

BREVET **P**ROFESSIONNEL

Mathématiques

Géométrie

Relations dans le triangle

Théorème de Pythagore,
Théorème de Thalès,
Trigonométrie

Nom – Prénom : _____

Section : _____

1- Rappels

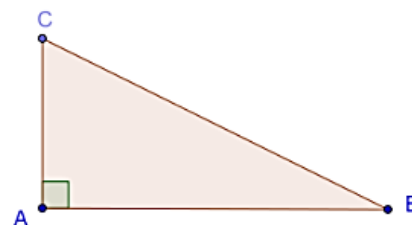
1. Vocabulaire

Un **triangle rectangle** est un triangle qui possède un angle droit (égal à°).

Dans un triangle rectangle, l'**hypoténuse** est le côté **opposé** à l'angle droit.

Exemple : Sur le dessin ci-contre :

- le triangle ABC est rectangle en
- le côté est l'hypoténuse du triangle ABC.



2. Carré d'une longueur, racine carrée

Définition : Soit [AB] un segment, sa longueur est AB.

Le **carré** de sa longueur est **$AB^2 = AB \times AB$**

Remarque : on dit que 16 est le carré de 4 ($4^2 = 16$) mais aussi que 4 est la **racine carrée** de 16.

Et on le note : $\sqrt{16}$

Comment trouver la racine carrée de 10 ?

On cherche un nombre x tel que $x^2 = 10$

On utilise la calculatrice : **valeur exacte** $\sqrt{10}$

valeur approchée 3,16

Attention : On ne peut prendre la racine carrée d'un nombre QUE s'il est **POSITIF** !!

Exemples : Compléter le tableau

Nombre	Racine carrée Valeur exacte	Racine carrée (Valeur approchée à 0,01 près)
0	0	-
17		4,12
.....	9	-
2		
36		
19		4,36
.....	11	-

2 – Théorème de Pythagore

I. Activité

Objectif : Démontrer le théorème Pythagore (démonstration chinoise)

La figure 1 est constituée de deux carrés, l'un à l'intérieur de l'autre.

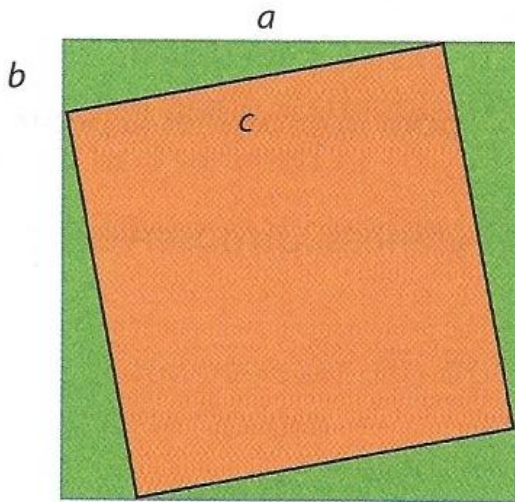


Fig. 1

1. Exprimer sous forme littérale l'aire A_1 du carré orange.

2. Dessiner les quatre triangles rectangles sur la figure 2 pour faire apparaître deux carrés blancs. Incrire les longueurs a , b et c sur cette figure.

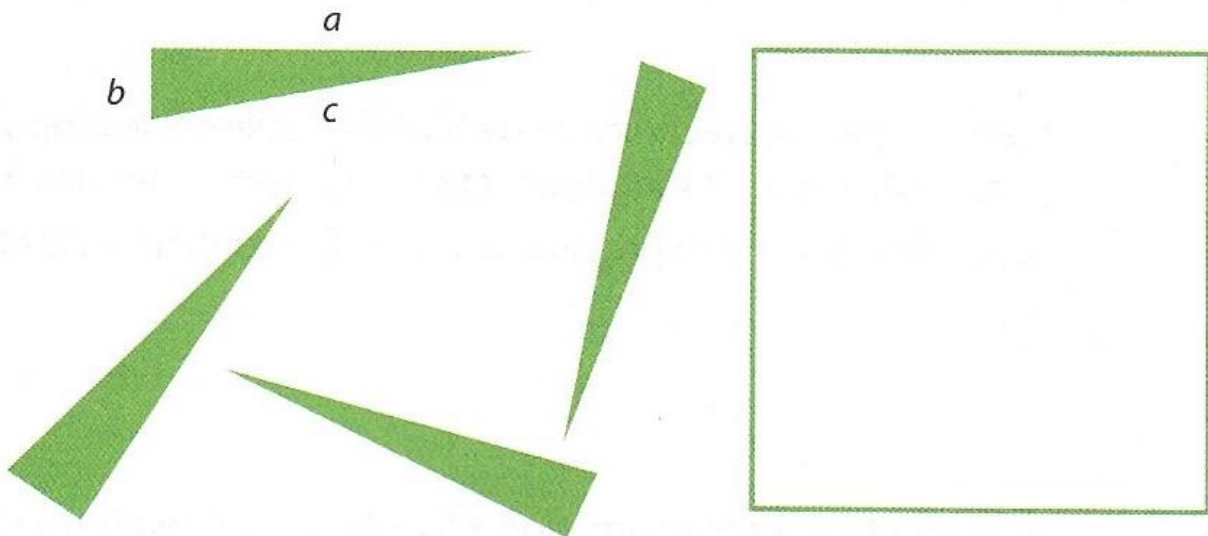


Fig. 2

3. Exprimer sous forme littérale les aires A_2 et A_3 des deux carrés blancs.

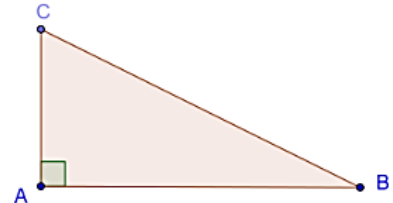
.....
.....

