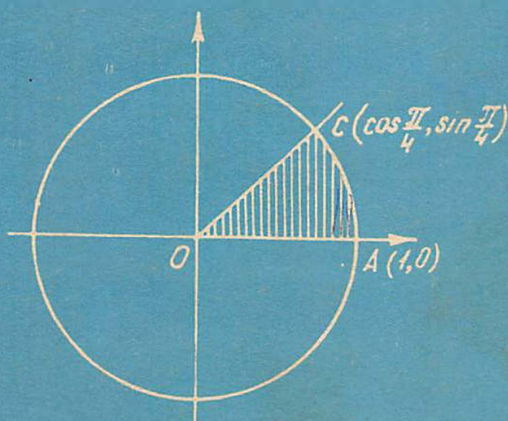


INSPECTORATUL ȘCOLAR
CASA PERSONALULUI DIDACTIC
MUNICIPIUL BUCUREȘTI



matematica

geometrie și trigonometrie



1985

**INSPECTORATUL ȘCOLAR
CASA PERSONALULUI DIDACTIC
MUNICIPIUL BUCUREȘTI**

GEOMETRIE ȘI TRIGONOMETRIE

Soluții în rezolvarea problemelor și exercițiilor din manual

Clasa a IX-a

Rezolvările de probleme au fost realizate de colectivul de profesori:

GEORGETA MURZEA

Liceul de Matematică-Fizică nr. 3

ANGELA PECHEANU

Liceul Industrial nr. 18

ELENA NEACSU

Liceul Industrial nr. 18

ILIE GATU

Liceul Industrial nr. 18

IONEL DASCĂLU

Liceul Industrial nr. 18

VERGILIA TRIFAN

Liceul Industrial "Spiru Haret"

ION ȘTEFĂNESCU

Liceul Industrial nr. 18

Coordonator - prof. ECATERINA DUMITRAȘCU

Inspectoratul Școlar al Municipiului București

PREFATA

În ultimele decenii, matematica a pătruns cu deosebit succes în numeroase sectoare ale cunoașterii și practicii, căpătând o popularitate senzațională datorită eficienței metodelor și instrumentelor sale de investigare, a sintezei abstractului cu concretul, a teoriei cu practica. Ca urmare, învățământul matematic, activitate socială cu caracter de masă, are de realizat cultura matematică a elevului, înarmându-l cu cunoștințe și metode de utilizare a lor, contribuind astfel la pregătirea lui pentru activitatea și studiile viitoare de specialitate, oricare ar fi ele. Acest obiectiv general poate fi atins dacă în învățarea matematicii, elevul îndrumat de profesor parcurge drumul complex al cunoașterii, drum având multe puncte comune cu cel al cercetătorului.

Este unanim recunoscut rolul problemelor în dezvoltarea gândirii elevilor, în formarea și dezvoltarea imaginației lor, a capacității de analiză și sinteză, de generalizare și abstractizare, în stimularea creativității și a spiritului de investigare.

Selectarea problemelor în funcție de obiectivele operaționale stabilite, preocuparea de a fi rezolvate în clasă sau acasă, succesiunea lor impun profesorului de matematică un efort dirijat și continuu, bazat pe cunoașterea și respectarea unor principii fără de care activitatea de rezolvare a problemelor nu capătă finalitate:

- Problemele propuse trebuie să se refere la aspecte teoretice esențiale, sprijinind fixarea acestora și formarea deprinderii de a le aplica în situații variate.

- Este necesar ca problemele să cuprindă exemple și contra-exemple, punând elevul în situația de a opera cu propoziții dar și cu negări ale lor.

- Propozițiile care fac parte din teorie se pot propune ca probleme, menținându-se necesitatea de a fi reținute rezultatele.

- Asigurarea unui echilibru în ceea ce privește gradul de dificultate a problemelor propuse având în vedere că nu trezesc interesul problemele prea

ușoare iar cele prea grele demobilizează; orice problemă trebuie să trezească curiozitatea rezolvitorului și să dea satisfacția unui efort de creație.

- Rezolvarea unei probleme nu trebuie privită ca un scop în sine, ci ca un prilej de prezentare a unor metode și tehnici utilizabile în categorii de probleme.

- Găsirea soluției nu trebuie considerată ca punct terminus în actul rezolvării, ci și ca o deschidere către descoperirea unor căi noi de rezolvare, ca posibilitate pentru generalizări sau particularizări, ca punct de plecare pentru formularea unor probleme noi sau ca prilej pentru crearea unor situații problematice interesante.

Cunoașterea temeinică a manualelor școlare, a exercițiilor și problemelor pe care acestea le conțin este o condiție de prim ordin pentru stabilirea de către profesor a unor strategii didactice adecvate.

Prezentarea în lucrarea de față a unor rezolvări pentru problemele și exercițiile de geometrie plană și trigonometrie din manualul pentru clasa a IX-a sperăm să constituie un sprijin în activitatea profesorului ușurându-i munca de pregătire a lecțiilor. Stabilirea zestrei de cunoștințe necesare elevului în vederea rezolvării unor categorii de probleme, cunoașterea gradului de dificultate și ca urmare, selecția corespunzătoare a exercițiilor și problemelor rezolvate în clasă sau propuse ca temă pentru acasă vor putea fi realizate cu economie de timp. Timpul astfel economisit va putea fi valorificat de profesorul de matematică pentru a gândi asupra aspectelor metodice, asupra posibilităților de înarmare a elevilor cu tehnici ale rezolvării problemelor de geometrie, asupra unor procedee de stimulare a interesului și bucuriei copiilor de a rezolva probleme.

Lucrarea de față va putea fi folosită și de elevi. Aceștia vor avea la dispoziție modele de rezolvare pentru problemele conținute în manual, posibilitatea comparării unor soluții proprii cu cele date în lucrare, un ghid pentru rezolvarea problemelor propuse în alte cărți și reviste de matematică.

Prof. ECATERINA DUMITRAȘCU

CAPITOLUL I

INCIDENTA, ORDONARE, CONGRUENTA

Axiomele de incidență ale geometriei în plan

Problemele de la pagina 7

Problema 1. Oricare ar fi dreapta d , putem găsi în planul P un punct nesituat pe d .

Soluție. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că $(\forall) M \in P \Rightarrow M \in d$. Această contrazice axioma I_3 , care afirmă că în plan există 3 puncte necoliniare. Deci există un punct $M \notin d$.

Problema 2. Dacă A, B, C sînt 3 puncte necoliniare, dreptele AB, BC, CA sînt distincte două cîte două.

Soluție. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că dreptele AB și BC coincid. Rezultă că $C \in AB$, deci A, B, C sînt coliniare, ceea ce contrazice ipoteza. Deci, AB și BC sînt distincte.

La fel se demonstrează că $BC \neq CA$ și $AB \neq AC$.

Problema 3. Presupunînd că există în P punctele A, B, C, D dintre care nu avem 3 coliniare, să se arate că dreptele AB, AC, AD, BC, BD, CD sînt distincte două cîte două.

Soluție. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că dreptele AB și AC coincid. Rezultă că $C \in AB$, deci A, B, C sînt coliniare, ceea ce contrazice ipoteza. Deci, AB și AC sînt distincte.

La fel se demonstrează și pentru celelalte perechi de drepte.

Problema 4. Să presupunem că A, B, C, D, E sînt 5 puncte diferite, A, B, C sînt coliniare și D, E nu aparțin dreptei AB . Dintre dreptele

AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE cîte pot fi distincte cel mult?
Arătați o situație în care avem mai puține drepte distincte.

Soluție. A, B, C fiind coliniare, rezultă că dreptele AB, BC, AC coincid. Dacă D și E nu sînt coliniare cu nici unul din punctele A, B, C atunci dreptele AB, AD, AE, BD, BE, CD, CE, DE sînt distincte. Deci există cel mult 8 drepte distincte.

Dacă A, D, E sînt coliniare, avem 6 drepte distincte: AB, AD, BD, CD, BE, CE. La fel, dacă B, D, E sînt coliniare, sau dacă C, D, E sînt coliniare există tot cîte 6 drepte distincte.

Problema 5. Pot exista 5 puncte în P astfel încît unite două cîte două, să obținem exact 7 drepte distincte?

Soluție. Dacă punctele A, B, C, D, E sînt astfel încît să nu existe 3 coliniare, atunci obținem 10 drepte distincte: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.

Dacă 3 dintre puncte sînt coliniare, de exemplu A, B, C, și dacă celelalte două nu sînt coliniare cu nici unul din primele 3, obținem 8 drepte distincte. Dacă ultimele două sînt coliniare cu unul din primele 3 (despre care afirmasem că sînt coliniare), obținem 6 drepte distincte.

Dacă 4 puncte sînt coliniare, obținem 5 drepte distincte, iar dacă toate cele 5 puncte sînt coliniare, obținem o singură dreaptă.

Deci, în nici unul din cazuri, nu obținem 7 drepte distincte.

Distanța și axioma riglei

Problemele de la pagina 9

Problema 1. Fie $\|AB\| = 4$. Există un sistem de coordonate pe AB cu $x_A = 5$ și $x_B = 8$?

Soluție. $\|AB\| = |x_B - x_A| = |8 - 5| = 3 \neq 4$. Deci, răspunsul este negativ.

Problema 2. $x_A = -2$, $x_B = 3$, $x_C = 10$. Să se afle $\|AB\|$, $\|AC\|$, $\|BC\|$.

Soluție. $\|AB\| = |x_B - x_A| = 5; \|AC\| = |x_C - x_A| = 12;$

$\|BC\| = |x_C - x_B| = 7.$

Problema 3. Intr-un sistem de coordonate pe AB, $x_A = 3$, $\|AB\| = 5$, $x_B < 0$. a) Să se afle x_B . b) Să se determine x_C știind că $C \in AB$, $\|BC\| = 7$ și $\|AC\| < \|BC\|$.

Soluție. $\|AB\| = |x_B - x_A| = |x_B - 3| = 5.$

Dacă $x_B \in [3, \infty) \Rightarrow |x_B - 3| = 5 \Rightarrow x_B = 8 \in [3, \infty).$

Dacă $x_B \in (-\infty, 3) \Rightarrow x_B = -2 \in (-\infty, 3).$

Condiția $x_B < 0$, arată că dintre cele 2 valori obținute pentru x_B , convine $x_B = -2$.

b) $\|BC\| = |x_C - x_B| = 7.$

Dacă $x_C \in [-2, \infty) \Rightarrow x_C + 2 = 7 \Rightarrow x_C = 5 \in [-2, \infty).$

Dacă $x_C \in (-\infty, -2) \Rightarrow -x_C - 2 = 7 \Rightarrow x_C = -9 \in (-\infty, -2).$

Dacă $x_C = 5 \Rightarrow \|AC\| = |x_C - x_A| = 2; \|BC\| = |x_C - x_B| = 7$. Cum prin ipoteză $\|AC\| < \|BC\|$, rezultă că $x_C = 5$ verifică această condiție, deci este soluție a problemei.

Dacă $x_C = -9 \Rightarrow \|AC\| = |x_C - x_A| = 12; \|BC\| = |x_C - x_B| = 7$. În acest caz $\|AC\| > \|BC\|$, deci $x_C = -9$ nu este soluție a problemei.

Deci soluția este: $x_C = 5$.

Problema 4. $x_A = -2$, $x_B = 5$; să se determine M și $N \in AB$, știind că $\|AM\| = 4$, $\|MN\| = 1$, $\|NB\| = 2$.

Soluție. $\|AM\| = 4 \Rightarrow |x_M - x_A| = 4 \Rightarrow |x_M + 2| = 4.$

Dacă $x_M \in [-2, \infty) \Rightarrow x_M = 2 \in [-2, \infty).$

Dacă $x_M \in (-\infty, -2) \Rightarrow x_M = -6 \in (-\infty, -2).$

$\|NB\| = 2 \Rightarrow |x_B - x_N| = 2 \Rightarrow |x_N - 5| = 2.$

Dacă $x_N \in (-\infty, 5) \Rightarrow x_N = 3 \in (-\infty, 5).$

Dacă $x_N \in [5, \infty) \Rightarrow x_N = 7 \in [5, \infty).$

Dintre valorile obținute pentru x_N și x_M le alegem pe acelea care verifică și condiția $\|MN\| = 1$.

Cazul 1: $x_M = 2$ și $x_N = 3 \Rightarrow \|MN\| = 1$; deci aceste valori formează o soluție a problemei.

Cazul 2: $x_M = 2$; $x_N = 7$; $\|MN\| = 5 \neq 1$. Deci aceste valori nu convin.

Cazul 3: $x_M = -6$, $x_N = 7$; $\Rightarrow \|MN\| = 13 \neq 1$. Deci nici acest caz nu convine.

Cazul 4: $x_M = -6$; $x_N = 3$; $\|MN\| = 9 \neq 1$. Nici acest caz nu convine.
Deci soluția problemei este: $x_M = 2$ și $x_N = 3$.

Problema 5. $x_A = 1$, $x_B = 4$. Să se afle M și $N \in AB$, știind că $\|AM\| = 1$, $\|MN\| = 4$, $\|NB\| = 2$.

Soluție. $\|AM\| = 1 \Rightarrow |x_M - 1| = 1$.

Dacă $x_M \in [1, \infty) \Rightarrow x_M - 1 = 1 \Rightarrow x_M = 2 \in [1, \infty)$.

Dacă $x_M \in (-\infty, 1) \Rightarrow -x_M + 1 = 1 \Rightarrow -x_M = 0 \Rightarrow x_M = 0 \in (-\infty, 1)$.

$\|NB\| = 2 \Rightarrow |4 - x_N| = 2 \Rightarrow |x_N - 4| = 2$.

Dacă $x_N \in [4, \infty) \Rightarrow x_N - 4 = 2 \Rightarrow x_N = 6 \in [4, \infty)$.

Dacă $x_N \in (-\infty, 4) \Rightarrow -x_N + 4 = 2 \Rightarrow x_N = 2 \in (-\infty, 4)$.

Dintre valorile obținute pentru x_M și x_N , le alegem pe acelea care verifică condiția: $\|MN\| = 4$.

Cazul 1: dacă $x_M = 2$ și $x_N = 6 \Rightarrow \|MN\| = 4$. Deci cele 2 valori formează o soluție a problemei.

Cazul 2: dacă $x_M = 2$ și $x_N = 2 \Rightarrow \|MN\| = 0 \neq 4$. Cazul nu convine problemei.

Cazul 3: dacă $x_M = 0$ și $x_N = 6 \Rightarrow \|MN\| = 6 \neq 4$. Nu convine.

Cazul 4: dacă $x_M = 0$ și $x_N = 2 \Rightarrow \|MN\| = 2 \neq 4$. Nu convine.

Deci soluția problemei este: $x_M = 2$; $x_N = 6$.

Segmente, semidrepte și unghiuri

Problemele de la pagina 10

Problema 1. Arătați că egalitatea (2) este satisfăcută dacă $M = A$ și dacă $M = B$.

Soluție. Dacă $A \neq B$, M este între A și B dacă: (1) A, B, M sînt coliniare și (2) $\|AM\| + \|MB\| = \|AB\|$.

Dacă $M = A$, egalitatea (2) devine: $\|AA\| + \|AB\| = \|AB\| \Rightarrow \|AB\| = \|AB\|$, care este adevărată.

Dacă $M = B$, egalitatea (2) devine: $\|AB\| + \|BB\| = \|AB\| \Rightarrow \|AB\| = \|AB\|$, care este adevărată.

Problema 2. Demonstrați că dacă C este între A și B , atunci C este între B și A .

Soluție. Fie $A \neq B$. C este între A și $B \Rightarrow A, B, C$ -coliniare și $\|AC\| + \|CB\| = \|AB\|$. Dar $\|AC\| = \|CA\|$, $\|CB\| = \|BC\|$, $\|AB\| = \|BA\|$; $\Rightarrow \|CA\| + \|BC\| = \|BA\|$; $\|BC\| + \|CA\| = \|BA\|$.

Dacă A, B, C sînt coliniare $\Rightarrow$ și B, C, A -coliniare și cum am demonstrat că $\|BC\| + \|CA\| = \|BA\| \Rightarrow C$ este între B și A .

Problema 3. Să se arate că $[AB] = [BA]$.

Soluție. $[AB] = |AB| \cup \{A, B\}$; $|AB| = \{M / M \text{ este între } A \text{ și } B\} = \{M / M \text{ este între } B \text{ și } A\} = |BA|$ (conform exercițiului 2 pag. 10).
 $[BA] = [BA] \cup \{B, A\} = |AB| \cup \{A, B\} \Rightarrow [AB] = [BA]$.

Problema 4. Fie $C \in AB$, $x_A = 2$, $x_B = 10$, $x_C = 4$; B este între A și C ? dar C între A și B ? dar A între A și B ?

Soluție. A, B, C -coliniare, pentru că $C \in AB$.

$\|AB\| = 10 - 2 = 8$; $\|BC\| = 10 - 4 = 6$; $\|AC\| = 4 - 2 = 2$. Rezultă că $\|AB\| + \|BC\| \neq \|AC\|$; deci B nu este între A și C .

$\|AC\| = 2$; $\|BC\| = 6$; $\|AB\| = 8$. Deci $\|AC\| + \|CB\| = 8 = \|AB\|$. Rezultă că C este între A și B .

A nu este între A și B , pentru că ar trebui, conform definiției, ca punctele A, A și B să fie coliniare și diferite; dar A și A nu sînt diferite.

Problema 5. Care dintre următoarele relații sînt adevărate dacă punctele A, B, C au abscisele 8, 2, 7?

$A \in [BC]$, $B \in |AC|$, $C \in |AB|$, $C \in [AB]$.

Soluție. $x_A = 8$; $x_B = 2$; $x_C = 7$.

$$\begin{aligned} [BC] &= \{M/ 2 \leq x_M \leq 7\} = \{M/ x_M \in [2, 7]\} ; \text{ dar } x_A = 8 \notin [2, 7] \Rightarrow A \notin [BC], \\ |AC| &= \{M/ x_M \in (7, 8)\} ; 2 \notin (7, 8) \Rightarrow B \notin |AC|, \\ |AB| &= \{M/ x_M \in (2, 8)\} ; 7 \in (2, 8) \Rightarrow C \in |AB|, \\ [AB] &= \{M/ x_M \in [2, 8]\} ; 7 \in [2, 8] \Rightarrow C \in [AB]. \end{aligned}$$

Problema 6. Punctele coliniare A, B, C au abscisele 6, -3, -2. Unul dintre punctele A, B, C este situat între celelalte două?

Soluție. $|AB| = \{M / x_M \in (-3, 6)\} ; -2 \in (-3, 6) \Rightarrow C \in |AB|$.
Deci există un punct situat între celelalte două: C este situat între A și B.

Problema 7. $M \in AB, A \notin [MB], B \notin [MA] \Rightarrow M \in |AB|$.

Soluție. Folosim metoda reducerii la absurd. Fie $x_A < x_B$. Presupunem că $M \notin |AB|$. $x_M \leq x_A$ sau $x_M \geq x_B$.

Cazul 1: dacă $x_M \leq x_A < x_B \Rightarrow x_M \leq x_A \leq x_B \Rightarrow A \in [MB]$, ceea ce contrazice ipoteza.

Cazul 2: dacă $x_M \geq x_B > x_A \Rightarrow x_M \geq x_B \geq x_A \Rightarrow B \in [MA]$, ceea ce contrazice ipoteza. Deci presupunerea nu este corectă și deci $M \in |AB|$.

Problema 8. $M \in |AB|, A \notin [MB], B \notin [MA] \Rightarrow M \in [AB]$.

Soluție. fie $x_A < x_B$. Aplicăm metoda reducerii la absurd. Presupunem că $M \notin [AB]$. Rezultă $x_M < x_A$ sau $x_M > x_B$.

Cazul 1: dacă $x_M < x_A < x_B \Rightarrow A \in [MB]$, ceea ce contrazice ipoteza.

Cazul 2: dacă $x_M > x_B > x_A \Rightarrow B \in [MA]$, ceea ce contrazice ipoteza.

Intrucât presupunerea făcută a condus în fiecare din cazuri la o contradicție, rezultă că $M \in [AB]$.

Problema 9. $C \in |AB|, D \in |AC| \Rightarrow D \in |AB|$.

Soluție. $C \in |AB| \Rightarrow x_A < x_C < x_B$; $D \in |AC| \Rightarrow x_A < x_D < x_C$; deci $x_A < x_D < x_C < x_B \Rightarrow x_A < x_D < x_B \Rightarrow D \in |AB|$.

Problema 10. $C \in |AB| \Rightarrow |AC| \subset |AB|$.

Soluție. $C \in |AB| \Rightarrow x_A < x_C < x_B$. Vom arăta că $(\forall) M \in |AC| \Rightarrow M \in |AB|$.
Fie $M \in |AC|$; $\Rightarrow x_A < x_M < x_C$, dar $x_C < x_B$; $\Rightarrow x_A < x_M < x_B \Rightarrow M \in |AB| \Rightarrow |AC| \subset |AB|$.

Problema 11. $C, D \in |AB| \Rightarrow [CD] \subset |AB|$.

Soluție. $C \in |AB| \Rightarrow x_A < x_C < x_B$; $D \in |AB| \Rightarrow x_A < x_D < x_B$. Vom demonstra că $(\forall) M \in [CD] \Rightarrow M \in |AB|$. Fie $M \in [CD]$. Rezultă că $x_C \leq x_M \leq x_D$. Din relațiile: $x_A < x_C$, $x_C \leq x_M \leq x_D$ și $x_D < x_B$, rezultă: $x_A < x_M < x_B$. Deci $M \in |AB| \Rightarrow [CD] \subset |AB|$.

Problema 12. $C \in |AB|, B \in |CD| \Rightarrow C, B \in |AD|$.

Soluție. $C \in |AB| \Rightarrow x_A < x_C < x_B$; $B \in |CD| \Rightarrow x_C < x_B < x_D$; $\Rightarrow x_A < x_C < x_D \Rightarrow C \in |AD|$ și $x_A < x_B < x_D \Rightarrow B \in |AD|$.

Problema 13. Orice segment conține o infinitate de puncte.

Soluție. Fie $|AB|$ un segment astfel încât $x_A = 0$ și $x_B = b$.
 $\frac{b}{2} \in (0, b)$; $\frac{b}{3} \in (0, b)$; ... $\frac{b}{n} \in (0, b)$; ...
 Deci punctele de abscise: $\frac{b}{2}, \frac{b}{3}, \dots, \frac{b}{n}, \dots$ aparțin lui $|AB|$. Cum n poate lua orice valori naturale, rezultă că $|AB|$ conține o infinitate de puncte.

Problema 14. Fie m un număr real $m > 1$. Arătați că există un punct $M \in |AB|$ astfel încât $\|AM\| = \frac{\|AB\|}{m}$.

Soluție. $\|AM\| = |x_M - x_A|$; $\|AB\| = |x_B - x_A|$. Dacă $M \neq B$, $M \neq A$, iar $x_A < x_B$, va exista un punct $M \in |AB|$, care să satisfacă relația din ipoteză, dacă următoarea ecuație are soluție: $x_M - x_A = \frac{x_B - x_A}{m}$.
 Dacă $m > 1$, ecuația are soluția unică: $x_M = \frac{x_B + (m-1)x_A}{m}$ și $x_M < x_B$. Deci există $M \in |AB|$, M unic, care satisface egalitatea din ipoteză.

Problema 15. Fie $x_A = 2$ și $x_B = 10$, $x_C = 14$. Care dintre următoarele egalități sînt adevărate?

$|AB| = |AC|$, $|AB| = |AC|$, $|BA| = |BC|$, $|CA| = |CB|$, $|AC| = |BC|$.

Soluție. $|AB| = \{M / x_M \geq x_A\} = \{M / x_M \geq 2\}$;
 $|AC| = \{M / x_M \geq x_A\} = \{M / x_M \geq 2\}$; rezultă că $|AB| = |AC|$.
 $|AB| = \{M / x_M > 2\}$; $|AC| = \{M / x_M > 2\} \Rightarrow |AB| = |AC|$.
 $|BA| = \{M / x_M < 10\}$; $|BC| = \{M / x_M > 10\} \Rightarrow |BA| \neq |BC|$.

$$|CA = \{M/ x_M < 14\}; |CB = \{M/ x_M < 14\}; \Rightarrow |CA = |CB.$$

$$|AC = \{M/ x_M > 2\}; |BC = \{M/ x_M > 10\} \Rightarrow |AC \neq |BC.$$

Problema 16. Fie $x_A = -1$, $x_B = 3$, $x_C = 5$, $x_D = 8$. Să se arate că $B \in |AC$, $[BC] \subset |AD$, $B \in |AD$, $D \notin |CA$.

Soluție. a) $|AC = \{M/ x_M > -1\} = \{M/ x_M \in (-1, \infty)\}$; $x_B = 3 \in (-1, \infty) \Rightarrow B \in |AC$.

b) $|AD = \{M/ x_M > -1\} = \{M/ x_M \in (-1, \infty)\}$;

fie $P \in [BC] \Rightarrow x_B \leq x_P \leq x_C \Rightarrow x_P \in [3, 5] \subset (-1, \infty) \Rightarrow x_P \in (-1, \infty) \Rightarrow P \in |AD \Rightarrow [BC] \subset |AD$.

c) $x_B = 3 \in (-1, \infty) \Rightarrow B \in |AD$.

d) $|CA = \{M/ x_M < x_C\} = \{M/ x_M \in (-\infty, 5)\}$; $x_D = 8 \notin (-\infty, 5) \Rightarrow D \notin |CA$.

Problema 17. Se dau $x_A = -3$, $x_B = 0$, $x_C = 5$, $x_D = 9$. Să se afle $|CA \cap [BD]$ și $[CA \cap |BD]$.

Soluție. $|CA = \{M/ x_M < x_C\} = \{M/ x_M \in (-\infty, 5)\}$;

$[BD] = \{M/ x_M \in [0, 9]\}$.

$|CA \cap [BD] = \{M/ x_M \in (-\infty, 5) \cap [0, 9]\} = \{M/ x_M \in [0, 5]\} = |BC| \cup \{B\}$

$[CA \cap |BD] = \{M/ x_M \in (-\infty, 5] \cap (0, \infty)\} = \{M/ x_M \in (0, 5]\} = |BC| \cup \{C\}$

Problema 18. Să se arate că $[AB] \subset [AB] (A \neq B)$.

Soluție. Fie $M \in [AB]$. $\Rightarrow x_A \leq x_M \leq x_B$; $[AB] = \{M/ x_M \geq x_A\}$.

Dacă $x_M \in [x_A, x_B] \Rightarrow x_M \geq x_A \Rightarrow M \in [AB] \Rightarrow [AB] \subset [AB]$.

Problema 19. Dacă $A \neq B$, atunci: a) $|AB \cap |BA = |AB|$, b) $[AB \cap [BA = [AB]$, c) $|AB \cup |BA = AB$.

Soluție. Fie $x_A < x_B$. a) $|AB = \{M/ x_M > x_A\}$. $|BA = \{M/ x_M < x_B\}$.

Rezultă că: $|AB \cap |BA = \{M/ x_M \in (x_A, \infty) \cap (-\infty, x_B)\} = \{M/ x_M \in (x_A, x_B)\}$

$\Rightarrow |AB \cap |BA = |AB|$.

b) $[AB \cap [BA = \{M/ x_M \in [x_A, x_B]\} \Rightarrow [AB \cap [BA = [AB]$.

c) $|AB \cup |BA = \{M/ x_M \in (x_A, \infty) \cup (-\infty, x_B)\} = \{M/ x_M \in (-\infty, \infty)\} = AB$.

Axioma de separare a planului

Problemele de la pagina 14

Problema 1. Oricare ar fi dreapta d și punctul A nesituat pe d , arătați că există un punct $B \in P-d$ astfel ca d să nu separe A și B și există un punct C astfel ca d să separe A și C .

Soluție. Fie $A \notin d$ și $R \in d$. Conform teoremei 2.3, pag. 12, rezultă că există un punct B astfel încât $A \in |RB|$ și există C astfel încât $R \in |AC|$. Dar, $A \in |RB| \Rightarrow R \notin |AB| \Rightarrow |AB| \cap d = \emptyset \Rightarrow d$ nu separă A și B .
 $R \in |AC| \Rightarrow |AC| \cap d = \{R\} \Rightarrow d$ separă A și C .

Problema 2. Dacă dreapta d nu separă A și B și nici B și C , atunci d nu separă punctele A și C .

Soluție. Aplicăm metoda reducerii la absurd. Presupunem că d separă A și C . Dacă d nu separă A și B , dar separă A și C , rezultă conform axiomei de separare a planului, că d separă B și C , contrar ipotezei. Rezultă că presupunerea făcută nu este corectă și deci d nu separă A și C .

Problema 3. Dacă dreapta d separă A și B și de asemenea C și D , dar nu separă A și C , atunci d nu separă punctele B și D .

Soluție. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că d separă B și D . Din faptul că d separă A și B și d separă B și D , rezultă, conform teoremei 1 pag. 14, că d nu separă A și D . Din faptul că d nu separă A și D și d separă C și D (ipoteză), rezultă că d separă A și C (am aplicat axioma de separare a planului). Ultima afirmație contrazice ipoteza. Deci, presupunerea nu este corectă; rezultă că d nu separă B și D .

Problema 4. Fie A, B, C, D puncte distincte. Dacă A și B sînt de aceeași parte a lui CD , putem afirma că C și D sînt de aceeași parte a lui AB ?

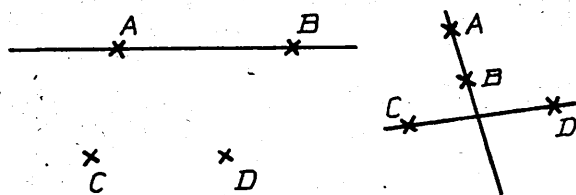


Fig. 1.

Soluție. Nu este obligatoriu ca C și D să fie de aceeași parte a lui AB. Ele pot fi de aceeași parte, dar pot fi și de o parte și de alta a lui AB.

Problema 5. Dacă punctele A și B aparțin semiplanului S (deschis sau închis), atunci $[AB] \subset S$.

Soluție. Fie $S = |dA$ și $A, B \in S \Rightarrow [AB] \cap d = \emptyset$ (din teorema de separare a planului). Fie $M \in [AB] \Rightarrow [AM] \subset [AB]$. Demonstrăm prin reducere la absurd că $[AB] \subset S$. Presupunem că există $M \in S'$, deci $M \notin S$ (S și S' sînt semiplanele limitate de dreapta d), dar $M \in [AB]$. Din faptul că $A \in S$ și $M \in S' \Rightarrow |AM| \cap d \neq \emptyset$ (din teorema de separare a planului). Rezultă că există $N \in |AB|$ și $N \in d \Rightarrow |AB| \cap d = \{N\} \Rightarrow [AB] \cap d = \{N\}$, ceea ce contrazice faptul că A și B $\in S$. Rezultă că $[AB] \subset S$.

Dacă $S = |dA = |dA \cup d$, iar $A, B \in d \Rightarrow [AB] \subset d \subset S$. Deci $[AB] \subset S$.

Dacă $S = |dA$ și $A, B \in |dA$, demonstrația se face ca în primul caz.

Dacă $S = |dA$ și A, B sînt astfel încît $A \in dA$, iar $B \in d$, se consideră $[AB] = |AB| \cup \{A, B\}$; se demonstrează ca în primul caz că $|AB| \subset S$ și cum $B \in d \Rightarrow B \in S \Rightarrow$ și în acest caz $[AB] \subset S$.

Problema 6. Dacă $A \notin d$ și $B \in d$, atunci $|BA| \subset |dA$.

Soluție. Arătăm că $(\forall) M \in |BA| \Rightarrow M \in |dA$. Dacă $M \in |BA| \Rightarrow B \notin |AM|$ (conform teoremei 2.2 pag. 12). Rezultă că $[AM] \cap d = \emptyset$; deci A și M sînt de aceeași parte a lui d; deoarece $A \in |dA \Rightarrow M \in |dA \Rightarrow |BA| \subset |dA$.

Problema 7. Dacă $A \notin d$ și $B \in d$, atunci $|BA| \subset |dA$.

Soluție. Fie $M \in |BA$.

Cazul 1: dacă $M \in |AB|$, rezultă conform problemei 6, pag. 16 că $|AB| \subset |dA$, deci $M \in |dA$.

Cazul 2: $M = A$. $A \in |dA \Rightarrow M \in |dA$.

Cazul 3: dacă $A \in |BM|$, rezultă că $B \notin |MA|$ (conform teoremei 2.2 pag. 12); dar $B \in MA$ și $B \in d \Rightarrow AM \cap d = \{B\}$. Cum $B \notin |AM|$, rezultă că $|AM| \cap d = \emptyset$; deci A și M sînt de aceeași parte a lui d . Cum $A \in |dA \Rightarrow M \in |dA$. Am arătat deci, că dacă $M \in |BA| \Rightarrow M \in |dA$ în oricare din situațiile posibile. Deci $|BA| \subset |dA$.

Problema 8. Să se arate că intersecția dintre o dreaptă d și un semiplan deschis este sau dreapta d sau o semidreaptă deschisă sau mulțimea vidă.

Soluție. Fie a dreapta care limitează semiplanele S și S' , deschise. Avem următoarele cazuri:

Cazul 1: dacă $d \subset S$ sau $d \subset S'$ (ceea ce se întîmplă dacă $d \parallel a$, rezultă că $d \cap S = d$ sau $d \cap S' = d$; dacă $d \cap S' = d \Rightarrow d \cap S = \emptyset$.

Cazul 2: dacă d are un punct A în S și punct B în S' , $\Rightarrow d \cap a = \{M\}$ (rezultă din teorema de separare a planului); $A, B \in d$. Rezultă, conform problemei 7, pag. 16, că $|MA| \subset S$ și $|MB| \subset S'$, deci $d \cap S = |MA|$ și $d \cap S' = |MB|$. Deci intersecția dintre d și S sau S' este sau dreapta d sau mulțimea vidă (cazul 1), sau o semidreaptă deschisă (cazul 2).

Problema 9. Dacă M este un punct pe latura $[AB]$ a unui triunghi ABC , iar P un punct ce se găsește de aceeași parte a dreptei AB ca și C , atunci semidreapta $|MP|$ intersectează latura $[BC]$ sau $[CA]$ a triunghiului.

Soluție. $P \notin AB$ (ipoteză). Dacă $M = A \Rightarrow |MP| \cap [AC] = \{A\}$. Dacă $M = B \Rightarrow |MP| \cap [BC] = \{B\}$. Dacă $M \in |AB|$, cum $P \notin AB \Rightarrow MP$ separă A și B . Conform axiomei de separare a planului, MP separă A și C sau B și C . Presupunem că separă A și C . $\Rightarrow (\exists) Q$ astfel încît $MP \cap [AC] = \{Q\}$, iar $A, C \notin MP \Rightarrow Q \neq A$ și $Q \neq C \Rightarrow Q \in |AC|$. Să arătăm că $Q \in |MP|$; $Q \in |AC| \Rightarrow A \notin |QC| \Rightarrow |QC| \cap AB = \emptyset$. Dar $Q \neq A, C \neq A$ și $C \neq B \Rightarrow [QC] \cap AB = \emptyset \Rightarrow Q$ și C sînt de aceeași parte a lui AB . Cum P și C sînt de aceeași parte a lui AB (ipoteză) $\Rightarrow P$ și Q sînt de aceeași parte a lui $AB \Rightarrow [PQ] \cap AB = \emptyset \Rightarrow Q \in |MP| \Rightarrow |MP| \cap [AC] = \{Q\}$.

Problema 10. Fie ABC un triunghi, $B' \in |AC|$ și $C' \in |AB|$. Să se arate că segmentele $|BB'|$ și $|CC'|$ au un punct comun.

Soluție. Fie triunghiul ACC' și transversala BB' ; știm că BB' separă A, C și nu separă A, C' (ipoteză) $\Rightarrow$ separă $C, C' \Rightarrow (\exists) Q$ astfel încât $[CC'] \cap BB' = \{Q\}$.

Fie acum triunghiul ABB' și transversala CC' ; ea separă A și B , dar nu separă $A, B' \Rightarrow$ separă $B, B' \Rightarrow (\exists) Q'$ astfel încât $[BB'] \cap CC' = \{Q'\}$. $Q \in BB', Q \in CC', Q' \in BB'$ și $Q' \in CC'$. Dacă $Q \neq Q' \Rightarrow BB'$ și CC' coincid, contrar ipotezei. $\Rightarrow Q = Q', Q \in [CC'], Q \in [BB'] \Rightarrow Q \in [CC'] \cap [BB']$. $Q \neq C$ pentru că dacă $Q = C \Rightarrow B' = C$, contrar ipotezei, conform căreia $B' \in |AC| \Rightarrow B' \neq C$. La fel se arată că $Q \neq B, Q \neq B', Q \neq C' \Rightarrow |CC'| \cap |BB'| = \{Q\}$.

Problema 11. Folosind notațiile din exercițiul 10, fie $D \in |BC|$. Să se arate că $|AD| \cap |B'C'| \neq \emptyset$.

Soluție. $B' \in |AC| \Rightarrow A \notin |B'C|$. Fie triunghiul $BB'C$; AD nu separă B', C pentru că $A \notin |B'C|$, dar AD separă B, C pentru că $D \in |BC| \Rightarrow AD$ separă $B, B' \Rightarrow (\exists) S$ astfel încât $AD \cap [BB'] = \{S\}$; $S \neq B$ și $S \neq B'$, pentru că dacă $S = B'$ sau $S = B \Rightarrow D = C$ sau $D = B$, ceea ce contrazice ipoteza, conform căreia $D \in |BC| \Rightarrow AD \cap |BB'| = \{S\}$. În triunghiul $BB'C'$; AD separă B, B' dar AD nu separă B, C' , pentru că $C' \in |AB|$ și deci $A \notin |C'B| \Rightarrow AD$ separă B', C' , deci $(\exists) T$, astfel încât $AD \cap [B'C'] = \{T\}$; $T \neq B'$ și $T \neq C'$, pentru că dacă $T = B' \Rightarrow D = C$, iar dacă $T = C' \Rightarrow D = B$, contrar ipotezei care arată că $D \in |BC|$.

Să arătăm că $T \in |AD|$. Dacă $T \notin |AD| \Rightarrow C'B'$ separă A și C , dar nu separă A și $D \Rightarrow$ separă D și $C \Rightarrow (\exists) R$ astfel încât $C'B' \cap |DC| = \{R\} \Rightarrow C'B'$ taie toate laturile triunghiului ABC , absurd. $\Rightarrow |AD| \cap |B'C'| = \{T\}$, deci $|AD| \cap |B'C'| \neq \emptyset$.

Mulțimi convexe

Problemele de la pagina 17

Problema 1. Arătați că planul P și orice dreaptă sînt mulțimi convexe.

Soluție. Trebuie să arătăm că oricare ar fi $A, B \in P \Rightarrow |AB| \subset P$.

Dacă $A, B \in P \Rightarrow (\exists) d$, o dreaptă unică astfel încît $A, B \in d$, conform axiomei de incidență I_4 , care afirmă că prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una. Dreapta d este inclusă în P , conform axiomei I_2 care afirmă că orice dreaptă este o submulțime a lui P . Deci $A, B \in d \subset P$. Să arătăm că dreapta este o mulțime convexă, deci că $A, B \in d \Rightarrow |AB| \subset d$. Cum $d \subset P$, va rezulta că $|AB| \subset P$.

Fie $A, B \in d$, presupunem că există $M \in |AB|$, dar $M \notin d$; $M \in |AB| \Rightarrow M, A, B$ coliniare, deci există o dreaptă d' astfel încît $M, A, B \in d'$. Dacă $d \neq d'$ contrazicem axioma I_4 , care afirmă că prin 2 puncte distincte trece o singură dreaptă. Deci $d = d'$, $\Rightarrow M \in d$; $\Rightarrow |AB| \subset d$, deci dreapta este o mulțime convexă.

Dacă $|AB| \subset d \subset P$, rezultă că și planul este o mulțime convexă.

Problema 2. Orice segment și orice semidreaptă sînt mulțimi convexe.

Soluție. Vom demonstra că $(\forall) C, D \in |AB| \Rightarrow |CD| \subset |AB|$.

Dacă $C \in |AB| \Rightarrow x_A < x_C < x_B$. Dacă $D \in |AB| \Rightarrow x_A < x_D < x_B$. Dacă $M \in |CD| \Rightarrow x_C < x_M < x_D$. Deci $x_A < x_C < x_M < x_D < x_B \Rightarrow x_A < x_M < x_B \Rightarrow M \in |AB|$. $\Rightarrow |CD| \subset |AB|$. Deci, orice segment este o mulțime convexă.

Să arătăm că orice semidreaptă este o mulțime convexă.

