delta > 0$, deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
Si $\Delta = 0$, deux solutions confondues : $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
Si $\Delta < 0$, aucune solution.

2) **Calculer** l'abscisse du sommet de la parabole.

Le sommet d'une parabole
d'équation $y = ax^2 + bx + c$ se
trouve sur son axe de symétrie.

h

3) **Donner** le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 7,5]$.

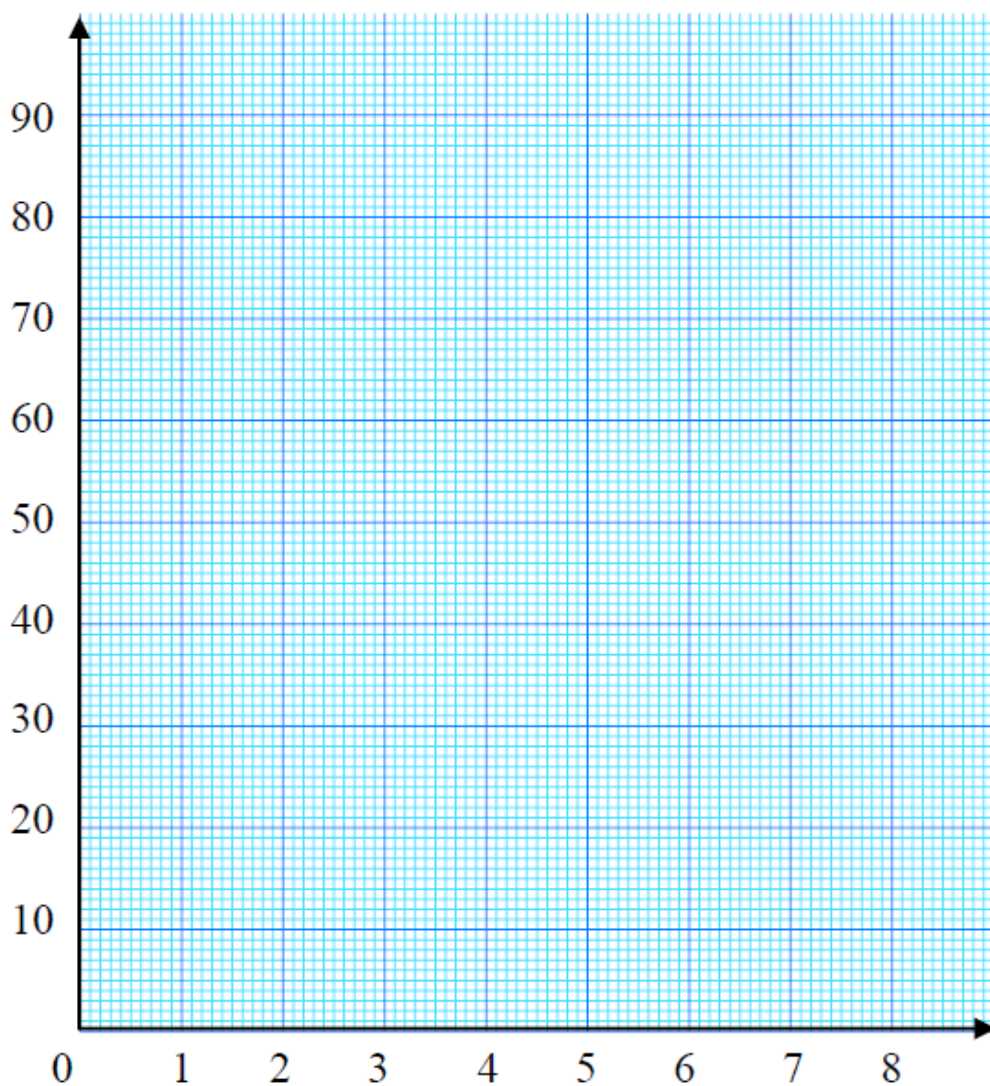
4) **Compléter** le tableau de variation de la fonction f .

x	0		7,5
Variation de f			

5) **Compléter** le tableau de valeurs.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	7,5
$f(x) = -6x^2 + 45x$			66				54	21	

6) **Tracer** la courbe représentant la fonction f dans le repère suivant ou à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel.



7) Pour x appartenant à l'intervalle $[0 ; 7,5]$, on sait que l'aire $A(x)$ de l'entrepôt est égale à $f(x)$. À l'aide de l'étude faite précédemment, **donner** la valeur de l'aire maximale de l'entrepôt.

.....

.....

.....

8) **Déterminer** les dimensions, longueur et largeur, de l'entrepôt qui correspondent à son aire maximale.

.....

.....

.....