4. En déduire en justifiant une relation simple entre A_1 , A_2 et A_3 .

.....
.....

5. En déduire l'expression du théorème de Pythagore permettant de calculer le carré de la longueur de l'hypoténuse du triangle ABC.

.....
.....
.....

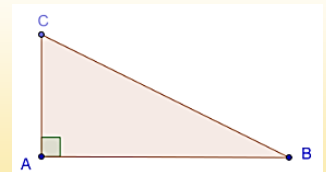


II. Théorème de Pythagore

Si un triangle est **rectangle**, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Autrement dit :

Si ABC est un triangle rectangle en A, alors : $BC^2 = AB^2 + AC^2$



Attention ! Le théorème de Pythagore ne s'applique qu'aux triangles rectangles.

⇒ Dans un triangle rectangle, le théorème de Pythagore permet de calculer la longueur d'un côté connaissant les longueurs des deux autres côtés.

Exemple : ABC est un triangle rectangle en A tel que $AC = 5$ cm et $BC = 8$ cm.

- 1) Tracer le triangle.
- 2) Enoncer le théorème de Pythagore.
- 3) Calculer la longueur AB (arrondir à 0,1 cm).

Vérifier sur la figure.

.....
.....
.....
.....

<https://learningapps.org/view3970891>

<https://learningapps.org/view10469773>



III. Réciproque du théorème de Pythagore

Qu'est-ce qu'une **réciproque** ?

On considère une propriété : « S'il y a du soleil, alors il fait beau »

⇒ La propriété « S'il fait beau, alors il y a du soleil » est sa **réciproque**.

Attention ! Une propriété peut être vraie et sa réciproque fausse !

Exemple : Propriété "Si je suis un Homme, alors j'ai des yeux". La propriété **réciproque** "Si j'ai des yeux, alors je suis un Homme" est **fausse**.

La propriété de Pythagore est : "Si le triangle ABC est rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ".

Sa réciproque est :

"Si le triangle ABC est tel que $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors il est rectangle en A".

On admet que cette réciproque est vraie.

Concrètement, cela sert à montrer qu'un triangle dont on connaît les mesures est rectangle ou pas.

Exemple 1 :

Démontrer que le triangle MNP, tel que MN = 3,3 cm, NP = 6,5 cm et PM = 5,6 cm est un triangle rectangle.

.....

.....

.....

Exemple 2 :

Le triangle ABC de côtés AB = 2 cm, AC = 3 cm et BC = 4 cm est-il rectangle ?

.....

.....

.....

Entraînement en ligne :

<https://learningapps.org/view3669947>

<https://learningapps.org/view5956431>

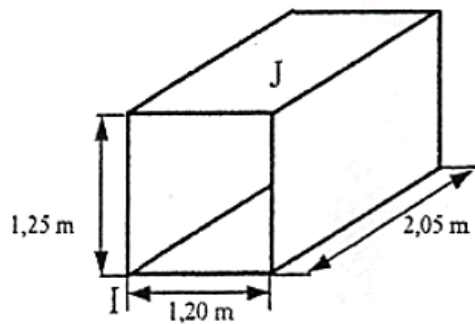


3- Résolution de problèmes

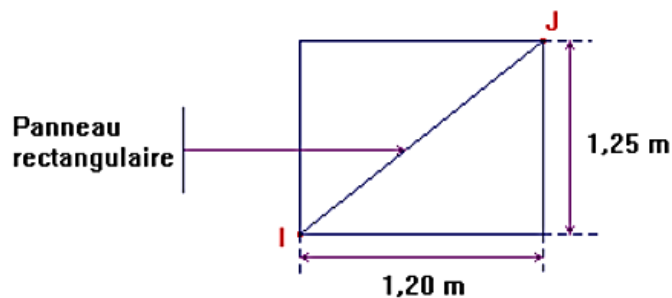
utilisant le théorème de Pythagore

Exercice 1 :

On considère que le volume utile d'un camion pour le transport des marchandises correspond à un parallélépipède rectangle de 2,05 m de long sur 1,20 m de large et 1,25 m de haut (voir schéma ci-dessous).



On désire transporter dans le véhicule un panneau rectangulaire. Sa largeur ne peut pas dépasser la mesure du segment $[IJ]$ de l'ouverture arrière (voir schéma ci-dessous).



Calculer la largeur maximale IJ du panneau (résultat arrondi au centième).

.....

.....

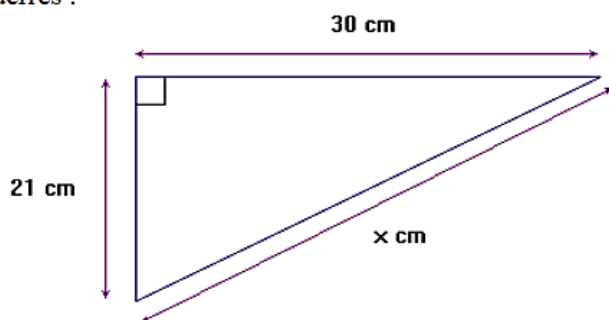
.....

.....

.....

Exercice 2 :

Philippe veut fabriquer un plateau en bois pour y placer son imprimante. Pour fixer son plateau au mur, Philippe fabrique deux équerres identiques en bois. Voici la représentation d'une face de ces équerres :



- 1) **Retrouver** la mesure x manquante. **Arrondir** le résultat à l'unité.
- 2) **Citer** la propriété utilisée.

.....

.....