Fie $C, D \in |AB$. Să arătăm că $|CD| \subset |AB|$; $|AB| = \{M / x_M \in (x_A, \infty)\}$ dacă $x_A < x_B$. Fie $P \in |CD| \Rightarrow x_C < x_P < x_D$; dar $x_C > x_A$ și cum $x_P > x_C \Rightarrow x_P > x_A \Rightarrow P \in |AB| \Rightarrow |CD| \subset |AB| \Rightarrow |AB|$ mulțime convexă.

Problema 3. Arătați că semiplanele deschise și semiplanele închise sînt mulțimi convexe.

Soluție. Conform problemei 5, § 5, pag. 16, rezultă că dacă $A, B \in S$, unde S este un semiplan deschis sau închis, rezultă că $[AB] \subset S$. Cum $|AB| \subset [AB] \Rightarrow |AB| \subset S$, deci S este o mulțime convexă.

Problema 4. Fie $\widehat{BAC}$ un unghi propriu. Să se arate că: a) $|BC| \subset \text{Int } \widehat{BAC}$; b) $D \in \text{Int } \widehat{BAC} \Rightarrow |ADC| \subset \text{Int } \widehat{BAC}$.

Soluție. Notăm AB cu d_1 și AC cu d_2 ; $\text{Int } \widehat{BAC} = |d_1| \cap |d_2|$; $B \in d_1$ și $C \notin d_1 \Rightarrow |BC| \subset d_1$ (conform problemei 6, § 5, pag. 16). La fel, rezultă că $|BC| \subset |d_2| \Rightarrow |BC| \subset \text{Int } \widehat{BAC}$.

b) Dacă $A \in d_1$ și $D \notin d_1 \Rightarrow |AD| \subset d_1$ (Am aplicat rezultatul din problema 7, § 5, pag. 16). La fel, $A \in d_2$ și $D \notin d_2 \Rightarrow |AD| \subset d_2$. Cum $|AD| \subset d_1$ și $|AD| \subset d_2 \Rightarrow |AD| \subset |d_1| \cap |d_2| \Rightarrow |AD| \subset \text{Int } \widehat{BAC}$.

Problema 5. Interiorul unui triunghi se definește astfel:

$\text{Int } ABC \stackrel{\text{def}}{=} |aA| \cap |bB| \cap |cC|$, unde $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Să se arate că:

- a) $\text{Int } ABC$ este o mulțime convexă; b) $\text{Int } ABC = \text{Int } \widehat{ABC} \cap \text{Int } \widehat{BAC} \cap \text{Int } \widehat{CAB}$;
c) $\text{Int } ABC = |aA| \cap \text{Int } \widehat{BAC}$.

Soluție. a) $\text{Int } ABC$ este o mulțime convexă fiind o intersecție de 3 semiplane deschise care sînt mulțimi convexe. (Am aplicat teorema 1, pag. 18).

b) $\text{Int } \widehat{ABC} = |cC| \cap |aA|$; $\text{Int } \widehat{BCA} = |aA| \cap |bB|$; $\text{Int } \widehat{BAC} = |cC| \cap |bB| \Rightarrow \Rightarrow \text{Int } \widehat{ABC} \cap \text{Int } \widehat{BCA} \cap \text{Int } \widehat{BAC} = |cC| \cap |aA| \cap |bB| \stackrel{\text{def}}{=} \text{Int } ABC$.

c) $\text{Int } ABC = |aA| \cap |bB| \cap |cC| = |aA| \cap (|bB| \cap |cC|) = |aA| \cap \text{Int } \widehat{BAC}$.

Problema 6. Fie ABC un triunghi și $D \in |BC|$. Se iau punctele E și F în așa fel ca $B \in |AE|$ și $D \in |AF|$. Să se arate că $F \in \text{Int } \widehat{CBE}$.

Soluție. Notăm $BC = a$ și $AB = b$; $D \in |BC|$ și $D \in |AF| \Rightarrow |BC| \cap |AF| = \{D\} \Rightarrow A, F$ sînt în semiplane opuse față de a ; $B \in |AE| \Rightarrow A, E$ sînt în semiplane opuse față de a ; $\Rightarrow E$ și F sînt de aceeași parte a lui $a \Rightarrow F \in |aE|$.
 $D \in |BC| \Rightarrow B \notin |DC| \Rightarrow |DC| \cap b = \emptyset \Rightarrow D, C$ sînt de aceeași parte a lui b ;
 $A \in b$, $D \notin b \Rightarrow |AD| \subset |bD| = |bC|$ (conform problemei 7, § 5, pag. 16). $F \in |AD|$ și $|AD| \subset |bC| \Rightarrow F \in |bC| \Rightarrow F \in |aE| \cap |bC| = \text{Int } \widehat{EBC} \Rightarrow F \in \text{Int } \widehat{EBC}$.

Problema 7. Fie $\widehat{BAC}$ un unghi propriu și $D \in \text{Int } \widehat{BAC}$. Să se arate că $\text{Int } \widehat{BAD} \subset \text{Int } \widehat{BAC}$.

Soluție. Notăm AB cu d_1 , AC cu d_2 și AD cu d_3 .
 $\text{Int } \widehat{BAD} = |d_1 D \cap |d_3 B = |d_1 C \cap |d_3 B \subset |d_1 C \cap |d_2 B = \text{Int } \widehat{BAC}$.

Problema 8. Fie $\widehat{BAC}$ un unghi propriu și $D \in \text{Int } \widehat{BAC}$. Să se arate că punctele B și C sînt de o parte și de alta a dreptei AD .

Soluție. $D \in \text{Int } \widehat{BAC} \Rightarrow |AD \cap |BC| \neq \emptyset$ (conform teoremei transversalei).
 Rezultă că AD separă punctele B și C , deci B și C sînt de o parte și de alta a dreptei AD .

Problema 9. Fie punctele B și C situate de aceeași parte a dreptei OA . Să se arate că $C \in \text{Int } \widehat{AOB}$ sau $B \in \text{Int } \widehat{AOC}$ sau $\widehat{AOB} \equiv \widehat{AOC}$.

Soluție. E suficient să considerăm cazul $B \notin \text{Int } \widehat{AOC}$ și $B \notin |OC$, căci altfel afirmația este evidentă. Arătăm că $|AB| \cap |OC| \neq \emptyset$. Presupunînd că $|AB| \cap |OC| = \emptyset$, A și B ar fi de aceeași parte a lui OC , adică $B \in \text{Int } \widehat{AOC}$ sau $B \in |OC$, contrar presupunerii făcute inițial. Deci $|AB| \cap |OC| \neq \emptyset$. Fie $|AB| \cap |OC| = \{P\}$. Să demonstrăm că $P \in |OC$. Conform problemei 3, § 6, pag. 16, știm că semiplanele (închise sau deschise) sînt mulțimi convexe. Cum intersecția unor mulțimi convexe dă o mulțime convexă (teorema 1, pag. 18) rezultă că interiorul unui unghi este o mulțime convexă. Deci $\text{Int } \widehat{AOB} \cup |OA| \cup |OB|$ este o mulțime convexă. $A \in |OA|$ și $B \in |OB| \Rightarrow |AB| \subset \text{Int } \widehat{AOB}$ ($|AB| \not\subset |OA|$ și $|AB| \not\subset |OB|$, pentru că A, O, B nu sînt coliniare).
 Cum $P \in |AB| \Rightarrow P \in \text{Int } \widehat{AOB} \Rightarrow P, B$ sînt de aceeași parte a lui $OA \Rightarrow P, B, C$ sînt de aceeași parte a lui OA . Dacă $P \notin |OC$, ci semidreptei opuse $|OC' \Rightarrow P$ și C sînt în semiplane opuse față de OA . Am ajuns la o contradicție. Deci $P \in |OC$. Cum $|OP| \subset \text{Int } \widehat{AOB} \Rightarrow C \in \text{Int } \widehat{AOB}$.

Problema 10. Dacă punctul P aparține interiorului triunghiului ABC , atunci dreapta AP intersectează segmentul $[BC]$ într-un punct A' și $P \in |AA'|$.

Soluție. $P \in \text{Int } ABC = \text{Int } \widehat{CAB} \cap \text{Int } \widehat{ABC} \cap \text{Int } \widehat{ACB} \Rightarrow P \in \text{Int } \widehat{CAB}$.
 Rezultă, conform teoremei transversalei, că $|AP| \cap |BC| \neq \emptyset \Rightarrow AP \cap [BC] \neq \emptyset$ și fie $AP \cap [BC] = \{A'\}$; $P \in |AA'|$, pentru că, în caz contrar, $P \notin \text{Int } ABC$.

Problema 11. Dacă dreapta d trece printr-un punct P , situat în interiorul triunghiului ABC , atunci dreapta d intersectează triunghiul. În câte puncte?

Soluție. $P \in \text{Int } ABC \Rightarrow AP \cap [BC] = \{A'\}$, unde $P \in |AA'|$ (conform problemei 10, pag. 19).

Luăm triunghiul ABA' : $d \cap |AA'| = \{P\} \Rightarrow d$ intersectează încă o latură a triunghiului (conform corolarului pag. 15, § 5). Deci d intersectează $|AB|$ sau $|BA'|$. Fie acum triunghiul $AA'C$: $d \cap |AA'| = \{P\} \Rightarrow d$ intersectează $|A'C|$ sau $|AC|$. Nu este posibil ca d să taie latura BC în 2 puncte distincte, adică să taie și pe $|BA'|$ și pe $|A'C|$, pentru că dreapta d ar coincide cu BC . Dar $P \in \text{Int } ABC \Rightarrow P \notin |BC|$. Am ajuns deci, la o contradicție. Înseamnă că d nu poate tăia $|BC|$ în 2 puncte diferite. Rezultă că dreapta d taie triunghiul în 2 puncte situate pe 2 laturi diferite.

Problema 12. Fie A și C de o parte și de alta a dreptei BB' , iar $O \in |BB'|$, $O \notin |AC|$. Să se arate că dintre semidreptele $|OB$ și $|OB'|$ exact una este situată în interiorul unghiului $\widehat{AOC}$.

Soluție. Cum A și C sînt de o parte și de alta a dreptei $BB' \Rightarrow BB' \cap |AC| = \{M\}$. Conform problemei 4, § 6, pag. 18, $\Rightarrow |AC| \subset \text{Int } \widehat{AOC}$. Cum $M \in |AC| \Rightarrow M \in \text{Int } \widehat{AOC}$; $M \in BB' \Rightarrow M \in |OB|$ sau $M \in |OB'|$. Dacă $M \in |OB| \Rightarrow |OB| \subset \text{Int } \widehat{AOC}$. Dacă $M \in |OB'| \Rightarrow |OB'| \subset \text{Int } \widehat{AOC}$. Cele 2 semidrepte nu pot fi situate amîndouă în interiorul unghiului, pentru că punctele B , O , B' fiind coliniare, cele 2 semidrepte ar coincide. Deci, exact una dintre ele este situată în interiorul unghiului.

Problema 13. Fie P un punct în interiorul unghiului propriu $\widehat{AOB}$, iar Q un punct în exteriorul lui (adică $Q \notin \text{Int } \widehat{AOB} \cup [OA \cup [OB)$. Să se arate că segmentul $|PQ|$ intersectează o latură a unghiului $\widehat{AOB}$.

Soluție. Fie A' astfel încît $O \in |AA'|$ și B' astfel încît $O \in |BB'|$. Notăm dreapta AA' cu a și dreapta BB' cu b .

Cazul 1: dacă $Q \in \text{Int } AOB'$ atunci Q și P sînt de o parte și de alta a dreptei AA' și conform teoremei de separare a planului $AA' \cap |PQ| \neq \emptyset$. Fie

$AA' \cap |PQ| = \{M\}$; $Q, P \in |bA|$ și cum un semiplan este o mulțime convexă rezultă că $|PQ| \subset |bA|$; dar $M \in |PQ| \Rightarrow M \in |bA|$. Cum $M \in AA' \Rightarrow M \in AA' \cap |bA| \Rightarrow M \in |OA|$.

Deci $|PQ|$ taie latura $|OA|$ a unghiului $\widehat{AOB}$.

Cazul 2: dacă $Q \in \text{Int } \widehat{BOA'}$ se arată în mod analog că $|PQ|$ taie latura $|OB|$.

Cazul 3: dacă $Q \in \text{Int } \widehat{A'OB'}$, cum P și Q sînt de o parte și de alta a dreptei $AA' \Rightarrow AA' \cap |PQ| \neq \emptyset \Rightarrow AA' \cap |PQ| = \{R\}$. Dar P și Q sînt de o parte și de alta a dreptei $BB' \Rightarrow BB' \cap |PQ| = \{R_1\}$. Dacă $R \in |OA' \Rightarrow R_1 \in |OB|$, pentru că în caz contrar $R_1 \in |OB' \Rightarrow R$ și $R_1 \in |aB'|$, care este o mulțime convexă; $\Rightarrow RR_1 \subset |aB' \Rightarrow P \in |aB'|$; dar $P \in \text{Int } \widehat{AOB} \not\subset |aB'|$. Contradicție. $\Rightarrow R_1 \in |OB|$. ($R_1 \notin |OA|$ pentru că dreapta RR_1 ar coincide cu AA' , avînd 2 puncte comune și P ar aparține $|OA|$, contrar ipotezei). Dacă $R \in |OB'$ se demonstrează analog.

Problema 14. Să se arate că diagonalele $[AC]$ și $[BD]$ ale unui patrulater convex au un punct comun.

Soluție. $C \in \text{Int } \widehat{BAD} \Rightarrow |AC \cap [BD] = \{M\}$ (teorema transversalei); la fel: $A \in \text{Int } \widehat{DCB} \Rightarrow |CA \cap |BD| = \{M'\}$; $M, M' \in AC$ și $M, M' \in BD \Rightarrow M = M'$, căci altfel AC și BD coincid. $M \in |AC|$ și $M \in |CA| \Rightarrow M \in |AC \cap |CA| \Rightarrow M \in |AC|$; cum $M \in |BD| \Rightarrow M \in |AC| \cap |BD| \Rightarrow M \in [AC] \cap [BD]$.

Problema 15. Dacă diagonalele $[AC]$ și $[BD]$ ale patrulaterului $ABCD$ au un punct comun, atunci patrulaterul este convex.

Soluție. Fie $\{O\} = [AC] \cap [BD]$. Cum $O \in |AC| \Rightarrow O$ și C sînt de aceeași parte a dreptei AB , adică $|OC| \cap AB = \emptyset$. Analog, $O \in |BD| \Rightarrow |OD| \cap AB = \emptyset \Rightarrow O$ și D sînt de aceeași parte a lui AB . Deci C și D sînt de aceeași parte a lui AB . La fel se arată că C și B sînt de aceeași parte a dreptei AD ; A și B de aceeași parte a lui CD ; A și D de aceeași parte a dreptei BC . Deci poligonul este convex, pentru că oricare 2 vîrfuri se găsesc de aceeași parte a dreptei determinate de celelalte 2 vîrfuri.

Problema 16. Un vîrf al unui patrulater $ABCD$ se marchează cu un semn dacă și numai dacă el este situat în interiorul unghiului opus (de

exemplu A va fi marcat dacă $A \in \text{Int } \widehat{BCD}$). Să se demonstreze că: a) Cel puțin unul din vîrfurile A, B, C, D va fi marcat. b) Dacă 2 vîrfuri sînt marcate, atunci patrulaterul este convex și toate vîrfurile sale vor fi marcate.

Soluție. a) Dacă patrulaterul nu este convex, fie latura $[AB]$ astfel încît punctele C și D să fie de o parte și de alta a dreptei AB; deci $AB \cap |CD| = \{E\}$; $E \notin [AB]$, căci poligonul nu se autoîntersectează. Dacă $B \in |AE|$ cum $A \in |DA|$ și $E \in |DC| \Rightarrow B \in \text{Int } \widehat{ADC}$, deci B este marcat.

Cum $A \notin |BE| \Rightarrow A \notin \text{Int } \widehat{DCB}$, deci A nu este marcat.

Prin același raționament, $BC \cap |AD| = \{F\}$ și $B \in |FC|$; cum $C \notin |BF| \Rightarrow C \notin \text{Int } \widehat{BAD} \Rightarrow C$ nu este vîrf marcat. Dacă B este marcat, vîrfurile D, nu este marcat. Deci în acest caz doar un vîrf este marcat.

Dacă patrulaterul este convex $A \in \text{Int } \widehat{BCD} \Rightarrow A$ este marcat. La fel se arată și pentru celelalte vîrfuri. Deci toate vîrfurile sale sînt marcate.

b) Să arătăm că dacă 2 vîrfuri sînt marcate, atunci patrulaterul este convex.

Cazul 1: considerăm 2 vîrfuri alăturate marcate, de exemplu B și C.

$B \in \text{Int } \widehat{ADC} \Rightarrow |DB \cap |AC| = \{M\}$. $C \in \text{Int } \widehat{BAD} \Rightarrow |AC \cap |BD| = \{P\}$. Arătăm că P și M coincid. $P \in |AC| \Rightarrow P \in AC$; $P \in |BD| \Rightarrow P \in BD$; $\Rightarrow P \in AC \cap BD$.

La fel, $M \in |DB| \Rightarrow M \in DB$; $M \in |AC| \Rightarrow M \in AC$; $\Rightarrow M \in DB \cap AC$. Dacă $M \neq P \Rightarrow AC$ și BD coincid, contrar ipotezei. Deci $M = P$. $M \in |AC|$ și $M \in |BD|$

$\Rightarrow$ diagonalele patrulaterului au un punct comun. Rezultă că patrulaterul este convex.

(Am aplicat problema 15, § 6, pag. 21).

Cazul 2: dacă B și D sînt marcate, atunci $B \in \text{Int } \widehat{ADC} \Rightarrow |AC| \cap |DB| = \{M\}$. $D \in \text{Int } \widehat{ABC} \Rightarrow |AC| \cap |BD| = \{M'\}$. Se arată ca în cazul 1 că M și M' coincid. $M \in |DB|$ și $M \in |BD| \Rightarrow M \in |DB \cap |BD| = |BD|$. Rezultă că $|BD|$ și $|AC|$ au un punct comun, deci patrulaterul este convex.

Problema 17. Intersecția semiplanelor închise limitate de suporturile laturilor unui poligon convex P coincide cu mulțimea $\text{Int } P \cup P$.

Soluție. $\text{Int } P$ este intersecția semiplanelor deschise limitate de suporturile laturilor poligonului și care conțin vîrfurile nesituate pe laturile respective. Intersecția semiplanelor închise limitate de suporturile laturilor unui poligon convex și care conține vîrfurile nesituate pe laturile respective, va conține și segmentele laturi, deci $\text{Int } P \cup P$ este inclus în intersecția acestor

sempiplane închise.

Reciproc: dacă M aparține intersecției semiplanelor închise limitate de suporturile laturilor și de vîrfurile nesituate pe laturile respective și dacă M nu aparține nici unui suport de latură, rezultă că $M \in \text{Int } P$. Dacă M aparține unui suport de latură, de exemplu $M \in [P_k P_{k+1}]$, atunci M și P_{k+1} sînt de aceeași parte a dreptei $P_k P_{k-1}$ sau $M = P_k \Rightarrow M \in [P_k P_{k+1}]$.

Analog M și P_k sînt de aceeași parte a dreptei $P_{k+1} P_{k+2}$ sau $M = P_{k+1} \Rightarrow M \in [P_{k+1} P_k]$. Din relațiile $M \in [P_k P_{k+1}]$ și $M \in [P_{k+1} P_k] \Rightarrow M \in [P_k P_{k+1}] \subset P$. Deci în ambele situații $M \in \text{Int } P \cup P$. Deci intersecția semiplanelor închise limitate de suporturile laturilor și care conțin vîrfurile nesituate pe laturile respective este inclusă în $\text{Int } P \cup P$. Am demonstrat deci că intersecția acestor semiplane închise este egală cu $\text{Int } P \cup P$.

Problema 18. Reuniunea unui poligon convex cu interiorul său este o mulțime convexă.

Soluție. S-a demonstrat că $\text{Int } P \cup P$ este intersecția semiplanelor închise limitate de suporturile laturilor poligonului și care conțin vîrfurile nesituate pe laturile respective (problema 17, § 6, pag. 21). Cum semiplanul închis este o mulțime convexă (problema 3, § 6, pag. 17) și intersecția unormulțimi convexe este convexă (teorema 1, pag. 18) $\Rightarrow \text{Int } P \cup P$ este o mulțime convexă.

Problema 19. Fie $P_1 P_2 \dots P_{n+1}$ o linie poligonală. Dacă P_1 și P_{n+1} sînt de o parte și de alta a unei drepte d , atunci această dreaptă intersectează linia poligonală.

Soluție. P_1 și P_{n+1} sînt de o parte și de alta a dreptei d . $P_{n+1} \notin \text{ld } P_1$ și $P_1 \in \text{ld } P_{n+1}$. Există vîrfuri ale liniei poligonale situate de aceeași parte a lui d ca și P_{n+1} sau nu există asemenea vîrfuri dacă d trece prin P_n și P_{n+1} . Notăm cu k cel mai mic indice ($k \geq 2$) pentru care $P_k \notin \text{ld } P_1$. Atunci $[P_{k-1} P_k] \cap d \neq \emptyset$, deci și $[P_{k-1} P_k] \cap d \neq \emptyset$.

Problema 20. Dacă o dreaptă d nu este suportul unei laturi a unui poligon convex, atunci d are cel mult 2 puncte comune cu poligonul dat.

Soluție. Pentru a demonstra că d are în comun cu poligonul convex cel mult 2 puncte, demonstrăm că nu au în comun 3 puncte. Presupunem, prin reducere la absurd că $P \cap d = \{A, B, C\}$. Cum $A, B, C \in d$, deci sînt coliniare, rezultă că unul dintre ele este situat între celelalte două. Fie, de exemplu $B \in |AC|$. Din ipoteză știm că d nu este suport nici unei laturi, deci există $k(k \geq 1)$ astfel încît $d \cap [P_k P_{k+1}] \neq \emptyset$ (problema 19, § 6, pag. 21).
 $\Rightarrow d \cap [P_k P_{k+1}] = \{B\}$. Cum $B \in |AC| \Rightarrow |AC| \cap [P_k P_{k+1}] = \{B\} \Rightarrow A$ și C sînt de o parte și de alta a lui $P_k P_{k+1}$, adică de o parte și de alta a suportului unei laturi, ceea ce contrazice definiția poligonului convex, conform căreia vîrfurile sale nesituate pe aceeași latură sînt de aceeași parte a suportului laturii. Rezultă că dreapta d și poligonul au în comun cel mult 2 puncte.

Problema 21. Dacă $P_1 P_2 \dots P_n$ este un poligon convex, unde $n \geq 4$, atunci $P_2 P_3 \dots P_n$ este de asemenea un poligon convex.

Soluție. Fie $d = P_2 P_n$; $[P_3, P_4] \cap d = \emptyset$, $[P_4 P_5] \cap d = \emptyset \dots$
 $\dots [P_{n-2} P_{n-1}] \cap d = \emptyset$, căci altfel, d ar avea 3 puncte comune cu poligonul. Deci $P_4 \in |dP_3$, $P_5 \in |dP_4 = |dP_3$ etc. Deci $P_3, P_4, \dots, P_{n-1}$, sînt de aceeași parte a dreptei d . Deci $[P_2 P_n]$ este latură de poligon convex. Din faptul că $P_1, P_2, \dots, P_n$ era poligon convex, rezultă că pentru fiecare din laturile $[P_2 P_3], [P_3 P_4], \dots, [P_{n-1}, P_n]$, toate vîrfurile nesituate pe latura respectivă se găsesc de aceeași parte a dreptei, suport al laturii. Deci poligonul $P_2 P_3 \dots P_n$ este convex.

Problema 22. Fie $P_1 P_2 \dots P_n$ un poligon convex și $i_1, i_2, i_3 \dots i_k$ numere naturale astfel ca $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, $k \geq 3$. Să se arate că $P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_k}$ este un poligon convex.

Soluție. Aplicăm problema 21, § 6, pag. 21 de mai multe ori. Obținem dacă $P_1 P_2 \dots P_n$ este convex, atunci $P_k P_{k+1} \dots P_n$, unde $k \geq 2$ este de asemenea convex. Fie $i_1 = k \Rightarrow P_{i_1} P_{k+1} \dots P_n$ este convex. Lăsînd din nou la o parte un număr finit de vîrfuri (cele cuprinse între i_1 și i_2) obținem alt poligon convex: $P_{i_1} P_{i_2} P_{m+1} \dots P_n$, unde $i_2 = m$. În același mod, lăsînd de fiecare dată la o parte un număr finit de vîrfuri, ajungem din aproape în aproape

la poligonul $P_1 P_2 \dots P_n$. Rezultă că și acesta este convex.

Problema 23. Fie $L = P_1 P_2 \dots P_n$ un poligon convex, $A \in \text{Int } L$ și $B \notin \text{Int } L$. Să se arate că $L \cap [AB] \neq \emptyset$. Câte puncte are această mulțime?

Soluție. $A \in \text{Int } L$. $B \notin \text{Int } L \Rightarrow B \in L$ sau $B \notin L$.

Dacă $B \in L \Rightarrow [AB] \cap L = \{B\}$. Dacă $B \notin L$, A și B fiind de o parte și de alta față de anumite suporturi de laturi ale poligonului, de exemplu față de $P_k P_{k+1}$, segmentul $[AB]$ va intersecta aceste drepte în câte un punct Q_k . Fie $|AQ_1|$ cel mai mic dintre segmentele $|AQ_k|$ și să presupunem că $Q_1 \notin L$. Atunci A și Q_1 sînt de o parte și de alta a cel puțin unei drepte $P_h P_{h+1}$, deci pentru $\{Q_h\} = [AB] \cap P_h P_{h+1}$ avem $Q_h \in |AQ_1|$. Rezultă $|AQ_h| < |AQ_1|$ în contradicție cu alegerea lui Q_1 . Deci $Q_1 \in L \Rightarrow L \cap [AB] \neq \emptyset$. Mulțimea $L \cap [AB]$ are un singur element: Q_1 .

Axiomele unghiului

Problemele de la pagina 24

Problema 1. Fie $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = 180^\circ$. Rezultă că A, O, C sînt coliniare?

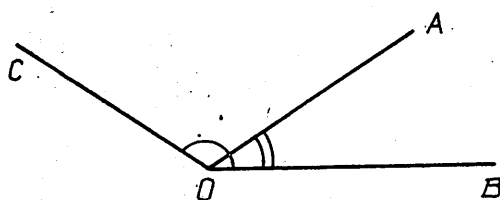


Fig. 2.

Soluție. Este posibil ca relația din enunț să fie îndeplinită, dar punctele să nu fie coliniare (ca în desenul alăturat). A, O, C sînt coliniare numai în cazul cînd $[OA]$ și $[OC]$ sînt semidrepte opuse.

Problema 2. Care din următoarele egalități sînt valabile în cazul figurii I.30 (desenul de mai jos): a) $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{COA})$, b) $m(\widehat{BOC}) + m(\widehat{COD}) = m(\widehat{BOD})$, c) $m(\widehat{COD}) + m(\widehat{DOA}) = m(\widehat{COA})$?

Soluție. Primele 2 egalități sînt adevărate. Am aplicat axioma adunării unghiurilor. Ultima relație nu este adevărată, deoarece este în contradicție

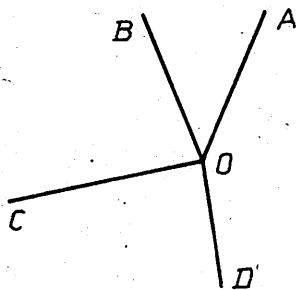


Fig. 3.

cu definiția funcției măsură a unghiurilor, $m:U \rightarrow [0^\circ; 180^\circ]$, care are mulțimea valorilor $[0^\circ; 180^\circ]$.

Problema 3. Știind că $m(\widehat{AOC}) = 60^\circ$, $B \in \text{Int } \widehat{AOC}$ și $m(\widehat{AOB}) = 23^\circ$, să se afle $m(\widehat{BOC})$.

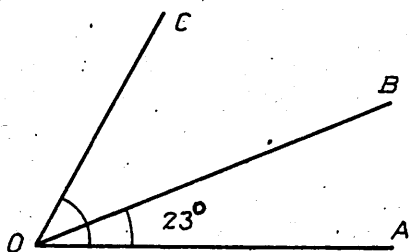


Fig. 4.

Soluție. Conform axiomei adunării unghiurilor există relația: $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{AOC}) \Rightarrow m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{AOC}) - m(\widehat{AOB}) = 60^\circ - 23^\circ = 37^\circ$. Deci: $m(\widehat{BOC}) = 37^\circ$.

Problema 4. Pe figura I.31 (desenul alăturat) $m(\widehat{COD}) = 30^\circ$. Să se afle $m(\widehat{AOC})$ și $m(\widehat{DOB})$, știind că $m(\widehat{DOB}) = 2 m(\widehat{AOC})$.

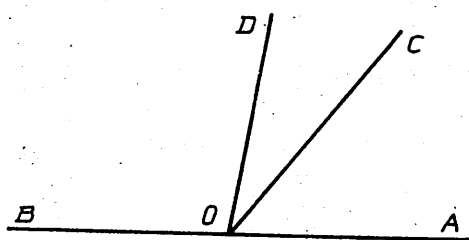


Fig. 5.

Soluție. Din figură rezultă că: $m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COD}) + m(\widehat{DOB}) = 180^\circ$, deoarece punctele A, O, B sînt coliniare.
 $m(\widehat{AOC}) + 30^\circ + 2 m(\widehat{AOC}) = 180^\circ$
 $3 m(\widehat{AOC}) + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow 3 m(\widehat{AOC}) = 150^\circ$
 $\Rightarrow m(\widehat{AOC}) = 50^\circ$; $m(\widehat{DOB}) = 2 m(\widehat{AOC}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow m(\widehat{DOB}) = 100^\circ$.

Problema 5. Fie $\widehat{AOC}$ un unghi propriu, A și C de o parte și de alta a dreptei OB și $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) < 180^\circ$; atunci $|OB| \subset \text{Int } \widehat{AOC}$.

Soluție. Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că $|OB| \not\subset \text{Int } \widehat{AOC}$, atunci semidreapta $|OB'|$ opusă cu $|OB|$, are proprietatea: $|OB'| \subset \text{Int } \widehat{AOC}$ (conform problemei 2, § 6, pag. 20). $\Rightarrow m(\widehat{AOB'}) = 180^\circ - m(\widehat{AOB})$;

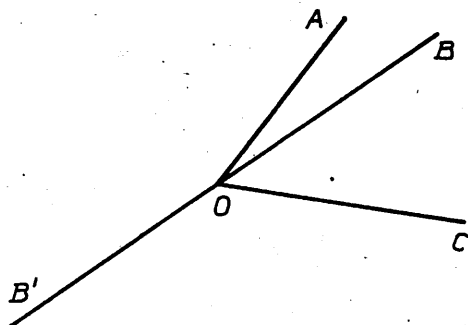


Fig. 6.

$m(\widehat{B'OC}) = 180^\circ - m(\widehat{BOC})$. Dacă $|OB'| \subset C \text{ Int } \widehat{AOC} \Rightarrow$ conform axiomei de adunare a unghiurilor că: $m(\widehat{AOB'}) + m(\widehat{B'OC}) = m(\widehat{AOC}) < 180^\circ$ (conform definiției măsurii unui unghi propriu). Pe de altă parte, din relațiile scrise mai sus rezultă că $m(\widehat{AOB'}) + m(\widehat{B'OC}) = 360^\circ - m(\widehat{AOB}) - m(\widehat{BOC}) > 180^\circ$, pentru că $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) < 180^\circ$ (conform

ipotezei). Rezultatele obținute sînt contradictorii. Deci presupunerea că $|OB'| \subset C \text{ Int } \widehat{AOC}$ nu este corectă. Rezultă că $|OBC| \subset \text{Int } \widehat{AOC}$.

Proprietăți de congruență

Problemele de la pagina 25

Problema 1. Punctele A, B, C, D, E situate pe o dreaptă, au abscisele $x_A = 1$, $x_B = 4$, $x_C = 9$, $x_D = 11$, $x_E = 12$. Găsiți segmente congruente determinate de aceste puncte.

Soluție. $\|OA\| = 1$, $\|OB\| = 4$, $\|OC\| = 9$, $\|OD\| = 11$, $\|OE\| = 12$.
 $\|AB\| = |x_B - x_A| = |4 - 1| = 3$. La fel se calculează și celelalte distanțe și obținem: $\|AC\| = 8$, $\|AD\| = 10$, $\|AE\| = 11$, $\|BC\| = 5$, $\|BD\| = 7$, $\|BE\| = 8$, $\|CD\| = 2$, $\|CE\| = 3$, $\|DE\| = 1$.

Segmentele congruente sînt: $|OA| \equiv |DE|$ deoarece $\|OA\| = \|DE\|$;
 $|AB| \equiv |CE|$, deoarece $\|AB\| = \|CE\|$, $|AC| \equiv |BE|$, deoarece $\|AC\| = \|BE\|$.

Problema 2. Găsiți unghiuri congruente pe figura I.33 (desenul alăturat).

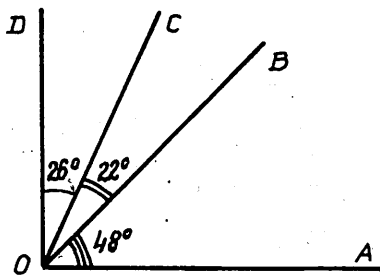


Fig. 7.

Soluție. Pe desen sînt date măsurile unor unghiuri: $m(\widehat{DOC}) = 26^\circ$, $m(\widehat{COB}) = 22^\circ$, $m(\widehat{BOA}) = 48^\circ$.

Unghiurile congruente sînt:

$$\begin{aligned} \widehat{AOB} &\equiv \widehat{BOD} \text{ deoarece } m(\widehat{BOD}) = m(\widehat{BOC}) + \\ &+ m(\widehat{COD}) = 22^\circ + 26^\circ = 48^\circ. (|OC| \subset \text{Int } \widehat{BOD}). \\ \Rightarrow m(\widehat{AOB}) &= m(\widehat{BOD}) = 48^\circ. \end{aligned}$$

Problema 3. Arătați că $|AB| > |CD|$ dacă și numai dacă există un punct $M \in |AB|$ astfel ca $|AM| \equiv |CD|$.

Soluție. Dacă $|AB| > |CD| \Rightarrow \|AB\| > \|CD\|$.

Considerăm semidreapta $|AB|$ și segmentul $|CD|$. Atunci conform teoremei de construcție a unui segment, rezultă că există un singur punct $M \in |AB|$, astfel încât $|AM| \equiv |CD|$. Să arătăm că $M \in |AB|$. Presupunem prin absurd că $M \notin |AB| \Rightarrow B \in |AM|$. Rezultă că $\|CD\| = \|AM\| = \|AB\| + \|MB\| \geq \|AB\|$, contrar ipotezei. Deci $M \in |AB|$; am demonstrat deci, că există un punct $M \in |AB|$ astfel încât $|AM| \equiv |CD|$.

Reciproc: presupunem că există $M \in |AB|$, astfel încât $|AM| \equiv |CD|$ și demonstrăm că $|AB| > |CD|$. Din $M \in |AB| \Rightarrow \|AM\| + \|MB\| = \|AB\|$. Dar $|AM| \equiv |CD| \Rightarrow \|AM\| = \|CD\|$. $\Rightarrow \|CD\| + \|MB\| = \|AB\| \Rightarrow \|AB\| > \|CD\| \Rightarrow |AB| > |CD|$.

Problema 4. $|AB| > |CD|$, $|CD| > |EF| \Rightarrow |AB| > |EF|$.

Soluție. Din relația $|AB| > |CD|$ rezultă $\|AB\| > \|CD\|$. Din $|CD| > |EF|$ rezultă $\|CD\| > \|EF\|$. $\Rightarrow \|AB\| > \|CD\| > \|EF\| \Rightarrow \|AB\| > \|EF\|$. (Am aplicat tranzitivitatea relației de inegalitate dintre numere reale) $\Rightarrow |AB| > |EF|$.

Problema 5. $|AB| \equiv |A'B'|$, $|CD| \equiv |C'D'|$, $|AB| > |CD| \Rightarrow \Rightarrow |A'B'| > |C'D'|$.

Soluție. $|AB| \equiv |A'B'| \Rightarrow \|AB\| = \|A'B'\|$; $|CD| \equiv |C'D'| \Rightarrow \|CD\| = \|C'D'\|$; $|AB| > |CD| \Rightarrow \|AB\| > \|CD\|$. Din relațiile scrise rezultă: $\|A'B'\| > \|C'D'\| \Rightarrow |A'B'| > |C'D'|$.

Problema 6. Fie $B \in |AC|$ și $B' \in |A'C'|$. Arătați că atunci:

- $|AB| > |A'B'|$, $|BC| > |B'C'|$ implică $|AC| > |A'C'|$.
- $|AC| > |A'C'|$, $|BC| < |B'C'|$ implică $|AB| > |A'B'|$.

Soluție. $|AB| > |A'B'|$ (din ipoteză) $\Rightarrow \|AB\| > \|A'B'\|$; $|BC| > |B'C'|$ (din ipoteză) $\Rightarrow \|BC\| > \|B'C'\|$. Adunând obținem: $\|AB\| + \|BC\| > \|A'B'\| + \|B'C'\| \Rightarrow \|AC\| > \|A'C'\| \Rightarrow |AC| > |A'C'|$.

b) $|AC| > |A'C'| \Rightarrow \|AC\| > \|A'C'\|$; dar $\|AC\| = \|AB\| + \|BC\|$ și $\|A'C'\| = \|A'B'\| + \|B'C'\|$; rezultă că $\|AB\| + \|BC\| > \|A'B'\| + \|B'C'\| > \|A'B'\| +$

+ $\|BC\|$, pentru că $|BC| > |B'C'|$; rezultă: $\|AB\| + \|BC\| > \|A'B'\| + \|BC\| \Rightarrow \|AB\| > \|A'B'\| \Rightarrow |AB| > |A'B'|$.

Problema 7. Fie C mijlocul segmentului $|AB|$ și D un punct cu proprietatea că B este mijlocul lui $|CD|$. Să se arate că $B \in |AD|$. Să se calculeze x_C și x_D , știind că $x_A = 2$, $x_B = 7$.

Soluție. C fiind mijlocul segmentului $|AB|$, abscisa lui se află cu formula:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{9}{2}; \quad x_C = \frac{9}{2}.$$

$$\text{La fel: } x_B = \frac{x_C + x_D}{2} \Rightarrow x_D = \frac{19}{2}; \quad x_A = 2 < x_B = 7 < x_D.$$

Rezultă că $x_A < x_B < x_D \Rightarrow B \in |AD|$.

Problema 8. Se consideră 3 puncte coliniare A, B, C și mijloacele D, E, F ale segmentelor $|AB|$, $|BC|$, $|AC|$. Să se arate că $|DE|$ și $|BF|$ au același mijloc.

Soluție. Fie $x_A = a$, $x_B = b$, $x_C = c$. D fiind mijlocul lui $|AB|$ rezultă: $x_D = \frac{a+b}{2}$. E fiind mijlocul lui $|BC|$ avem: $x_E = \frac{b+c}{2}$. F este mijlocul lui $|AC|$. $\Rightarrow x_F = \frac{a+c}{2}$.

Fie M mijlocul lui $|DE|$ și N al lui $|BF|$. Atunci:

$$x_M = \frac{x_D + x_E}{2} = \frac{a+c+2b}{4} \quad \text{și} \quad x_N = \frac{a+c+2b}{4} \Rightarrow x_M = x_N, \text{ deci segmentele } |DE| \text{ și } |BF| \text{ au același mijloc.}$$

Problema 9. Arătați: $\widehat{hk} > \widehat{h'k'}$ și $\widehat{h'k'} > \widehat{h''k''} \Rightarrow \widehat{hk} > \widehat{h''k''}$.

Soluție. $\widehat{hk} > \widehat{h'k'} \Rightarrow m(\widehat{hk}) > m(\widehat{h'k'})$; $\widehat{h'k'} > \widehat{h''k''} \Rightarrow m(\widehat{h'k'}) > m(\widehat{h''k''})$.

Rezultă că $m(\widehat{hk}) > m(\widehat{h''k''}) \Rightarrow \widehat{hk} > \widehat{h''k''}$.

Problema 10. $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$, $\widehat{lm} \equiv \widehat{l'm'}$, $\widehat{hk} > \widehat{lm} \Rightarrow \widehat{h'k'} > \widehat{l'm'}$.