(D'après sujet de Bac Pro Aménagement Finition Session juin 2009)

Exercice 13

Partie A : Etude d'une fonction

Soient fonctions f , g et h définies sur $[15 ; 90]$ par :

$$f(x) = \frac{270}{x}$$

$$g(x) = -0,48x + 44,5$$

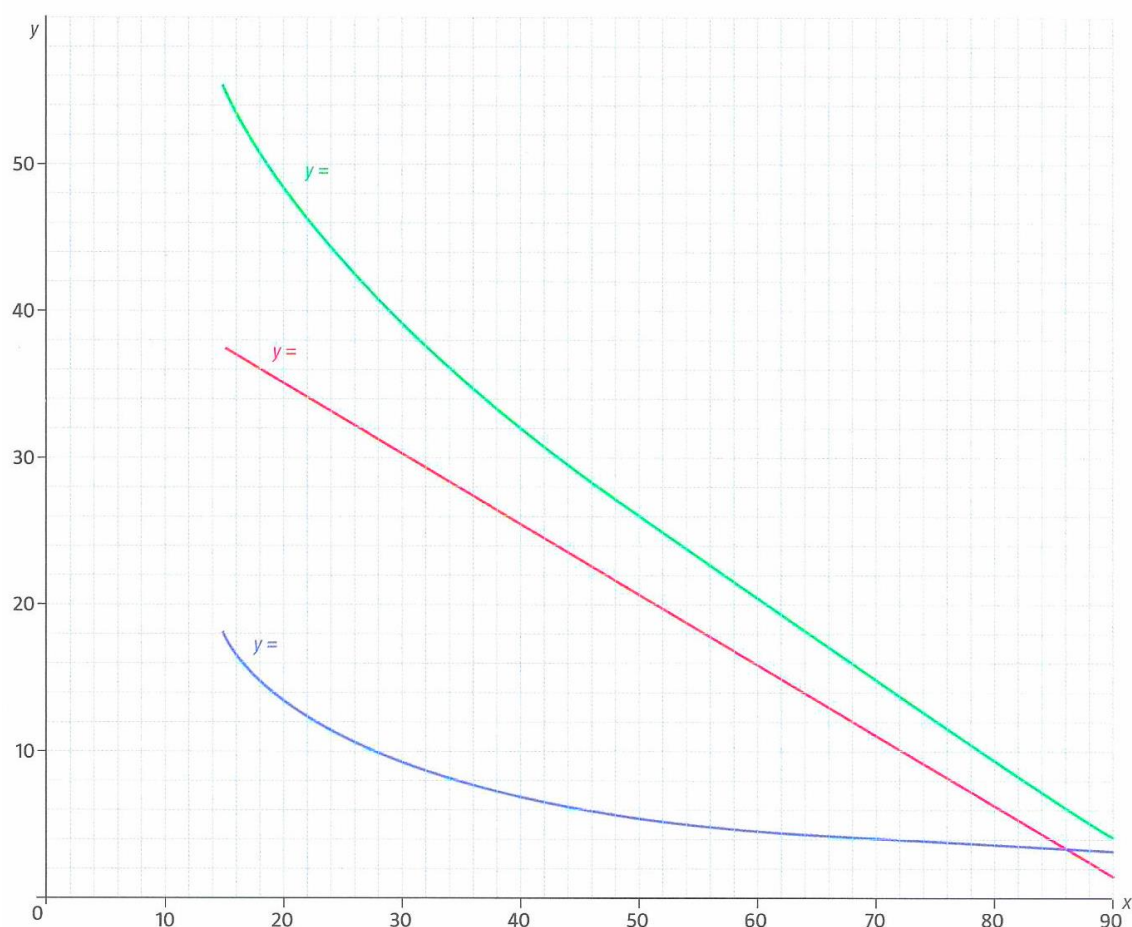
$$h(x) = f(x) + g(x)$$

1 – Dresser le tableau de variation de la fonction h

Tableau de variation de h

x	
$h(x)$	

2 - Les courbes représentatives des fonctions f , g et h sont tracées ci-dessous. Ecrire à côté de chaque courbe son équation.



3 – En laissant apparents les traits utiles à la lecture :

a) – Déterminer graphiquement $h(60)$ (arrondir à l'unité)

.....

b) – Déterminer graphiquement l'équation $h(x) = 32$

.....

Partie B : Application

Lucie, chercheuse, a mis eu point un nouveau modèle de lave-linge à programmation « hybride ». Un sélecteur informe la carte électronique de la température choisie par le consommateur. Une société de d'électroménager met sur le marché ce nouveau modèle.

La résistance, en $k\Omega$, du capteur de température de cet appareil est donnée par

$$R = \frac{270}{\theta} - 0,48 \theta + 44,5 \quad \text{où } \theta \text{ est la température comprise entre } 15^{\circ}\text{C et } 90^{\circ}\text{C.}$$

Utiliser les résultats de la partie A pour répondre aux questions suivantes :

1- Quelle est la résistance correspondant à une température de 60°C ?

.....

.....

2- Quelle est la température correspondant à une résistance de $32 k\Omega$

.....

.....