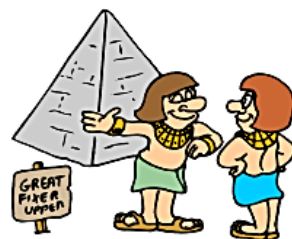
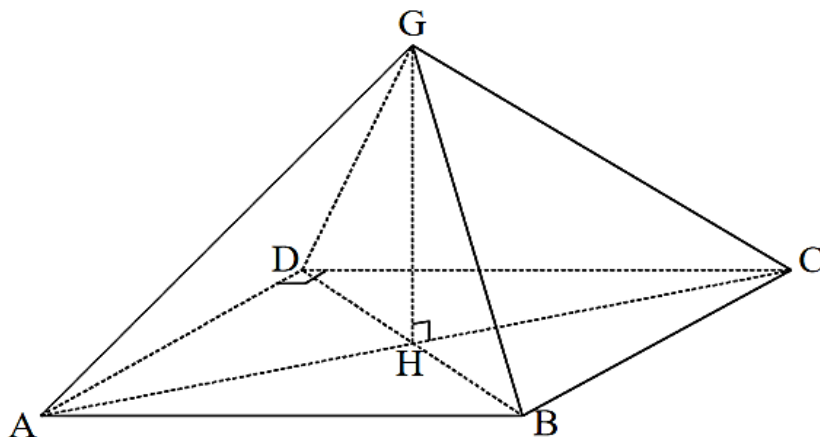
.....

Exercice 3 :

La pyramide de Khéops, située à 8 km du Caire en Égypte, est considérée par les grecs comme l'une des sept merveilles du monde.

Cette pyramide régulière est constituée d'une base carrée mesurant 230 mètres de côté.

Elle s'élève à une hauteur de 147 mètres. $AB = BC = CD = DA = 230$ m.



- 1) **Calculer**, en m, la mesure de la diagonale AC ; **arrondir** le résultat à l'unité.
En **déduire** la mesure de HC .
- 2) **Calculer**, en m, la mesure de CG . **Arrondir** le résultat à l'unité.
En **déduire** la mesure de BG , sachant que la pyramide est régulière.

.....

.....

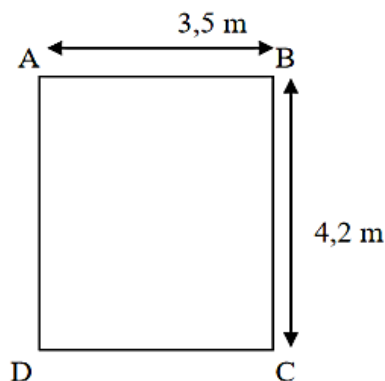
.....

.....

.....

Exercice 4 :

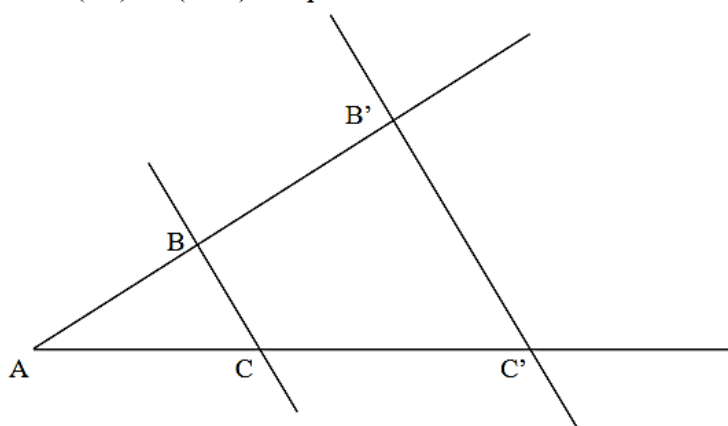
M. Martin souhaite placer un luminaire au centre du plafond rectangulaire $ABCD$ de sa cuisine.



- 1) **Tracer** les deux diagonales du rectangle $ABCD$ et **noter** O leur point d'intersection.
- 2) **Justifier** la position de O sur le segment $[AC]$.
- 3) À l'aide de la propriété de Pythagore **calculer**, en m, la longueur AC .
Arrondir la valeur au centième.
- 4) En **déduire** la distance AO . **Justifier** la réponse.

Exercice 5 :

Les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles.



1) **Calculer** :

- a) AB'^2
- b) $B'C'^2$
- c) AC'^2

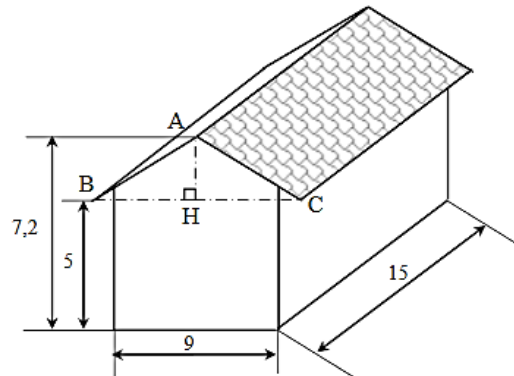
2) **Calculer** $AB'^2 + B'C'^2$.

3) En **déduire** la nature du triangle $AB'C'$.

On donne : $AB = 12$ cm $AB' = 28$ cm $AC' = 35$ cm $B'C' = 21$ cm

Exercice 6 :

Un récupérateur est installé sous une gouttière du toit de la maison schématisé ci-dessous. Les cotes sont exprimées en mètre. Le triangle ABC est isocèle. Les proportions ne sont pas respectées sur la figure.



- 1) Calculer, en m, la longueur AH .
- 2) Calculer, en m, la longueur BH .
- 3) Préciser ce que représente $[AB]$ dans le triangle ABH .
- 4) Calculer, en m, la largeur AB du toit. Arrondir la valeur à l'unité.
- 5) Calculer la surface totale du toit en m^2 .



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 7 :

Mesurer une cheminée

Une entreprise de travaux publics doit détruire la cheminée d'une ancienne cimenterie. La responsable du chantier envoie deux stagiaires, Omar et Fred, estimer la hauteur de la cheminée. Omar se demande comment mesurer la hauteur d'un tel bâtiment, si peu accessible.