Soluție. $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'} \Rightarrow m(\widehat{hk}) = m(\widehat{h'k'})$; $\widehat{lm} \equiv \widehat{l'm'} \Rightarrow m(\widehat{lm}) = m(\widehat{l'm'})$;

$$\widehat{hk} > \widehat{lm} \Rightarrow m(\widehat{hk}) > m(\widehat{lm}) \Rightarrow m(\widehat{h'k'}) > m(\widehat{l'm'}) \Rightarrow \widehat{h'k'} > \widehat{l'm'}.$$

Problema 11. Fie $C \in \text{Int } \widehat{AOB}$, $C' \in \text{Int } \widehat{A'O'B'}$. Să se arate că:

- a) $\widehat{AOC} > \widehat{A'O'C'}$, $\widehat{COB} > \widehat{C'O'B'} \Rightarrow \widehat{AOB} > \widehat{A'O'B'}$;
 b) $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$, $\widehat{AOC} > \widehat{A'O'C'} \Rightarrow \widehat{COB} < \widehat{C'O'B'}$.

Soluție. a) $\widehat{AOC} > \widehat{A'O'C'}$ (din ipoteză) $\Rightarrow m(\widehat{AOC}) > m(\widehat{A'O'C'})$;
 $\widehat{COB} > \widehat{C'O'B'} \Rightarrow m(\widehat{COB}) > m(\widehat{C'O'B'})$. Adunăm și obținem: $m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COB}) > m(\widehat{A'O'C'}) + m(\widehat{C'O'B'}) \Rightarrow m(\widehat{AOB}) > m(\widehat{A'O'B'}) \Rightarrow \widehat{AOB} > \widehat{A'O'B'}$.
 b) $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$ (din ipoteză) $\Rightarrow m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{A'O'B'}) \Rightarrow m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COB}) = m(\widehat{A'O'C'}) + m(\widehat{C'O'B'}) < m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{C'O'B'})$; deci $m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COB}) < m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{C'O'B'}) \Rightarrow m(\widehat{COB}) < m(\widehat{C'O'B'}) \Rightarrow \widehat{COB} < \widehat{C'O'B'}$.

Problema 12. Arătați că $\widehat{AOB} > \widehat{COD}$ dacă și numai dacă există o semidreaptă $OM \subset \text{Int } \widehat{AOB}$ astfel încât $\widehat{AOM} \equiv \widehat{COD}$.

Soluție. Presupunem că $\widehat{AOB} > \widehat{COD}$ și demonstrăm că există $OM \subset \text{Int } \widehat{AOB}$ astfel încât $\widehat{AOM} \equiv \widehat{COD}$.

Din relația: $\widehat{AOB} \equiv \widehat{COD}$, rezultă că putem construi semidreapta OM în semiplanul limitat de OA și conținând B în așa fel încât $\widehat{AOM} \equiv \widehat{COD}$. Dacă $OM \not\subset \text{Int } \widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{AOM} \equiv \widehat{COD} \equiv \widehat{AOB} + \widehat{BOM} > \widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{COD} > \widehat{AOB}$, contrar ipotezei. Rezultă că $OM \subset \text{Int } \widehat{AOB}$.

Reciproc: să arătăm că dacă există $OM \subset \text{Int } \widehat{AOB}$ astfel încât $\widehat{AOM} \equiv \widehat{COD} \Rightarrow \widehat{AOB} > \widehat{COD}$.

Din faptul că $OM \subset \text{Int } \widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{AOM} < \widehat{AOB}$, conform teoremei semidreptei interioare unui unghi, $\widehat{AOM} \equiv \widehat{COD} \Rightarrow \widehat{COD} < \widehat{AOB}$ adică $\widehat{AOB} > \widehat{COD}$.

Problema 13. Dacă $\widehat{hk} \equiv \widehat{lm}$, atunci un suplement al lui $\widehat{hk}$ este congruent cu orice suplement al lui $\widehat{lm}$.

Soluție. Din $\widehat{hk} \equiv \widehat{lm} \Rightarrow m(\widehat{hk}) = m(\widehat{lm})$; dacă $\widehat{h'k'}$ este un suplement al lui $\widehat{hk} \Rightarrow m(\widehat{hk}) + m(\widehat{h'k'}) = 180^\circ$; dacă $\widehat{l'm'}$ este un suplement al lui $\widehat{lm} \Rightarrow m(\widehat{lm}) + m(\widehat{l'm'}) = 180^\circ$. Cum $m(\widehat{hk}) = m(\widehat{lm}) \Rightarrow m(\widehat{h'k'}) = m(\widehat{l'm'}) \Rightarrow \widehat{h'k'} \equiv \widehat{l'm'}$.

Problema 14. Fie $[OC]$ bisectoarea unghiului propriu $\widehat{AOB}$, iar $[OD]$, $[OE]$ bisectoarele unghiurilor $\widehat{AOC}$ și $\widehat{COB}$. Să se arate că $[OC]$ este bisectoarea unghiului $\widehat{DOE}$.

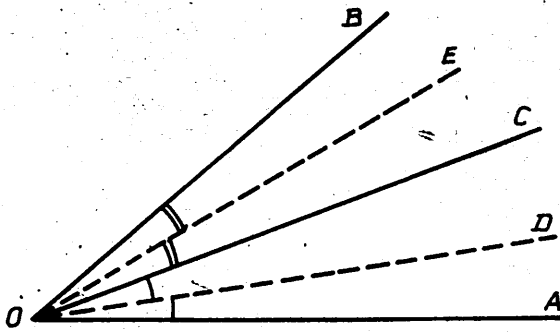


Fig. 8.

$$= m(\widehat{COE}) \Rightarrow m(\widehat{DOC}) = m(\widehat{COE}).$$

$m(\widehat{DOC}) + m(\widehat{COE}) = 2 m(\widehat{DOC}) = m(\widehat{AOC}) < 180^\circ$. Ținând seama de faptul că D și E sînt de o parte și de alta a lui OC, rezultă conform problemei 5, § 7, pag. 24, că $|OC \subset \text{Int } \widehat{DOE}$. Din faptul că $|OC \subset \text{Int } \widehat{DOE}$ și $m(\widehat{DOC}) = m(\widehat{COE})$, rezultă că $|OC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{DOE}$.

Problema 15. Demonstrați că bisectoarele a 2 unghiuri opuse la vîrf sînt semidrepte opuse.

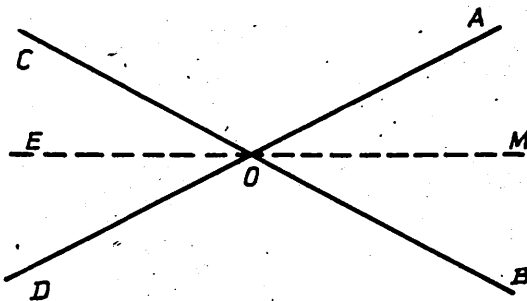


Fig. 9.

Soluție. Fie unghiurile $\widehat{AOB}$ și $\widehat{COD}$ opuse la vîrf și $|OM$ bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$, iar $|OE$ a unghiului $\widehat{COD}$.

$$\Rightarrow \widehat{AOM} \equiv \widehat{MOB} \text{ și } \widehat{COE} \equiv \widehat{EOD}.$$

Cum $\widehat{AOB} \equiv \widehat{COD}$, pentru că sînt unghiuri opuse la vîrf, rezultă că:

$$\widehat{MOA} \equiv \widehat{MOB} \equiv \widehat{COE} \equiv \widehat{EOD}. \text{ Atunci:}$$

$m(\widehat{MOA}) + m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COE}) = m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COE}) + m(\widehat{EOD}) = 180^\circ$, pentru că punctele A, O, D sînt coliniare. Rezultă că și punctele M, O, E sînt coliniare. Cum O este între E și M rezultă că $|OM$ și $|OE$ sînt semidrepte opuse.

Problema 16. Demonstrați că bisectoarele a 2 unghiuri adiacente suplementare sînt perpendiculare.

Soluție. $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = 180^\circ$, pentru că $\widehat{AOC}$ este unghi alungit.

$|OD$ bisectoarea unghiului $\widehat{AOB} \Rightarrow m(\widehat{AOD}) = m(\widehat{DOB})$; $|OE$ bisectoarea unghiului

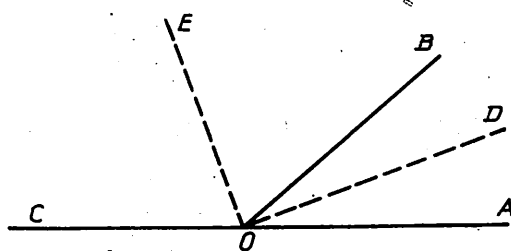


Fig. 10.

$\widehat{BOC} \Rightarrow m(\widehat{BOE}) = m(\widehat{EOC}) \Rightarrow m(\widehat{AOB}) =$
 $= 2 m(\widehat{DOB})$ și $m(\widehat{BOC}) = 2 m(\widehat{BOE})$.
 Deci: $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = 2 m(\widehat{DOB}) +$
 $+ 2 m(\widehat{BOE}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{DOB}) +$
 $+ m(\widehat{BOE}) = 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{DOE}) = 90^\circ \Rightarrow$
 $[OD \text{ și } [OE \text{ sînt perpendiculare.}$

Problema 17. Dacă semidreptele $|OA$, $|OB$, $|OC$ sînt distincte 2 cîte 2 și $\widehat{AOB} \equiv \widehat{BOC} \equiv \widehat{COA}$, atunci bisectoarea unghiului $\widehat{BOC}$ este semidreapta opusă cu $|OA$.

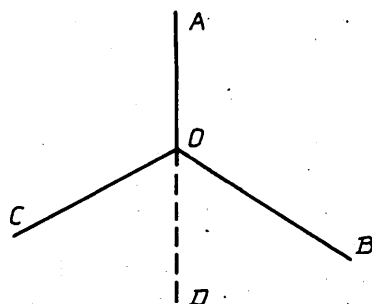


Fig. 11.

opusă cu $|OA$.

Soluție. $\widehat{AOB} \equiv \widehat{BOC} \equiv \widehat{COA} \Rightarrow m(\widehat{AOB}) =$
 $= m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{COA})$; dar $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) +$
 $+ m(\widehat{COA}) = 360^\circ$. Fie $[OD$ bisectoarea unghiului
 $\widehat{COB} = \widehat{COD} \equiv \widehat{DOB}$, deci $m(\widehat{BOD}) = m(\widehat{DOC})$.
 $\Rightarrow m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{DOB}) + m(\widehat{DOC}) + m(\widehat{COA}) = 360^\circ$;
 sau: $2 m(\widehat{AOB}) + 2 m(\widehat{DOB}) = 360^\circ \Rightarrow m(\widehat{AOB}) +$
 $+ m(\widehat{BOD}) = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AOB}$ și $\widehat{BOD}$ sînt unghiuri adi-
 acente suplementare, deci $[OD$ este semidreaptă

Problema 18. Fie $[OA \perp [OA'$ și $[OB \perp [OB'$. Să se arate că unghiurile $\widehat{AOB}$ și $\widehat{A'OB'}$ sînt congruente sau suplementare.

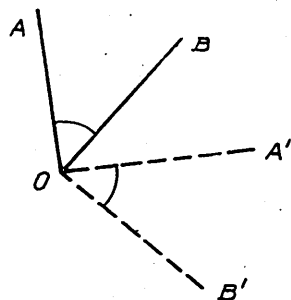


Fig. 12.

Soluție. Cazul 1: $B \in \text{Int } \widehat{AOA'}$ și A' , B' de aceeași
 parte a lui OB . Din faptul că $B \in \text{Int } \widehat{AOA'} \Rightarrow \widehat{BOA'} < \widehat{AOA'}$;
 dar $\widehat{AOA'} \equiv \widehat{BOB'} \in 90^\circ \Rightarrow \widehat{BOA'} < \widehat{EOB'} \Rightarrow |OA' \in \text{Int } \widehat{BOB'}$.
 Aplicăm axioma adunării unghiurilor:
 $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOA'}) = m(\widehat{AOA'}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{BOA'}) +$
 $+ m(\widehat{A'OB'}) = m(\widehat{BOB'}) = 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{A'OB'})$
 $\Rightarrow \widehat{AOB} \equiv \widehat{A'OB'}$.

Cazul 2: dacă $\widehat{AOB} \in 90^\circ$, rezultatul este imediat.

Cazul 3: $B \notin \text{Int } \widehat{AOA'}$. $[OA \perp [OA' \Rightarrow m(\widehat{AOA'}) = 90^\circ$;
 $[OB \perp [OB' \Rightarrow m(\widehat{BOB'}) = 90^\circ$; $m(\widehat{AOA'}) + m(\widehat{A'OB'}) + m(\widehat{B'OB}) + m(\widehat{BOA}) = 360^\circ$
 $\Rightarrow m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{A'OB'}) = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AOB}$ și $\widehat{A'OB'}$ sînt suplementare.

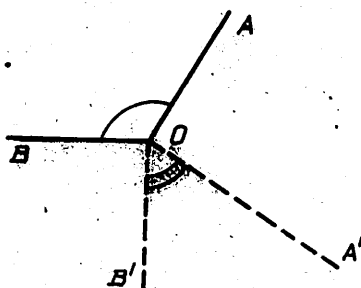


Fig. 13.

Congruența triunghiurilor
Problemele de la pagina 31

Problema 1. Care dintre următoarele relații sînt adevărate în cazul figurii I.41 (desenul de mai jos): $\triangle ADE \equiv \triangle BCE$; $\triangle ADE \equiv \triangle DAE$; $\triangle ADE \equiv \triangle EDC$; $\triangle ADE \equiv \triangle EDA$?

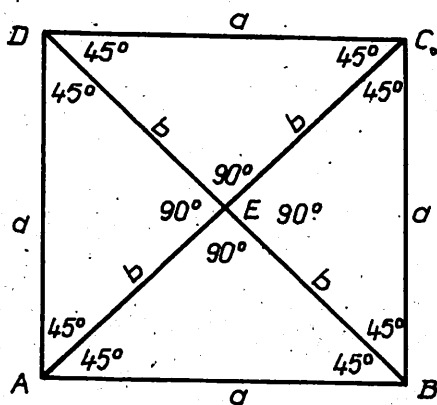


Fig. 14.

Soluție. $\triangle ADE \equiv \triangle BCE$, pentru că $\widehat{DAE} \equiv \widehat{CBE}$, $\widehat{ADE} \equiv \widehat{ECB}$, $\widehat{AED} \equiv \widehat{BEC}$ și $|DE| \equiv |EC|$; $|AE| \equiv |EB|$; $|AD| \equiv |CB|$. (Am aplicat definiția congruenței a 2 triunghiuri).

La fel: $\triangle ADE \equiv \triangle DAE$, pentru că:

$\widehat{DAE} \equiv \widehat{ADE}$; $\widehat{ADE} \equiv \widehat{DAE}$; $\widehat{DAE} \equiv \widehat{AED}$; $|DE| \equiv |AE|$; $|AE| \equiv |DE|$; $|AD| \equiv |BC|$.

$\triangle ADE$ nu este congruent cu $\triangle EDC$, pentru că are importanță ordinea în care sînt scrise vîrfurile triunghiurilor. Ar trebui deci ca $\widehat{DAE} \equiv$

$\widehat{DEC}$, ceea ce nu este adevărat. Deci: $\triangle ADE \not\equiv \triangle EDC$. La fel: $\triangle ADE \not\equiv \triangle EDA$ pentru că ar trebui ca $\widehat{DAE} \equiv \widehat{AED}$, ceea ce nu este adevărat.

Rezultă că primele 2 relații din textul problemei sînt adevărate și ultimele 2 sînt false.

Problema 2. Aflați și alte perechi de triunghiuri congruente pe figura I.41 (desenul din problema precedentă)..

Soluție. $\triangle AEB \equiv \triangle BEA \equiv \triangle BEC \equiv \triangle CEB \equiv \triangle CED \equiv \triangle DEC \equiv \triangle DEA \equiv \triangle AED$;

$\triangle EAB \equiv \triangle EBA \equiv \triangle EBC \equiv \triangle ECB \equiv \triangle ECD \equiv \triangle EDC \equiv \triangle EDA \equiv \triangle DAE$;
 $\triangle ADC \equiv \triangle CDA \equiv \triangle DCB \equiv \triangle BCD \equiv \triangle ABC \equiv \triangle CBA \equiv \triangle ADB \equiv \triangle BAD$;
 $\triangle DCA \equiv \triangle DAC \equiv \triangle CDB \equiv \triangle DBC \equiv \triangle BCA \equiv \triangle CAB \equiv \triangle DBA \equiv \triangle ADB$.

Problema 3. Demonstrați: $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ și $\triangle A'B'C' \equiv \triangle A''B''C''$
 $\Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A''B''C''$.

Soluție. $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \Rightarrow \hat{A} \equiv \hat{A}', \hat{B} \equiv \hat{B}', \hat{C} \equiv \hat{C}'$ și $|AB| \equiv |A'B'|$, $|BC| \equiv |B'C'|$, $|AC| \equiv |A'C'|$.
 $\triangle A'B'C' \equiv \triangle A''B''C'' \Rightarrow \hat{A}' \equiv \hat{A}'', \hat{B}' \equiv \hat{B}'', \hat{C}' \equiv \hat{C}''$ și $|A'B'| \equiv |A''B''|$,
 $|B'C'| \equiv |B''C''|$, $|A'C'| \equiv |A''C''|$.
 $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ și $\hat{A}' \equiv \hat{A}'' \Rightarrow \hat{A} \equiv \hat{A}''$; $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ și $\hat{B}' \equiv \hat{B}'' \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{B}''$; $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ și
 $\hat{C}' \equiv \hat{C}'' \Rightarrow \hat{C} \equiv \hat{C}''$; $|AB| \equiv |A'B'|$ și $|A'B'| \equiv |A''B''| \Rightarrow |AB| \equiv |A''B''|$;
 $|BC| \equiv |B'C'|$ și $|B'C'| \equiv |B''C''| \Rightarrow |BC| \equiv |B''C''|$; $|AC| \equiv |A'C'|$ și
 $|A'C'| \equiv |A''C''| \Rightarrow |AC| \equiv |A''C''|$.
 Rezultă că $\triangle ABC \equiv \triangle A''B''C''$.

Problema 4. Fie $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. Se iau punctele $D \in |BC|$ și
 $D' \in |B'C'|$ astfel ca $|BD| \equiv |B'D'|$. Să se arate că $\widehat{BAD} \equiv \widehat{B'A'D'}$ și $\widehat{DAC} \equiv \widehat{D'A'C'}$.

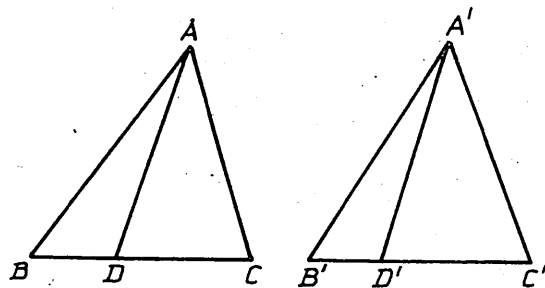


Fig. 15.

Soluție. $|AB| \equiv |A'B'|$, pentru că
 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (din ipoteză); $|BD| \equiv$
 $|B'D'|$ (din ipoteză); $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$,
 pentru că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$; rezultă
 că $\triangle ABD \equiv \triangle A'B'D'$ (cazul: L.U.L.)
 $\Rightarrow \widehat{BAD} \equiv \widehat{B'A'D'}$.

La fel se arată că $\triangle ACD \equiv \triangle A'C'D'$:
 $|AC| \equiv |A'C'|$ (din: $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$); $\widehat{ACD} \equiv \widehat{A'C'D'}$, pentru că $\triangle ABC \equiv$
 $\triangle A'B'C'$ (din ipoteză); $|DC| \equiv |D'C'|$, pentru că: $|BC| \equiv |B'C'|$ (ipoteză),
 $|BD| \equiv |B'D'|$ (ipoteză); aplicând teorema 3, § 8, pag. 25 (teorema de adunare
 și scădere a segmentelor), rezultă $|DC| \equiv |D'C'|$. Deci $\triangle ACD \equiv \triangle A'C'D'$
 (cazul: L.U.L.). Rezultă că $\widehat{DAC} \equiv \widehat{D'A'C'}$.

Problema 5. Fie ABC un triunghi isoscel ($|AB| \equiv |AC|$). Să se arate
 că bisectoarea unghiului $\hat{A}$ taie segmentul $|BC|$ într-un punct A' și să se arate
 că A' este mijlocul lui $|BC|$ și $AA' \perp BC$.

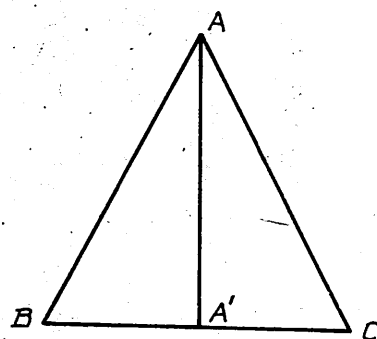


Fig. 16.

Soluție. Conform teoremei transversalei, dacă $A' \in \text{Int } \widehat{BAC}$ semidreapta $|AA'|$ și segmentul $|BC|$ au un punct comun: $|AA'| \cap |BC| \neq \emptyset$. Deci și bisectoarea unghiului A taie segmentul $|BC|$ într-un punct A' (deoarece ea este o semidreaptă ce trece prin interiorul unghiului).
Să arătăm că A' este mijlocul lui $|BC|$. $|AB| \equiv |AC|$ (triunghiul ABC fiind isoscel prin ipoteză); $\widehat{BAA'} \equiv \widehat{CAA'}$, pentru că $[AA']$ este bisectoarea unghiului $\widehat{A}$; $|AA'|$ este latură comună a triunghiurilor BAA' și CAA' . Rezultă că cele 2 triunghiuri sînt congruente. Deci: $\triangle BAA' \equiv \triangle CAA'$ (cazul: L.U.L.).
 $\Rightarrow |BA'| \equiv |A'C|$.

Să arătăm că $AA' \perp BC$; $\triangle ABA' \equiv \triangle ACA'$ (din demonstrație) $\Rightarrow \widehat{BA'A} \equiv \widehat{CA'A}$; dar $m(\widehat{BA'A}) + m(\widehat{CA'A}) = 180^\circ$, pentru că $\widehat{BA'C}$ este un unghi alungit. $\Rightarrow m(\widehat{BA'A}) = m(\widehat{CA'A}) = 90^\circ \Rightarrow AA' \perp BC$.

Problema 6. În triunghiul ABC avem $|AB| \equiv |AC|$; bisectoarele unghiurilor $\widehat{B}$ și $\widehat{C}$ taie laturile $[AC]$ și $[AB]$ în B' și C' . Să se arate că $|BB'| = |CC'|$.

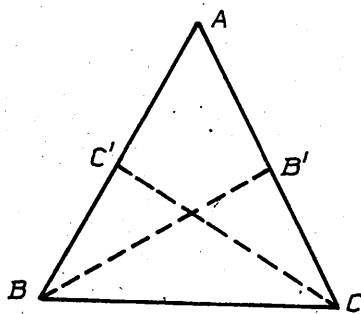


Fig. 17.

Soluție. ABC isoscel ($|AB| \equiv |AC|$) $\Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$. $[BB']$ bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$ și $[CC']$ bisectoarea unghiului $\widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{ACC'} \equiv \widehat{C'CB} \equiv \widehat{ABB'} \equiv \widehat{B'BC}$.
 $\triangle ABB' \equiv \triangle ACC'$ pentru că: $\widehat{BAC}$ este unghi comun, $|AC| \equiv |AB|$ (din ipoteză), $\widehat{ACC'} \equiv \widehat{ABB'}$ (din demonstrație). Deci $\triangle ACC' \equiv \triangle ABB'$ (cazul: U.L.U.)
 $\Rightarrow |BB'| \equiv |CC'|$.

Problema 7. Fie $ABCDE$ un pentagon convex cu următoarele proprietăți: $|BC| \equiv |ED|$, $|AC| \equiv |AD|$, $\widehat{BCD} \equiv \widehat{CDE}$. Să se arate că $\widehat{ABE} \equiv \widehat{AEB}$.

Soluție. Din faptul că $ABCDE$ este pentagon convex rezultă că A , D sînt de aceeași parte a lui BC , iar A și B de aceeași parte a lui CD .
 $\Rightarrow |CA| \subset \text{Int } \widehat{BCD}$. La fel: A , C sînt de aceeași parte a lui ED , iar A și E de aceeași parte a lui DC . $\Rightarrow |DA| \subset \text{Int } \widehat{CDE}$.

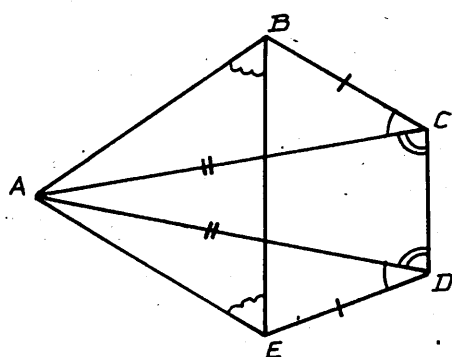


Fig. 18.

Rezultă că $m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{BCD}) - m(\widehat{ACD})$, iar $m(\widehat{EDA}) = m(\widehat{CDE}) - m(\widehat{CDA})$; $|AC| \equiv |AD|$ (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{ACD} \equiv \widehat{ADC}$ (triunghiul ACD fiind isoscel); $\widehat{BCD} \equiv \widehat{EDC}$ (ipoteză); rezultă că $\widehat{BCA} \equiv \widehat{EDA}$.

Demonstrăm că $\triangle ABC \equiv \triangle AED$ (cazul: L.U.L.): $|BC| \equiv |ED|$ (ipoteză); $\widehat{BCA} \equiv \widehat{EDA}$ (din demonstrație); $|AD| \equiv |AC|$ (ipoteză). Deci: $\triangle ABC \equiv \triangle AED \Rightarrow |AB| \equiv |AE| \Rightarrow \triangle ABE$ este isoscel $\Rightarrow \widehat{ABE} \equiv \widehat{AEB}$.

Problema 8. Pe laturile unui triunghi echilateral ABC se consideră punctele $P \in |BC|$, $Q \in |CA|$, $R \in |AB|$ astfel ca $|BP| \equiv |CQ| \equiv |AR|$. Demonstrați că triunghiul PQR este echilateral.

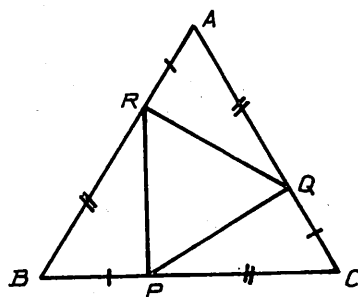


Fig. 19.

Soluție. Demonstrăm că $\triangle AQR \equiv \triangle CPQ \equiv \triangle BRP$ (cazul: L.U.L.): $\widehat{A} \equiv \widehat{B} \equiv \widehat{C}$ (unghiuri de la baza triunghiului echilateral); $|AR| \equiv |CQ| \equiv |BP|$ (ipoteză); $|AQ| \equiv |PC| \equiv |BR|$ (diferențe de segmente congruente). Deci: $\triangle AQR \equiv \triangle CPQ \equiv \triangle BRP \Rightarrow |RQ| \equiv |PQ| \equiv |PR| \Rightarrow PQR$ este echilateral.

Problema 9. Se ia un punct M în interiorul triunghiului isoscel ABC ($|AB| \equiv |AC|$) astfel ca $\widehat{ABM} \equiv \widehat{ACM}$. Să se arate că M se găsește pe bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.

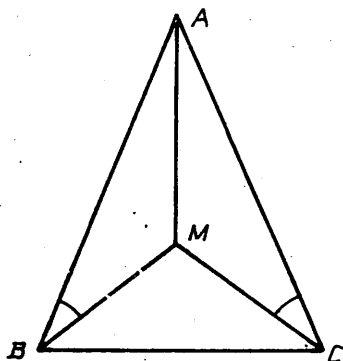


Fig. 20.

Soluție. $\widehat{ABM} \equiv \widehat{ACM}$ (ipoteză); ABC este isoscel (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{MCB} \equiv \widehat{MBC}$ (ca diferențe de unghiuri congruente). $\triangle BMC$ este isoscel; $\Rightarrow |BM| \equiv |MC|$.

Demonstrăm că $\triangle ABM \equiv \triangle AMC$ (cazul: L.U.L.): $|BM| \equiv |MC|$ (din demonstrație); $\widehat{ACM} \equiv \widehat{ABM}$ (ipoteză); $|AB| \equiv |AC|$ (ipoteză). $\Rightarrow \widehat{BAM} \equiv \widehat{CAM}$;

$M \in \text{Int } \triangle ABC \Rightarrow M \in \text{Int } \widehat{BAC} = \text{semidreapta } |AM| \text{ este interioară unghiului } \widehat{BAC}$.
Rezultă că $[AM]$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.

Problema 10. Pe laturile congruente $[AB]$, $[AC]$ ale unui triunghi isoscel se iau punctele D și E astfel ca $|AD| \equiv |AE|$. Să se arate că segmentele $|BE|$ și $|CD|$ au un punct comun și că acesta este situat pe bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.

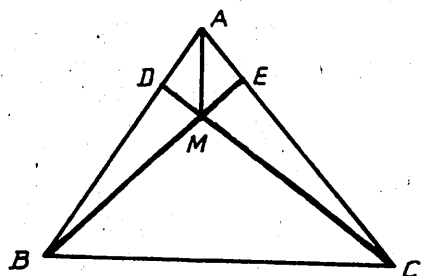


Fig. 21..

Soluție. $D \in |AB|$; $C \notin |AE| \Rightarrow DC$ taie latura $|AB|$ a triunghiului AEB , dar nu taie latura $|AE|$; va intersecta deci latura $|BE|$, conform corolarului teoremei 1, § 5, pag. 15, care arată că o dreaptă care intersectează un triunghi, dar nu trece printr-un vîrf al său, intersectează exact 2 laturi ale triunghiului. Rezultă că există M astfel încît $DC \cap |BE| = \{M\}$. $\Rightarrow$

$M \in |BE|$ și $M \in BE$ și $M \in DC$.

La fel pentru triunghiul ADC ; BE taie $|AC|$, dar nu taie $|AD|$, rezultă că taie $|DC|$; deci există M' astfel încît $BE \cap |DC| = \{M'\}$; $M' \in |DC|$ și $M' \in DC$ și $M' \in BE$. Cum și M și M' aparțin atît dreptei BE cît și dreptei DC rezultă că ele coincid, pentru că în caz contrar, dreptele BE și DC ar coincide, ceea ce ar reveni la cazul banal cînd $D = B$ și $E = C$. Deci, dacă $D \neq B$ și $C \neq E$, rezultă $M = M'$.

Cum $M \in |BE|$ și $M \in |DC| \Rightarrow M \in |BE| \cap |DC|$, deci segmentele $|BE|$ și $|DC|$ au un punct comun: M .

Să demonstrăm că M se află pe bisectoarea unghiului $\widehat{A}$.

$\triangle ABE \equiv \triangle ADC$ (cazul: L.U.L.): $\widehat{A}$ - unghi comun; $|AE| \equiv |AD|$ (ipoteză);

$|AC| \equiv |AB|$ (ipoteză). $\Rightarrow \widehat{ABM} \equiv \widehat{ACM}$.

$\widehat{ACB} \equiv \widehat{ABC}$; $\widehat{ABE} \equiv \widehat{ACD}$; $\Rightarrow \widehat{MBC} \equiv \widehat{MCB}$ (diferențe de unghiuri congruente); rezultă că triunghiul BCM este isoscel, deci $|MB| \equiv |MC|$.

$\triangle AMB \equiv \triangle AMC$ (cazul: L.U.L.): $|MC| \equiv |MB|$ (din demonstrație); $\widehat{ABM} \equiv \widehat{ACM}$ (din demonstrație); $|AB| \equiv |AC|$ (din ipoteză). $\Rightarrow \widehat{BAM} \equiv \widehat{CAM}$, deci $[AM]$ este bisectoarea unghiului $\widehat{A}$. ($M \in \text{Int } \widehat{BAC} \Rightarrow [AM] \subset \text{Int } \widehat{BAC}$).

Problema 11. De o parte și de alta a unei drepte AB se duc semidreptele $[AM$ și $[BN$ care formează cu $[AB$ respectiv $[BA$ unghiuri congruente. Pe aceste semidrepte se iau segmentele congruente $|AC|$ și $|BD|$. Să se arate că:
a) $|CD|$ și $|AB|$ se intersectează într-un punct O; b) O este mijlocul segmentului $|AB|$.

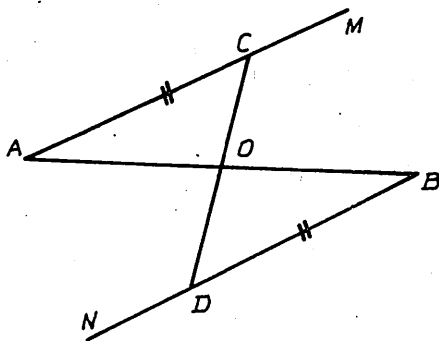


Fig. 22.

Dacă $O \notin |AB|$, fie B între O și A. Atunci $\widehat{ABD} > \widehat{BOD}$ (fiind unghi exterior triunghiului BOD); $\widehat{BOD} > \widehat{OAC}$ (fiind unghi exterior triunghiului AOC); rezultă că $\widehat{ABD} > \widehat{OAC}$, contrar ipotezei. Deci

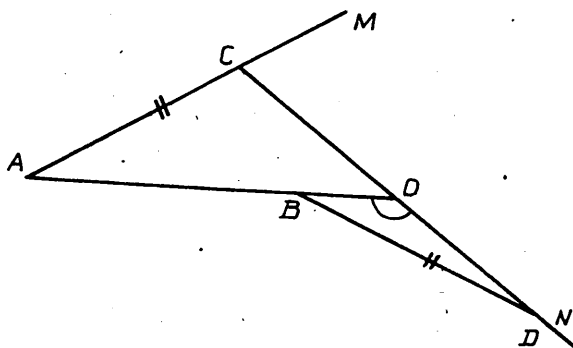


Fig. 23.

Soluție. a) Din ipoteză știm că $|AM|$ și $|BN|$ sînt în semiplane opuse față de AB. Cum $C \in |AM|$ și $D \in |BN|$, rezultă că C și D sînt de o parte și de alta a lui AB. Din teorema de separare a planului rezultă că există un punct O astfel încît $|CD| \cap |AB| = \{O\}$.

Să arătăm că $O \in |AB|$. O nu poate coincide nici cu A nici cu B, pentru că segmentele $|DB|$ și $|AC|$ s-ar reduce la cîte un punct.

$O \in |AB|$ (cazul cînd A este între O și B este analog). Cum $O \in |CD|$, rezultă că $|CD| \cap |AB| = \{O\}$.

Observație: demonstrația a folosit teorema unghiului exterior, cunoscută din clasele mici, dar conținută în manual în paragraful 10. De aceea mai dăm o demonstrație: Fie B între A și O (desenul al doilea).

$\triangle ABC \equiv \triangle ABD$ (cazul: L.U.L.): $|AC| \equiv |BD|$ (ipoteză); $\widehat{MAB} \equiv \widehat{ABD}$ (ipoteză); $|AB|$ - latură comună. Rezultă că $|BC| \equiv |AD|$.

$\triangle ACD \equiv \triangle BDC$ (cazul: L.L.L.): $|CD|$ - latură comună; $|BD| \equiv |AC|$ (din ipoteză); $|BC| \equiv |AD|$ (din demonstrație). Contradicție. $\Rightarrow O \in |AB| \Rightarrow |CD| \cap |AB| = \{O\}$.

b) $\triangle AOC \equiv \triangle BOD$ (cazul: L.U.U.): $\widehat{CAO} \equiv \widehat{DBO}$ (ipoteză); $|AC| \equiv |BD|$ (ipoteză); $\widehat{AOC} \equiv \widehat{DOB}$ (opuse la vîrf). $\Rightarrow |AO| \equiv |OB| \Rightarrow O$ mijlocul lui $|AB|$.

Problema 12. Fie punctul B interior unghiului AOC și A', B', C' câte un punct pe semidreptele opuse lui $|OA|, |OB|, |OC|$ astfel ca $|OA| \equiv |OA'|$, $|OB| \equiv |OB'|$, $|OC| \equiv |OC'|$. Se presupune că punctele A, B, C nu sînt coliniare. Să se arate că nici A', B', C' nu sînt coliniare și $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

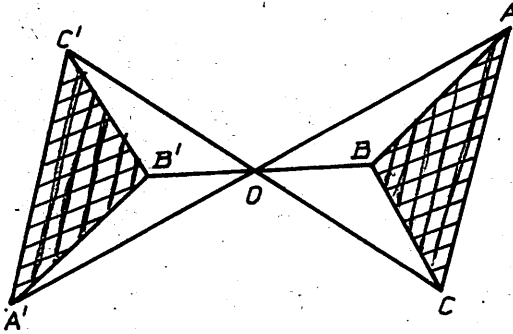


Fig. 24.

Soluție. $\triangle AOB \equiv \triangle A'OB'$ (cazul: L.U.L.): $|OA| \equiv |A'O|$ (ipoteză); $|OB| \equiv |OB'|$ (ipoteză); $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'OB'}$ (unghiuri opuse la vîrf).

$\triangle BOC \equiv \triangle B'OC'$ (cazul: L.U.L.): $|OB| \equiv |OB'|$ (ipoteză); $|OC| \equiv |OC'|$ (ipoteză); $\widehat{BOC} \equiv \widehat{B'OC'}$ (opuse la vîrf).

$\triangle AOC \equiv \triangle A'OC'$ (cazul: L.U.L.): $|OA| \equiv |OA'|$; $|OC| \equiv |OC'|$; $\widehat{AOC} \equiv \widehat{A'OC'}$.
 $\widehat{OCA} \equiv \widehat{OC'A'}$ (pentru că $\triangle OCA \equiv \triangle OC'A'$); $\widehat{OCB} \equiv \widehat{OC'B'}$ (pentru că $\triangle OCB \equiv \triangle OC'B'$); dar $\widehat{OCA} \neq \widehat{OCB}$ pentru că A, B, C nu sînt coliniare; $\widehat{OCA} \equiv \widehat{OC'A'}$ și deci $\widehat{OC'A'} \neq \widehat{OC'B'}$, deci nici punctele A', B', C' nu sînt coliniare.
 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (cazul: L.L.L.): $|AB| \equiv |A'B'|$ (pentru că $\triangle AOB \equiv \triangle A'OB'$ (am demonstrat)); $|BC| \equiv |B'C'|$ (pentru că $\triangle OBC \equiv \triangle OB'C'$); $|AC| \equiv |A'C'|$ (pentru că $\triangle OAC \equiv \triangle OA'C'$).

Inegalități geometrice

Problemele de la pagina 36

Problema 1. Două drepte distincte perpendiculare pe aceeași dreaptă nu sînt concurente.

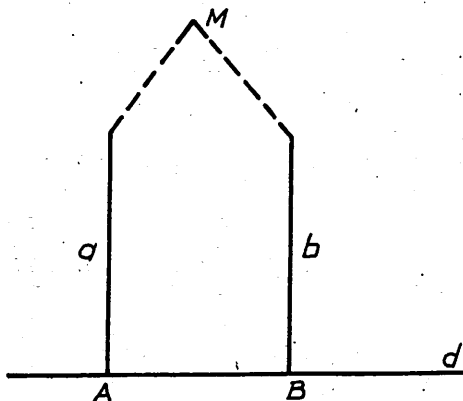


Fig. 25.

Soluție. Folosim metoda reducerii la absurd: fie $a \perp d$ și $b \perp d$; $a \cap d = \{A\}$; $b \cap d = \{B\}$. Presupunem a și b concurente în M . Se formează deci triunghiul ABM . $\widehat{b d}$ este exterior triunghiului ABM , deci $\widehat{b d} > \widehat{MAB}$ (am aplicat teorema unghiului exterior); dar $\widehat{b d} \leq 90^\circ$ și $\widehat{MAB} < 90^\circ$ (conform ipotezei). Am ajuns la o contradicție. Rezultă că a și b nu sînt concurente.

Problema 2. Dacă un triunghi are un unghi drept sau obtuz, celelalte două unghiuri sînt ascuțite.

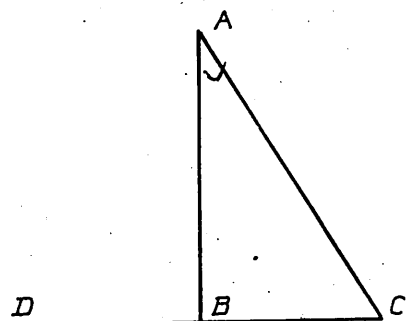


Fig. 26.

Soluție. a) Fie ABC un triunghi dreptunghic: $\widehat{B} \in 90^\circ$. Fie D astfel încît $B \in |DC|$. $\widehat{DBA}$ este exterior triunghiului ABC, deci $\widehat{DBA} > \widehat{A}$ și $\widehat{DBA} > \widehat{C}$ (am aplicat teorema unghiului exterior). Rezultă că $m(\widehat{A}) < 90^\circ$ și $m(\widehat{C}) < 90^\circ$, deci unghiurile A și C sînt ascuțite.

b) Dacă $\widehat{BAC}$ este unghi obtuz $\Rightarrow m(\widehat{BAC}) > 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{BAD}) < 90^\circ$ (pentru că $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{BAD}) = 180^\circ$)

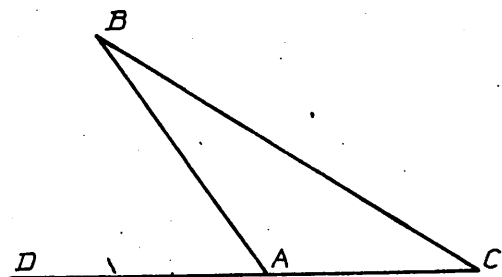


Fig. 27.

$\widehat{DAB} > \widehat{B}$ și $\widehat{DAB} > \widehat{C}$ (teorema unghiului exterior). Cum $m(\widehat{DAB}) < 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{B}) < 90^\circ$ și $m(\widehat{C}) < 90^\circ$, deci unghiurile B și C sînt ascuțite.

Problema 3. Intr-un triunghi dreptunghic, lungimea ipotenuzei este mai mare decît lungimea oricărei catete.

Soluție. Fie ABC astfel încît $m(\widehat{A}) = 90^\circ$. Conform problemei 2, § 10, pag. 36, rezultă că $\widehat{A} > \widehat{B}$ și $\widehat{A} > \widehat{C} \Rightarrow |BC| > |AC|$ și $|BC| > |AB|$ (pentru că într-un triunghi la unghiul mai mare se opune latura cu lungimea mai mare).

Problema 4. Fie triunghiul ABC și M și N două puncte astfel încît $B \in |MC|$, $C \in |BN|$. Să se demonstreze că $m(\widehat{MAN}) < m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})$.

Soluție. $m(\widehat{B}) > m(\widehat{MAB})$ (pentru că $\widehat{B}$ este unghi exterior triunghiului MAB; $m(\widehat{C}) > m(\widehat{CAN})$ (pentru că $\widehat{C}$ este unghi exterior triunghiului ACN. Rezultă că: $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) > m(\widehat{A}) + m(\widehat{MAB}) + m(\widehat{CAN}) = m(\widehat{MAN})$.

Observație: am notat A, B, C unghiurile triunghiului ABC.

Problema 5. Să se arate că oricare ar fi unghiurile proprii $\widehat{hk}$ și $\widehat{pq}$ există un triunghi ABC astfel încât $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) > m(\widehat{hk})$ și $m(\widehat{A}) < m(\widehat{pq})$.

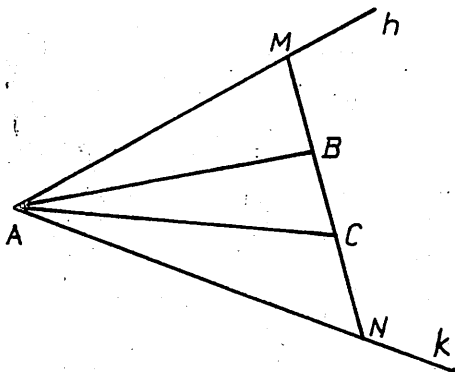


Fig. 28.

Soluție. Fie $\widehat{hk} = \widehat{MAN}$. Pe segmentul $|MN|$ se iau 2 puncte B și C astfel ca $m(\widehat{BAC}) < m(\widehat{pq})$. Demonstrăm că triunghiul ABC astfel construit îndeplinește condițiile problemei.

$$|ABC \subset \text{Int } \widehat{MAC} \Rightarrow m(\widehat{MAC}) = m(\widehat{MAB}) + m(\widehat{BAC});$$

$$|ACC \subset \text{Int } \widehat{BAM} \Rightarrow m(\widehat{BAN}) = m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{CAN});$$

$m(\widehat{BCA}) > m(\widehat{CAN})$ ($\widehat{BCA}$ unghi exterior triunghiului ACN);

$m(\widehat{CBA}) > m(\widehat{BAM})$ ($\widehat{CBA}$ unghi exterior triunghiului ABM);

$$\begin{aligned} \widehat{BAC} &\equiv \widehat{BAC}; \Rightarrow m(\widehat{BCA}) + m(\widehat{CBA}) + m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{CAN}) + m(\widehat{BAM}) + \\ &+ m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{CAN}) + m(\widehat{MAC}) = m(\widehat{MAN}). \Rightarrow m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) > m(\widehat{MAN}) = \\ &= m(\widehat{hk}); \quad m(\widehat{A}) < m(\widehat{pq}) \text{ prin construcție.} \end{aligned}$$

Problema 6. Fie patrulaterul convex ABCD în care $|AD|$ este latura cea mai lungă și $|BC|$ cea mai scurtă. Atunci: $m(\widehat{ABC}) > m(\widehat{ADC})$ și $m(\widehat{BCD}) > m(\widehat{BAD})$.

Soluție. În triunghiul ABD: $|AD| > |AB|$ (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{ABD} > \widehat{ADB}$; în triunghiul BCD $\Rightarrow |CD| > |BC| \Rightarrow \widehat{CBD} > \widehat{CDB}$; $\widehat{ABD} + \widehat{CBD} > \widehat{ADB} + \widehat{CDB}$; rezultă că $\widehat{ABC} > \widehat{ADC}$.

A doua relație se demonstrează la fel.

● **Problema 7.** În triunghiul ABC se consideră punctele $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$ și $C_1 \in AB$ astfel ca $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AC$ și $CC_1 \perp AB$. Să se arate că $\|AA_1\| + \|BB_1\| + \|CC_1\| < \|AB\| + \|AC\| + \|BC\|$.

Soluție. În triunghiul dreptunghic $AA_1C \Rightarrow \|AA_1\| < \|AC\|$ (o catetă este mai mică decât ipotenuza); în triunghiul dreptunghic $CBB_1 \Rightarrow \|BB_1\| < \|BC\|$; iar în triunghiul dreptunghic $ACC_1 \Rightarrow \|CC_1\| < \|AC\|$. Le adun: $\|AA_1\| + \|BB_1\| + \|CC_1\| < \|AB\| + \|AC\| + \|BC\|$.

Problema 8. Se consideră triunghiul ABC în care $\|AB\| < \|AC\|$ și punctul D astfel încât $C \in |AD|$. Să se arate că pentru orice punct M, $M \in |BC|$ are loc: $m(\widehat{ABM}) + m(\widehat{BMA}) > m(\widehat{CMD}) + m(\widehat{MDC})$.

Soluție. $\widehat{ACM}$ este exterior triunghiului $MCD \Rightarrow m(\widehat{ACM}) = m(\widehat{CMD}) + m(\widehat{CDM})$; $\widehat{AMB}$ este exterior triunghiului $AMC \Rightarrow m(\widehat{AMB}) > m(\widehat{ACM})$; $\Rightarrow m(\widehat{AMB}) > m(\widehat{CMD}) + m(\widehat{CDM})$; dar $m(\widehat{ABM}) + m(\widehat{AMB}) > m(\widehat{AMB}) \Rightarrow m(\widehat{ABM}) + m(\widehat{AMB}) > m(\widehat{CMD}) + m(\widehat{CDM})$.

Problema 9. Fie triunghiul ABC și $O \in \text{Int } ABC$. Să se demonstreze că $\frac{\|BC\| + \|CA\| + \|AB\|}{2} < \|OA\| + \|OB\| + \|OC\| < \|BC\| + \|CA\| + \|AB\|$.

Soluție. a) În triunghiul AOC : $\|AC\| < \|AO\| + \|OC\|$; în triunghiul OBC : $\|BC\| < \|OB\| + \|OC\|$; în triunghiul AOB : $\|AB\| < \|AO\| + \|OB\|$. Le adun și obținem: $\|AB\| + \|BC\| + \|AC\| < 2(\|AO\| + \|OB\| + \|OC\|)$.

b) $O \in \text{Int } ABC \Rightarrow$ conform teoremei transversalei că există D astfel încât $AO \cap BC = \{D\}$; $\|AO\| + \|OC\| < \|AD\| + \|DC\|$; în triunghiul $ABD \Rightarrow \|AD\| < \|AB\| + \|BD\| \Rightarrow \|AO\| + \|OC\| < \|AB\| + \|BD\| + \|DC\|$; sau: $\|AO\| + \|OC\| < \|AB\| + \|BC\|$. La fel se obține: $\|OB\| + \|OC\| < \|AB\| + \|AC\|$ și $\|AO\| + \|OB\| < \|AC\| + \|BC\|$. Le adun: $2(\|AO\| + \|OB\| + \|OC\|) < 2(\|AB\| + \|BC\| + \|AC\|) \Rightarrow \|AO\| + \|OB\| + \|OC\| < \|AB\| + \|BC\| + \|AC\|$.

Problema 10. Lungimea unui segment este mai mică decât lungimea oricărei linii poligonale care are extremitățile segmentului ca vîrfuri.

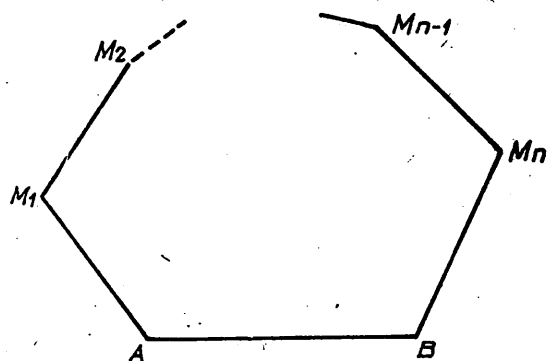


Fig. 29.

Soluție. a) Dacă linia poligonală are 2 segmente: $|AM|$ și $|BM|$ atunci $\|AB\| < \|MA\| + \|MB\|$ (conform teoremei 2, § 10, pag. 35).

b) Dacă linia poligonală are vîrfurile $A, M_1, M_2, \dots, M_n, B$ obținem:

$$\|AB\| < \|AM_1\| + \|M_1B\|;$$

$$\|M_1B\| < \|M_1M_2\| + \|M_2B\|;$$

$$\dots\dots\dots$$

$\|M_{n-1}B\| < \|BM_n\| + \|M_nM_{n-1}\|$. Le adun și obținem:

$$\|AB\| < \|AM_1\| + \|M_1M_2\| + \dots\dots\dots + \|M_nM_{n-1}\| + \|BM_n\|.$$

Problema 11. Se consideră poligoanele P' și P'' convexe. Dacă suprafața poligonală determinată de P' este inclusă în suprafața poligonală determinată de P'' , atunci perimetrul poligonului P' este mai mic sau egal decât perimetrul poligonului P'' .

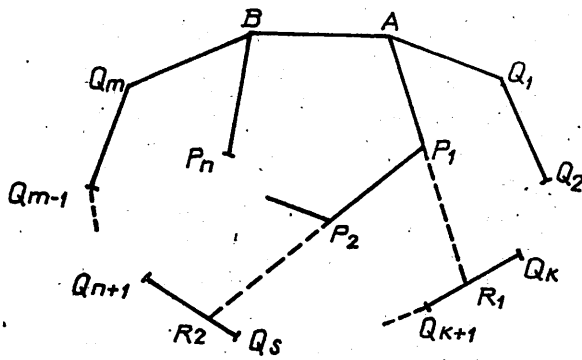


Fig. 30.

Soluție. a) Fie cazul când cele 2

poligoane au $|AB|$ latură comună. Cele

2 poligoane sînt $P' = AP_1P_2 \dots P_nB$

și $P'' = AQ_1Q_2 \dots Q_mB$; $P' \subset P''$.

$P'_1 \in \text{Int } P'' \Rightarrow (\exists) k, k \geq 2$, astfel încît

$P'_1 \in \text{Int } \widehat{Q_kAQ_{k+1}}$ sau P'_1 aparține unei

laturi a acestui unghi. În primul caz,

aplicînd teorema transversalei, re-

zultă că $|BP_1 \cap \widehat{Q_kAQ_{k+1}}| = \{R_1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow |BP_1 \cap P''| = \{R_1\}$. Dacă P_1 se află pe o latură a unghiului $\widehat{Q_kAQ_{k+1}}$ atunci

BP_1 taie P'' în Q_k sau în Q_{k+1} . În același mod se arată că prelungirea la-

turii $|P_1P_2|$ a poligonului $AP_1P_2 \dots P_n$ taie o latură a poligonului $AP_1R_1Q_{k+1} \dots$

Q_m , adică $|P_1P_2 \cap AP_1R_1Q_{k+1} \dots Q_m| = \{R_2\}$, unde $R_2 \in [Q_sQ_{s+1}]$; ș.a.m.d.

Obținem relațiile:

$$|BP_1| + |P_1R_1| < |BQ_1| + |Q_1Q_2| + \dots + |Q_{k-1}Q_k| + |Q_kR_1|.$$

$$|P_1P_2| + |P_2R_2| < |P_1R_1| + |R_1Q_{k+1}| + |Q_{k+1}Q_{k+2}| + \dots + |Q_{s-1}Q_s| + |Q_sR_2|.$$

$$|P_2P_3| + |P_3R_3| < |P_2R_2| + |R_2Q_{s+1}| + |Q_{s+1}Q_{s+2}| + \dots + |Q_{t-1}Q_t| + |Q_tR_3|.$$

Adunîndu-le, observăm că $|P_iR_i|$ se reduc și obținem:

$$\begin{aligned} & |BP_1| + |P_1P_2| + |P_2P_3| + \dots + |BQ_1| + |Q_1Q_2| + \dots + |Q_{k-1}Q_k| + \\ & + (|Q_kR_1| + |R_1Q_{k+1}|) + |Q_{k+1}Q_{k+2}| + \dots + |Q_{s-1}Q_s| + (|Q_sR_2| + |Q_{s+1}R_3|) + \\ & + |Q_{s+1}Q_{s+2}| + \dots + |Q_{t-1}Q_t| + \dots + (|Q_tR_3| + \dots) + \dots \\ & |BP_1| + |P_1P_2| + |P_2P_3| + \dots < |BQ_1| + |Q_1Q_2| + \dots + |Q_{k-1}Q_k| + \\ & + |Q_kQ_{k+1}| + \dots + |Q_{s-1}Q_s| + |Q_sQ_{s+1}| + |Q_{s+1}Q_{s+2}| + \dots \end{aligned}$$

Deci, perimetrul lui P' este mai mic ca perimetrul lui P'' .

Dacă toate laturile celor 2 poligoane coincid, perimetrele sînt egale.

b) Cazul când cele 2 poligoane nu au laturi comune: aplicăm cazul precedent:

prelungirea lui $|P_1P_2|$ taie latura $[Q_kQ_{k+1}]$ a poligonului $Q_1Q_2 \dots Q_m$ în M și latura $[Q_pQ_{p+1}]$ a aceluiași poligon în N .

Perimetrul $P_1P_2 \dots P_n <$ perimetrul $P_1P_2MQ_{k+1} \dots Q_pNP_1$ (conform primului

caz). Perimetrul $P' = \|P_1P_2\| + \|P_2M\| + \|MQ_{k+1}\| + \dots + \|Q_pN\| + \|NP_1\|$.

În poligonul $Q_1Q_2 \dots Q_kMNQ_{p+1} \dots Q_m$ avem:

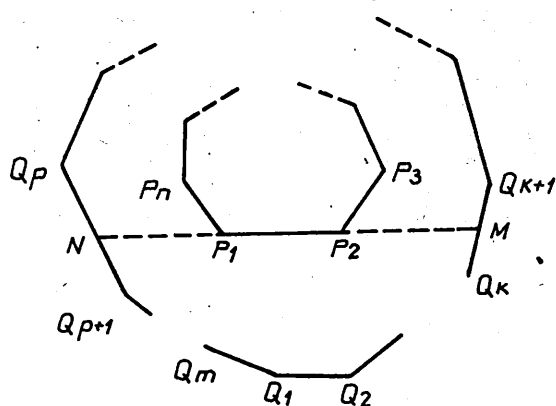


Fig. 31.

$$\begin{aligned} & \|NP_1\| + \|P_1P_2\| + \|P_2M\| < \|MQ_k\| + \dots \\ & \dots + \|Q_3Q_2\| + \|Q_2Q_1\| + \|Q_1Q_m\| + \dots \\ & \dots + \|Q_{p+1}N\|. \end{aligned}$$

Adunând ultimele 2 inegalități și reducând termenii asemenea obținem:

Perimetrul $P_1P_2\dots P_n$ < perimetrul $Q_1Q_2\dots Q_m$. (S-au redus termenii: $\|NP_1\|$, $\|P_1P_2\|$ și $\|P_2M\|$).

Problema 12. Fie triunghiul ABC și D mijlocul laturii |BC|. Să se

arate că:

$$\frac{\|AB\| + \|AC\|}{2} > \|AD\|.$$

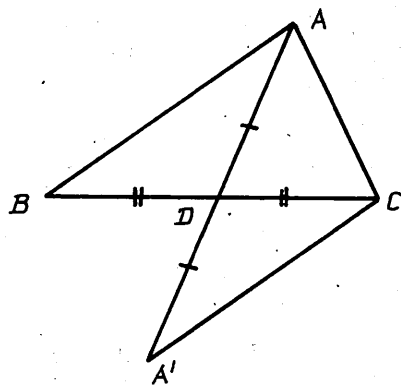


Fig. 32.

Soluție. Fie $A' \in AD$ astfel încât $|AD| \equiv$

$$= |DA'|.$$

$\triangle ADB \equiv \triangle A'DC$ (cazul: L.U.L.): $|BD| \equiv |DC|$ (ipoteză); $|AD| \equiv |A'D|$ (construcție); $\widehat{ADB} \equiv \widehat{A'DC}$ (opuse la vîrf). $\Rightarrow |AB| \equiv |A'C|$.

În triunghiul $AA'C \Rightarrow \|AA'\| < \|AC\| + \|A'C\|$.

Dar $\|AA'\| = 2\|AD\|$. Deci:

$$2\|AD\| < \|AC\| + \|AB\|; \text{ sau:}$$

$$\|AD\| < \frac{\|AC\| + \|AB\|}{2}.$$

Problema 13. Se consideră triunghiul ABC și A_1, B_1, C_1 respectiv mijloacele laturilor |BC|, |AC|, |AB|. Să se arate că:

$$\frac{\|AB\| + \|AC\| + \|BC\|}{2} < \|AA_1\| + \|BB_1\| + \|CC_1\| < \|AB\| + \|AC\| + \|BC\|.$$

Soluție. a) Aplicăm teorema 2, § 10, pag. 35: în triunghiul ABA_1 : $\|AA_1\| + \|A_1B\| > \|AB\|$; în triunghiul BB_1C : $\|BB_1\| + \|B_1C\| > \|BC\|$; în triunghiul ACC_1 : $\|CC_1\| + \|AC_1\| > \|AC\|$. Le adunăm și obținem: $\|AA_1\| + \|BB_1\| + \|CC_1\| > \|AB\| + \|BC\| + \|AC\| - (\|A_1B\| + \|AC_1\| + \|B_1C\|)$.

$$\text{Deci: } \|AA_1\| + \|BB_1\| + \|CC_1\| > \|AB\| + \|BC\| + \|AC\| - \left(\frac{\|BC\|}{2} + \frac{\|AC\|}{2} + \frac{\|AB\|}{2} \right).$$

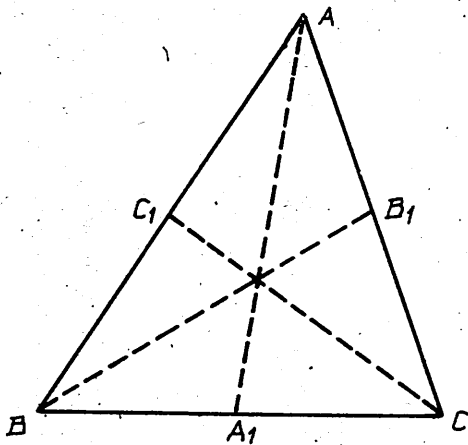


Fig. 33.

$$\text{Sau: } \|AA_1\| + \|BB_1\| + \|CC_1\| > \frac{\|AB\| + \|BC\| + \|AC\|}{2}.$$

b) Aplicăm rezultatul din problema 12, § 10, pag. 38, pentru fiecare din medianele triunghiului ABC:

$$\|AA_1\| < \frac{\|AB\| + \|AC\|}{2}; \quad \|BB_1\| < \frac{\|AB\| + \|BC\|}{2};$$

$$\|CC_1\| < \frac{\|AC\| + \|BC\|}{2}.$$

$$\text{Adunând obținem: } \|AA_1\| + \|BB_1\| + \|CC_1\| < \|AB\| + \|BC\| + \|AC\|.$$

Problema 14. Se consideră 2 puncte A și B și o dreaptă d care nu trece prin nici unul din ele. Să se determine un punct C, $C \in d$, astfel ca oricare ar fi M, $M \in d$, să aibă loc:

$$\|AC\| + \|CB\| \leq \|AM\| + \|MB\|.$$

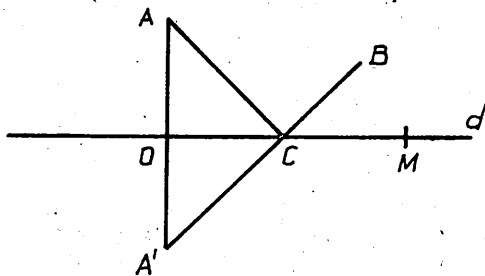


Fig. 34.

Soluție. a) Cazul când d nu separă A și B.

Fie $AA' \perp d$, $|AA'| \cap d = \{O\}$ și $|AO| \equiv |OA'|$.

B și A' fiind în semiplane opuse față de $d \Rightarrow$ există un punct C astfel încât $|BA'| \cap d = \{C\}$; $|AC| \equiv |A'C|$, pentru că $\triangle AOC \equiv \triangle A'OC$ (cazul: C.C.). Deci: $|AC| + |CB| \equiv |A'C| + |CB| = |A'B| \Rightarrow \|AC\| +$

$\|CB\| = \|A'B\|$. Pentru orice punct $M \in d$, $M \neq C \Rightarrow \|MB\| + \|MA'\| > \|BA'\|$ (din triunghiul MBA' - aplicând teorema 2, § 10, pag. 35). Dar $|MA'| \equiv |MA|$ ($\triangle MAO \equiv \triangle MA'O$ - cazul: C.C.); $\Rightarrow |MB| + |MA| > |BA'|$; cum $|BA'| \equiv |AC| + |CB| \Rightarrow |MB| + |MA| > |AC| + |CB|$ și deci: $\|AM\| + \|MB\| > \|AC\| + \|CB\|$. Dacă M coincide cu C $\Rightarrow \|MA\| + \|MB\| = \|AC\| + \|CB\|$.

b) Cazul când d separă A și B. Rezultă că există C astfel încât $|AB| \cap d = \{C\}$.

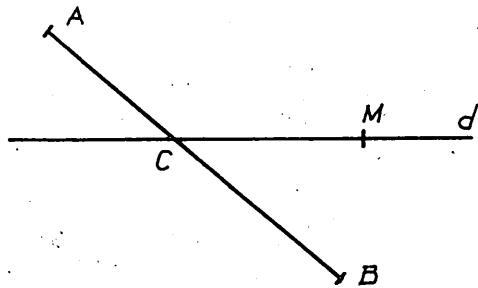


Fig. 35.

Oricare ar fi $M \in d$, $M \neq C \Rightarrow |AM| + |MB| > |AB|$ sau: $\|AM\| + \|MB\| > \|AC\| + \|CB\|$.

Dacă M coincide cu C obținem:

$$\|AM\| + \|MB\| = \|AC\| + \|CB\|.$$

Problema 15. (Problema biliardului). Fie 2 mingi de biliard situate în punctele A și B și $|CD|$ o latură a mesei. Să se determine punctul $M \in |CD|$, în care trebuie să atingă lătura $|CD|$ după lovire una din bile pentru ca să o ciocnească în continuare pe cealaltă, știindă că $\widehat{AMC} \equiv \widehat{BMD}$.

Soluție. Construim $BB' \perp CD$, $BB' \cap CD = \{M'\}$ și $|BM'| \equiv |M'B'|$. Punctele A și B sînt de aceeași parte a lui CD (ipoteză), iar B și B' sînt situate de o parte și de alta a lui CD (construcție). Rezultă că A și B' sînt în semiplane opuse față de CD . Conform teoremei de separare a planului există un punct M astfel încît $|AB'| \cap CD = \{M\}$.

Să arătăm că punctul M îndeplinește condițiile problemei. Arătăm întîi că $M' \in |CD|$. Presupunem prin absurd că $M' \notin |CD|$. Cum $M' \in CD \Rightarrow$ avem 2 cazuri: $D \in |CM'|$ sau $C \in |M'D|$.

Cazul 1: fie M' astfel încît $D \in |CM'|$. În triunghiul BDM' , $\widehat{BM'D} \in 90^\circ$, pentru că $BM' \perp CD$ (construcție), iar $\widehat{BDM'}$ este obtuz (pentru că $\widehat{BDC}$ este ascuțit), ceea ce este absurd (contrazice problema 2, § 10, pag. 36). $\Rightarrow M' \in |CD|$. Dacă $C \in |M'D|$, se demonstrează analog. Deci am arătat că $M' \in |CD|$.

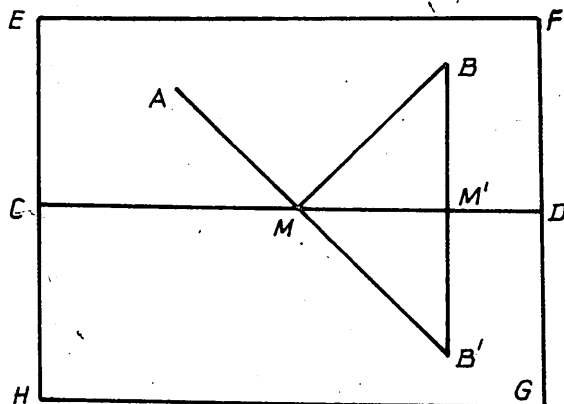


Fig. 36.

Fie $EFGH$ dreptunghiul obținut punînd 2 fețe ale meselor de biliard una lîngă alta. ($|CD|$ este latura lor comună). $B, M' \in \text{Int } EFGH \Rightarrow |BM'| \subset \text{Int } EFGH$. Cum $|B'M'| \equiv |BM'| \Rightarrow$ că și $B' \in \text{Int } EFGH$. Dar interiorul unui poligon convex este o mulțime convexă, $\Rightarrow |AB'| \subset \text{Int } EFGH$ (pentru că A și $B' \in \text{Int } EFGH$). $M \in |AB'| \Rightarrow M \in \text{Int } EFGH$.

Dar $M \in CD \Rightarrow M \in CD \cap \text{Int } EFGH \Rightarrow M \in \text{Int } ICDI$.

$\widehat{BMM'} \equiv \widehat{M'MB'}$ (pentru că $\triangle BMM' \equiv \triangle B'MM'$ - cazul: C.C.); $\widehat{M'MB'} \equiv \widehat{AMC}$ (opuse la vîrf) $\Rightarrow \widehat{BMM'} \equiv \widehat{AMC}$, deci $\widehat{AMC} \equiv \widehat{BMD}$. Rezultă că M verifică condițiile problemei: $M \in \text{Int } ICDI$ și $\widehat{AMC} \equiv \widehat{BMD}$.

Alte cazuri de congruență ale triunghiurilor

Problemele de la pagina 40

Problema 1. Fie triunghiurile isoscele ABC și A'B'C' ($|AB| \equiv |AC|$ și $|A'B'| \equiv |A'C'|$), în care $|AB| \equiv |A'B'|$ și $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$. Să se demonstreze că triunghiul ABC este congruent cu A'B'C' ($\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$).

Soluție. $|AB| \equiv |AC|$ (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{B} \equiv \widehat{C}$; $|A'B'| \equiv |A'C'|$ (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{B'} \equiv \widehat{C'}$. Dar $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$ (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{C} \equiv \widehat{C'}$. Rezultă că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (cazul: L.U.U.); $|AB| \equiv |A'B'|$ (ipoteză); $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$ (ipoteză) și $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$ (demonstrație).

Problema 2. Dacă în patrulaterul convex ABCD, $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$ și $\overline{BD}$ este bisectoarea unghiului $\widehat{B}$, atunci $\overline{DB}$ este bisectoarea unghiului $\widehat{D}$.

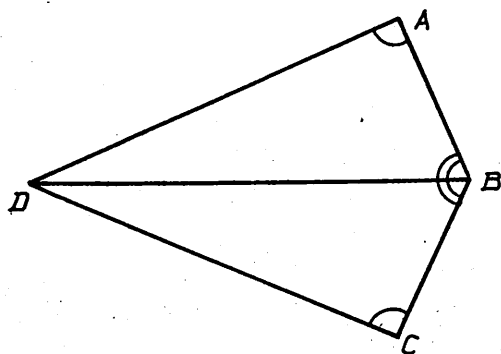


Fig. 37.

Soluție. $\overline{BD}$ fiind bisectoarea unghiului $\widehat{B}$ rezultă că $\overline{BD} \subset \text{Int } \widehat{ABC}$ și $\widehat{ABD} \equiv \widehat{CBD}$.

$\triangle ABD \equiv \triangle CBD$ (cazul: L.U.U.): $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$ (ipoteză); $|\overline{BD}|$ - latură comună, $\widehat{ABD} \equiv \widehat{CBD}$ (ipoteză). $\Rightarrow \widehat{ADB} \equiv \widehat{CDB}$ (1).

Să arătăm că $\overline{DB} \subset \text{Int } \widehat{ADC}$.

Notăm a dreapta suport a laturii $|AB|$, cu b dreapta suport a laturii $|BC|$, cu c pe cea a laturii $|CD|$ și cu d pe cea a laturii $|AD|$. $\text{Int } \widehat{ADC} = |dC| \cap |cA|$. ABCD fiind patrulater convex, rezultă că $|AB| \cap c = \emptyset \Rightarrow B \in |cA|$; iar $|BC| \cap d = \emptyset \Rightarrow B \in |dC|$. Deci $B \in |cA| \cap |dC| = \text{Int } \widehat{ADC}$; rezultă conform problemei 4, § 6, pag. 18, că $\overline{DB} \subset \text{Int } \widehat{ADC}$ (2).

Din (1) și (2) rezultă că $\overline{DB}$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$.

Problema 3. Dacă în triunghiul ABC , $AA' \perp BC$, $BB' \perp AC$, $A' \in |BC|$, $B' \in |AC|$ și $|AA'| \equiv |BB'|$, atunci triunghiul este isoscel.

Soluție. $\triangle AA'C \equiv \triangle BB'C$ (cazul: C.U.): $|AA'| \equiv |BB'|$ (ipoteză); $\widehat{C}$ este unghi comun; $\widehat{AA'C} \equiv \widehat{BB'C}$ ($AA' \perp BC$ și $BB' \perp AC$ - ipoteză - deci sînt unghiuri drepte). $\Rightarrow |AC| \equiv |BC| \Rightarrow \triangle ABC$ este isoscel.

Problema 4. Să se arate că dacă $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ și $AA_1 \perp BC$, $DD_1 \perp EF$, $A_1 \in BC$, $D_1 \in EF$, atunci $|AA_1| \equiv |DD_1|$.

Soluție. $\triangle ABC \equiv \triangle DEF \Rightarrow |AB| \equiv |DE|$ și $\widehat{ABA_1} \equiv \widehat{DED_1}$. $AA_1 \perp BC$ și $DD_1 \perp EF \Rightarrow \widehat{AA_1B} \equiv \widehat{DD_1E} = 1 \text{ dr.} \Rightarrow \triangle AA_1B \equiv \triangle DD_1E$ (cazul: I.U.) $\Rightarrow |AA_1| \equiv |DD_1|$.

Problema 5. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ în care $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D}) = 90^\circ$ și punctele $M \in |BC|$, $N \in |DC|$. Să se arate că dacă $|AM| \equiv |AN|$ și $\widehat{BAM} \equiv \widehat{DAN}$, atunci $|BC| \equiv |DC|$.

Soluție. $\triangle ABM \equiv \triangle ADN$ (cazul: I.U.): $|AM| \equiv |AN|$ (ipoteză); $\widehat{BAM} \equiv \widehat{DAN}$ (ipoteză); $\widehat{B} \equiv \widehat{D}$ (unghiuri drepte - ipoteză). $\Rightarrow |AB| \equiv |AD|$. $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ (cazul: I.C.): $|AB| \equiv |AD|$ (din demonstrație); $|AC|$ latură comună; $\widehat{B} \equiv \widehat{D} \in 90^\circ$ (ipoteză). $\Rightarrow |BC| \equiv |DC|$.

Distanța de la un punct la o dreaptă

Problemele de la pagina 42

Problema 1. Fie triunghiul ABC și A_1 piciorul perpendicularei duse din A pe BC . Să se demonstreze că dacă $\widehat{B}$ și $\widehat{C}$ sînt ascuțite, atunci $A_1 \in |BC|$, iar dacă B este obtuz, atunci $B \in |A_1C|$.

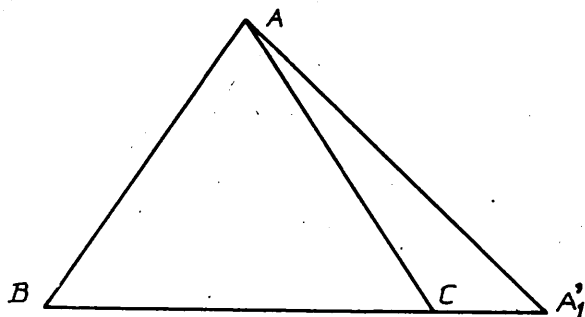


Fig. 38.

Soluție. a) Fie B și C ascuțite. Folosim metoda reducerii la absurd: presupun că $A_1 \notin |BC|$. Fie A'_1 astfel încât $C \in |BA'_1|$ și $AA'_1 \perp BC \Rightarrow \widehat{AA'_1C} \in 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACA'}$ este unghi ascuțit $\Rightarrow \widehat{ACB}$ este obtuz, contrar ipotezei. $\Rightarrow A' \in |BC|$.

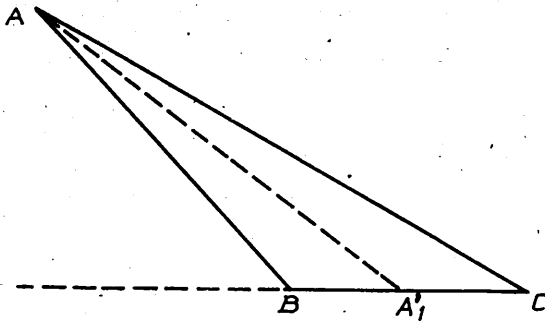


Fig. 39.

b) Fie unghiul $\widehat{B}$ obtuz. Tot metoda reducerii la absurd: dacă $A_1 \in |BC|$ și $AA_1 \perp BC \Rightarrow \triangle ABA_1$ are un unghi drept și unul obtuz, ceea ce este absurd.

(Conform problemei 2, § 10, pag. 36)

$\Rightarrow A_1 \notin |BC| \Rightarrow B \in |A_1C|$ sau $C \in |BA_1|$.
Dacă $C \in |BA_1| \Rightarrow \triangle ABA_1$ are un unghi drept și unul obtuz, absurd; $\Rightarrow B \in |A_1C|$.

Problema 2. Se consideră o dreaptă d , punctul A , $A \notin d$ și A' piciorul perpendicularei din A pe d . Să se demonstreze că dacă punctele B și C , $B \in d$, $C \in d$ sînt astfel încît $\|A'B\| < \|A'C\|$ atunci $\|AB\| < \|AC\|$. Să se formuleze și să se demonstreze afirmația reciprocă acestora.

Soluție. $AA' \perp d \Rightarrow \triangle ABA'$ este dreptunghic $\Rightarrow m(\widehat{ABA'}) < 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{ABC}) > 90^\circ$. Deci în triunghiul ABC , $\widehat{ABC} > \widehat{ACB} \Rightarrow |AC| > |AB|$ (într-un triunghi la unghiul mai mare se opune latura cu lungimea mai mare).

Reciproc: fie o dreaptă d și un punct $A \notin d$; fie A' piciorul perpendicularei din A pe d ; dacă $B \in d$ și $C \in d$ sînt 2 puncte astfel încît $\|AB\| < \|AC\|$, rezultă $\|A'B\| < \|A'C\|$.

Demonstrație prin reducerea la absurd. Presupunem că $\|A'B\| \geq \|A'C\|$.
Dacă $\|A'B\| = \|A'C\| \Rightarrow \|AB\| = \|AC\|$, contrar ipotezei.
Dacă $\|A'B\| > \|A'C\| \Rightarrow \|AB\| > \|AC\|$ (conform teoremei directe), ceea ce contrazice ipoteza.

Deci: $\|A'B\| < \|A'C\|$.

Problema 3. Dacă ABC este un triunghi isoscel cu $|AB| \equiv |AC|$, atunci pentru orice punct $D \in |BC|$, are loc $\|AD\| < \|AB\|$.

Soluție. Dacă $\widehat{ADB}$ este obtuz, în triunghiul ADB avem: $\widehat{ADB} > \widehat{ABD} \Rightarrow \|AB\| > \|AD\|$ (la unghiul mai mare se opune latura cu lungimea mai mare).
Dacă $\widehat{ADC}$ este obtuz, în triunghiul ADC avem: $\widehat{ADC} > \widehat{ACD}$ și deci $\|AC\| = \|AB\| > \|AD\|$.

Dacă $\|BD\| = \|DC\| \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ADB} \in 90^\circ \Rightarrow \|AB\| > \|AD\|$ (ipotenuza este mai mare decît o catetă).

Deci în toate cazurile $\|AB\| > \|AD\|$.

Problema 4. Dacă ABC este un triunghi isoscel cu $|AB| \equiv |AC|$ și $D \in BC$ astfel încât $\|AD\| < \|AB\|$, atunci $D \in |BC|$.

Soluție. Metoda reducerii la absurd: presupun că $D \notin |BC|$. Fie $B \in |DC|$; $|AB| \equiv |AC| \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB} \Rightarrow m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) < 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABD}$ este obtuz; în triunghiul ABD , $\widehat{ABD} > \widehat{ADB} \Rightarrow \|AD\| > \|AB\|$, contrar ipotezei.

Dacă $C \in |BD|$, raționament analog.

Dacă D coincide cu B sau $C \Rightarrow |AD| \equiv |AB|$, contrar ipotezei.

Rezultă că $D \in |BC|$.

Problema 5. Se consideră triunghiul ABC în care $\|AB\| < \|AC\|$. Să se arate că pentru orice punct $D \in |BC|$, $\|AD\| < \|AC\|$.

Soluție. Fie A' proiecția lui A pe BC .

Dacă $D = A' \Rightarrow \|AA'\| = \|AD\| < \|AC\|$ (o catetă este mai mică decât ipotenuza).

Dacă $D \in |A'C|$, $\widehat{ADC}$ este unghi exterior triunghiului ABD , deci $m(\widehat{ADC}) > m(\widehat{ABD})$; $\|AB\| < \|AC\|$ (ipoteză) $\Rightarrow m(\widehat{ABC}) > m(\widehat{ACB})$; deci: $m(\widehat{ADC}) > m(\widehat{ABC}) > m(\widehat{ACB})$; sau: $m(\widehat{ADC}) > m(\widehat{ACB}) \Rightarrow \|AC\| > \|AD\|$.

Dacă $D \in |BA'| \Rightarrow \|DA'\| < \|BA'\| \Rightarrow \|AD\| < \|AB\|$; dar $\|AB\| < \|AC\|$ (ipoteză) $\Rightarrow \|AD\| < \|AC\|$. (Am aplicat problema 2, § 12, pag. 42).

Deci în toate cazurile $\|AD\| < \|AC\|$.

Problema 6. Fie A un punct situat pe o dreaptă d , $B \notin d$ și $C \in AB$. Se notează cu B' și C' simetricele lui B și C față de dreapta d . Să se demonstreze că punctele A , B' , C' sînt coliniare.

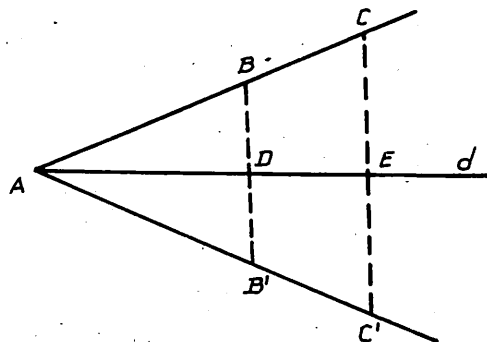


Fig. 40.

Soluție. B' simetricul lui B față de $d \Rightarrow |BD| \equiv |DB'|$ și $BB' \perp d$; C' simetricul lui C față de $d \Rightarrow |CE| \equiv |EC'|$ și $CC' \perp d$.