Omar se souvient qu'il a déjà utilisé un télémètre laser pour déterminer la hauteur d'une maison.

Cette méthode utilise une propriété des triangles rectangles.

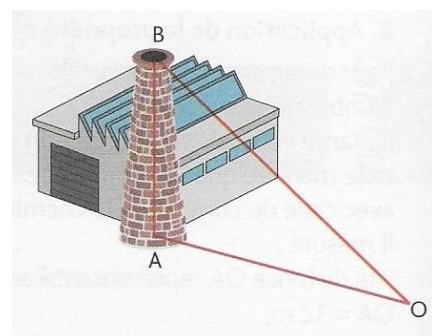


Problématique : Comment mesurer la hauteur d'une cheminée ?

Avec le télémètre laser, Omar vise la base de la cheminée et mesure la distance $OA = 20$ m.

Il vise ensuite le sommet de la cheminée et obtient la distance $OB = 36$ m.

En déduire la hauteur de la cheminée.



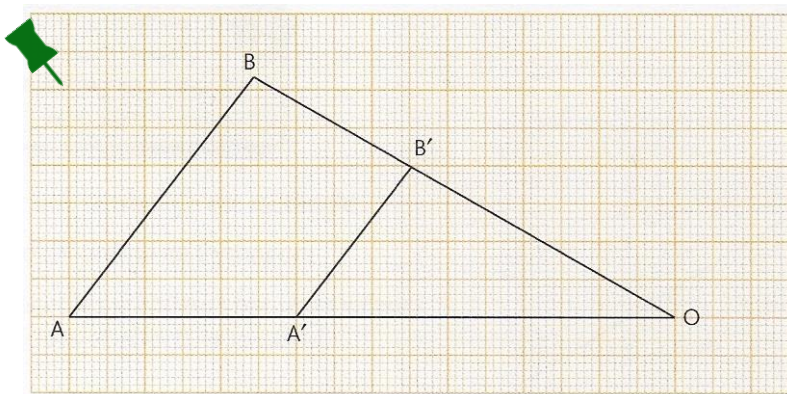
4- Théorème de Thalès

I. Activité : Mesurer la hauteur d'une cheminée

Omar et Fred décident de mesurer la hauteur de la cheminée de l'ancienne cimenterie.

Partie A : Propriété des triangles semblables

Fred lui indique qu'ils vont procéder par une mesure à distance. Il veut utiliser la propriété des triangles représentés sur le schéma ci-dessous.



Les triangles OAB et $OA'B'$ sont **semblables**.

Les angles du triangle OAB ont respectivement les mêmes mesures que les angles du triangle $OA'B'$.

1. Comparer les directions des droites (AB) et $(A'B')$.

.....

2. Mesurer les longueurs :

$OA =$ $OB =$ $AB =$

$OA' =$ $OB' =$ $A'B' =$

3. Effectuer les rapports (**arrondir** le résultat au dixième) :

$\frac{OA}{OA'} =$ $\frac{OB}{OB'} =$ $\frac{AB}{A'B'} =$

4. Comparer les valeurs de ces rapports.

.....

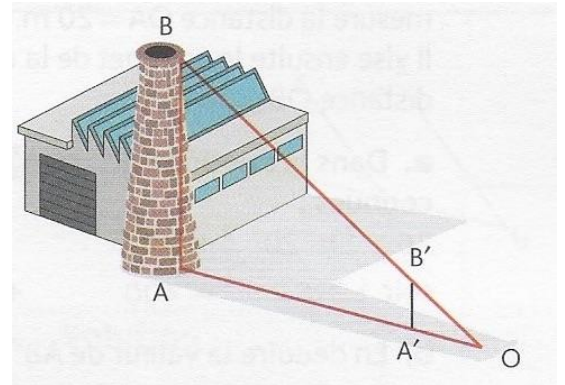
Partie B : Application de la propriété

Pour déterminer la hauteur de la cheminée, Fred utilise l'ombre qu'elle produit.

Il plante verticalement un bâton de longueur $A'B' = 2$ m de telle manière **que l'extrémité de l'ombre coïncide avec celle de l'ombre de la cheminée.**

Il mesure :

- La distance OA représentant l'ombre de la cheminée : $OA = 12$ m,
- La distance OA' représentant l'ombre du bâton : $OA' = 0,80$ m.



1. Dans l'égalité $\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}$, **reporter** les valeurs connues :

$$\frac{12}{0,80} = \frac{AB}{2}$$

2. En utilisant un produit en croix, **calculer** la hauteur de la cheminée.

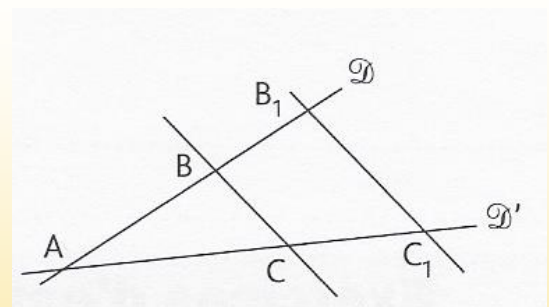
..... $AB = 30$ m

II. Théorème de Thalès

Deux droites (D) et (D') sécantes en A définissent les triangles ABC et AB_1C_1 .

Si (BC) et (B_1C_1) sont **parallèles** alors

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$$



Réciproquement :

Si $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$, **alors** les deux droites (BC) et (B_1C_1) sont **parallèles**.

Entraînement en ligne :

<https://learningapps.org/view2072429>

<https://learningapps.org/view17075650>



5- Résolution de problèmes utilisant le théorème de Thalès

Exercice 1 : Dans la figure ci-contre, les droites (AB) et (DC) sont parallèles.

1.1. Calculer AB .

.....

.....