Cazul 1: $B \in |AC|$.

$\triangle ABD \equiv \triangle AB'D$ (cazul: C.C.): $|BD| = |B'D|$ (ipoteză); $|AD|$ - latură comună; $\widehat{ADB} = \widehat{ADB'}$ (unghiuri drepte-ipoteză). $\triangle ACE \equiv \triangle AC'E$

(cazul: C.C.); $|CE| \equiv |C'E|$ (ipoteză); $|AE|$ - latură comună; $\widehat{AEC} = \widehat{AEC'} = 90^\circ$ (ipoteză). $\Rightarrow \widehat{BAD} \equiv \widehat{B'AD}$ și $\widehat{CAE} \equiv \widehat{C'AE}$; dar $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAE}$, pentru că A, B, C sînt coliniare $\Rightarrow \widehat{B'AD} \equiv \widehat{C'AE}$; cum B' și C' sînt de aceeași parte a lui d, din teorema de construcție a unui unghi rezultă că $|AB'| = |AC'|$, deci A, B', C' sînt coliniare.

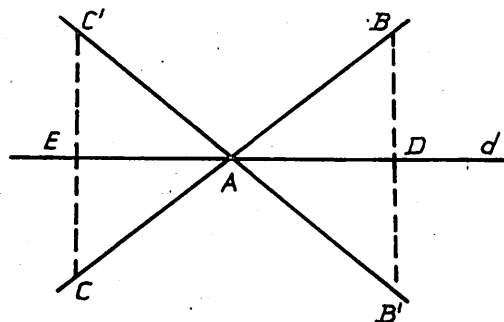


Fig. 41.

Cazul 2: $A \in |BC|$.

Se arată analog că $\triangle ABD \equiv \triangle ADB'$ (cazul: C.C.); $\triangle CAE \equiv \triangle C'AE$ (cazul: C.C.) $\Rightarrow \widehat{BAD} \equiv \widehat{B'AD}$ și $\widehat{CAE} \equiv \widehat{C'AE}$; dar $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAE}$ (unghiuri opuse la vîrf); $\Rightarrow \widehat{EAC'} \equiv \widehat{B'AD}$; cum A, E, D sînt coliniare $\Rightarrow |AB'|$ și $|AC'|$ sînt semidrepte opuse, $\Rightarrow C', A, B'$ sînt coliniare.

Problema 7. Să se arate că: a) simetrica unei drepte față de o altă dreaptă, pe care o taie este tot o dreaptă. b) O dreaptă admite o infinitate de axe de simetrie. Să se afle aceste axe. c) Simetricul unui segment față de o dreaptă este un segment de aceeași lungime. d) Să se afle axele de simetrie ale unui segment.

Soluție. a) Fie d și d' două drepte distincte care se intersectează în A, deci $\{A\} = d \cap d'$ și fie $B \in d$ și $C \in d'$; simetricele punctelor A, B, C față de d' sînt A, B', C' care, conform problemei 6, § 12, pag. 42, sînt coliniare. Considerînd A și C fixe și B mobil pe AC, rezultă că A și C' sînt fixe, iar B' mobil pe AC'. Deci dreapta B'A conține toate simetricele punctelor de pe dreapta AB, față de d'. Deci AC' este simetrica dreptei AC față de dreapta d'. b) Fie o dreaptă d și $O \in d$. Punctul O determină pe dreapta d semidreptele opuse $|OA$ și $|OA'$. Fie $M \in |OA$; conform teoremei de construcție a unui segment rezultă că există $N \in |OA'$ astfel încît $|OM| = |ON|$. Cum M a fost ales arbitrar pe $|OA$, rezultă că orice punct de pe $|OA$ are simetricul față de O pe $|OA'$, deci O este centru de simetrie al dreptei d. Pe dreapta d punctul O se poate alege într-o infinitate de moduri, deci există o infinitate de puncte care sînt centre de simetrie ale dreptei (orice punct al dreptei este centru de simetrie al ei). Prin fiecare punct O ales pe d, ducînd perpendiculară pe d, obținem

o axă de simetrie pentru d . Deci există o infinitate de axe de simetrie ale dreptei d și anume mulțimea tuturor perpendicularelor pe dreaptă.

c) Fie $|BC|$ astfel încât $BC \cap d \neq \emptyset$, $\Rightarrow BC \cap d = \{A\}$ și fie B' și C' simetricele punctelor B și C față de dreapta d . Conform problemei 6, § 12, pag. 42 $\Rightarrow A, B', C'$ sînt coliniare și oricare ar fi $M \in BC$, simetricul său față de d se află pe $B'C'$. Dacă M' este simetricul lui M față de d , să arătăm că $M' \in |B'C'|$. Fie deci $BB' \perp d$, $BB' \cap d = \{E\}$ și $|BE| = |B'E|$; $MM' \perp d$, $MM' \cap d = \{F\}$ și $|MF| = |M'F|$; $CC' \perp d$, $CC' \cap d = \{G\}$ și $|CG| = |C'G|$, $M \in |BC|$. Să arătăm că $M' \in |B'C'|$.

$\triangle ABE = \triangle AB'E$ (cazul: C.C.) $\Rightarrow |AB| \equiv |AB'|$; $\triangle AMF = \triangle AM'F$ (cazul: C.C.); $\triangle ACG = \triangle AC'G$ (cazul: C.C.) $\Rightarrow |AM| \equiv |AM'|$ și $|AC| \equiv |AC'|$.

Dacă $|AB| < |AM| < |AC| \Rightarrow |AB'| < |AM'| < |AC'|$. $\Rightarrow M' \in |B'C'|$. Deci simetricul oricărui punct M de pe $|BC|$ este un punct $M' \in |B'C'|$. $\Rightarrow$ Simetricul lui $|BC|$ față de d este $|B'C'|$. Tot din congruențele de triunghiuri de mai sus rezultă că $|BC| \equiv |B'C'|$ (ca diferențe de segmente congruente).

Proprietatea rămîne valabilă și în cazul cînd $BC \cap d = \emptyset$. În acest caz pentru demonstrație se folosește axioma paralelelor (care nu s-a studiat în acest capitol).

d) Fie $|AB|$ și $O \in |AB|$ astfel încît $|AO| \equiv |OB|$; atunci A și B sînt simetrice față de O . Ducem $d \perp AB$ astfel încît $O \in d$; d este axă de simetrie pentru $|AB|$. Cum d există și este unică (printr-un punct al unei drepte se poate duce o perpendiculară și numai una pe dreaptă), rezultă că $|AB|$ are o singură axă de simetrie. Dacă iau alt punct $C \in |AB|$ și duc d' astfel ca $d' \perp AB$, d' nu este axă de simetrie pentru $|AB|$ pentru că A și B nu sînt simetrice față de C .

Mediatoare. Bisectoare. Locuri geometrice.

Problemele de la pagina 45

Problema 1. Fie punctele distincte A și B . Să se afle locul geometric al punctelor M pentru care $AM \perp AB$.

Soluție. $MA \perp AB \Rightarrow \widehat{MAB} = 90^\circ = \text{constant}$ și $A \in MA$, deci locul geometric căutat este perpendiculara în A pe AB , care există și este unică. Orice punct $N \in AM$ are proprietatea că $AN \perp AB$; orice punct $P \notin AM$ va fi astfel

încît $AP \not\perp AB$ (din unicitatea perpendicularei ridicată pe o dreaptă într-un punct al ei). Deci numai punctele de pe AM au proprietatea caracteristică a locului geometric:

Problema 2. Fie punctele distincte A și B și numărul real $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$. Să se afle locul geometric al punctelor M pentru care $m(\widehat{MAB}) = \alpha$.

Soluție. Fie d dreapta determinată de punctele A și B . Conform teoremei de construcție a unui unghi, există în fiecare din semiplanele S și S' determinate de dreapta d câte o semidreaptă unic determinată. $AM \subset S$ și $AM' \subset S'$ astfel ca $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{M'AB}) = \alpha$. Oricare ar fi punctul $P \in AM$ sau $P \in AM' \Rightarrow m(\widehat{PAB}) = \alpha$. Dacă $P \in |AM \cup |AM'| \Rightarrow m(\widehat{PAB}) \neq \alpha$, deci P nu aparține locului geometric. Deci locul geometric este format din $|AM \cup |AM'$.

Problema 3. Fie triunghiul ABC și cele 2 unghiuri exterioare ale triunghiului care au ca latură $[BC$, respectiv $[CB$. Să se demonstreze că dacă bisectoarele celor 2 unghiuri exterioare sînt concurente într-un punct M , atunci M aparține și bisectoarei unghiului $\hat{A}$.

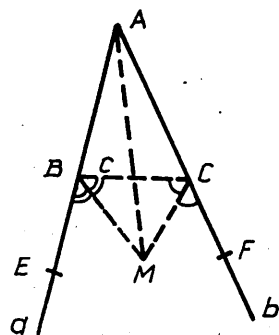


Fig. 42.

Soluție. Notăm AB cu a , AC cu b și BC cu c . $[BM$ fiind bisectoarea unghiului $\widehat{CBE} \Rightarrow d(M, a) = d(M, c)$; $[CM$ fiind bisectoarea unghiului $\widehat{BCF} \Rightarrow d(M, c) = d(M, b)$; $\Rightarrow d(M, a) = d(M, b)$ (1). $M \in \text{Int } \widehat{CBE}$ și $M \in \text{Int } \widehat{BCF} \Rightarrow M \in |aC$ și $M \in |bB \Rightarrow M \in |aC \cap |bB = \text{Int } \widehat{BAC}$ (2).

Din (1) și (2) rezultă că $|AM$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$. (Relația (2) arată că $|AM \subset \text{Int } \widehat{BAC}$).

Problema 4. Se consideră punctele A și B și o dreaptă d , $A \notin d, B \notin d$. Să se determine un punct C , $C \in d$ astfel ca $|AC| \equiv |BC|$. Discuție.

Soluție. $|AC| \equiv |BC| \Rightarrow C$ se află pe mediatoarea segmentului $|AB|$. Notăm cu m această mediatoare.

Dacă $m \cap d \neq \emptyset$, $m \neq d \Rightarrow (\exists) C$ astfel încît $m \cap d = \{C\}$. În acest caz problema are o singură soluție. Dacă $m \cap d = \emptyset \Rightarrow d \perp AB$, problema nu are soluție. Dacă $m = d \Rightarrow$ orice punct de pe d poate fi luat ca punct C , deci problema are o infinitate de soluții.

Problema 5. Fie unghiul $\widehat{hk}$ și 2 puncte A și B. Să se determine un punct C astfel ca $|AC| \equiv |CB|$ și $d(C, h) = d(C, k)$.

Soluție. Din $|AC| \equiv |CB| \Rightarrow C$ se află pe mediatoarea segmentului AB pe care o notăm cu m. Din $d(C, h) = d(C, k) \Rightarrow C$ se află pe bisectoarea unghiului $\widehat{hk}$, pe care o notăm cu b. Din $C \in m$ și $C \in b \Rightarrow C \in m \cap b$.

Dacă $m \cap b \neq \emptyset$ și $m \neq b \Rightarrow m \cap b = \{C\}$, deci problema are soluție unică.

Dacă $m \cap b = \emptyset$ (ceea ce se întâmplă dacă: $b \perp AB$) $\Rightarrow C$ nu există, deci problema nu admite soluție.

Dacă $m = b$ orice punct de pe m (sau de pe b) poate fi C, deci problema are o infinitate de soluții.

Drepte neconcurente

Problemele de la pagina 47

Problema 1. Să se demonstreze că dacă 2 drepte distincte formează cu o secantă o pereche de unghiuri corespondente congruente sau o pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare, atunci dreptele sînt nesecante.

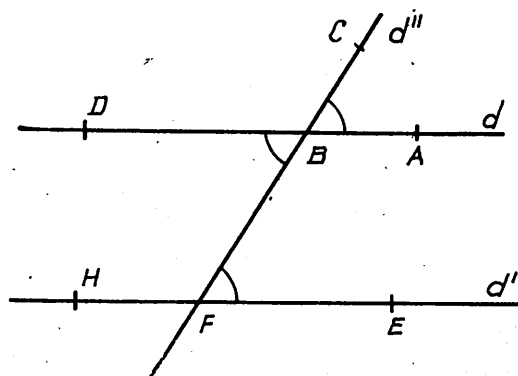


Fig. 43.

Soluție. Fie $d \neq d'$ și secanta d''

$d'' \cap d = \{B\}$ și $d'' \cap d' = \{F\}$. Fie

A și $D \in d$ astfel ca $B \in |AD|$; fie H și $E \in d'$ astfel ca $F \in |HE|$.

a) $\widehat{CBA} = \widehat{BFE}$ (ipoteză); $\widehat{CBA} \equiv \widehat{DBF}$

(opuse la vîrf) $\Rightarrow \widehat{DBF} = \widehat{BFE} \Rightarrow d$ și d' nesecante, conform teoremei 2§ 14,

pag. 47 care afirmă că dacă 2 drepte distincte formează cu o secantă o pe-

reche de unghiuri alterne interne congruente, atunci dreptele nu sînt concurente.

b) Dacă $m(\widehat{ABF}) + m(\widehat{BFE}) = 180^\circ$ (ipoteză), cum $m(\widehat{ABF}) + m(\widehat{ABC}) = 180^\circ$ (fiind unghiuri adiacente suplementare) $\Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{BFE}$; acestea sînt unghiuri corespondente și conform rezultatului de la punctul a) $\Rightarrow d$ și d' sînt nesecante.

Problema 2. Să se demonstreze că dacă segmentele $|AB|$ și $|CD|$ nesituate pe aceeași dreaptă au mijlocul comun, atunci $AC \cap BD = \emptyset$, $AD \cap BC = \emptyset$.

Soluție. O mijlocul lui $|AB|$ și al lui $|CD| \Rightarrow |AO| \equiv |OB|$ și $|CO| \equiv |OD|$; $\triangle AOC \equiv \triangle BOD$ (cazul: L.U.L.): $|AO| \equiv |OB|$ (ipoteză), $|CO| \equiv |OD|$ (ipoteză), $\widehat{AOC} \equiv \widehat{BOD}$ (opuse la vîrf). $\Rightarrow \widehat{ACO} \equiv \widehat{ODB}$; acestea sînt unghiuri alterne interne; conform teoremei 2, § 14, pag. 47 $\Rightarrow AC \cap BD = \emptyset$.

La fel se arată că $\triangle AOD \equiv \triangle BOC$ (cazul: L.U.L.) $\Rightarrow \widehat{ADO} \equiv \widehat{BCO}$ și fiind unghiuri alterne interne $\Rightarrow AD \cap BC = \emptyset$.

Exerciții recapitulative

Problemele de la pag. 47

Problema 1. Se consideră triunghiul ABC în care $m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB})$ și D este mijlocul segmentului $|BC|$. Să se arate că $\|AD\| < \frac{\|BC\|}{2}$.

Soluție. $m(\widehat{A}) > m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) \Rightarrow \widehat{BAD} > \widehat{B}$ sau $\widehat{CAD} > \widehat{C}$, pentru că în caz contrar, adică dacă $\widehat{BAD} \leq \widehat{B}$ și $\widehat{CAD} \leq \widehat{C} \Rightarrow m(\widehat{A}) \leq m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})$, contrar ipotezei. Rezultă că $\|BD\| > \|AD\|$ sau $\|DC\| > \|AD\|$; $\Rightarrow \|AD\| < \frac{BC}{2}$.

Problema 2. Dacă în patrulaterul convex $ABCD$ $\|AB\| + \|BD\| \leq \|AC\| + \|CD\|$, atunci $\|AB\| < \|AC\|$.

Soluție. În triunghiul AOB : $\|AB\| < \|BO\| + \|AO\|$; în triunghiul COD : $\|CD\| < \|CO\| + \|OD\|$. Adunînd, obținem: $\|AB\| + \|CD\| < \|AC\| + \|BD\|$; din ipoteză avem: $\|AB\| + \|BD\| \leq \|AC\| + \|CD\|$. Adunînd ultimele 2 relații și reducînd termenii asemenea obținem: $2\|AB\| < 2\|AC\| \Rightarrow \|AB\| < \|AC\|$. ($\{O\} = AC \cap BD$).

Problema 3. Dacă pentru triunghiurile ABC și $A'B'C'$ au loc relațiile: $|AB| \equiv |A'B'|$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, atunci $d(A, BC) = d(A', B'C')$.

Soluție. $\triangle ABM = \triangle A'B'M'$ (cazul: I.U.): $|AB| = |A'B'|$ (ipoteză), $\widehat{B} = \widehat{B'}$ (ipoteză), $\widehat{AMB} \equiv \widehat{A'M'B'}$ (unghiuri drepte). $\Rightarrow |AM| \equiv |A'M'|$. ($AM \perp BC$, $M \in |BC|$; $A'M' \perp B'C'$, $M' \in |B'C'|$).

Problema 4. Se consideră triunghiurile ABC și $A'B'C'$ în care $|AB| \equiv |A'B'|$, $|AC| \equiv |A'C'|$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$. Să se arate că dacă unghiurile $\widehat{C}$ și $\widehat{C'}$ sînt ascuțite (sau ambele obtuze) atunci $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Soluție. Folosim metoda reducerii la absurd: presupun că cele 2 triunghiuri nu sînt congruente și că $|B'C'| \neq |BC|$. Fie $|B'C'| > |BC|$. Conform teoremei de construcție a unui segment, rezultă că există $D \in |BC|$ astfel ca $|BD| \equiv |B'C'|$; $\Rightarrow \triangle ABD \equiv \triangle A'B'C' \Rightarrow |AD| \equiv |A'C'|$ și cum $|AC| \equiv |A'C'|$ (ipoteză) $\Rightarrow |AC| \equiv |AD|$ și deci triunghiul ACD este isoscel. $\Rightarrow \widehat{ACD} \equiv \widehat{ADC}$, absurd, deoarece unul este ascuțit ($\widehat{D} \equiv \widehat{C}$, iar C' ascuțit - ipoteză) și celălalt obtuz ($\widehat{ACD} > 90^\circ$, pentru că suplementul său $\widehat{ACB}$ este ascuțit). $\Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, (am luat $C \in |BD|$; pentru $D \in |BC|$ analog).
Dacă $\widehat{C}$ și $\widehat{C'}$ sînt unghiuri obtuze, raționamentul este asemănător.

Problema 5. Fie d bisectoarea unghiului propriu $\widehat{BAC}$ și d' perpendiculara pe d dusă prin B . Să se arate că $d' \cap |AC| \neq \emptyset$.

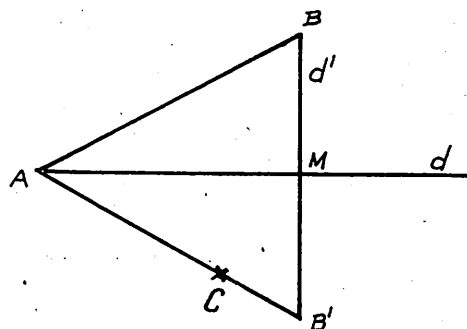


Fig. 44.

Soluție. Fie $B' \in AC$ astfel ca $|AB| \equiv |AB'|$. $\Rightarrow \triangle ABM \equiv \triangle AB'M$ (cazul: L.U.L.): $|AB| \equiv |AB'|$ (construcție), $|AM|$ - latură comună, $\widehat{BAM} \equiv \widehat{B'AM}$ (ipoteză - $[AM$ este bisectoarea unghiului $\widehat{A}]$). $\Rightarrow \widehat{AMB} \equiv \widehat{AMB'}$; dar aceste unghiuri sînt și adiacente suplementare $\Rightarrow m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{AMB'}) = 90^\circ$.
Rezultă că $BB' \perp AM$ sau $BB' \perp d$. Cum prin B trece o singură perpendiculară pe d rezultă că d' coincide cu BB' ; $B' \in |AC| \Rightarrow BB' \cap |AC| \neq \emptyset \Rightarrow d' \cap |AC| \neq \emptyset$.

Problema 6. Reuniunea a două drepte concurente are 2 axe de simetrie perpendiculare.

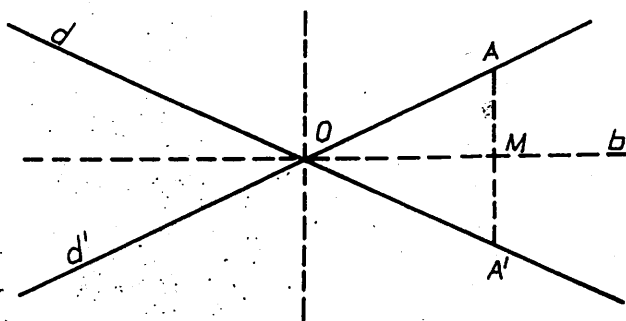


Fig. 45.

Soluție. Fie d și d' cele 2 drepte concurente și $d \cap d' = \{O\}$; fie b bisectoarea unghiurilor ascuțite ale celor 2 drepte. Fie $A \in d'$ și $AA' \perp b$, $A' \in d$. Arătăm că A' este simetricul lui A față de b . $AA' \cap b = \{M\}$; $\triangle AOM \equiv \triangle A'OM$ (cazul: C.U.): $|OM|$ la-

tură comună, $\widehat{AOM} \equiv \widehat{A'OM}$ (ipoteză) și $\widehat{AOM} \equiv \widehat{OMA'}$ (construcție). $\Rightarrow |AM| \equiv$

$= |A'M| \Rightarrow A'$ simetricul lui A față de b . Rezultă că b este axă de simetrie pentru cele 2 drepte concurente. Analog se arată că și bisectoarea unghiurilor obtuze este axă de simetrie. Deci cele 2 drepte reunite constituie o mulțime de puncte care are 2 axe de simetrie: biseptoarele unghiurilor formate de cele 2 drepte.

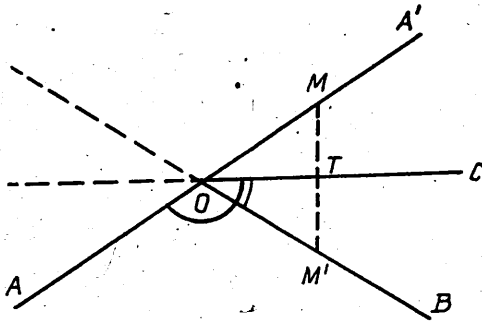


Fig. 46.

Problema 7. Dacă dreptele OA și OB nu sînt perpendiculare, dreapta OC este o axă de simetrie a mulțimii $OA \cup OB$ dacă și numai dacă unghiurile $\widehat{COA}$ și $\widehat{COB}$ sînt congruente sau suplementare.

Soluție. Cazul 1: fie A și B de o parte și de alta a lui OC . Dacă OC este axă de simetrie pentru $OA \cup OB \Rightarrow (\forall) M \in OA$, ducînd $MN \perp OC$, $N \in OC$, $MN \cap OB = \{P\}$ (problema 7, 12, pag. 43), P este simetricul lui M față de OC , deci $|MN| \equiv |NP|$. $\triangle MON \equiv \triangle PON$ (cazul: C.C.) $\Rightarrow \widehat{NOA} \equiv \widehat{NOB}$, adică $\widehat{COA} \equiv \widehat{COB}$.

Reciproc: dacă $\widehat{COA} \equiv \widehat{COB}$, fie $M \in OA$ și $MN \perp OC$; $MN \cap OB = \{P\}$; $\triangle MON = \triangle PON$ (cazul: C.U.) $\Rightarrow |MN| \equiv |NP|$, deci P este simetricul lui M față de OC , deci OC este axă de simetrie pentru $OA \cup OB$.

Cazul 2: fie A și B de aceeași parte a lui OC . Notăm $|OA'$ semidreapta opusă lui $|OA$. Presupunem că OC este axă de simetrie pentru $OA \cup OB$. Dacă $M \in |OA'$ și $MT \perp OC$, $MT \cap OB = \{M'\}$, M' este simetricul lui M față de OC , $\Rightarrow |MT| \equiv |M'T| \Rightarrow \triangle OMT \equiv \triangle OM'T$ (cazul: C.C.) $\Rightarrow \widehat{MOT} \equiv \widehat{M'OT}$ sau $\widehat{A'OT} \equiv \widehat{BOC}$; deci: $m(\widehat{COA}) + m(\widehat{COB}) = m(\widehat{COA}) + m(\widehat{A'OT}) = 180^\circ$; deci în acest caz $\widehat{COA}$ și $\widehat{COB}$ sînt suplementare. Dacă $M \in |OA$ simetricul său se va găsi pe semidreapta $|OB'$ opusă lui $|OB$, iar demonstrația se repetă.

Reciproc: dacă $m(\widehat{COA}) + m(\widehat{COB}) = 180^\circ$, cum și $m(\widehat{COA}) + m(\widehat{COA'}) = 180^\circ \Rightarrow \widehat{COB} \equiv \widehat{COA'}$ deci $[OC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BOA'}$ și atunci, conform cazului 1, OC este axă de simetrie pentru $OA \cup OB$.

Problema 8. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $\widehat{A} = \widehat{B}$ și $|DA| \equiv |CB|$. Să se arate că mediatoarea d a segmentului $|AB|$ intersectează segmentul $|DC|$ și că d este axă de simetrie a patrulaterului $ABCD$.

Soluție. Fie N astfel ca $|AN| \equiv |BN|$ și $N \in AB \cap d$, $d \perp AB$; $\triangle AND \equiv \triangle BNC$ (cazul: L.U.L.): $|AD| \equiv |BC|$ (ipoteză), $|AN| \equiv |BN|$ (ipoteză); $\widehat{A} = \widehat{B}$

(ipoteză). $\Rightarrow \widehat{AND} \equiv \widehat{BNC}$. Dacă prin absurd $DC \cap d = \emptyset \Rightarrow D, C$ sînt de aceeași parte a lui d ; fie D și C de aceeași parte a lui d ca și $A \Rightarrow D$ și $C \in |dA$. Patrulaterul $ABCD$ fiind convex D și C sînt de aceeași parte a lui AB ; fie $E \in d$

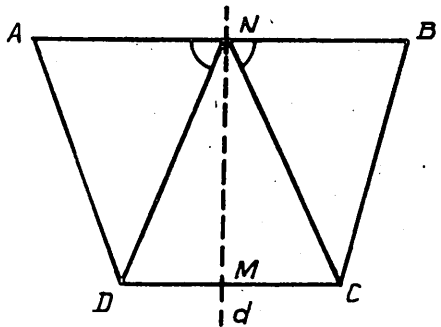


Fig. 47.

astfel ca E să fie de aceeași parte a lui AB ca și D și C ; D și $C \in |dA \cap |dE = \text{Int } \widehat{ANE}$.
 $|ND \subset \text{Int } \widehat{ANE}$ și $|NC \subset \text{Int } \widehat{ANE} \Rightarrow m(\widehat{AND}) < 90^\circ$;
 dar $\widehat{AND} \equiv \widehat{BNC}$ (demonstrație); cum
 $|NC \subset \text{Int } \widehat{ANE} \Rightarrow m(\widehat{CNA}) < 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{CNB}) > 90^\circ$;
 am ajuns la contradicția că un unghi ascuțit $\widehat{AND}$ este congruent cu unul obtuz $\widehat{BNC} \Rightarrow$

$\Rightarrow DC \cap d = \{M\}$. Să arătăm că $M \in |DC|$. Dacă $M \notin |DC|$, fie $C \in |DM|$.
 $MNC \subset \text{Int } \widehat{BNC} \Rightarrow m(\widehat{BNC}) > 90^\circ$ pentru că $\widehat{BNC} > \widehat{BNM}$, iar $m(\widehat{BNM}) = 90^\circ$; iar
 $m(\widehat{AND}) < m(\widehat{ANM}) = 90^\circ$; din nou ajungem la contradicția că un unghi ascuțit este congruent cu unul obtuz.

Dacă $D \in |MC|$ se discută analog. $\Rightarrow d \cap |DC| = \{M\}$

Să arătăm că d este axă de simetrie pentru patrulater, d este axă de simetrie pentru $|AB|$ conform problemei 7, § 12, pag. 43; arătăm că d este axă de simetrie și pentru $|DC|$ și că $|AD|$ și $|BC|$ sînt simetrice față de d .

Am arătat că $\widehat{AND} \equiv \widehat{BNC}$; cum $\widehat{ANM} \equiv \widehat{BNM}$ (unghiuri drepte) $\Rightarrow \widehat{DNM} = \widehat{MNC}$ (diferențe de unghiuri congruente). Din $\triangle AND \equiv \triangle BNC \Rightarrow |DN| \equiv |NC|$.

$\triangle DNM \equiv \triangle MNC$ (cazul: L.U.L.) $\Rightarrow |DM| \equiv |MC|$ și $\widehat{NMD} \equiv \widehat{NMC}$; cele 2 unghiuri fiind și adiacente suplementare $\Rightarrow m(\widehat{NMD}) = m(\widehat{NMC}) = 90^\circ \Rightarrow d \perp DC$.

Rezultă că D și C sînt simetrice față de d . Cum A și B sînt și ele simetrice față de d , rezultă că $|AD|$ este simetric cu $|BC|$ față de d (conform problemei 7, § 12, pag. 43). Deci orice punct al patrulaterului $ABCD$ are simetricul față de d tot pe acest patrulater și deci d este axă de simetrie pentru $ABCD$.

Problema 9. Dacă 2 drepte au o perpendiculară comună, atunci mulțimea formată din reuniunea celor 2 drepte are axă de simetrie.

Soluție. Fie $d \neq d'$ și $a \perp d$ și $a \perp d'$; $d \cap a = \{A\}$ și $d' \cap a = \{B\}$. Fie $M \in a$ astfel ca $|MA| \equiv |MB|$ și $d'' \perp a$, iar $M \in d''$. Demonstrăm că d'' este axă de simetrie pentru reuniunea dreptelor d și d' .

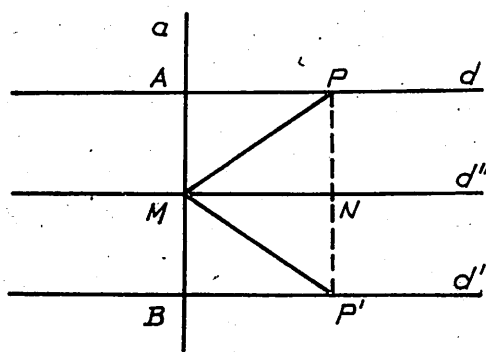


Fig. 48.

Fie P și P' de aceeași parte a lui a , $P \in d$, $P' \in d'$ și $|AP| \equiv |BP'| \Rightarrow \triangle AMP \equiv \triangle BP'M$ (cazul: C.C.) $\Rightarrow |PM| \equiv |P'M|$. Dreptele d și d'' sînt nesecante (pentru că formează cu secanta a unghiuri alterne interne congruente-drepte). La fel: d' și d'' sînt nesecante. $A \in d$ și $B \in d'$, A și B de o parte și de alta a lui d'' . $\Rightarrow (\forall) P \in d$ și $(\forall) P' \in d'$, P și P' sînt

de o parte și de alta a lui d'' . $\Rightarrow |PP'| \cap d'' \neq \emptyset$.

Pentru P și P' alese inițial, fie $|PP'| \cap d'' = \{N\}$.

Dacă $\triangle APM \equiv \triangle BP'M \Rightarrow \widehat{AMP} \equiv \widehat{BMP'}$; $\widehat{AMN} \equiv \widehat{BMN}$ (unghiuri drepte); $\Rightarrow \widehat{PMN} \equiv \widehat{P'MN}$ (ca diferență de unghiuri congruente). Rezultă că $\triangle PMN \equiv \triangle P'MN$ (cazul: L.U.L.): $|PM| \equiv |P'M|$, $\widehat{PMN} = \widehat{P'MN}$ (din $\triangle AMP \equiv \triangle BMP'$) și $|MN|$ - latură comună. $\Rightarrow |PN| \equiv |P'N|$ și $\widehat{PNM} \equiv \widehat{P'NM}$ și fiind și unghiuri adiacente suplementare $m(\widehat{PNM}) = m(\widehat{P'NM}) = 90^\circ \Rightarrow d'' \perp PP'$; deci P și P' sînt simetrice față de d'' . $\Rightarrow d'$ este simetrică cu d față de d'' , deci d'' este axă de simetrie pentru mulțimea $d \cup d'$.

Problema 10. Pe dreapta AB se iau punctele C și D astfel ca segmentele $|AB|$ și $|CD|$ să aibă același mijloc. Fie c și d perpendicularele prin C și D pe AB , iar P și Q simetricele unui punct oarecare $M \in d$ față de A respectiv B . Să se arate că P și Q sînt simetrice față de c .

Soluție. Fie P' și Q' respectiv picioarele perpendicularelor duse din P și Q pe AB . Deci: $PP' \perp AB$ și $QQ' \perp AB$.

$\triangle APP' \equiv \triangle AMD$ (cazul: I.U.) $\Rightarrow |P'A| \equiv |AD|$; $\triangle MDB \equiv \triangle BQQ'$ (cazul: I.U.) $\Rightarrow |DB| \equiv |BQ'|$.

$|P'C| \equiv |P'A| + |AC| \equiv |AD| + |AC| \equiv 2|AC| + |CD|$.

$|CQ'| \equiv |CD| + |DB| + |BQ'| \equiv |CD| + 2|BD|$; cum $|AC| \equiv |BD|$ (pentru că $|CD|$ și $|AB|$ au același mijloc) $\Rightarrow |P'C| \equiv |CQ'|$.

$\triangle APP' \equiv \triangle AMD$ (cazul: I.U.) $\Rightarrow |PP'| \equiv |MD|$; $\triangle MDB \equiv \triangle BQQ'$ (cazul: I.U.) $\Rightarrow |MD| \equiv |BQ'|$. $\Rightarrow |PP'| \equiv |BQ'|$, $\triangle PP'C \equiv \triangle BQQ'C$ (cazul: C.C.): $|PP'| \equiv |BQ'|$ și $|P'C| \equiv |CQ'|$ (am demonstrat) $CP = CQ$.

A și B sînt de o parte și de alta a dreptei c , rezultă că P și Q sînt de o parte

Arătăm că punctele B' , C' , P' sînt coliniare, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (cazul: L.U.L.) $\Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{AB'C'}$. $\triangle ABP \equiv \triangle AB'P'$ (cazul: L.U.L.) $\Rightarrow \widehat{ABP} \equiv \widehat{AB'P'}$. Dar B , C , P sînt coliniare $\Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{ABP} \Rightarrow \widehat{AB'C'} \equiv \widehat{AB'P'}$ și deci B' , C' , P' sînt coliniare; A , B , C fixe $\Rightarrow C'$, B' fixe, P' se mișcă pe o dreaptă fixă. S-o notăm cu d' . Am arătat că orice punct P de pe d are simetricul față de A pe d' .

Să arătăm că orice punct de pe d' este simetricul unui punct de pe d .

Fie $S \in d'$, $SA \cap d = \{S'\}$; d și d' sînt nesecante, pentru că formează cu orice secantă unghiuri alterne interne congruente (de exemplu: $\widehat{ABC} \equiv \widehat{AB'C'}$; $S \in d'$, $A \notin d$ și $A \notin d' \Rightarrow SA$ și d nu pot fi nesecante.

$\triangle SAB' \equiv \triangle S'AB$ (cazul: U.L.U.): $|BA| \equiv |B'A|$; $\widehat{SB'A} \equiv \widehat{S'BA}$ (pentru că d și d' sînt nesecante); $\widehat{SAB'} \equiv \widehat{S'AB}$ (opuse la vîrf). $\Rightarrow |SA| \equiv |S'A| \Rightarrow S'$ este simetricul lui S față de A .

Rezultă că locul geometric al lui P' (simetricul lui P față de A) este o dreaptă d' (simetrica lui d față de A) nesecantă față de d .

Problema 13. Se dă un unghi propriu $\widehat{AOB}$. Să se afle locul geometric al punctelor M astfel ca $[OB]$ să fie bisectoarea unghiului $\widehat{AOM}$. În ce caz locul geometric este diferit de mulțimea vidă?

Soluție. OB este bisectoarea unghiului $\widehat{AOM}$ dacă $|OB| \subset \text{Int } \widehat{AOM}$ și $\widehat{AOB} \equiv \widehat{BOM}$. Conform teoremei de construcție a unui unghi, în semiplanul limitat de OB și care nu conține pe A , există o singură semidreaptă OA' astfel ca $\widehat{A'OB} \equiv \widehat{AOB} \Rightarrow M \in |OA'|$.

Reciproc: dacă $M \in |OA'| \Rightarrow \widehat{MOB} \equiv \widehat{AOB}$ și cum $|OB| \subset \text{Int } \widehat{AOM} \Rightarrow [OB]$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOM}$.

Deci locul geometric al lui M este semidreapta $|OA'|$. Locul geometric este diferit de mulțimea vidă dacă $\widehat{AOB}$ este unghi ascuțit sau drept. Dacă $\widehat{AOB}$ este obtuz, $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOM}) > 180^\circ \Rightarrow |OB| \not\subset \text{Int } \widehat{AOM}$.

Problema 14. Se consideră punctele M , N , P și Q pe laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ ale patrulaterului convex $ABCD$. Să se arate că patrulaterul $MNPQ$ este convex. Generalizare.

Soluție. Notăm dreapta MN cu d . Fie cazul cînd M , N , P , Q nu coincid cu vîrfurile lui $ABCD$. $M \in |AB|$ și $N \in |BC|$; $\Rightarrow d$ taie 2 laturi ale

triunghiului ABC și nu trece prin vîrfurile sale, deci d nu taie a treia latură;
 $d \cap |AC| = \emptyset$. Deci A și C sînt de aceeași parte a dreptei d .

$D \in \text{Int } \widehat{ABC}$ (poligonul ABCD fiind convex) $\Rightarrow D \in \text{Int } \widehat{MBN}$; aplicînd teorema transversalei $\Rightarrow |BD| \cap |MN| \neq \emptyset$, adică $|BD| \cap |MN| = \{S\}$.

Fie triunghiul BCD; d taie laturile $|BC|$ și $|BD|$ și nu trece prin vîrfurile sale, rezultă că d nu taie $|CD|$, deci $d \cap |CD| = \emptyset \Rightarrow C$ și D sînt de aceeași parte a lui d . $\Rightarrow A, C, D$ sînt de aceeași parte a lui d . $P \in |DC|$ și $Q \in |AD|$, cum semiplanele sînt mulțimi convexe, rezultă că P și Q sînt în același semiplan limitat de d ca și punctele A, D, C . Deci Q, P sînt de aceeași parte a lui d . La fel se arată că P și N sînt de aceeași parte a dreptei MQ , M și N de aceeași parte a lui QP , M și Q de aceeași parte a lui NP . Deci MNPQ este poligon convex.

Dacă $d = MN$ trece printr-un vîrf al poligonului ABCD, de exemplu prin A , adică $M = A$, cum $C \in \text{Int } \widehat{BAD} \Rightarrow |BC| \in \text{Int } \widehat{BAD}$; $N \in |BC| \Rightarrow N \in \text{Int } \widehat{BAD} \Rightarrow |BD| \cap |AN| \neq \emptyset$.

Fie triunghiul BCD; d taie $|BD|$ și $|BC| \Rightarrow$ nu taie $|DC|$; $\Rightarrow D$ și C sînt de aceeași parte a lui d , deci de aceeași parte a lui AN ; mai departe se arată ca în primul caz că fiecare 2 vîrfuri ale lui MNPQ se află de aceeași parte a unei laturi.

Generalizare: fiind dat poligonul convex $P_1 P_2 P_3 \dots P_n$ și punctele: $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ astfel ca $M_1 \in [P_1 P_2]$, $M_2 \in [P_2 P_3]$, $\dots$, $M_n \in [P_n P_1]$, atunci poligonul $M_1 M_2 M_3 \dots M_n$ este convex. Demonstrația se face ca și în cazul particular precedent.

CAPITOLUL II

PARALELISM. ASEMĂNARE.

Axioma paralelelor

Problèmele de la pagina 52.

Problema 1. Două drepte paralele formează cu o secantă perechi de unghiuri corespondente congruente și perechi de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare.

Soluție. Fie $d \parallel d'$ și secanta d'' ; $d'' \cap d = \{A\}$; $d'' \cap d' = \{B\}$. Notăm unghiurile formate de paralele cu secanta ca în desenul alăturat.

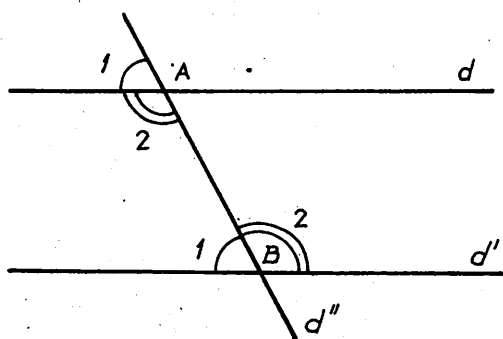


Fig. 52.

a) $m(\hat{A}_1) + m(\hat{A}_2) = 180^\circ$; $m(\hat{B}_1) + m(\hat{B}_2) = 180^\circ$. $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ (conform teoremei paralelelor tăiate de o secantă, care afirmă că 2 drepte paralele tăiate de o secantă formează perechi de unghiuri alterne interne congruente). $\Rightarrow \hat{A}_1 \equiv \hat{B}_1$.

Pentru orice altă pereche de unghiuri corespondente se demonstrează în mod asemănător că sînt congruente.

b) $m(\hat{A}_1) + m(\hat{A}_2) = 180^\circ$; dar $\hat{A}_1 \equiv \hat{B}_1$ (conform demonstrației de la punctul a). $\Rightarrow m(\hat{B}_1) + m(\hat{A}_2) = 180^\circ$; deci unghiurile interne de aceeași parte a secantei sînt suplementare.

Problema 2. Două drepte distincte paralele cu a treia dreaptă sînt paralele între ele.

Soluție. Fie $d \parallel d'$ și $d' \parallel d''$. Să arătăm că $d \parallel d''$. Presupunem prin absurd că $d \nparallel d''$, deci $d \cap d'' = \{A\}$. Ar însemna că prin punctul A am dus 2 paralele distincte la d' , ceea ce contrazice axioma paralelelor care afirmă că printr-un punct exterior unei drepte se poate duce cel mult o paralelă la dreapta dată. Rezultă $d \parallel d''$.

Problema 3. Unghiurile cu laturile respectiv paralele sînt congruente sau suplementare.

Soluție. Fie $\widehat{AOB}$ și $\widehat{A'O'B'}$ ambele ascuțite sau ambele obtuze și cu laturile respectiv paralele, adică: $OA \parallel O'A'$, $OB \parallel O'B'$.

Folosind notațiile din desen avem: $\widehat{O} \equiv \widehat{M}_1$ (unghiuri corespondente formate de dreptele paralele OA și $O'A'$ cu secanta OM). $\widehat{M}_1 \equiv \widehat{O'}$ (unghiuri corespondente formate de dreptele paralele OB și $O'B'$ cu secanta $O'M$). $\Rightarrow \widehat{O} \equiv \widehat{O'}$.

Dacă unul din cele 2 unghiuri este ascuțit și celălalt obtuz, rezultă: $m(\widehat{O'_2}) + m(\widehat{O'_1}) = 180^\circ$, fiind unghiuri adiacente suplementare. Dar $\widehat{O'_1} \equiv \widehat{O}$, conform primului caz, fiind amîndouă ascuțite sau amîndouă obtuze, cu laturile respectiv paralele) $\Rightarrow m(\widehat{O'_2}) + m(\widehat{O}) = 180^\circ$. Deci unghiurile $\widehat{O}$ și $\widehat{O'_2}$ sînt suplementare.

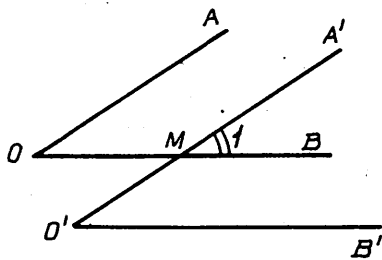


Fig. 53.

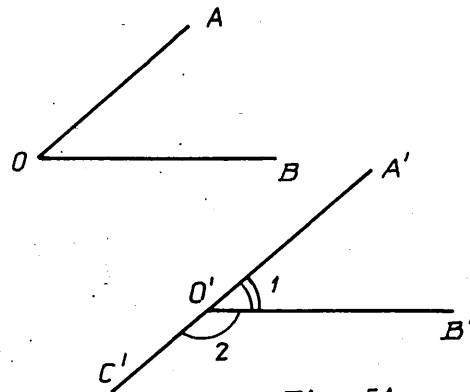


Fig. 54.

Problema 4. Dacă $d \perp d_1$, atunci d este perpendiculară pe orice dreaptă paralelă cu d_1 .

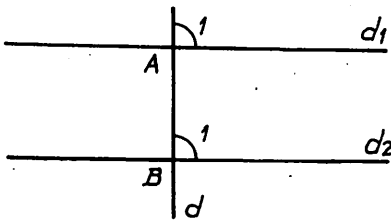


Fig. 55.

Soluție. Fie $d_2 \parallel d_1$. $d \perp d_1$, iar d este o secantă; $d \cap d_1 = \{A\}$ și $d \cap d_2 = \{B\}$. $\widehat{A}_1 \equiv \widehat{B}_1$ (unghiuri corespondente formate de 2 paralele cu o secantă); dar $\widehat{A}_1 \in 90^\circ$ (pentru că $d \perp d_1$); $\Rightarrow \widehat{B}_1 \in 90^\circ \Rightarrow d \perp d_2$.

Problema 5. Diagonalele unui dreptunghi sînt congruente.

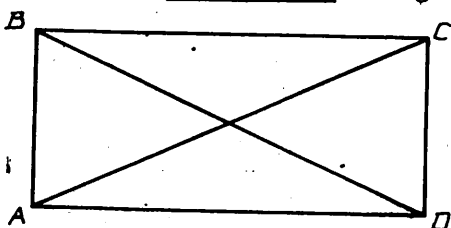


Fig. 56.

Soluție. $\triangle ABD \equiv \triangle DCA$ (cazul: C.C.):

$|AB| \equiv |CD|$ (laturi opuse ale dreptunghiului);

$|AD|$ - latură comună; $\widehat{BAD} \equiv \widehat{ADC}$ (unghiuri drepte); $\Rightarrow |BD| \equiv |AC|$.

Problema 6. Să se determine axele de simetrie ale unui dreptunghi, romb, pătrat.

Soluție.

a) Am arătat că axa de simetrie a unui segment este mediatoarea sa (problema 7, § 12, pag. 43). Pentru dreptunghi mediatoarele laturilor opuse coincid: dacă M și N sînt mijloacele laturilor $|BC|$,

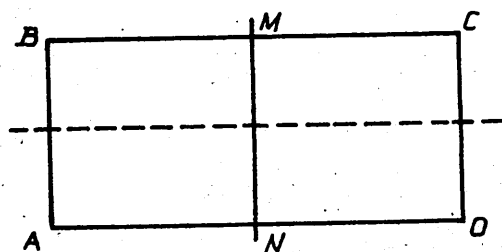


Fig. 57.

respectiv $|AD|$ ale dreptunghiului $ABCD$, atunci, unind M cu N obținem: $ABMN$ este dreptunghi, avînd laturile $|BM|$ și $|AN|$ congruente și paralele și unghiul $\hat{A}$ drept; $\Rightarrow MN \perp BC$ și $MN \perp AD$; cum $|MB| \equiv |MC|$ și $|AN| \equiv |ND| \Rightarrow MN$ este mediatoarea segmentului $|BC|$ și a lui $|AD|$. La fel se arată că mediatoarele celorlalte 2 laturi opuse coincid. Deci dreptunghiul are 2 axe de simetrie: mediatoarele perechilor de laturi opuse.

b) Fie rombul $ABCD$. Am arătat în problema 7 pag. 48 că bisectoarea unui unghi este axă de simetrie pentru reuniunea semidreptelor care formează unghiul. Notăm $M_1 = [BA \cup [BC$ și $M_2 = [DA \cup [DC$; M_1 are ca axă de simetrie $[BD$ iar M_2 are ca axă de simetrie $[DB$; $\Rightarrow M_1 \cap M_2$ are ca axă de simetrie $[BD \cap [DB = [BD]$; deci o diagonală este axă de simetrie pentru romb. La fel se arată că și cealaltă diagonală este axă de simetrie. Rezultă că rombul are 2 axe de simetrie: diagonalele.

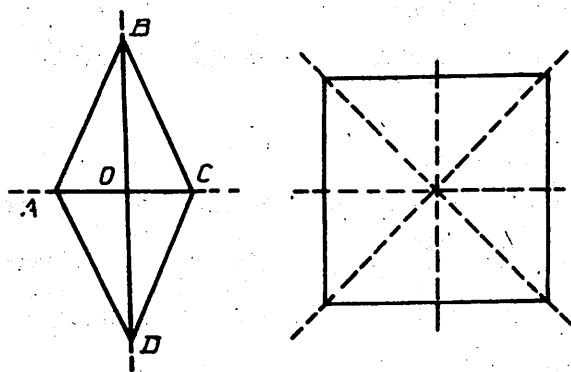


Fig. 58.

c) Pătratul fiind definit ca dreptunghiul cu 2 laturi consecutive congruente sau ca rombul cu un unghi drept, rezultă că are toate proprietățile dreptunghiului, precum și pe cele ale rombului. Deci, pătratul are ca axe de simetrie mediatoarele laturilor opuse (ca dreptunghiul) și diagonalele (ca rombul); are deci 4 axe de simetrie.

Problema 7. Să se arate că diagonalele unui romb sînt bisectoarele unghiurilor rombului.

Soluție. Rombul fiind un poligon convex $\Rightarrow D \in \text{Int } \widehat{ABC} \Rightarrow BD \subset \text{Int } \widehat{ABC}$ (conform problemei 4, § 6, pag. 18). $\triangle AOB \equiv \triangle BOC$ (cazul: L.L.L.) $\Rightarrow \widehat{ABO} \equiv \widehat{CBO}$; $\Rightarrow [BD \text{ este bisectoarea unghiului } \widehat{B} \text{ (O este punctul de intersecție al diagonalelor). La fel se arată că } [DB \text{ este bisectoarea unghiului } \widehat{D}, [AC \text{ a unghiului } \widehat{A} \text{ și } [CA \text{ a unghiului } \widehat{C}.$

Problema 8. Fie triunghiul ABC, $\widehat{A} \in 90^\circ$ și $M \in |BC|$, $|MB| \equiv |MC|$. Să se demonstreze că $\|AM\| = \frac{\|BC\|}{2}$.

Soluție. Fie A' astfel ca $M \in |AA'|$ și $|AM| \equiv |MA'|$. $ABA'C$ este dreptunghi pentru că $|BM| \equiv |MC|$ (ipoteză); $|AM| \equiv |MA'|$ (construcție); și $\widehat{A} \in 90^\circ$ (ipoteză) $\Rightarrow |AA'| \equiv |BC|$ (diagonalele sînt congruente conform problemei 5, § 1, cap. 2, pag. 52). $\|AM\| = \frac{\|AA'\|}{2} \Rightarrow \|AM\| = \frac{\|BC\|}{2}$.

Problema 9. Dacă în triunghiul ABC, M este mijlocul laturii $\|BC\|$ și $\|AM\| = \frac{\|BC\|}{2}$, atunci triunghiul este dreptunghic.

Soluție. Construim A' astfel că $M \in |AA'|$ și $|MA| \equiv |MA'|$. $ACA'B$ este paralelogram deoarece $|MA| \equiv |MA'|$ (din construcție); $|BM| \equiv |MC|$ (ipoteză). Cum $\|AA'\| = 2\|AM\|$ (din construcție), iar $\|BC\| = 2\|AM\|$ (ipoteză) $\Rightarrow \|AA'\| \equiv \|BC\|$. Deci $ACA'B$ este dreptunghi (fiind un paralelogram cu diagonale congruente). Deci $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ \Rightarrow$ triunghiul ABC este dreptunghic.

Problema 10. Să se demonstreze că locul geometric al punctelor situate la aceeași distanță de o dreaptă dată este reuniunea a 2 drepte paralele cu acea dreaptă.

Soluție. Fie A, B, C 3 puncte situate în același semiplan limitat de dreapta d și aflate la o distanță l față de d. Fie A', B', C' picioarele perpendicularelor duse din A, B, C pe d. $AA'B'B$ și $BB'C'C$ sînt dreptunghiuri,

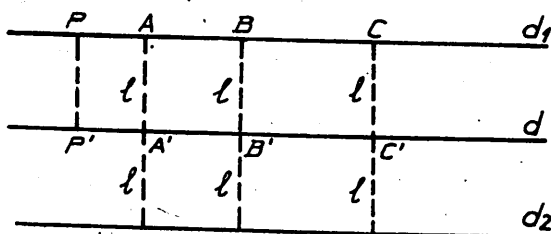


Fig. 59.

avînd cîte 2 laturi paralele și congruente și cîte un unghi drept. $AB \parallel d$ și $BC \parallel d$. Cum prin B putem duce cel mult o paralelă la d (axioma paralelelor) $\Rightarrow A, B, C$ sînt coliniare. A, B, $C \in d_1$, $d_1 \parallel d$. Dacă am fi luat punctele A, B, C, în celălalt semiplan limitat de d, punctele A, B, C ar fi aparținut

unei drepte d_2 , $d_2 \parallel d$, d_2 aflată tot la distanța 1 de dreapta d . Deci orice punct aflat la distanța 1 de d se află pe una din cele 2 drepte paralele cu d și aflate la distanța 1 de d , deci pe d_1 sau pe d_2 .

Reciproc: să arătăm că orice punct aflat pe d_1 sau pe d_2 are distanța 1 pînă la d . Fie $P \in d_1$ și P' piciorul perpendicularei din P pe d , $PP'A$ este dreptunghi, pentru că $PP' \parallel AA'$ (fiind perpendiculare pe aceeași dreaptă), $AP \parallel A'P'$ (pentru că am arătat că $d \parallel d_1$) și $\widehat{AA'P'} \in 90^\circ$ (AA' fiind perpendiculară pe d). $\Rightarrow \|PP'\| = \|AA'\| = 1$. Dacă P ar fi situat pe d_2 s-ar demonstra la fel.

Deci locul geometric al punctelor aflate la distanța 1 de d este reuniunea a 2 drepte paralele cu d , aflate în cele 2 semiplane limitate de d , la distanța 1 de d .

Problema 11. Diagonalele unui romb sînt perpendiculare.

Soluție. Fie rombul $ABCD$ și O punctul de intersecție al diagonalelor. $\triangle ABO \equiv \triangle CBO$ (cazul: L.L.L.): $|AB| \equiv |BC|$ (laturile rombului sînt congruente); $|BO|$ - latură comună; $|AO| \equiv |OC|$ (Punctul de intersecție al diagonalelor se află la mijlocul fiecăreia din ele). $\Rightarrow \widehat{AOB} \equiv \widehat{COB}$; dar $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{COB}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{COB}) = 90^\circ \Rightarrow BD \perp AC$.

Problema 12. Se dă paralelogramul $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$) în care $|BD| \equiv |AD|$. Fie M mijlocul laturii $|CD|$ și $|ME| \equiv |BM|$, $M \in |BE|$. Să se arate că: a) $BM \perp CD$; b) A, D, E coliniare; c) $|AD| \equiv |DE|$.

Soluție. $|BM| \equiv |ME|$ (ipoteză); $|CM| \equiv |MD|$ (ipoteză); $\Rightarrow BCED$ paralelogram. $|BC| \equiv |AD|$ (pentru că $ABCD$ paralelogram) $|BD| \equiv |AD|$ (ipoteză); $\Rightarrow |BC| \equiv |BD|$. $BCED$ fiind paralelogram cu 2 laturi alăturate congruente este romb. $\Rightarrow BE \perp CD$; $\Rightarrow BM \perp CD$.

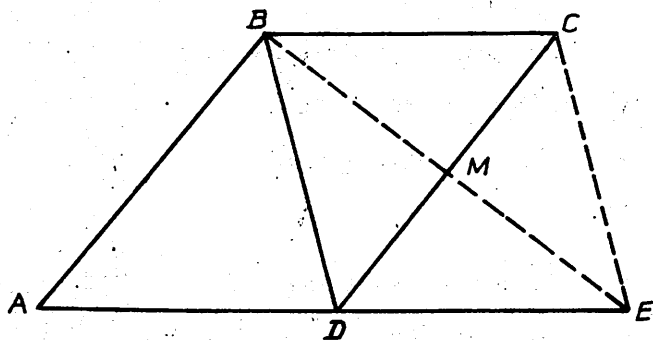


Fig. 60.

b) $BC \parallel AD$ (pentru că $ABCD$ paralelogram); $BC \parallel DE$ (pentru că $BCED$ romb); $\Rightarrow A, D, E$ coliniare, pentru că, în caz contrar, ar fi contrazisă axioma paralelelor.

c) $|BC| \equiv |AD|$ (ABCD paralelogram); $|BC| \equiv |DE|$ (BCED romb);
 $\Rightarrow |AD| \equiv |DE|$.

Problema 13. Dacă 2 laturi opuse ale unui patrulater ABCD sînt paralele și congruente atunci patrulaterul este paralelogram.

Soluție. Fie patrulaterul ABCD în care $|AB| \equiv |DC|$ și $AB \parallel CD$.
 $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$ (cazul: L.U.L.); $|AB| \equiv |CD|$ (ipoteză); $|AC|$ - latură comună; $\widehat{BAC} \equiv \widehat{ACD}$ (alterne interne). $\Rightarrow \widehat{DAC} \equiv \widehat{BCA}$; acestea fiind unghiuri alterne interne $\Rightarrow BC \parallel AD$. Cum $BC \parallel AD$ și $AB \parallel DC \Rightarrow ABCD$ paralelogram.

Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi

Problemele de la pagina 53.

Problema 1. Suma măsurilor unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic este 90° .

Soluție. Fie triunghiul ABC cu $\widehat{A} \in 90^\circ$. $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$, iar $m(\widehat{A}) = 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 90^\circ$.

Problema 2. Măsura fiecărui unghi a unui triunghi echilateral este 60° .

Soluție. ABC fiind echilateral $\Rightarrow m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$; dar $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 60^\circ$.

Problema 3. Dacă într-un triunghi dreptunghic ABC, $\widehat{A} \in 90^\circ$, $\widehat{B} \in 30^\circ$, atunci $\|AC\| = \frac{\|BC\|}{2}$.

Soluție. Construim mediana $|AM|$ ($M \in BC$; $|BM| \equiv |MC|$). $\Rightarrow \|AM\| = \frac{\|BC\|}{2}$ (conform problemei 8, § 1, pag. 52); $\Rightarrow \|AM\| \equiv \|MC\|$; $m(\widehat{C}) = 180^\circ - 90^\circ - m(\widehat{B}) = 60^\circ$. Cum triunghiul AMC este isoscel $\Rightarrow m(\widehat{MAC}) = m(\widehat{C}) = 60^\circ$. $\Rightarrow m(\widehat{AMC}) = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$. $\triangle AMC$ este echilateral. $\Rightarrow \|AC\| = \|AM\| = \frac{\|BC\|}{2}$.

Problema 4. În triunghiul ABC se duce bisectoarea AA' ($A' \in BC$), iar prin A' se duc paralelele $A'M$ și $A'N$ la laturile $|AB|$ și $|AC|$ ($M \in AC$, $N \in AB$). Să se arate că $AMA'N$ este un romb.

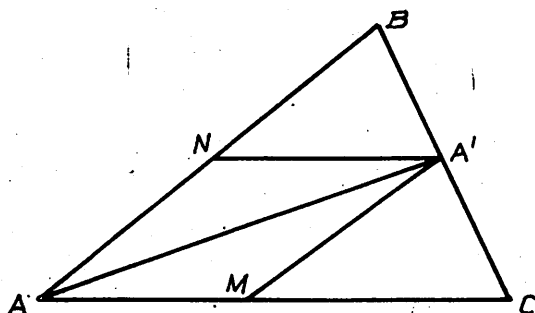


Fig. 61.

Problema 5. În triunghiul dreptunghic ABC ($\hat{A} \in 90^\circ$) se duce înălțimea $|AD|$ ($D \in BC$). Se unește D cu mijloacele E și F ale laturilor $|AB|$ și $|AC|$. Să se arate că $m(\widehat{FDE}) = 90^\circ$.

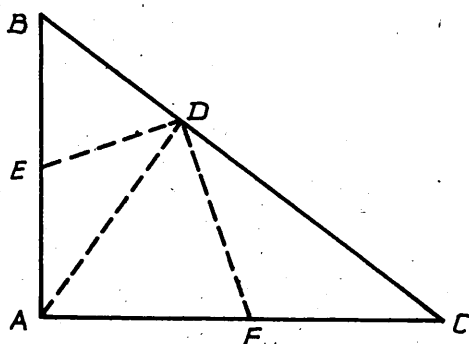


Fig. 62.

$+ m(\widehat{ADF}) = m(\widehat{EAD}) + m(\widehat{DAF}) = m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$. Deci $m(\widehat{FDE}) = 90^\circ$.

Problema 6. Fie AA' , BB' , CC' bisectoarele unghiurilor triunghiului ABC ($A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$). Să se arate că $m(\widehat{AA'B}) + m(\widehat{BB'C}) + m(\widehat{CC'A}) = 270^\circ$.

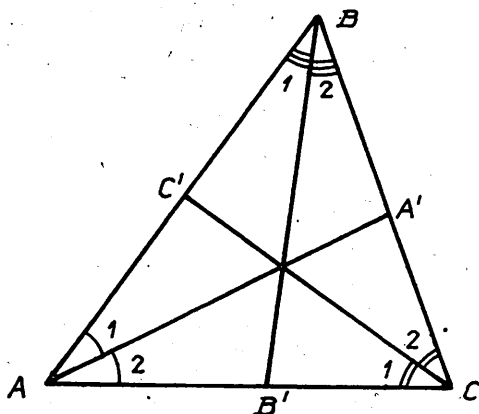


Fig. 63.

Soluție. $NA' \parallel AM$ (ipoteză); $MA' \parallel AN$ (ipoteză); $\Rightarrow ANA'M$ este paralelogram.
 $\widehat{NA'A} \equiv \widehat{A'MA}$ (alterne interne); $\widehat{A'MA} \equiv \widehat{A'AN}$ (pentru că $[AA']$ este bisectoarea unghiului $\hat{A}$ - ipoteză); $\Rightarrow \widehat{NA'A} \equiv \widehat{A'AN}$.
 Deci triunghiul ANA' este isoscel.

$\Rightarrow |AN| \equiv |NA'|$. $\Rightarrow ANA'M$ fiind paralelogram cu 2 laturi alăturate congruente este romb.

Soluție. $AD \perp BC$ ($|AD|$ - înălțime în triunghiul ABC - ipoteză); ADB și ADC sînt triunghiuri dreptunghice. $|BE| \equiv |EA|$ și $|AF| \equiv |FC|$ (ipoteză); $\Rightarrow |ED| = \frac{|AB|}{2}$ și $|DF| = \frac{|AC|}{2}$ (conform problemei 8, § 1, pag. 52);
 $\Rightarrow |ED| \equiv |EA|$ și $|DF| \equiv |AF|$; deci triunghiurile ADE și ADF sînt isoscele. $\Rightarrow \widehat{EDA} \equiv \widehat{EAD}$ și $\widehat{ADF} \equiv \widehat{DAF}$. $m(\widehat{EDF}) = m(\widehat{EDA}) +$

Soluție. În triunghiul $AA'B$: $m(\widehat{AA'B}) = 180^\circ - m(\hat{B}) - m(\widehat{BAA'})$; dar $m(\widehat{BAA'}) = m(\frac{\hat{A}}{2})$, pentru că $[AA']$ este bisectoarea unghiului $\hat{A}$.

La fel: $m(\widehat{BB'C}) = 180^\circ - m(\hat{C}) - m(\widehat{B'BC})$ (din triunghiul $BB'C$). Dar $m(\widehat{B'BC}) = m(\frac{\hat{B}}{2})$, pentru că $[BB']$ este bisectoarea unghiului $\hat{B}$.

În triunghiul $CC'A$, $m(\widehat{CC'A}) = 180^\circ - m(\hat{A}) - m(\widehat{C'CA})$. Dar $m(\widehat{C'CA}) = m(\frac{\hat{C}}{2})$.

Rezultă că: $m(\widehat{AA'B}) + m(\widehat{BB'C}) + m(\widehat{CC'A}) = 180^\circ \cdot 3 - [m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + \frac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})}{2}] = 540^\circ - (180^\circ + 90^\circ) = 270^\circ$.

Problema 7. Pe laturile $|AB|$ și $|AC|$ ale triunghiului echilateral ABC se consideră respectiv punctele D și E astfel ca $|AD| \equiv |CE|$ și fie $\{M\} = |BE| \cap |CD|$. Să se arate că $m(\widehat{BMC}) = 120^\circ$.

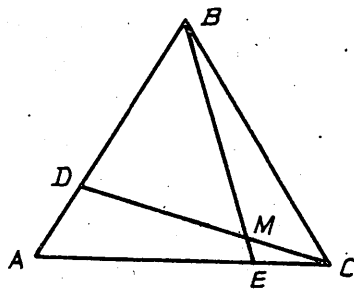


Fig. 64.

Soluție. $\triangle ADC \equiv \triangle BEC$ (cazul: L.U.L.):
 $|AC| \equiv |BC|$ (pentru că triunghiul ABC este echilateral - ipoteză); $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$ (unghiurile triunghiului echilateral sînt congruente); $|AD| \equiv |CE|$ (ipoteză).
 $\Rightarrow \triangle ADC \equiv \triangle BEC$. În triunghiul BMC : $m(\widehat{BMC}) = 180^\circ - m(\widehat{EBC}) - m(\widehat{BCM}) = 180^\circ - [m(\widehat{ACD}) + m(\widehat{BCM})] = 180^\circ - m(\widehat{C}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Problema 8. Să se demonstreze că dacă un patrulater convex are 2 unghiuri opuse congruente atunci bisectoarele celorlalte 2 unghiuri sînt paralele și reciproc, dacă bisectoarele a 2 unghiuri opuse ale unui patrulater convex sînt paralele atunci celelalte 2 unghiuri sînt congruente.

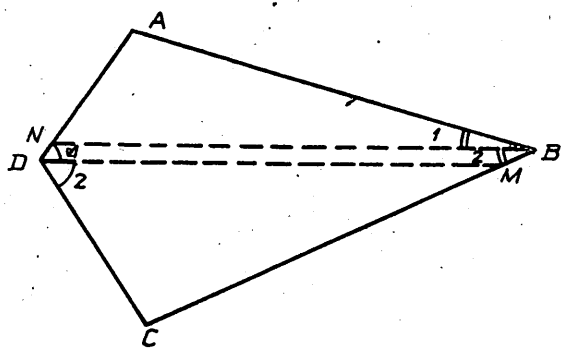


Fig. 65.

Soluție. Fie $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$; $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360^\circ$; dar $\widehat{B}_1 \equiv \widehat{B}_2$ (BN este bisectoarea unghiului $\widehat{B}$; $N \in |AD|$); $m(\widehat{B}) = 2 m(\widehat{B}_1)$. $\widehat{D}_1 \equiv \widehat{D}_2$ (DM este bisectoarea unghiului $\widehat{D}$; $M \in |BC|$); $\Rightarrow m(\widehat{D}) = 2 m(\widehat{D}_1)$.
 $\Rightarrow m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 2m(\widehat{A}) + 2 m(\widehat{B}_1) + 2 m(\widehat{D}_1) = 360^\circ$
 $\Rightarrow m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}_1) + m(\widehat{D}_1) = 180^\circ$. Dar și $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}_1) + m(\widehat{ANB}) = 180^\circ \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{ANB}$. Cum aceste 2 unghiuri sînt unghiuri corespondente formate de dreptele BN și DM cu secanta AD , rezultă că $DM \parallel BN$.

Reciproc: dacă $DM \parallel BN \Rightarrow \widehat{ANB} \equiv \widehat{D}_1$ (unghiuri corespondente); $\widehat{DMC} \equiv \widehat{B}_2$ (unghiuri corespondente). Dar $\widehat{D}_1 \equiv \widehat{D}_2$ (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{D}_2 \equiv \widehat{ANB}$. La fel: $\widehat{B}_1 \equiv \widehat{B}_2$ (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{B} \equiv \widehat{DMC}$. Dar $m(\widehat{A}) + m(\widehat{ANB}) + m(\widehat{B}_1) = 180^\circ$ și $m(\widehat{C}) + m(\widehat{DMC}) + m(\widehat{D}_2) = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} \equiv \widehat{C}$.

Problema 9. Fie triunghiul ABC ascuțitunghic și $AA' \perp BC$, $BB' \perp AC$, $\{M\} = AA' \cap BB'$. Atunci $m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})$.

Soluție. În patrulaterul $MA'CB'$, $m(\widehat{MA'C}) = m(\widehat{MB'C}) = 90^\circ$, pentru că

$AA' \perp BC$ (ipoteză) și $BB' \perp AC$ (ipoteză).

$$\Rightarrow m(\widehat{M_2}) = 360^\circ - m(\widehat{MA'C}) - m(\widehat{MB'C}) - m(\widehat{C}) = 180^\circ - m(\widehat{C}).$$

$$\widehat{M_1} \equiv \widehat{M_2} \text{ (unghiuri opuse la vîrf)}$$

$$\Rightarrow m(\widehat{M_1}) = 180^\circ - m(\widehat{C}). \text{ Dar } m(\widehat{C}) = 180^\circ -$$

$$- m(\widehat{A}) - m(\widehat{B}) \text{ (din triunghiul } ABC) \Rightarrow m(\widehat{M_1}) = m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}). \text{ Deci } m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}).$$

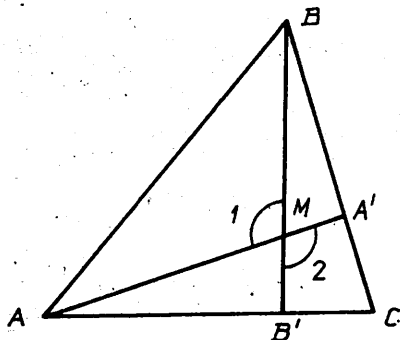


Fig. 66.

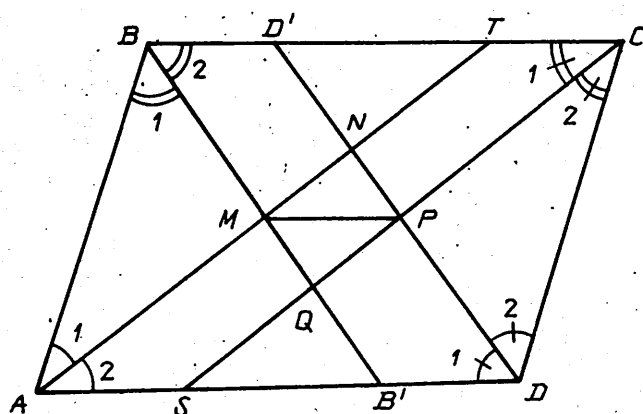


Fig. 67.

Problema 10. Bisectoarele unghiurilor unui paralelogram formează un dreptunghi ale cărui diagonale sînt paralele cu laturile paralelogramului.

Soluție. $ABCD$ fiind paralelogram este un patrulater convex cu unghiurile opuse congruente. Atunci, conform problemei 8 § 2, cap. 2, pag. 53, rezultă că bisectoarele celorlalte 2 unghiuri opuse sînt paralele. Deci $AT \parallel CS$ și $BB' \parallel DD'$, unde $[AT]$ este bisectoarea unghiului A , $[CS]$ este bisectoarea unghiului

lui $\widehat{BCD}$, $[BB']$ este bisectoarea unghiului $\widehat{B}$, iar $[DD']$ este bisectoarea unghiului $\widehat{D}$. Deci $MNPQ$ este paralelogram. În triunghiul AMB , $m(\widehat{AMB}) = 180^\circ - [m(\widehat{A_1}) + m(\widehat{B_1})]$; dar $\widehat{A_1} \equiv \widehat{A_2}$ ($[AT]$ fiind bisectoarea unghiului $\widehat{A}$), iar $\widehat{B_1} \equiv \widehat{B_2}$ ($[BB']$ fiind bisectoarea unghiului $\widehat{B}$); deci $m(\widehat{A_1}) = \frac{m(\widehat{A})}{2}$, iar $m(\widehat{B_1}) = \frac{m(\widehat{B})}{2}$. Cum $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 180^\circ$, fiind unghiuri interne de aceeași parte a secantei, rezultă că $m(\widehat{AMB}) = 180^\circ - \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. Dar $\widehat{AMB} \equiv \widehat{NMQ} \Rightarrow m(\widehat{MNQ}) = 90^\circ$. $MNPQ$ fiind un paralelogram și avînd un unghi drept este dreptunghi.

Să arătăm că diagonalele lui $MNPQ$ sînt paralele cu laturile lui $ABCD$.

$\triangle AMB \equiv \triangle CPD$ (cazul: I.U.): $|AB| \equiv |CD|$ (ca laturi opuse în paralelogram); $\widehat{A_1} \equiv \widehat{C_2}$ ($\widehat{A} \equiv \widehat{C}$ - unghiuri opuse în paralelogram; $m(\widehat{A_1}) = \frac{m(\widehat{A})}{2}$ și $m(\widehat{C_2}) = \frac{m(\widehat{C})}{2}$); $\widehat{AMB} \equiv \widehat{CPD}$ (unghiuri drepte). $\Rightarrow |AM| \equiv |PC|$ (1).

$\triangle PCD \equiv \triangle PSD$ (cazul: C.U.): $|PD|$ - latură comună; $\widehat{D}_1 \equiv \widehat{D}_2$ (DD' fiind bisectoarea unghiului $\widehat{D}$); $\widehat{CPD} \equiv \widehat{SPD}$ (unghiuri drepte) $\Rightarrow |PC| \equiv |SP|$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow |AM| \equiv |SP|$. Cum $AM \parallel SP$ (am demonstrat în prima parte că bisectoarele unghiurilor opuse sînt paralele) $\Rightarrow$ AMPS paralelogram. $\Rightarrow MP \parallel AS$. $\Rightarrow MP \parallel AD \parallel BC$. La fel se arată că $NQ \parallel AB \parallel CD$.

Problema 11. Două unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare sînt congruente sau suplementare.

Soluție.

Cazul 1: cele 2 unghiuri sînt ambele ascuțite sau ambele obtuze: $AO \perp AB$ și $OC \perp CD$. $\widehat{B}_1 \equiv \widehat{B}_2$ (opuse la vîrf). În triunghiul AOB , $m(\widehat{O}) = 180^\circ - 90^\circ - m(\widehat{B}_1)$ ($\widehat{A}$ este unghi drept); $m(\widehat{O}) = 90^\circ - m(\widehat{B}_1)$. La fel în triunghiul BDC : $m(\widehat{D}) = 180^\circ - 90^\circ - m(\widehat{B}_2)$ ($\widehat{C}$ este unghi drept); $m(\widehat{D}) = 90^\circ - m(\widehat{B}_2) \Rightarrow \widehat{O} \equiv \widehat{D}$.

Cazul 2: cînd unul dintre unghiuri este ascuțit și celălalt obtuz. Fie $OA \perp CE$ și $OB \perp DE$; $m(\widehat{AOB}) < 90^\circ$ și $m(\widehat{CED}) > 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{C'ED}) < 90^\circ$ (unghiurile

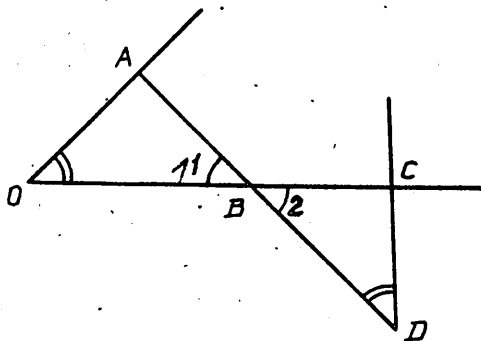


Fig. 68. (Cazul 1).

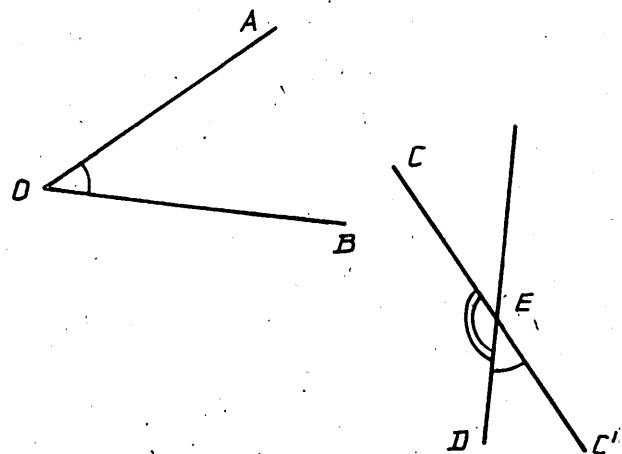


Fig. 69. (Cazul 2).

$\widehat{CED}$ și $\widehat{C'ED}$ fiind suplementare. Atunci $\widehat{AOB}$ și $\widehat{C'ED}$ sînt unghiuri ascuțite cu laturile respectiv perpendiculare și deci conform cazului 1 ele sînt congruente. Deci $\widehat{C'ED} \equiv \widehat{AOB}$; dar $m(\widehat{C'ED}) + m(\widehat{CED}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{CED}) = 180^\circ$; deci unghiurile $\widehat{AOB}$ și $\widehat{CED}$ sînt suplementare.

Problema 12. Se consideră dreapta d , $O \notin d$ și P piciorul perpendicularei din O pe d . Fie $A \in d$, astfel încât $m(\widehat{OAP}) = 45^\circ$. Pentru fiecare punct M , $M \in d$, astfel încât $A \in |PM|$ se construiește segmentul $|MN|$ astfel încât $MN \perp OM$ și $|MN| \equiv |OM|$, N fiind în semiplanul S limitat de d și conținând O . Să se arate că locul geometric al punctului N când M descrie semidreapta opusă lui $|AP|$, este semidreapta $|AB|$, perpendiculară în A pe OA , situa-tă în S .

Soluție. Ducem $NQ \perp d$. $|MN| \equiv |OM|$ (ipoteză); $\widehat{MNQ} \equiv \widehat{OMP}$ (fiind unghiuri ascuțite cu laturile respectiv perpendiculare). $\Rightarrow \triangle MNQ \equiv \triangle OMP$ (ca-zul: I.U.) $|MQ| \equiv |OP|$; dar $|OP| \equiv |PA|$ (triunghiul AOP fiind dreptunghic și

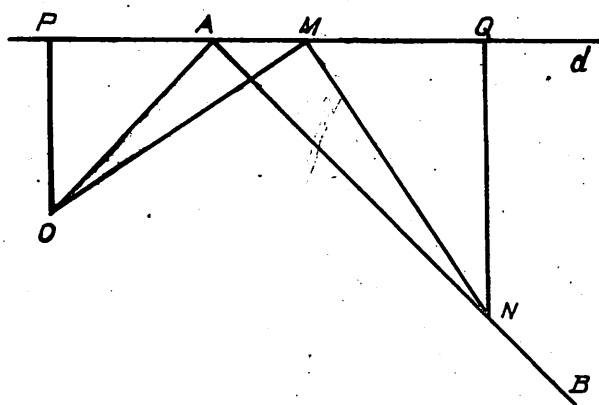


Fig. 70.

avînd un unghi de 45° este isoscel); $|MQ| \equiv |PA|$. La fel: $|NQ| \equiv |PM|$; dar $|PM| \equiv |AQ|$ (pentru că $|PA| \equiv |MQ| \Rightarrow |AQ| \equiv |QN|$ și deci triunghiul AQN este isoscel și fiind și dreptunghic $\Rightarrow m(\widehat{QAN}) = 45^\circ$. Punctul O este fix (ipoteză) $\Rightarrow P$ este fix; $|AP| \equiv |OP|$ și $|OP|$ - - constat $\Rightarrow |AP| = \text{constant}$; $\Rightarrow A$ fix. Cum $m(\widehat{QAN}) = 45^\circ = \text{constant} \Rightarrow$ semidreapta $|AN|$ este fixă. Deci punctul N variabil, aparținînd locului geometric, se mișcă pe semidreapta $|AN|$ fixă. ($|AN| = |AB|$).

Reciproc: să arătăm că orice punct al semidreptei $|AN|$ aparține locu-lui geometric.

Fie $N' \in |AB|$ astfel încît mediatoarea segmentului $|ON'|$ să intersec-teze semidreapta opusă lui $|AP|$ într-un punct M . Acest lucru este posibil dacă $|AN'| \geq |AO|$. Dacă $|AN'| < |AO|$, mediatoarea lui $|ON'|$ taie semidreapta $|AP|$. Să arătăm că punctul M astfel determinat verifică condițiile problemei. M fiind pe mediatoarea segmentului $|ON'| \Rightarrow |MN'| \equiv |OM|$. Rămîne de arătat că $MN' \perp OM$.

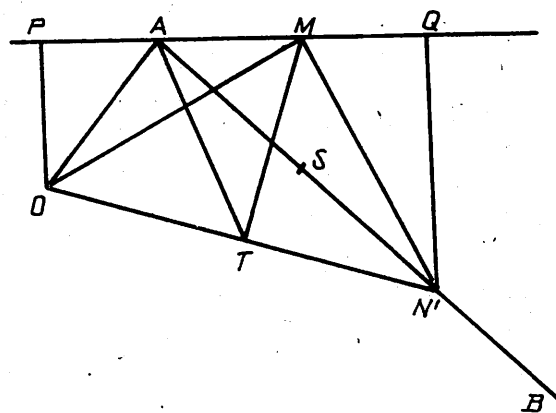


Fig. 71.