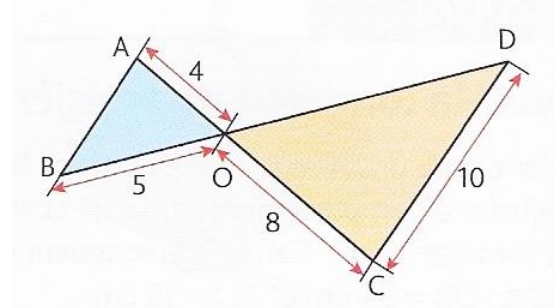
.....

1.2. Calculer OD .

.....

.....

.....



Exercice 2 : Dans les configurations ci-dessous, **indiquer** si les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles. **Justifier** la réponse.

2.1.

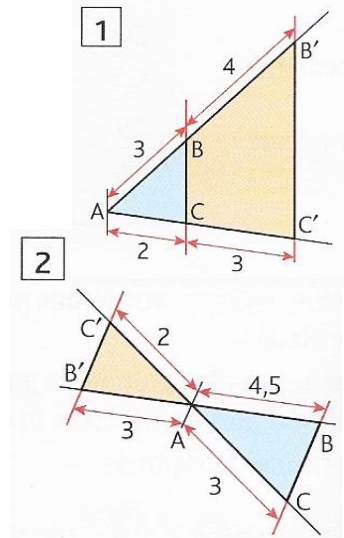
.....

.....

2.1.

.....

.....



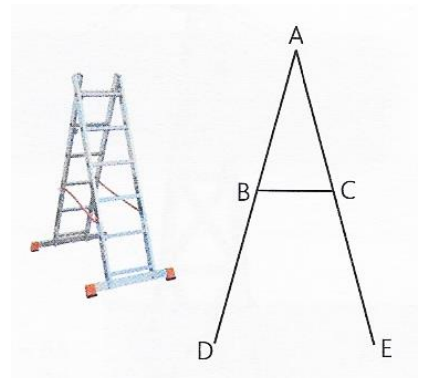
Exercice 3 : Pour maintenir l'échelle schématisée ci-contre, on fixe un lien entre les deux barreaux.

Les montants de l'échelle AD et AE mesurent 3 m et le lien $BC = 0,6$ m.

5.1. Écrire les rapports définis par le théorème de Thalès appliqué aux triangles ABC et ADE .

.....

.....



5.2. Calculer à quelle distance AB il est nécessaire d'attacher le lien pour que la distance DE soit de 1,5 m.

Exercice 4 : Support d'éolienne

Madame Toudverte veut fixer une éolienne au sommet d'un pylône métallique.

Elle schématise le pylône par la figure ci-contre

Les traverses horizontales (BE) et (CF) sont parallèles entre elles.

La verticale (AH) est un axe de symétrie.

4.1 Calculer la longueur de la traverse BE .

.....

.....

.....

4.2 Déterminer la hauteur AH .

.....

.....

.....

Exercice 5 : Montage de charpente

La charpente représentée ci-dessous est telle que :

$AB = BC = CD = DE = 2$ m.

Les droites (BF), (CG), (DH) et (EI) sont parallèles.

5.1 Calculer BF , CG et DH .

.....

.....

.....

5.2 En déduire CF , DG , EH et AI .

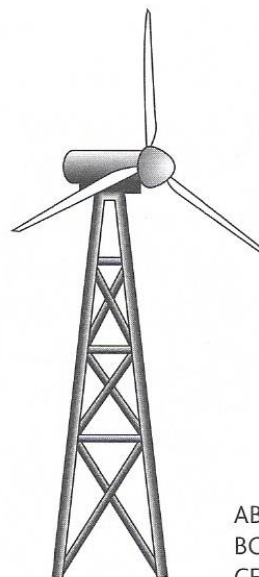
.....

.....

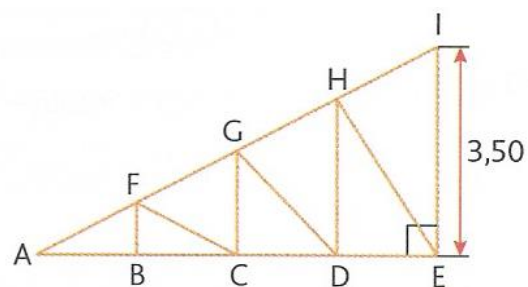
.....

.....

.....



$AB = 960$ mm
 $BC = 1\,440$ mm
 $CF = 500$ mm

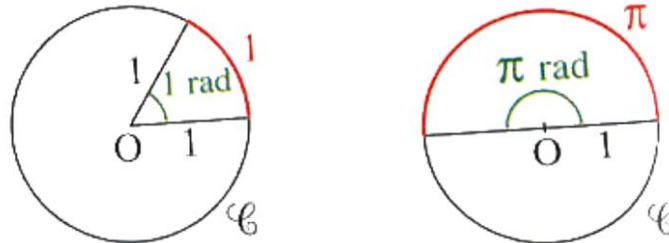


6- Trigonométrie

1. Le radian

Définition : $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1.

Le **radian** est la mesure de l'angle au centre qui intercepte sur $\mathcal{C}$ un arc de longueur 1.



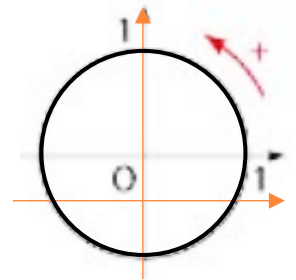
Un angle de mesure π rad a aussi pour mesure 180° .

2. Le cercle trigonométrique

Définition :

Le **cercle trigonométrique** de centre O est celui qui a pour rayon 1 et qui est muni d'un sens direct qui est le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Ce sens est appelé **sens trigonométrique**.