Fie $T \in |ON'|$ astfel ca $|OT| \equiv |TN'|$.

În patrulaterul $TMQN'$ avem: $m(\widehat{TMQ}) + m(\widehat{MQN'}) + m(\widehat{QN'T}) + m(\widehat{N'TM}) = 360^\circ$.
 Dar: $m(\widehat{MQN'}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{N'TM}) = 90^\circ$.
 $m(\widehat{TMQ}) = 180^\circ - m(\widehat{QN'T})$. $m(\widehat{AMT}) = 180^\circ - m(\widehat{TMQ}) = 180^\circ - [180^\circ - m(\widehat{QN'T})]$;
 deci $m(\widehat{AMT}) = m(\widehat{QN'T})$.
 $m(\widehat{QN'T}) = 45^\circ + m(\widehat{AN'T})$ (pentru că triunghiul AQN' fiind dreptunghic și avînd unghiul ascuțit $\widehat{QAN'}$ de 45° , rezultă că este și isoscel, deci și $m(\widehat{QN'A}) = 45^\circ$).

Triunghiul AON' fiind dreptunghic și $|AT|$ mediană $\Rightarrow \|AT\| = \frac{\|ON'\|}{2}$
 (problema 8, pag. 52) $\Rightarrow \triangle TAN'$ isoscel $\Rightarrow \widehat{TAN'} \equiv \widehat{AN'T} \Rightarrow m(\widehat{MAT}) = 45^\circ + m(\widehat{TAN'}) = 45^\circ + m(\widehat{AN'T}) \Rightarrow \widehat{QN'T} \equiv \widehat{AMT}$. Dar $\widehat{AMT} = \widehat{QN'T} \Rightarrow \widehat{MAT} \equiv \widehat{AMT}$. Deci triunghiul AMT este isoscel. Cum $\|AT\| = \frac{\|ON'\|}{2} \Rightarrow \|MT\| = \frac{\|ON'\|}{2}$.
 Atunci, conform problemei 9, § 1, pag. 52, rezultă că triunghiul OMN' este dreptunghic în M adică $m(\widehat{OMN'}) = 90^\circ \Rightarrow N'M \perp OM$. Deci pentru orice punct N' care se află pe semidreapta $|SB$ unde $S \in |AB|$ și $|AO| \equiv |AS|$, aparține locului geometric. Pentru $N' \in |AS|$ mediatoarea lui $|ON'|$ taie semidreapta $|AP|$ deci nu se verifică relația $A \in |PM|$, ci $M \in |AP|$.

Rezultă că locul geometric este semidreapta $|SB$.

Problema 13. Să se demonstreze că dacă într-un patrulater convex 2 unghiuri opuse sînt obtuze atunci lungimea diagonalei determinată de vîrfurile

lor este mai mică decît lungimea celeilalte diagonale.

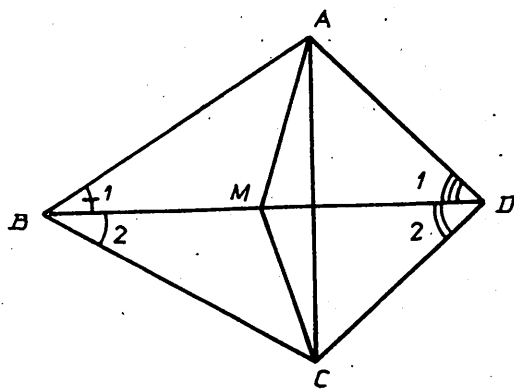


Fig. 72.

Soluție. Fie M mijlocul lui $|BD|$.

$\Rightarrow |MB| \equiv |MD|$. În triunghiul ABD aplicăm rezultatul din problema 1, cap. 1, pag. 47: dacă $m(\widehat{A}) > 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{B}_1) + m(\widehat{D}_1) < 90^\circ$. Deci $m(\widehat{A}) > m(\widehat{B}_1) + m(\widehat{D}_1) \Rightarrow \|AM\| < \frac{\|BD\|}{2}$.

La fel triunghiul BCD : $m(\widehat{C}) > 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{B}_2) + m(\widehat{D}_2) < 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{C}) > m(\widehat{B}_2) + m(\widehat{D}_2) \Rightarrow \|CM\| < \frac{\|BD\|}{2}$.

$\Rightarrow \|AM\| < \frac{\|BD\|}{2}$. În triunghiul ACM avem: $\|AC\| < \|AM\| + \|MC\| < \frac{\|BD\|}{2} + \frac{\|BD\|}{2} = \|BD\|$.

Linia mijlocie

Problemele de la pagina 55.

Problema 1. Pe laturile patrulaterului convex ABCD se consideră punctele M, N, P, Q mijloacele segmentelor |AB|, |BC|, |CD|, |DA|. Să se arate că patrulaterul MNPQ este paralelogram.

Soluție. $M \in |AB|$, $|AM| \equiv |MB|$, $N \in |BC|$, $|BN| \equiv |NC|$; $\Rightarrow |MN|$ este linie mijlocie în triunghiul ABC. $\Rightarrow MN \parallel AC$ și $\|MN\| = \frac{\|AC\|}{2}$ (1).

La fel: $Q \in |AD|$, $|AQ| \equiv |QD|$; $P \in |DC|$, $|DP| \equiv |PC|$; $\Rightarrow |QP|$ este linie mijlocie în triunghiul ADC. $\Rightarrow QP \parallel AC$ și $\|QP\| = \frac{\|AC\|}{2}$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow MN \parallel QP$ și $|MN| \equiv |QP|$. $\Rightarrow MNPQ$ este paralelogram.

Problema 2. Pe laturile |AB|, |CD| ale paralelogramului ABCD se iau arbitrar punctele M și N. Dreapta d, determinată de mijloacele laturilor |BC| și |AD| intersectează succesiv segmentele |AN|, |MD|, |BN|, |MC| în E, F, G, H. Să se demonstreze că $|EF| \equiv |GH|$.

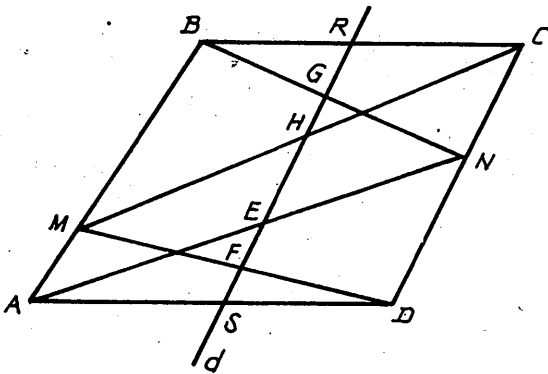


Fig. 73.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|ES\| &= \frac{\|DN\|}{2}. |AS| \equiv |SD|, d \parallel AM \Rightarrow |MF| \equiv |FD|. \Rightarrow \|FS\| = \frac{\|AM\|}{2}. \Rightarrow \\ \Rightarrow \|EF\| &= \frac{\|DN\| - \|AM\|}{2}. \end{aligned}$$

Dar ABCD paralelogram $\Rightarrow \|AM\| + \|MB\| = \|DN\| + \|NC\| \Rightarrow \|MB\| - \|NC\| = \|DN\| - \|AM\|$. $\Rightarrow \|GH\| = \|EF\|$. ($|BR| \equiv |RC|$, $R \in |BC|$; $|AS| \equiv |SD|$, $S \in |AD|$).

Soluție. $\|GH\| = \|HR\| - \|GR\|$;

$$\|EF\| = \|ES\| - \|FS\|, |BR| \equiv |RC|, d \parallel$$

$$\|CD \text{ (pentru că } RC \parallel SD \text{ și } |RC| \equiv |SD| \Rightarrow RSDC \text{ paralelogram} \Rightarrow d \parallel$$

$$\|CD), \Rightarrow |BG| \equiv |GN| \text{ (conform teoremei 2, § 3, cap. 2, pag. 54)}.$$

$$\Rightarrow \|GR\| = \frac{\|CN\|}{2}. \text{ La fel: } |BR| \equiv |RC|$$

$$\text{și } d \parallel AB \Rightarrow |MH| \equiv |HC|. \Rightarrow \|RH\| =$$

$$= \frac{\|MB\|}{2}. \Rightarrow \|GH\| = \frac{\|MB\| - \|CN\|}{2}.$$

$$|AS| \equiv |SD|, d \parallel DN \Rightarrow |AE| \equiv |EN|.$$

Problema 3. Fie triunghiul echilateral ABC și punctele D și E astfel ca $C \in |BD|$, $A \in |CE|$ și $|DC| \equiv |AE| \equiv |AB|$. Se notează $\{F\} = DE \cap AB$.

Să se arate că $\|AF\| = \frac{1}{3} \|AB\|$.

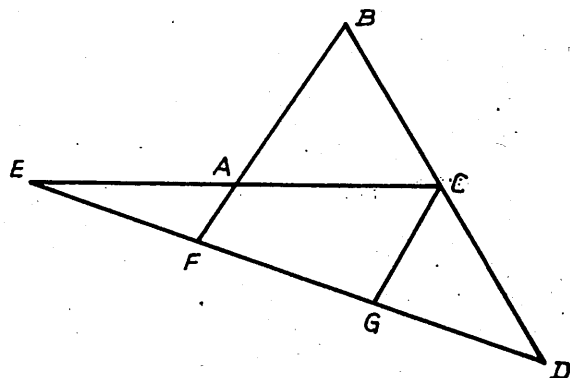


Fig. 74.

Soluție. Construim $CG \parallel AB$,
 $G \in DE$. $|AE| \equiv |AC|$ (pentru că
 $|AE| \equiv |AB|$ - ipoteză; $|AC| \equiv$
 $\equiv |AB|$ - triunghiul ABC fiind
 echilateral). $FA \parallel GC$ (construcție)
 $\Rightarrow |EF| \equiv |FG|$ (conform teoremei
 2, § 3, cap. 2, pag. 54). $\Rightarrow |FA|$ este
 linie mijlocie în ECG ; $\Rightarrow \|FA\| = \frac{\|CG\|}{2}$.

La fel: $|BC| \equiv |CD|$ (pentru că $|CD| \equiv |AB|$ (ipoteză); $|AB| \equiv |BC|$,
 triunghiul ABC fiind echilateral). $CG \parallel BF$ (construcție). $\Rightarrow |FG| \equiv |GD|$; $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \|CG\| = \frac{\|FB\|}{2}$. $\Rightarrow \|AF\| = \frac{\|CG\|}{2} = \frac{\|BF\|}{4}$. $\Rightarrow \|AF\| = \frac{\|AB\|}{3}$.

Problema 4. Să se demonstreze că diagonalele trapezului isoscel sînt
 congruente și unghiurile adiacente unei baze sînt de asemenea congruente.

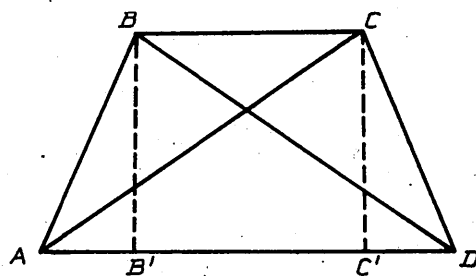


Fig. 75.

Soluție. Ducem $BB' \perp AD$ și $CC' \perp AD$.
 $\triangle ABB' \equiv \triangle DCC'$ (cazul: I.C.): $|AB| \equiv$
 $\equiv |CD|$ (ipoteză); $|BB'| \equiv |CC'|$ (conform
 problemei 10, § 1, cap. 2, pag. 52);
 $\widehat{BB'A} \equiv \widehat{CC'D}$ (unghiuri drepte). $\Rightarrow \hat{A} \equiv \hat{D}$.
 La fel se arată și $\hat{B} \equiv \hat{C}$.

$\triangle ABD \equiv \triangle DCA$ (cazul: L.U.L.): $|AB| \equiv$
 $\equiv |CD|$ (ipoteză); $|AD|$ - latură comună; $\hat{A} \equiv \hat{D}$ (demonstrație). $|BD| \equiv |AC|$.

Problema 5. Să se determine axa de simetrie a unui trapez isoscel.

Soluție. Construim $BB' \perp AD$ și $CC' \perp AD$. $\triangle ABB' \equiv \triangle DCC'$ (cazul: I.U.):

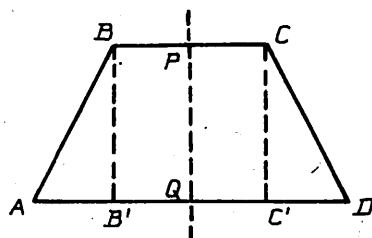


Fig. 76.

$|AB| \equiv |CD|$ și $\hat{A} \equiv \hat{D}$ ($ABCD$ fiind trapez isos-
 cel); $\widehat{BB'A} \equiv \widehat{CC'D}$ (prin construcție). $\Rightarrow |AB'| \equiv$
 $\equiv |C'D|$. Fie P mijlocul lui $|BC|$. Mediatoarea
 lui $|BC|$ taie $|AD|$ în Q . $PQ \perp AD$ și $|B'Q| \equiv$
 $\equiv |QC'|$ (pentru că $BCC'B'$ este dreptunghi). $\Rightarrow AQ \equiv$

$\equiv |QD|$. Deci PQ este axă de simetrie pentru segmentul $|AD|$ (am demonstrat), iar pentru $|BC|$ este axă de simetrie prin construcție.

Să demonstrăm că $|AB|$ și $|CD|$ sînt simetrice față de PQ. B și C sînt simetrice față de PQ; A și D sînt simetrice față de PQ. Rezultă conform problemei 7, § 12, cap. 1, pag. 43, că $|AB|$ simetric cu $|CD|$ față de PQ. Deci axa de simetrie a trapezului este mediatoarea comună a bazelor. (Este adevărat numai pentru trapezul isoscel).

Problema 6. Se consideră trapezul ABCD în care $AB \parallel CD$ și $\|AD\| = \|AB\| + \|CD\|$. Să se demonstreze că dacă E este mijlocul segmentului $|BC|$ atunci $m(\widehat{AED}) = 90^\circ$.

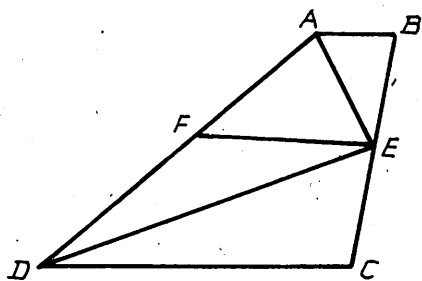


Fig. 77.

Soluție. Ducem linia mijlocie a trapezului, deci $F \in |AD|$, $|FA| \equiv |FD|$; $E \in |BC|$, $|BE| \equiv |EC| \Rightarrow \|EF\| = \frac{\|AB\| + \|CD\|}{2} = \frac{\|AD\|}{2}$. $|AF| \equiv |FD|$ (prin construcție). Rezultă conform problemei 9, pag. 52, că triunghiul AED este dreptunghic: $m(\widehat{AED}) = 90^\circ$.

Problema 7. Se consideră un triunghi isoscel ABC, $|AB| \equiv |AC|$ și punctele variabile $P \in |AB|$, $Q \in |AC|$ astfel ca $|BP| \equiv |AQ|$. Fie O mijlocul segmentului $|PQ|$.

a) Să se demonstreze că $d(O, BC)$ este constantă.

b) Să se afle locul geometric al punctului O.

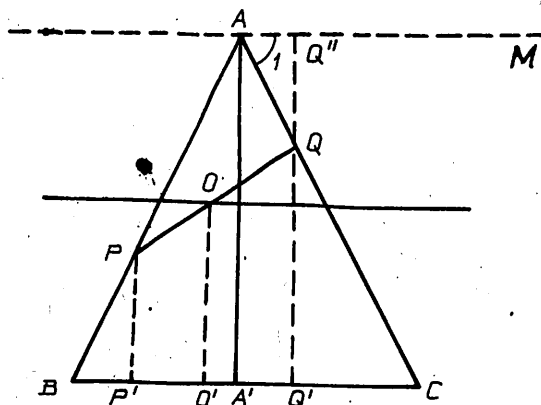


Fig. 78.

Soluție. Ducem $PP' \perp BC$, $P' \in BC$; $QQ' \perp BC$; $Q' \in BC$; $OO' \perp BC$; $O' \in BC$; $AM \parallel BC$; $QQ' \cap AM = \{Q''\}$. $\triangle AQQ'' \equiv \triangle BP'P$ (cazul: I.U.): $|AQ| \equiv |BP|$ (ipoteză); $\hat{A}_1 \equiv \hat{C}$ (alterne interne), $\hat{C} \equiv \hat{B}$ (unghiuri de la baza triunghiului isoscel) $\Rightarrow \hat{A}_1 \equiv \hat{B}$; $\widehat{PP'B} \equiv \widehat{QQ''A}$ (construcție). $\Rightarrow |QQ''| \equiv |PP'|$.

În trapezul $PQQ'P'$, $|PO| \equiv |OQ|$ (ipoteză); $PP' \parallel OO' \parallel QQ'$ (fiind perpendiculare pe aceeași dreaptă); $\Rightarrow |P'Q'| \equiv |O'Q'|$; $\Rightarrow |OO'|$ linie mijlocie;

$$||OO'|| = \frac{||PP'|| + ||QQ'||}{2} = \frac{||QQ'|| + ||QQ''||}{2} = \frac{||Q'Q''||}{2} = \frac{d(A, BC)}{2} = \text{constant}.$$

b) Dacă $||OO'|| = \frac{d(A, BC)}{2} = \text{constant}$, rezultă că O aparține unei paralele la BC (conform problemei 10, § 1, cap. 1, pag. 52), ce trece prin mijlocul înălțimii, deci și prin mijloacele laturilor $|AC|$ și $|AB|$. Tot în problema amintită am arătat că orice punct care aparține paralelei la BC dusă la distanță $l = \frac{d(A, BC)}{2}$, are distanța l pînă la BC , deci paralela la BC care trece prin mijloacele laturilor $|AB|$ și $|BC|$ este locul geometric căutat.

Concurența unor drepte în triunghi

Problemele de la pagina 58.

Problema 1. Să se determine poziția ortocentrului unui triunghi dreptunghic și poziția punctului de concurență a mediatoarelor laturilor sale.

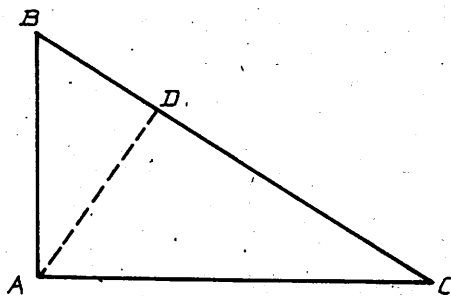


Fig. 79.

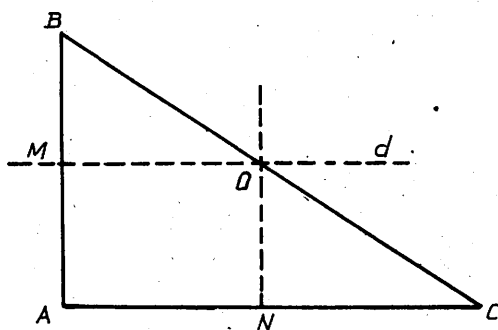


Fig. 80.

Soluție. Cum $AB \perp AC$ și $AC \perp AB \Rightarrow |AB|$ și $|AC|$ sînt 2 dintre cele 3 înălțimi ale triunghiului; $\Rightarrow$ punctul A este ortocentrul triunghiului (A este vârful unghiului drept).

Pentru a determina punctul de concurență al mediatoarelor ducem mediatoarea laturii $|AB|$; $M \in |AB|$, $|AM| \equiv |MB|$ și $d \perp AB$, $M \in d$. Cum $|BM| \equiv |MA|$ și $d \perp AB \Rightarrow d \cap BC = \{O\}$ și $|BO| \equiv |OC|$.

Unim O cu mijlocul N al lui $|AC|$. $\Rightarrow |ON|$ este linie mijlocie în triunghiul $ABC \Rightarrow ON \parallel |AB|$; cum $AB \perp AC \Rightarrow ON \perp AC$ și cum ON trece prin mijlocul lui $|AC| \Rightarrow ON$ este o mediatoare a triunghiului (a laturii $|AC|$).
 Deci în punctul O se întîlnesc 2 mediatoare ale laturilor triunghiului. Rezultă că punctul de concurență al mediatoarelor laturilor triunghiului dreptunghic este mijlocul ipotenuzei.

Problema 2. Fie triunghiul ABC și cele 2 unghiuri exterioare ale triunghiului care au ca latură $|BC$ respectiv $|CB$. Să se demonstreze că bisectoarele acestor unghiuri exterioare și bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ sînt concurente.

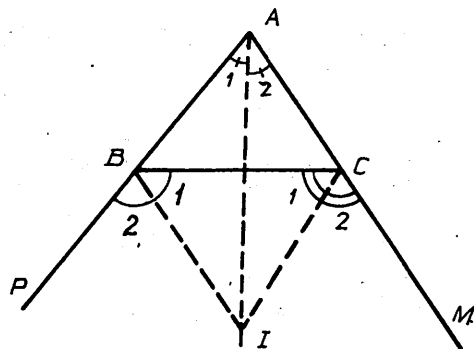


Fig. 81.

Soluție. Să demonstrăm că bisectoarea unghiului $\widehat{CBP}$ (desenul alăturat) și bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ sînt concurente. Presupunem prin absurd că nu sînt. Rezultă că ele sînt paralele. $\Rightarrow \widehat{A}_1 \equiv \widehat{B}_2$ (unghiuri corespondente formate de cele 2 paralele cu secanta AP). $\Rightarrow \widehat{BAC} \equiv \widehat{PBC}$ (pentru că $m(\widehat{BAC}) = 2 m(\widehat{A}_1)$, iar $m(\widehat{PBC}) = 2 m(\widehat{B}_2)$).

Am ajuns la o contradicție: un unghi exterior unui triunghi are aceeași măsură ca și un unghi interior. Este contrazisă teorema unghiului exterior. Rezultă că cele 2 bisectoare sînt concurente. (Ele nu pot coincide pentru că ar însemna că punctele A și B le-ar aparține la amîndouă și deci ele ar coincide cu dreapta AB , ceea ce este absurd). Fie I punctul lor comun. Conform teoremei 3, § 13, cap. 1, pag. 44, rezultă că: $d(I, AB) = d(I, BC)$ și $I \in \text{Int } \widehat{PBC}$ (pentru că I aparține bisectoarei unghiului $\widehat{PBC}$). La fel: $d(I, AB) = d(I, AC)$ și $I \in \text{Int } \widehat{BAC}$ (pentru că I aparține bisectoarei unghiului $\widehat{BAC}$). $\Rightarrow d(I, BC) = d(I, AC)$. Rămîne de arătat că $I \in \text{Int } \widehat{BCM}$.

Notăm $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. $I \in \text{Int } \widehat{PBC} \Rightarrow I \in |cC \cap |aP$; $I \in \text{Int } \widehat{BAC} \Rightarrow I \in |cC \cap |bP \Rightarrow I \in |aP \cap |bP = \text{Int } \widehat{BCP}$. Rezultă că $|IC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BCM}$ și deci cele 3 bisectoare (2 exterioare și una interioară) sînt concurente în I .

Problema 3. Unghiurile opuse $\widehat{A}$ și $\widehat{C}$ ale patrulaterului convex $ABCD$ sînt drepte. $AD \cap BC = \{E\}$, $AB \cap DC = \{F\}$. Să se demonstreze că $BD \perp EF$.

Soluție. $BC \perp CD$ (ipoteză) $E \in BC$ și $F \in CD$; $\Rightarrow EC \perp FD$; $BA \perp AD$ (ipoteză), $F \in AB$, $E \in AD \Rightarrow FA \perp ED$. $\Rightarrow |EC|$ și $|FA|$ sînt înălțimi în triunghiul DEF . Rezultă că B este ortocentrul triunghiului DEF . Deci $BD \perp EF$.

Problema 4. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC , H ortocentrul și $A' \in |HA$, $B' \in |HB$, $C' \in |HC$ astfel ca $|HA'| \equiv |BC|$, $|HB'| \equiv |CA|$, $|HC'| \equiv |AB|$. Să se arate că:

a) dacă M, N, P sînt mijloacele laturilor $|BC|, |AC|, |AB|$ atunci $\|B'C'\| = 2\|AM\|, \|A'C'\| = 2\|BN\|, \|A'B'\| = 2\|CP\|$;

b) H este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$.

Soluție. Fie $A'' \in |BC|$ astfel ca $|BC| \equiv |CA''|$. Demonstrăm că triunghiurile $A'B'H$ și $AA''C$ sînt congruente. $|HA'| \equiv |BC|$ (ipoteză), $|BC| \equiv |CA''|$

(construcție) $\Rightarrow |HA'| \equiv |CA''|$.

$|HB'| \equiv |CA|$ (ipoteză); $\widehat{BHA'} \equiv \widehat{ACA''}$ (avînd ca suplement unghiul $\widehat{BCA}$). Deci: $\triangle A'B'H \equiv \triangle AA''C$ (cazul: L.U.L.). $|A'B'| \equiv |AA''|$.

În triunghiul BAA'' , $|CP|$ este linie mijlocie $\Rightarrow \|CP\| = \frac{\|AA''\|}{2}$;
 $\Rightarrow \|AA''\| = 2\|CP\| \Rightarrow \|A'B'\| = 2\|CP\|$.

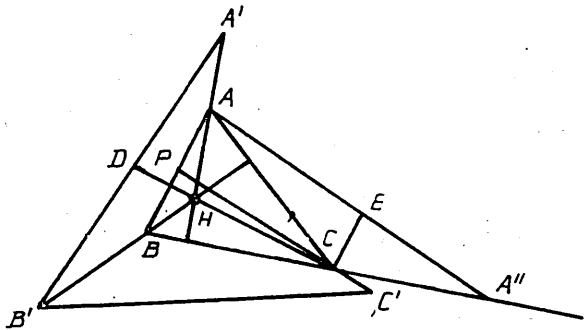


Fig. 82.

Analog se deduc celelalte

relații.

b) Fie $\{D\} = HC' \cap A'B'$ și $EC \perp HC$, $E \in AA''$. $\triangle DA'H \equiv \triangle EAC$ (cazul: L.U.I.) $\widehat{CA'E} \equiv \widehat{DA'H}$ și $|CA''| \equiv |HA'|$ (pentru că $\triangle A'B'H \equiv \triangle AA''C$ - am demonstrat); $\widehat{DHA'} \equiv \widehat{ECA''}$ (unghiuri ascuțite cu laturi perpendiculare).
 $\Rightarrow |EA''| \equiv |DA'|$; $|CE|$ este linie mijlocie în triunghiul ABA'' pentru că $|BC| \equiv |CA''|$ (construcție); $CE \perp HC$ și $HC \perp AB \Rightarrow CE \parallel AB \Rightarrow \|EA''\| = \frac{\|AA''\|}{2}$. Cum $|AA''| \equiv |A'B'|$ (demonstrat la punctul a)) și $|EA''| \equiv |DA'| \Rightarrow \|DA'\| = \frac{\|A'B'\|}{2}$, deci D este mijlocul lui $|A'B'|$ și $D \in HC' \Rightarrow |DC'|$ este o mediană a triunghiului $A'B'C'$ și ea trece prin H . La fel se arată și pentru celelalte mediane ale triunghiului $A'B'C'$ că trec prin H . Rezultă că H este centrul de greutate al triunghiului.

Problema 5. În paralelogramul $ABCD$ se duc $CE \perp BC$, $AE \perp AB$. Să se arate că $DE \perp AC$.

Soluție. $CE \perp BC$ (ipoteză), $BC \parallel AD \Rightarrow CE \perp AD$; fie $AD \cap CE = \{D'\}$. $\Rightarrow |AD'|$ este o înălțime a triunghiului ACE .

$AE \perp AB$ (ipoteză), $AB \parallel CD \Rightarrow CD \perp AE$; fie $CD \cap AE = \{D''\} \Rightarrow |CD''|$ este o altă înălțime a triunghiului ACE . $\Rightarrow D$ este ortocentrul triunghiului ACE .
 $\Rightarrow ED \perp AC$ ($|ED|$ este un segment inclus în cea de a treia înălțime).

Problema 6. În triunghiul ABC ($\hat{A} \in 90^\circ$) se duce înălțimea $|AD|$, $D \in BC$ și se consideră $F \in |AD|$. Perpendiculara în F pe FC intersectează pe AB în G . Paralela prin A la FG intersectează BC în H . Să se arate că patrulaterul $AGFH$ este paralelogram.

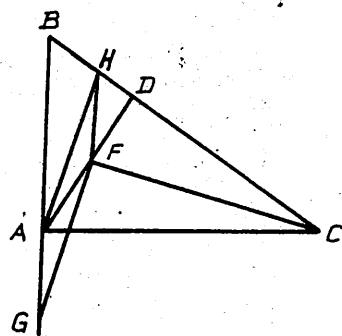


Fig. 83.

Soluție. În triunghiul AHC : $AD \perp BC \Rightarrow |AD|$ - înălțime. $CF \perp GF$, $GF \parallel AH \Rightarrow CF \perp AH$, deci $|CF|$ este altă înălțime $\Rightarrow F$ este ortocentrul triunghiului AHC . $HF \perp AC$; dar și $BA \perp AC$; $\Rightarrow HF \parallel AG$. Cum și $AH \parallel GF$ (ipoteză) $\Rightarrow AGFH$ paralelogram.

Paralele echidistante

Problemele de la pagina 59.

Problema 1. Fiind dat segmentul $|AB|$ să se determine un segment $|MN|$ astfel ca $5 \|MN\| = \|AB\|$. (Generalizare: $n \|MN\| = \|AB\|$).

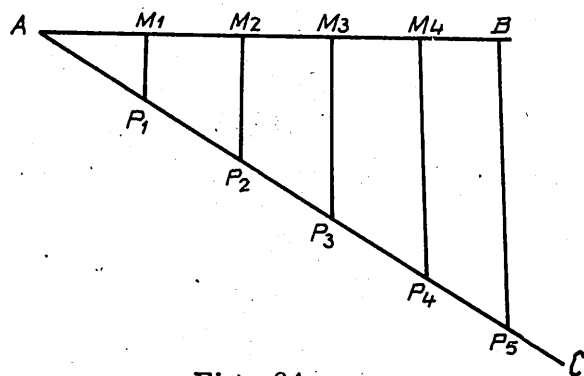


Fig. 84.

Soluție. Fie o semidreaptă $|AC| \neq |AB|$. Luăm pe ea un segment oarecare $|AP_1|$ și punctele distincte P_2, P_3, P_4, P_5 astfel ca: $|AP_1| \equiv |P_1P_2| \equiv |P_2P_3| \equiv |P_3P_4| \equiv |P_4P_5|$. Prin punctele P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 se duc drepte paralele cu P_5B care intersectează $|AB|$ în $M_1,$

M_2, M_3, M_4 și $|AM_1| \equiv |M_1M_2| \equiv |M_2M_3| \equiv |M_3M_4| \equiv |M_4B|$ și obținem: $\|AM_1\| = \frac{1}{5} \|AB\|$ (am aplicat teorema paralelelor echidistante). Deci $|AM_1| \equiv |MN|$.

În cazul general se procedează în mod asemănător cu deosebirea că în loc să luăm 5 puncte distincte pe $|AC|$, luăm n puncte.

Problema 2. Să se formuleze o reciprocă a teoremei 3, § 3, folosind teorema paralelelor echidistante.

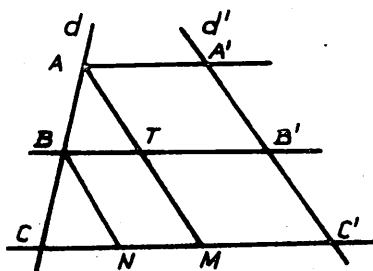


Fig. 85.

Soluție. Enunț: fie pe dreapta d punctele distincte A, B, C și pe dreapta d' punctele distincte A', B', C' astfel ca $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ și $\parallel BB' \parallel = \frac{\parallel AA' \parallel + \parallel CC' \parallel}{2}$, atunci d și d' determină pe cele 2 drepte paralele segmente congruente, adică $|AB| \equiv |BC|$ și $|A'B'| \equiv |B'C'|$.

Rezolvare: ducem $AM \parallel A'C'$ și fie N mijlocul lui $|CM|$. $AA'C'M$ - paralelogram pentru că $AA' \parallel CC'$ (ipoteză) și $AM \parallel A'C'$ (construcție). $\Rightarrow |AA'| \equiv |MC'|$; fie $\{T\} = AM \cap BB'$. Deoarece $\parallel BB' \parallel = \frac{\parallel AA' \parallel + \parallel CC' \parallel}{2}$ (ipoteză) și $|AA'| \equiv |MC'|$ (demonstrație), $\Rightarrow \parallel BT \parallel = \frac{\parallel CM \parallel}{2}$.

Deci $|BT| \equiv |NM|$; cum $BT \parallel MN$ (ipoteză) $\Rightarrow BTMN$ paralelogram. $\Rightarrow \Rightarrow BN \parallel TM$ sau $BN \parallel AM$. Din $|CN| \equiv |NM|$ și $BN \parallel AM \Rightarrow |BC| \equiv |AB|$. Din $|AB| \equiv |BC|$ și $BT \parallel CM \Rightarrow |AT| \equiv |TM|$. Aplicând teorema paralelelor echi-distante rezultă că și $|A'B'| \equiv |B'C'|$.

Teorema lui Thales

Problemele de la pagina 64.

Problema 1. Fie triunghiul isoscel ABC , $|AB| \equiv |AC|$ și d o dreaptă paralelă cu BC , $A \notin d$. Dacă $\{M\} = d \cap AB$, $\{N\} = d \cap AC$ să se arate că triunghiul AMN este isoscel și dacă ABC este echilateral atunci AMN este echilateral.

Soluție. $MN \parallel BC$ (ipoteză) $\Rightarrow \frac{\parallel AM \parallel}{\parallel AB \parallel} = \frac{\parallel AN \parallel}{\parallel AC \parallel}$ (conform teoremei lui Thales). Cum $|AB| \equiv |AC| \Rightarrow |AM| \equiv |AN|$ și deci triunghiul AMN este isoscel.

Dacă ABC echilateral $\Rightarrow m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C})$. În triunghiul AMN , $\widehat{AMN} = \hat{B}$ (unghiuri corespondente) și $\widehat{ANM} = \hat{C}$ (unghiuri corespondente) $\Rightarrow \hat{A} \equiv \widehat{AMN} \equiv \widehat{ANM}$, deci și triunghiul AMN este echilateral.

Problema 2. Se consideră 3 semidrepte cu aceeași origine M , cuprinse în drepte distincte și punctele: A, B pe prima semidreaptă, C și D pe a doua și N pe a treia, astfel ca $d(M, A) = 18$, $d(M, B) = 54$, $d(M, C) \equiv 25$, iar $d(M, D) = 75$. O dreaptă ce trece prin A și este paralelă cu BN intersectează MN în E . În ce condiții paralela la ND prin E conține punctul C ?

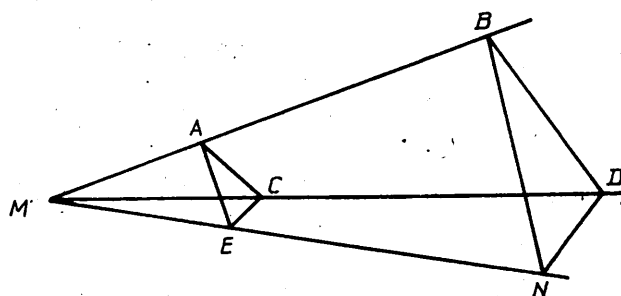


Fig. 86.

problemă paralela la ND prin E conține punctul C.

Soluție. $\frac{\|MA\|}{\|MB\|} = \frac{18}{54} = \frac{1}{3}$;

$\frac{\|MC\|}{\|MD\|} = \frac{25}{75} = \frac{1}{3}; \Rightarrow AC \parallel BD.$

$AE \parallel BN$ (ipoteză) $\Rightarrow \frac{\|MA\|}{\|MB\|} = \frac{\|ME\|}{\|MN\|} = \frac{1}{3}.$

În triunghiul MDN avem:

$\frac{\|MC\|}{\|MD\|} = \frac{1}{3}$ și $\frac{\|ME\|}{\|MN\|} = \frac{1}{3}; \Rightarrow EC \parallel$

$\parallel ND.$ Deci în condițiile date în

Problema 3. Se consideră patrulaterul convex ABCD. Paralela prin B la latura AD intersectează dreapta AC în E, iar paralela prin A la latura BC intersectează dreapta BD în F. Să se arate că $EF \parallel CD.$

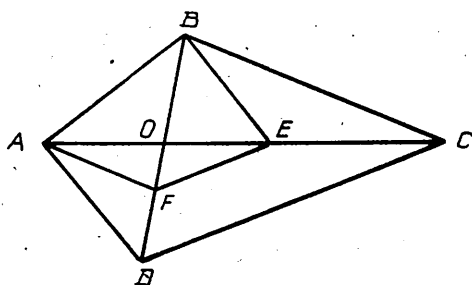


Fig. 87.

Problema 4. Fie triunghiul ABC și $MN \parallel BC$, $M \in AB$, $N \in AC$. Se duc $MM' \parallel AC$, $NN' \parallel AB$ ($M' \in BC$, $N' \in BC$). Prin M' și N' se duc $M'P \parallel AB$ și $N'Q \parallel AC$, $P \in AC$ și $Q \in AB$. Să se demonstreze că $PQ \parallel MN.$

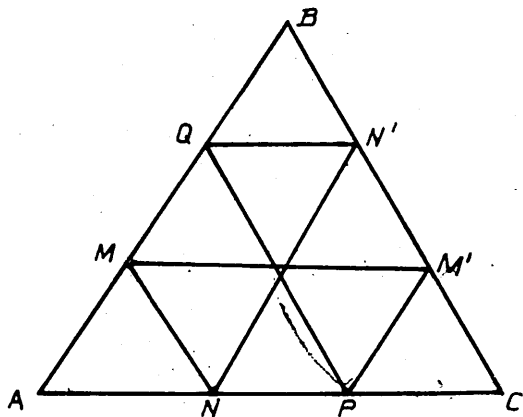


Fig. 88.

Soluție. Se aplică teorema lui Thales de mai multe ori:

$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{\|AM\|}{\|MB\|} = \frac{\|AN\|}{\|NC\|}; MM' \parallel AC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\|AM\|}{\|MB\|} = \frac{\|CM'\|}{\|M'B\|}; NN' \parallel AB \Rightarrow \frac{\|AN\|}{\|NC\|} =$

$= \frac{\|BN'\|}{\|N'C\|}; M'P \parallel AB \Rightarrow \frac{\|CM'\|}{\|M'B\|} = \frac{\|CP\|}{\|AP\|};$

$N'Q \parallel AC \Rightarrow \frac{\|BN'\|}{\|N'C\|} = \frac{\|BQ\|}{\|QA\|}.$ Cum toate

rapoartele sînt egale între ele, existînd

rapoarte comune în egalitățile scrise

$\Rightarrow \frac{\|CP\|}{\|PA\|} = \frac{\|BQ\|}{\|QA\|} \Rightarrow PQ \parallel BC$ (reciproca

teoremei lui Thales). Cum $MN \parallel BC \Rightarrow PQ \parallel MN.$

Problema 5. Fie triunghiul ABC și D, E, F, G, H mijloacele segmentelor $|BC|, |AD|, |BD|, |EF|, |ED|$; fie $GH \cap AC = \{I\}$ și $BE \cap AC = \{J\}$. Atunci:

- a) $\|AI\| = 3\|IC\|$; b) $\|HI\| = 3\|GH\|$; c) $\|BE\| = 3\|EJ\|$.

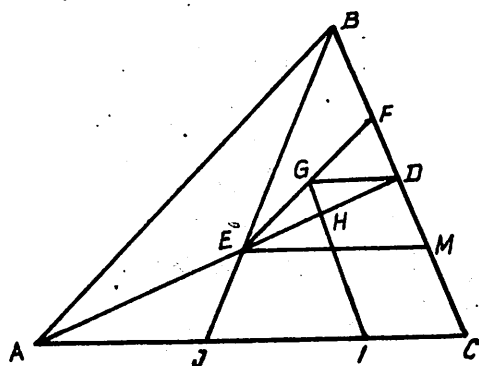


Fig. 89.