3. Enroulement de la droite numérique

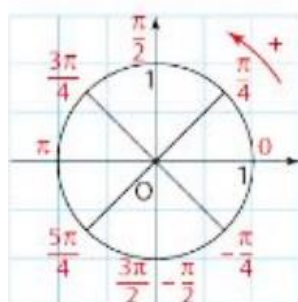
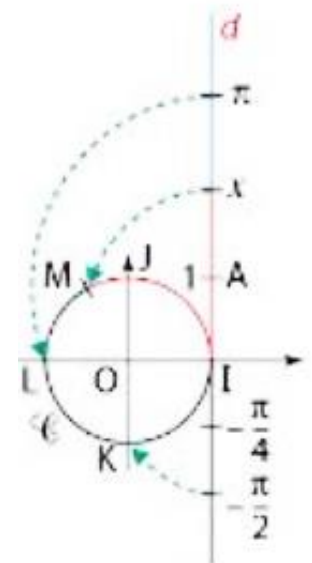
Enroulement de $\mathbb{R}$ sur un cercle trigonométrique :

$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O et (O, I, J) est un repère orthonormé .

A est le point de coordonnées (1,1) et d la droite (IA) munie du repère (I, A) .

On enroule cette droite, dite droite des réels, autour du cercle.

Tout nombre réel x de la droite vient s'appliquer sur un point P du cercle : on dit que M est le **point image** du nombre réel x.



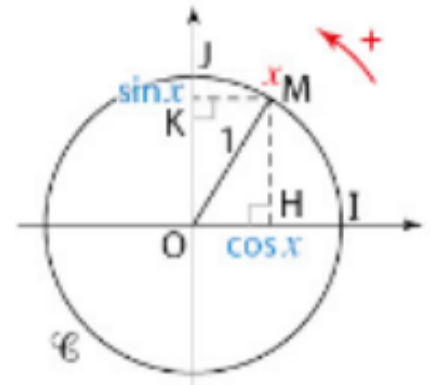
1. Cosinus et sinus d'un nombre réel

Définitions :

Soit (O, I, J) un repère orthonormé direct et $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O .

M est le point de $\mathcal{C}$, image du nombre réel x .

- Le **cosinus** de x , noté **$\cos x$** , est l'abscisse de M .
- Le **sinus** de x , noté **$\sin x$** , est l'ordonnée de M .



Propriétés :

Pour tout nombre réel x ,

- $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (théorème de Pythagore).

https://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour_fr.html



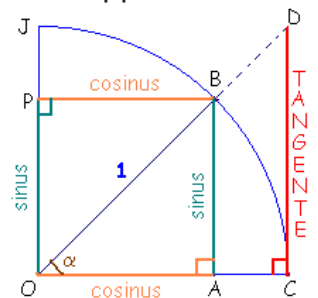
2. Tangente

La tangente d'un angle θ est la longueur du segment de la tangente au cercle trigonométrique qui intercepte l'axe des abscisses.

Par rapport aux autres fonctions trigonométriques : la fonction tangente est le rapport entre la [fonction sinus](#) et la [fonction cosinus](#) :

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

On remarque que cette fonction n'est pas définie pour des valeurs où le cosinus de l'angle s'annule, correspondant aux cas limites où la tangente est parallèle à la droite interceptrice.



3. Valeurs remarquables

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	not defined

7- Application au triangle rectangle

1. Relations angles et longueurs des côtés

Rapports trigonométriques d'un angle aigu

Dans le triangle ABC rectangle en A , le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle $\widehat{B}$ sont les rapports trigonométriques de l'angle $\widehat{B}$.

– le cosinus de l'angle $\widehat{B}$ est :

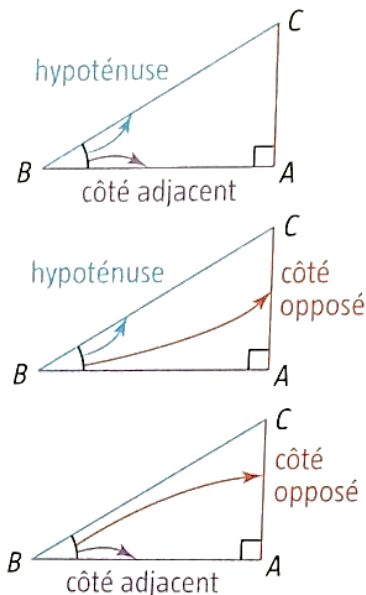
$$\cos \widehat{B} = \frac{\text{mesure du côté adjacent}}{\text{mesure de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

– le sinus de l'angle $\widehat{B}$ est :

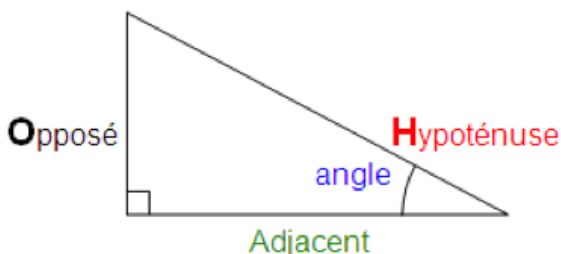
$$\sin \widehat{B} = \frac{\text{mesure du côté opposé}}{\text{mesure de l'hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

– la tangente de l'angle $\widehat{B}$ est :

$$\tan \widehat{B} = \frac{\text{mesure du côté opposé}}{\text{mesure du côté adjacent}} = \frac{AC}{AB}$$



2. Moyen mnémotechnique :



CAH SOH TOA

C'est-à-dire, en reprenant les initiales :

Cosinus Adjacent/Hypoténuse

Sinus Opposé/Hypoténuse,

Tangente Opposé/Adjacent.

La trigonométrie appliquée au triangle en Rap ! <https://youtu.be/PYRMUqSeNEc>



3. Calculer la mesure d'un côté d'un triangle

Pour calculer la mesure d'un côté d'un triangle rectangle connaissant un angle aigu et un côté :

- On repère l'hypoténuse du triangle rectangle
- On écrit les rapports trigonométriques de l'angle connu
- On repère le rapport trigonométrique qui contient le côté connu et le côté inconnu
- On isole le côté inconnu

- On termine le **calcul** à l'aide de la calculatrice.

Exemple :

Calculer AC et BC (arrondir au mm).

1. Calcul de AC .

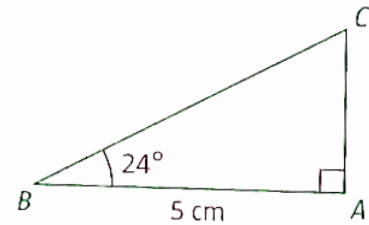
- L'hypoténuse est $[BC]$.
- $\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC}$; $\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC}$; $\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB}$.
- On connaît AB ; on écrit alors $\tan 24^\circ = \frac{AC}{5}$.

Ainsi, $AC = 5 \times \tan 24^\circ$.

À la calculatrice, en mode degré :

5 $\times$ $\tan$ 24 $)$ $\rightarrow$ entrer ou 5 $\times$ $\tan$ (24 $)$ $\rightarrow$ EXE .

On lit : 2,226... ; $AC \approx 2,2$ cm (valeur arrondie au mm).



2. Calcul de BC .

- $\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC}$; $\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC}$; $\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB}$.
- On connaît AB ; on écrit alors $\cos 24^\circ = \frac{5}{BC}$.
- Ainsi $BC \times \cos 24^\circ = 5$ d'où $BC = \frac{5}{\cos 24^\circ}$.

À la calculatrice, en mode degré :

5 $\div$ $\cos$ 24 $)$ $\rightarrow$ entrer ou 5 $\div$ $\cos$ (24 $)$ $\rightarrow$ EXE .

On lit : 5,47... ; $BC \approx 5,5$ cm (valeur arrondie au mm).

Attention : bien penser à mettre la calculatrice en mode degrés (et non pas radians).

Cette méthode est utilisée pour calculer des **longueurs**. Elle fonctionne si l'on connaît **1 angle** et **1 longueur de côté**.

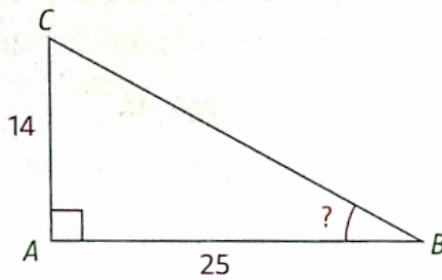
4. Calculer un angle du triangle

Si on connaît **2 longueurs de côtés**, on peut dans ce cas calculer un **angle** :

Pour calculer **angle** d'un triangle rectangle connaissant **deux longueurs de côtés** :

- On écrit les **rapports trigonométriques** de l'angle cherché
- On repère le rapport trigonométrique **que l'on peut calculer** avec les longueurs connues
- On effectue le **calcul** de l'angle à l'aide de la calculatrice.

Exemple :



Calculer la mesure de l'angle $\widehat{B}$ (arrondir à 0,1 degré).

- $\cos \widehat{B} = \frac{AB}{BC}$; $\sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC}$; $\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB}$.
- On peut calculer $\tan \widehat{B}$: $\tan \widehat{B} = \frac{14}{25}$.
- À la calculatrice, en mode degré :

2nde tan (Arctan) 14 ÷ 25) entrer .

SHIFT tan (Atn) (14 ÷ 25) EXE .

On lit : 29,24... ; $\widehat{ABC} \approx 29,2^\circ$ (valeur arrondie au dixième).

Dans le cas où l'on cherche un **angle** (car on connaît la longueur de 2 côtés), le rapport que l'on calcule (opposé/hypoténuse ou adjacent/hypoténuse) nous donne ce nombre entre 0 et 1. Pour en revenir à l'angle, il faut donc faire l'**opération réciproque**, c'est-à-dire trouver quel est l'angle dont le sinus ou cosinus donnera ce nombre entre 0 et 1. Cela se fait avec la fonction **arccos** ou **arcsin** ou **arctan** de la calculatrice.

Sur les Casio, ces fonctions sont écrites **Acs**, **Asn** et **Atn**. On les obtient en faisant **Seconde + Cos** (ou Sin, ou Tan). Sur d'autres calculatrices, on trouve écrit **cos⁻¹**, **sin⁻¹** et **tan⁻¹**.

Concrètement :

sin⁻¹(opposé/hypoténuse) = angle.

cos⁻¹(adjacent/hypoténuse) = angle.

tan⁻¹(opposé/adjacent) = angle.

Exemple :

$\cos(60^\circ) = 0,5$ donc inversement, $\arccos(0,5) = \cos^{-1}(0,5) = 60^\circ$

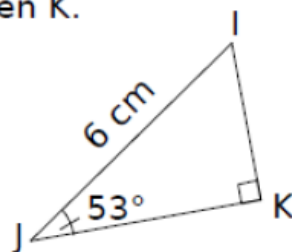
$\sin(45^\circ) = 0,707$ donc inversement, $\arcsin(0,707) = \sin^{-1}(0,707) = 45^\circ$

8 – Résolution de problèmes utilisant la trigonométrie

Exercice 1 : Calculs de longueurs

Le triangle IJK est rectangle en K.

- a.** Exprime les cosinus, sinus, tangente de l'angle $\widehat{IJK}$ en fonction des longueurs des côtés.



.....

.....

.....

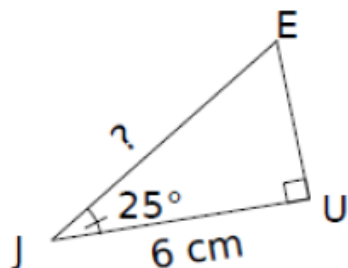
- b.** Calcule les longueurs JK et IK en utilisant à chaque fois la formule adéquate.

.....

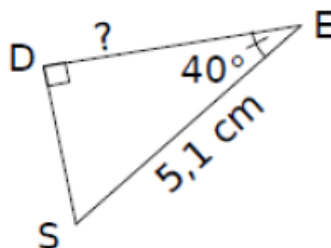
Exercice 2 : Calcul de longueurs

Calcule, en rédigeant entièrement, la longueur demandée. (Tu arrondiras au dixième.)

a.



b.

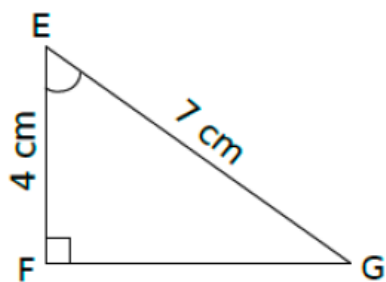


.....

.....

.....

Exercice 3 : Calcul d'angles



a. Exprime le cosinus de l'angle $\widehat{FEG}$.

.....

.....

b. Calcule la mesure arrondie au degré de $\widehat{FEG}$.

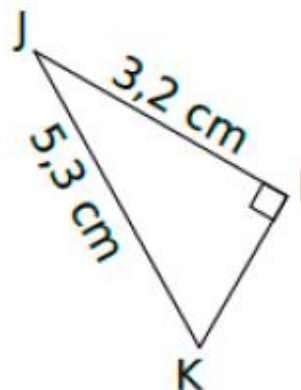
.....

.....

Exercice 4 : Calcul d'angles

IJK est un triangle rectangle en I tel que $IJ = 3,2$ cm et $JK = 5,3$ cm.

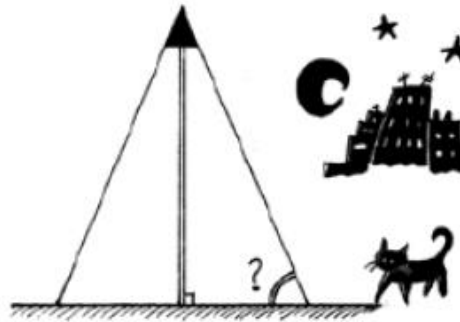
Calcule la mesure de l'angle $\widehat{IKJ}$ arrondie au degré.



Exercice 5 : Etude d'un lampadaire

Dans la nuit, un lampadaire de 2,60 m de haut, dessine sur le sol un disque de 95 cm de rayon.

Quelle est la mesure de l'angle, arrondie au degré, formé par le cône de lumière avec le sol ?



.....

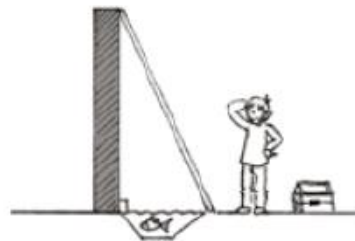
.....

.....

Exercice 6 : Réparation sur un toit

Pour effectuer une réparation sur un toit, Esteban doit poser son échelle mesurant 2,20 m contre un mur. Pour qu'elle soit suffisamment stable, cette dernière doit former un angle d'au moins 65° avec le sol.

Esteban n'a pu poser son échelle qu'à 1,20 m du mur. Cette échelle sera-t-elle suffisamment stable ? Justifie.



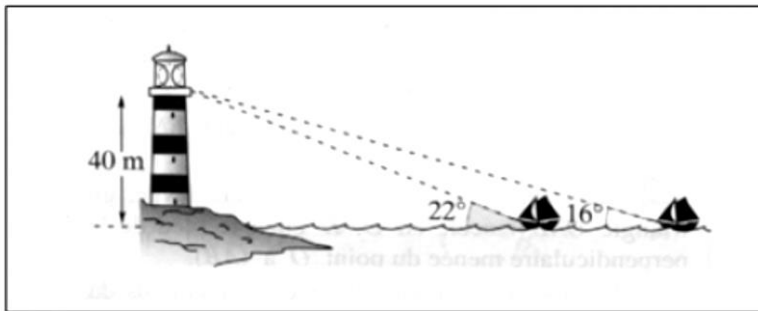
.....

.....

.....

Exercice 7 : Distance entre 2 bateaux

Quelle est la distance séparant les deux bateaux ?



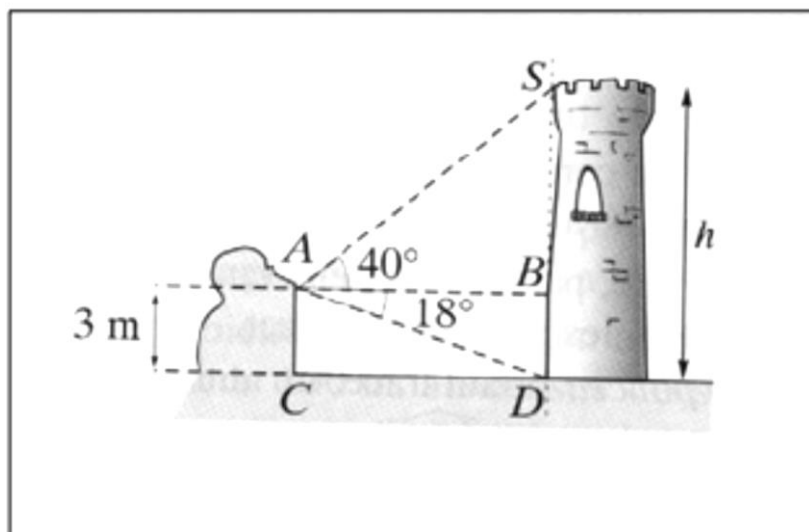
.....

.....

.....

Exercice 8 : Hauteur d'une tour

Calculer la hauteur de la tour.



.....

.....

.....