Soluție. Din ipoteză avem: $|BD| \equiv |DC|$, $|AE| \equiv |ED|$, $|BF| \equiv |FD|$, $|FG| \equiv |GE|$, $|EH| \equiv |HD|$.

a) $|GH|$ este linie mijlocie în triunghiul $EFD \Rightarrow GH \parallel FD$, deci $HI \parallel DC$. În triunghiul DAC , $HI \parallel DC \Rightarrow \frac{\|AH\|}{\|HD\|} = \frac{\|AI\|}{\|IC\|}$. Cum $|AE| \equiv |ED|$ și $|EH| \equiv |HD| \Rightarrow \|AH\| = 3\|HD\| \Rightarrow \|AI\| = 3\|IC\|$.

b) Ducem $EM \parallel GD$ și cum $|FG| \equiv |GE| \Rightarrow |FD| \equiv |DM|$; dar $|FD| \equiv |FB|$ și $|BD| \equiv |DC| \Rightarrow \|FD\| = \frac{\|BD\|}{2} = \frac{\|DC\|}{2} \Rightarrow \|DM\| = \frac{\|DC\|}{2} \Rightarrow M$ este mijlocul lui $|DC|$.

În triunghiul ADC , $|EM|$ este linie mijlocie $\Rightarrow EM \parallel AC$ și cum $EM \parallel GD \Rightarrow GD \parallel AC \Rightarrow \frac{\|HD\|}{\|AH\|} = \frac{\|GH\|}{\|HI\|} = \frac{1}{3}$ (conform teoremei lui Thales; valoarea raportului este $\frac{1}{3}$ pentru că $|AE| \equiv |ED|$ și $|EH| \equiv |HD|$, deci $\|AH\| = 3\|HD\| \Rightarrow \|HI\| = 3\|GH\|$).

c) Din $EM \parallel AC \Rightarrow EM \parallel JC \Rightarrow \frac{\|BM\|}{\|MC\|} = \frac{\|BE\|}{\|EJ\|} = \frac{3}{1}$ (Am aplicat teorema lui Thales în triunghiul BJC ; valoarea raportului este 3 pentru că $|BF| \equiv |FD| \equiv |DM| \equiv |MC|$ și deci $|BM| \equiv 3|MC|$). $\Rightarrow \|BE\| = 3\|EJ\|$.

Teorema bisectoarei

Problemele de la pagina 65.

Problema 1. Fie triunghiul ABC , $D \in BC$ și $D \notin |BC|$. Atunci $[AD]$ este bisectoarea unuia din unghiurile cu vârful în A și exterioare triunghiului, dacă și numai dacă $\frac{\|BD\|}{\|DC\|} = \frac{\|AB\|}{\|AC\|}$ (teorema bisectoarei unghiului exterior).

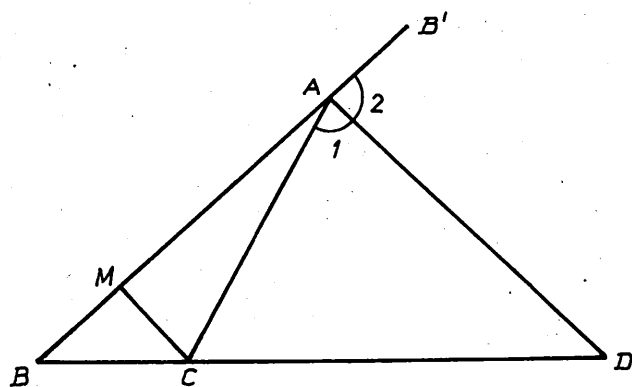


Fig. 90.

$\Rightarrow \widehat{ACM} \equiv \widehat{AMC} \Rightarrow |AM| \equiv |AC|$. Înlocuind în ultima egalitate de rapoarte, rezultă relația cerută.

b) Reciproc: să arătăm că dacă $\frac{\|BD\|}{\|DC\|} = \frac{\|AB\|}{\|AC\|}$, atunci $\angle CAD$ este bisectoarea unui unghi exterior al triunghiului cu vârful în A.

Folosim metoda reducerii la absurd:

Presupunem că $\angle CAD$ nu este bisectoarea unghiului $\widehat{CAB'}$. Atunci există $\angle AD'$ bisectoarea acestui unghi.

Conform teoremei directe este adevărată relația: $\frac{\|BD'\|}{\|CD'\|} = \frac{\|AB\|}{\|AC\|}$. Cum și D și D' sînt astfel încît nu aparțin segmentului $|BC|$, dar aparțin dreptei BC, am ajuns la contradicția că există 2 puncte exterioare unui segment, care împart în același raport. Rezultă că presupunerea nu este corectă și deci $\angle CAD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{B'AD}$.

Problema 2. Lungimile laturilor unui triunghi ABC fiind $\|AB\| = c$, $\|AC\| = b$, $\|BC\| = a$, să se calculeze segmentele determinate de bisectoarea unui unghi al triunghiului pe latura opusă.

Soluție. Fie A' punctul în care bisectoarea unghiului $\widehat{A}$ al triunghiului ABC taie latura $|BC|$. Notăm $\|A'B\| = x$ și $\|A'C\| = y$. Cum $\widehat{A}_1 \equiv \widehat{A}_2$, aplicînd teorema bisectoarei, rezultă: $\frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} = \frac{\|AB\|}{\|AC\|} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{c}{b}$ și $x + y = a$.

Rezolvînd sistemul obținem:

$$x = \frac{ac}{b+c} \quad \text{și} \quad y = \frac{ab}{b+c}.$$

Problema 3. Într-un triunghi ABC, bisectoarele unghiurilor formate de mediana $|AM|$ ($M \in BC$) cu latura $|BC|$ intersectează celelalte 2 laturi în P și Q. Să se arate că $PQ \parallel BC$. Reciproc: dacă $M \in |BC|$, $[MP]$ și $[MQ]$ sînt bisectoarele unghiurilor $\widehat{AMB}$ respectiv $\widehat{AMC}$ ($P \in |AB|$, $Q \in |AC|$) și $PQ \parallel BC$, atunci M este mijlocul laturii $|BC|$.

Soluție.

a) Demonstrăm că dacă $\angle CAD$ este bisectoarea unuia din unghiurile exterioare triunghiului, cu vârful în A, atunci: $\frac{\|BD\|}{\|DC\|} = \frac{\|AB\|}{\|AC\|}$.
Ducem $CM \parallel AD$. $\frac{\|BD\|}{\|DC\|} = \frac{\|AB\|}{\|MA\|}$ (teorema lui Thales). $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ACM}$ (alterne interne) $\widehat{A}_2 \equiv \widehat{AMC}$ (corespondente); dar $\widehat{A}_2 \equiv \widehat{CAD}$

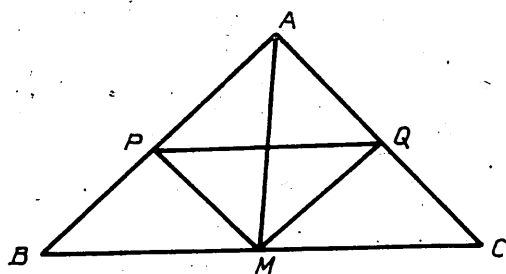


Fig. 91.

Soluție. [MQ fiind bisectoarea unghiului $\widehat{AMC} \Rightarrow \frac{\|AQ\|}{\|QC\|} = \frac{\|AM\|}{\|MC\|}$ (teorema bisectoarei). [MP fiind bisectoarea unghiului $\widehat{AMB} \Rightarrow \frac{\|AP\|}{\|PB\|} = \frac{\|AM\|}{\|MB\|}$; dar $\|MC\| \equiv \|MB\|$ (ipoteză) rezultă că: $\frac{\|AQ\|}{\|QC\|} = \frac{\|AP\|}{\|PB\|}$. Aplicând reciproca teoremei lui Thales rezultă că $PQ \parallel BC$.

Reciproc: presupunem că $PQ \parallel BC \Rightarrow \frac{\|AP\|}{\|PB\|} = \frac{\|AQ\|}{\|QC\|}$ (1). [MQ fiind bisectoarea unghiului $\widehat{AMC} \Rightarrow \frac{\|AQ\|}{\|QC\|} = \frac{\|AM\|}{\|MC\|}$ (2).

[MP fiind bisectoarea unghiului $\widehat{AMB} \Rightarrow \frac{\|AP\|}{\|PB\|} = \frac{\|AM\|}{\|MB\|}$ (3). Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow \frac{\|AM\|}{\|MC\|} = \frac{\|AM\|}{\|MB\|} \Rightarrow \|MC\| \equiv \|MB\|$ și deci M este mijlocul lui $|BC|$.

Problema 4. Se dă triunghiul ABC cu $\|AB\| = 20$, $\|BC\| = 30$, [BD bisectoarea unghiului $\widehat{B}$, $D \in |AC|$, dreapta $DE \parallel AB$ ($E \in |BC|$) și dreapta $EF \parallel BD$ ($F \in |AC|$). Să se determine $\|AC\|$ dacă $\|AD\| - \|FC\| = 1$.

Soluție. [BD fiind bisectoarea unghiului $\widehat{B} \Rightarrow \widehat{B}_1 \equiv \widehat{B}_2 \Rightarrow \frac{\|AD\|}{\|DC\|} = \frac{20}{30}$ (conform teoremei bisectoarei). Notăm $\|AD\| = x$ și $\|DC\| = y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$.

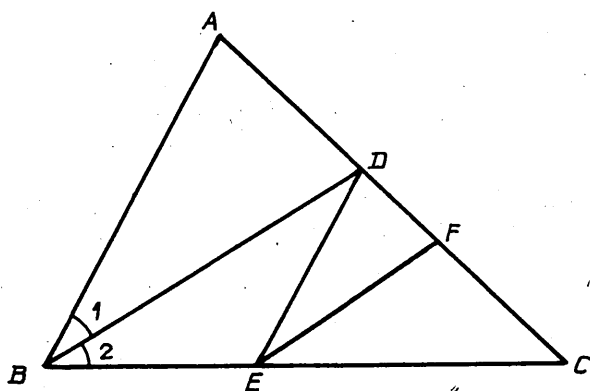


Fig. 92.

$DE \parallel AB$ (ipoteză) $\Rightarrow \frac{\|AD\|}{\|DC\|} = \frac{\|BE\|}{\|EC\|} = \frac{2}{3}$ (teorema lui Thales); $EF \parallel BD$ (ipoteză) $\Rightarrow \frac{\|BE\|}{\|EC\|} = \frac{\|DF\|}{\|FC\|} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\|DF\| + \|FC\|}{\|FC\|} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{\|DC\|}{\|FC\|} = \frac{5}{3}$; $\|FC\| = \frac{3 \|DC\|}{5}$. Înlocuind $\|FC\|$ în relația $\|AD\| - \|FC\| = 1$ obținem: $x - \frac{3y}{5} = 1$, ecuație pe care o luăm împreună cu: $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$. Obținem un sistem care are soluțiile $x = 10$

și $y = 15$. Rezultă $\|AC\| = \|AD\| + \|DC\| = 10 + 15 = 25$.

Asemănarea triunghiurilor

Problemele de la pagina 66.

Problema 1. Să se demonstreze că dacă $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ și $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$.

Soluție. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{\|AB\|}{\|A'B'\|} = \frac{\|AC\|}{\|A'C'\|} = \frac{\|BC\|}{\|B'C'\|}$ (1) și $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ (2). $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C'' \Rightarrow \frac{\|A'B'\|}{\|A''B''\|} = \frac{\|B'C'\|}{\|B''C''\|} = \frac{\|A'C'\|}{\|A''C''\|}$ (3) și $\hat{A}' \equiv \hat{A}''$, $\hat{B}' \equiv \hat{B}''$ și $\hat{C}' \equiv \hat{C}''$ (4). Din (1) și (3) prin înmulțire se obține:
 $\frac{\|AB\|}{\|A'B'\|} = \frac{\|AC\|}{\|A'C'\|} = \frac{\|BC\|}{\|B'C'\|}$ (5). Din (2) și (4) $\Rightarrow \hat{A} \equiv \hat{A}''$, $\hat{B} \equiv \hat{B}''$, $\hat{C} \equiv \hat{C}''$ (6).
 Din (5) și (6) $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$.

Problema 2. Să se demonstreze că dacă $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ și $\triangle A'B'C' \equiv \triangle A''B''C''$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$.

Soluție. $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Rightarrow \frac{\|AB\|}{\|A'B'\|} = \frac{\|AC\|}{\|A'C'\|} = \frac{\|BC\|}{\|B'C'\|}$ (1) și $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ (2).
 $\triangle A'B'C' \equiv \triangle A''B''C'' \Rightarrow |AB| \equiv |A''B''|$, $|AC| \equiv |A''C''|$, $|BC| \equiv |B''C''|$ (3) și $\hat{A} \equiv \hat{A}''$, $\hat{B} \equiv \hat{B}''$, $\hat{C} \equiv \hat{C}''$ (4). Din (1) și (3) $\Rightarrow \frac{\|AB\|}{\|A'B'\|} = \frac{\|AC\|}{\|A'C'\|} = \frac{\|BC\|}{\|B'C'\|}$ (5).
 Din (2) și (4) $\Rightarrow \hat{A} \equiv \hat{A}''$, $\hat{B} \equiv \hat{B}''$, $\hat{C} \equiv \hat{C}''$ (6). Din (5) și (6) $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A''B''C''$.

Problema 3. Fie ABC un triunghi și fie A', B', C' trei puncte coliniare distincte astfel ca $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$; să se arate că:

$$\frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|B'C\|}{\|B'A\|} \cdot \frac{\|C'A\|}{\|C'B\|} = 1 \text{ (teorema lui Menelaus).}$$

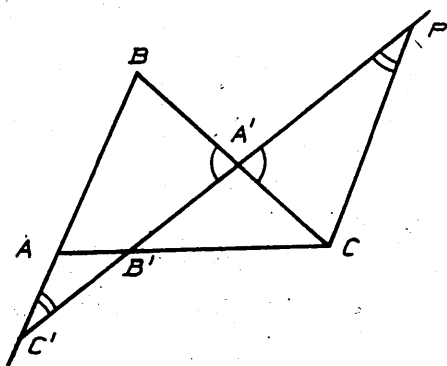


Fig. 93.

Soluție. Ducem $CP \parallel AB$. $\triangle A'PC \sim \triangle A'C'B$ pentru că $\widehat{PA'C} \equiv \widehat{BA'C}$ (opuse la vîrf), $\widehat{A'PC} \equiv \widehat{A'C'B}$ (alterne interne).
 $\Rightarrow \frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} = \frac{\|A'C'\|}{\|A'P\|} = \frac{\|BC'\|}{\|PC\|}$.
 $\triangle AB'C' \sim \triangle CB'P$ pentru că: $\widehat{AB'C'} \equiv \widehat{PB'C}$ (opuse la vîrf); $\widehat{A'PC} \equiv \widehat{A'C'B}$ (alterne interne). $\Rightarrow \frac{\|B'C\|}{\|B'A\|} = \frac{\|B'P\|}{\|B'C'\|} = \frac{\|PC\|}{\|AC'\|}$.
 Rezultă că: $\frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} = \frac{\|BC'\|}{\|PC\|}$ și $\frac{\|B'C\|}{\|B'A\|} = \frac{\|PC\|}{\|AC'\|}$. Înmulțim ultimele 2 egalități și ob-

ținem:

$$\frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|B'C\|}{\|B'A\|} = \frac{\|BC\|}{\|PC\|} \cdot \frac{\|PC\|}{\|AC'\|} \text{ sau } \frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|B'C\|}{\|B'A\|} \cdot \frac{\|AC'\|}{\|BC'\|} = 1.$$

Problema 4. Se consideră punctele A' , B' , C' situate pe dreptele BC , AC , AB determinate de laturile triunghiului ABC . Dacă 2 dintre ele sînt situate pe laturile triunghiului și unul pe prelungirea laturii, sau nici unul nu e situat pe laturile triunghiului și este verificată relația din problema precedentă, atunci cele 3 puncte sînt coliniare (reciproca teoremei lui Menelaus).

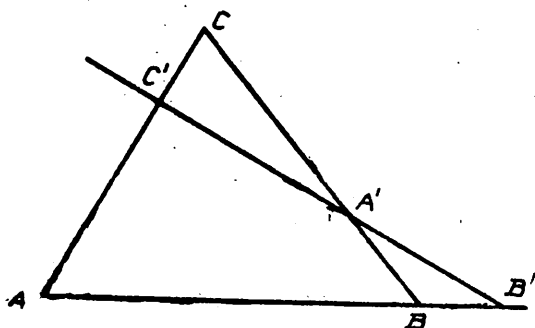


Fig. 94.

Soluție. Fie $C' \in |AB|$ și $A' \in |BC|$, iar B' astfel încît $C \in |AB'|$. Presupunem prin absurd că punctele A' , B' , C' nu sînt coliniare. Atunci dreapta $C'A'$ taie AC într-un punct B'' ; $A'C'$ taie 2 laturi ale triunghiului ABC și nu trece prin vîrfurile sale, deci nu taie a treia latură. Rezultă că $B'' \notin |AC|$ dar $B'' \in AC$. Conform

teoremei directe (problema 3, § 8, cap. 2, pag. 69) avem: $\frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|B'C\|}{\|B'A\|} \cdot \frac{\|C'A\|}{\|C'B\|}$

$$= 1. \text{ Dar din ipoteză: } \frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|B'C\|}{\|B'A\|} \cdot \frac{\|C'A\|}{\|C'B\|} = 1 \Rightarrow \frac{\|B'C\|}{\|B'A\|} = \frac{\|B'C\|}{\|B'A\|}.$$

Cum B' și B'' sînt ambele exterioare segmentului $|AC|$ am ajuns la o contradicție: ele împart segmentul $|AC|$ în același raport. Deci presupunerea nu este corectă, rezultă că A' , B' , C' sînt coliniare.

Problema 5. Se consideră un triunghi ABC și 3 drepte concurente AM , BM , CM care mai intersectează laturile triunghiului (suporturile laturilor) în punctele A' , B' , C' . Să se demonstreze relația:

$$\frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|B'C\|}{\|B'A\|} \cdot \frac{\|C'A\|}{\|C'B\|} = 1 \text{ (teorema lui Ceva).}$$

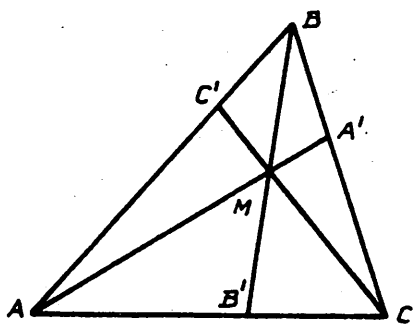


Fig. 95.

Soluție. Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul $B'BC$ pentru punctele A' , M , A : $\frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|AC\|}{\|AB'\|} \cdot \frac{\|MB'\|}{\|MB\|} = 1.$

Procedăm la fel în triunghiul ABB' pentru punctele C , M , C' : $\frac{\|C'A\|}{\|C'B\|} \cdot \frac{\|MB\|}{\|MB'\|} \cdot \frac{\|CB'\|}{\|CA\|} = 1.$ Înmulțim cele 2 egalități și obținem:

$\frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|AC\|}{\|AB\|} \cdot \frac{\|MB'\|}{\|MB\|} \cdot \frac{\|C'A\|}{\|C'B\|} \cdot \frac{\|MB\|}{\|MB'\|} \cdot \frac{\|CB'\|}{\|CA\|} = 1$. După simplificare obținem:

$$\frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|C'A\|}{\|C'B\|} \cdot \frac{\|B'C\|}{\|AB'\|} = 1.$$

Problema 6. Fie A' , B' , C' trei puncte situate pe laturile $|BC|$, $|AB|$, $|AC|$ ale triunghiului ABC . Să se demonstreze că dacă este verificată relația din problema precedentă, atunci dreptele AA' , BB' , CC' sînt concurente (reciprocă teoremei lui Ceva).

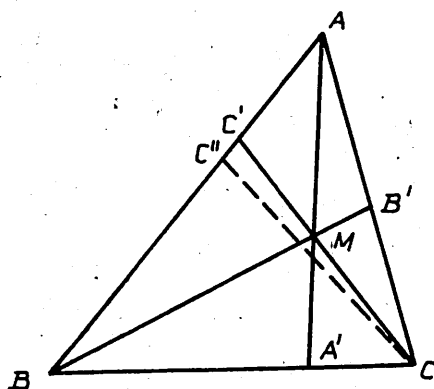


Fig. 96.

Soluție. Fie triunghiul $AA'C$ și dreapta BB' . $B \notin |A'C|$ și $B' \in |AC| \Rightarrow BB'$ taie latura $|AC|$ a triunghiului și nu taie $|A'C| \Rightarrow$ va tăia $|AA'|$. Deci există M astfel ca $BB' \cap |AA'| = \{M\}$. Să arătăm că $M \in CC'$. Presupunem prin absurd că $M \notin CC'$. Atunci $CM \cap AB = \{C''\}$. Aplicăm teorema lui Ceva (directă) pentru dreptele AA' , BB' , CC'' :

$$\frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|B'C\|}{\|B'A\|} \cdot \frac{\|C''A\|}{\|C''B\|} = 1.$$

Dar din ipoteză avem:

$\frac{\|A'B\|}{\|A'C\|} \cdot \frac{\|B'C\|}{\|B'A\|} \cdot \frac{\|C'A\|}{\|C'B\|} = 1$. Din aceste două relații rezultă: $\frac{\|C''A\|}{\|C''B\|} = \frac{\|C'A\|}{\|C'B\|}$. Punctele C' și C'' împart segmentul $|AB|$ în același raport. $C' \in |AB|$ (prin ipoteză). Să arătăm că și $C'' \in |AB|$. $M \in |AA'| \Rightarrow M \in \text{Int } \widehat{ACB} \Rightarrow |CM| \cap |AB| \neq \emptyset, \Rightarrow |CM \cap |AB| = \{C''\}$ (teorema transversalei); $\Rightarrow C'' \in |AB|$. Am ajuns deci la contradicția că 2 puncte interioare segmentului $|AB|$ îl împart în același raport. Rezultă că presupunerea nu este corectă. Deci $M \in CC'$ și deci dreptele AA' , BB' , CC' sînt concurente.

Problema 7. Intr-un triunghi produsul dintre lungimea unei înălțimi și lungimea laturii corespunzătoare este aceeași pentru fiecare înălțime.

Soluție. $\triangle AA'B \sim \triangle BCC'$ pentru că: $\widehat{B}$ este unghi comun; $m(\widehat{CC'B}) = m(\widehat{AA'B}) = 90^\circ$ și deci $\widehat{CC'B} \equiv \widehat{AA'B} \Rightarrow \frac{\|AA'\|}{\|CC'\|} = \frac{\|AB\|}{\|BC\|} \Rightarrow \|BC\| \cdot \|AA'\| = \|AB\| \cdot \|CC'\|$ (1).

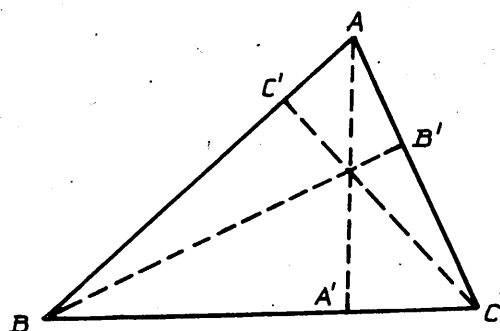


Fig. 97.

La fel: $\triangle ACA' \sim \triangle BB'C$ pentru că $\widehat{C}$ este unghi comun; $m(\widehat{AA'C}) = m(\widehat{BB'C}) = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AA'C} \cong \widehat{BB'C} \Rightarrow \frac{\|AA'\|}{\|BB'\|} = \frac{\|AC\|}{\|BC\|}$ sau:

$$\|BC\| \cdot \|AA'\| = \|AC\| \cdot \|BB'\| \quad (2).$$

$$\begin{aligned} \text{Din (1) și (2)} \Rightarrow \|AA'\| \cdot \|BC\| &= \\ &= \|BB'\| \cdot \|AC\| = \|CC'\| \cdot \|AB\|. \end{aligned}$$

Problema 8. Să se demonstreze că distanțele de la un punct M al mediane $\|AD\|$ la laturile $\|AB\|$, $\|AC\|$ ale unui triunghi sînt invers proporționale cu aceste laturi. Se va deduce că distanțele de la centrul de greutate la laturi sînt invers proporționale cu lungimile laturilor.

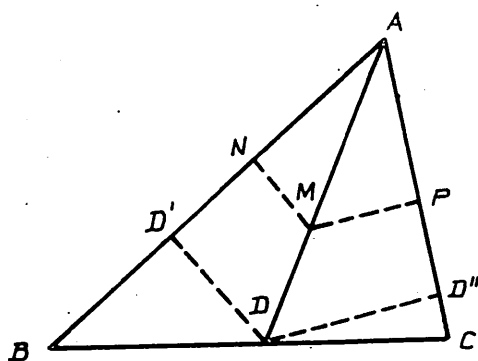


Fig. 98.

Soluție. Construim $DD' \perp AB$ și $DD'' \perp AC$. $\triangle ADD' \sim \triangle AMN$ (pentru că $MN \parallel DD'$ - fiind perpendiculare pe aceeași dreaptă). $\triangle ADD'' \sim \triangle AMP$ ($MP \parallel DD''$). $\Rightarrow \frac{\|MN\|}{\|DD'\|} = \frac{\|AM\|}{\|AD\|} = \frac{\|MP\|}{\|DD''\|} \quad (1).$

Ducem $AE \perp BC$. Aplicăm problema 7, § 8, pag. 70, cap. 2: în triunghiul BAD : $\|AB\| \cdot \|DD'\| = \|BD\| \cdot \|AE\| \quad (2).$ La fel

în ADC : $\|AC\| \cdot \|DD''\| = \|DC\| \cdot \|AE\| \quad (3).$ Cum $\|BD\| \cong \|DC\|$ (ipoteză), din (2) și (3) $\Rightarrow \|AB\| \cdot \|DD'\| = \|AC\| \cdot \|DD''\|$ sau $\frac{\|AB\|}{\|AC\|} = \frac{\|DD''\|}{\|DD'\|} \quad (4).$

$$\text{Din (1)} \Rightarrow \frac{\|DD''\|}{\|DD'\|} = \frac{\|MP\|}{\|MN\|} \quad (5). \text{ Din (4) și (5)} \Rightarrow \frac{\|AB\|}{\|AC\|} = \frac{\|MP\|}{\|MN\|}.$$

Relația este valabilă pentru orice M de pe mediana $\|AD\|$, deci și pentru centrul de greutate al triunghiului.

Problema 9. Dintr-o tablă triunghiulară se cere să se taie un pătrat cu o latură pe latura cea mai mare a triunghiului și cu celelalte 2 vîrfuri pe celelalte laturi ale triunghiului.

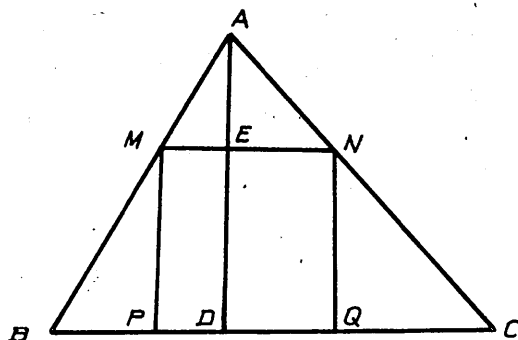


Fig. 99.

Soluție. Ducem $AD \perp BC$. Notăm $MN \cap AD = \{E\}$, $\|MN\| = x$, $\|AD\| = h$.
 $\triangle MAN \sim \triangle ABC$ ($MN \parallel BC$ - ipoteză) $\Rightarrow$
 $\frac{\|MN\|}{\|BC\|} = \frac{\|AE\|}{\|AD\|} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow x = \frac{ah}{a+h}$
 Tot din relația: $\triangle MAN \sim \triangle ABC$ obținem:
 $\frac{\|AM\|}{\|AB\|} = \frac{\|MN\|}{\|BC\|} \Rightarrow \|AM\| = \frac{c \|MN\|}{a}$
 $\Rightarrow \|AM\| = \frac{c}{a} \cdot \frac{ah}{a+h} \Rightarrow \|AM\| = \frac{ch}{a+h}$
 Am notat $\|AB\| = c$, $\|BC\| = a$, $\|AC\| = b$.

Problema 10. Pe latura $|AB|$ a triunghiului ABC se ia un punct C' . Prin A se duce paralela la CC' care intersectează BC în A' și prin B paralela la CC' care intersectează AC în B' . Să se arate că: $\frac{1}{\|AA'\|} + \frac{1}{\|BB'\|} = \frac{1}{\|CC'\|}$.

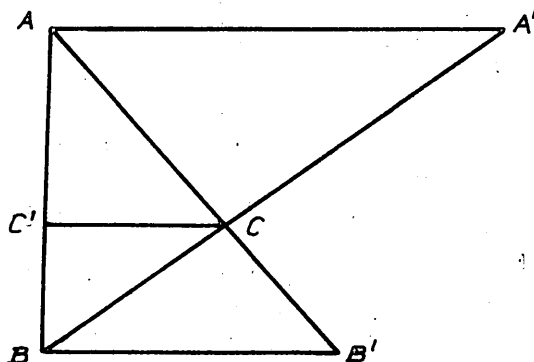


Fig. 100.

Soluție. $\triangle ACC' \sim \triangle ABB'$ ($CC' \parallel BB'$ - ipoteză) $\Rightarrow \frac{\|CC'\|}{\|BB'\|} = \frac{\|AC'\|}{\|AB\|}$ (1).
 $\triangle BC'C \sim \triangle BAA'$ ($CC' \parallel AA'$ - ipoteză) $\Rightarrow$
 $\frac{\|CC'\|}{\|AA'\|} = \frac{\|C'B\|}{\|AB\|}$ (2). Din (1) și (2)
 prin adunare obținem:
 $\frac{\|CC'\|}{\|BB'\|} + \frac{\|CC'\|}{\|AA'\|} = \frac{\|AC'\| + \|C'B\|}{\|AB\|} =$
 $= \frac{\|AB\|}{\|AB\|} = 1 \Rightarrow \|CC'\| \left(\frac{1}{\|BB'\|} + \frac{1}{\|AA'\|} \right) = 1.$
 $\Rightarrow \frac{1}{\|BB'\|} + \frac{1}{\|AA'\|} = \frac{1}{\|CC'\|}.$

Problema 11. În triunghiul ABC se consideră bisectoarea unghiului $\hat{C}$ care intersectează latura $|AB|$ în D . Demonstrați că: $\|CD\| < \sqrt{\|AC\| \cdot \|BC\|}$.

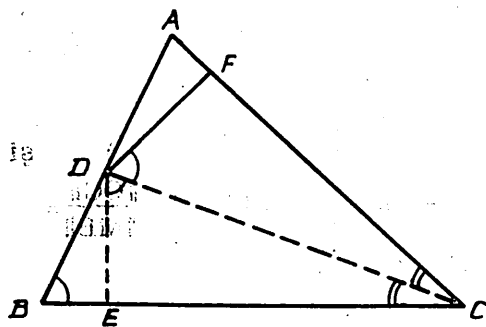


Fig. 101.

Construim $\widehat{CDF} \equiv \widehat{CDE}$ ($F \in AC$) $\Rightarrow \widehat{CDF} < \widehat{CDA}$; $\Rightarrow DF \in \text{Int } \widehat{ADC} \Rightarrow F \in |AC|$
 $\Rightarrow |FC| < |AC|$ (2).

Soluție. Fie E astfel încât $\widehat{CDE} \equiv \hat{B}$.
 Aplicăm teorema unghiului exterior pentru triunghiul BDC :
 $\widehat{CDA} > \hat{B}$ (1); $\triangle CDE \sim \triangle CDB$ pentru că:
 $\widehat{CDE} \equiv \hat{B}$ (construcție); $\widehat{DCB}$ - unghi comun.
 $\Rightarrow \frac{\|CB\|}{\|CD\|} = \frac{\|CD\|}{\|CE\|} \Rightarrow \|CD\|^2 = \|CB\| \cdot \|CE\|.$
 (a).

Din $\hat{B} \equiv \widehat{CDE}$ și din (1) $\Rightarrow \widehat{CDA} > \widehat{CDE}$.

$\triangle DEC \cong \triangle DFC$ (cazul: U.L.U.): $\widehat{DCF} = \widehat{DCB}$ - construcție; $|DC|$ - latură comună; $\widehat{FDC} = \widehat{EDC}$ (construcție). $\Rightarrow |FC| \cong |EC|$ (3). Din (2) și (3) $\Rightarrow |EC| < |AC|$ (4). Din (a) și (4) $\Rightarrow \|CD\|^2 < \|BC\| \cdot \|AC\| \Rightarrow \|CD\| < \sqrt{\|BC\| \cdot \|AC\|}$.

Problema 12. Prin punctul O de intersecție al diagonalelor unui trapez se duce o paralelă la baze, care taie laturile neparalele în E și F. Să se arate că O este mijlocul segmentului $|EF|$.

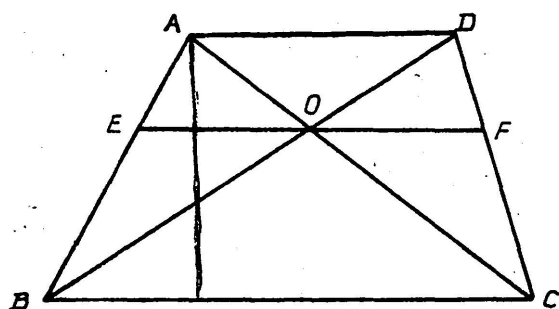


Fig. 102.

Soluție. $\triangle AOE \sim \triangle ABC$ ($EO \parallel BC$ - ipoteză) $\Rightarrow \frac{\|EO\|}{\|BC\|} = \frac{\|AO\|}{\|AC\|}$ (1).
 $\triangle DOF \sim \triangle DBC$ ($OF \parallel BC$ - ipoteză):
 $\Rightarrow \frac{\|OF\|}{\|BC\|} = \frac{\|DO\|}{\|DB\|}$ (2). Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul BOC ($AD \parallel BC$) $\Rightarrow \frac{\|AO\|}{\|AC\|} = \frac{\|DO\|}{\|DB\|}$ (3). Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow \frac{\|EO\|}{\|BC\|} = \frac{\|OF\|}{\|BC\|} \Rightarrow |EO| \cong |OF|$.

Problema 13. Să se arate că dreapta determinată de punctul de intersecție al laturilor neparalele ale unui trapez și punctul de intersecție O al diagonalelor trece prin mijloacele bazelor trapezului.

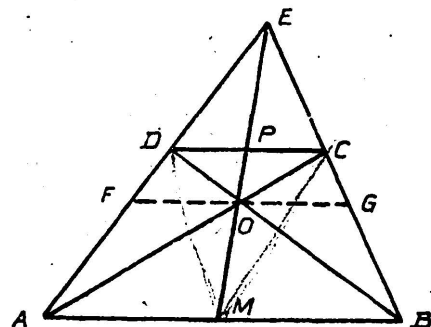


Fig. 103.

Soluție. Ducem $FG \parallel DC \parallel AB$ astfel ca $O \in |FG|$. Din problema 12, § 8, pag. 70, cap. 2 $\Rightarrow |FO| \cong |OG|$ (1).

$\triangle EDP \sim \triangle EFO$ ($DP \parallel FO$ (construcție)).
 $\frac{\|DP\|}{\|FO\|} = \frac{\|EP\|}{\|EO\|}$ (2). $\triangle EPC \sim \triangle EOG$ ($PC \parallel OG$)
 $\Rightarrow \frac{\|PC\|}{\|OG\|} = \frac{\|EP\|}{\|EO\|}$
 $\Rightarrow \frac{\|PC\|}{\|OG\|} = \frac{\|DP\|}{\|FO\|}$
 $\Rightarrow \|DP\| = \|PC\|$.

La fel: $\triangle EOF \sim \triangle AME$ ($FO \parallel AM$) și
 $\triangle EOG \sim \triangle EMB$ ($OG \parallel MB$) $\Rightarrow \frac{\|FO\|}{\|AM\|} = \frac{\|EO\|}{\|EM\|}$ și $\frac{\|EO\|}{\|EM\|} = \frac{\|OG\|}{\|MB\|} \Rightarrow \frac{\|EO\|}{\|EM\|} = \frac{\|OG\|}{\|MB\|} = \frac{\|FO\|}{\|AM\|}$ (1) $\Rightarrow \|MB\| = \|AM\|$.

Relații metrice

Problemele de la pagina 71.

Problema 1. Să se arate că proiecția unui segment $|AB|$ pe o dreaptă d este segmentul $|CD|$ unde $C = \text{pr}_d A$ și $D = \text{pr}_d B$.

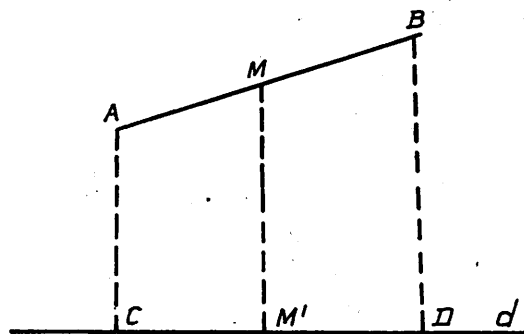


Fig. 104.

deoarece $MM' \perp d$ și $BD \perp d$. Deci M' și M nu pot fi de o parte și de alta a lui BD . La fel se arată că nu pot fi nici de o parte și de alta a lui AC . Notăm $a = AB$ și $b = BD$. Deci $M' \in |bA$ și $M' \in |aB$ și $M' \in CD \Rightarrow M' \in |bA \cap |aB \cap CD = |CD \cap |DC = |CD|$. Deci $M' \in |CD|$.

Reciproc: să arătăm că orice punct M' de pe $|CD|$ este proiecția pe d a unui punct de pe $|AB|$ ($M \in |AB|$). Fie $MM' \perp d$ și $M' \in |CD|$, iar $\{M\} = MM' \cap AB$. Se demonstrează prin reducere la absurd ca și în cazul teoremei directe că $M \in |AB|$.

Problema 2. Să se arate că proiecția unui poligon pe o dreaptă este un segment închis.

Soluție. Fie poligonul $P_1 P_2 P_3 \dots P_n$. Conform problemei 1, § 9, cap. 2, pag. 71 proiecția unui segment pe o dreaptă (pe care nu este perpendicular este tot un segment) $\Rightarrow \text{pr}_d [P_k P_{k+1}] = [P'_k P'_{k+1}]$ unde $P'_k = \text{pr}_d P_k$ și $P'_{k+1} = \text{pr}_d P_{k+1}$. Fiecare 2 laturi alăturate ale poligonului au ca proiecții 2 segmente situate pe d și avînd cîte un punct comun. Reuniunea a 2 segmente închise avînd același suport și un punct comun este un segment închis. Deci reuniunea tuturor proiecțiilor laturilor poligonului este un segment închis.

Problema 3. Se consideră triunghiul ABC ($\hat{A} \in 90^\circ$) în care $AD \perp BC$, $D \in |BC|$. Să se arate că: $\frac{1}{\|AD\|^2} = \frac{1}{\|AB\|^2} + \frac{1}{\|AC\|^2}$.

Soluție. $\triangle ABD \cong \triangle ABC$ pentru că $\hat{B}$ este unghi comun; $m(\hat{ADB}) = m(\hat{BAC}) = 90^\circ \Rightarrow \hat{ADB} \cong \hat{BAC} \Rightarrow \frac{\|AD\|}{\|AC\|} = \frac{\|AB\|}{\|BC\|} \Rightarrow \|AD\| \cdot \|BC\| = \|AB\| \cdot \|AC\|$
 (1). În triunghiul $ABC \Rightarrow \|BC\|^2 = \|AB\|^2 + \|AC\|^2$ (teorema lui Pitagora) (2).
 Din (1) $\Rightarrow \|AD\|^2 \cdot \|BC\|^2 = \|AB\|^2 \cdot \|AC\|^2$ (3). Din (2) și (3) prin împărțire obținem: $\frac{\|AD\|^2 \cdot \|BC\|^2}{\|AD\|^2 \cdot \|BC\|^2} = \frac{\|AB\|^2 \cdot \|AC\|^2}{\|AB\|^2 \cdot \|AC\|^2} \Rightarrow \frac{1}{\|AD\|^2} = \frac{1}{\|AC\|^2} + \frac{1}{\|AB\|^2}$.

Problema 4. Să se demonstreze că raportul lungimilor proiecțiilor catetelor pe ipotenuză este egal cu raportul pătratelor lungimilor catetelor.

Soluție. Fie triunghiul ABC ($\hat{A} \in 90^\circ$). Aplicăm teorema catetei: $\|AB\|^2 = \|BD\| \cdot \|BC\|$ și $\|AC\|^2 = \|DC\| \cdot \|BC\|$. Prin împărțire obținem:
 $\frac{\|AB\|^2}{\|AC\|^2} = \frac{\|BD\| \cdot \|BC\|}{\|DC\| \cdot \|BC\|} \Rightarrow \frac{\|AB\|^2}{\|AC\|^2} = \frac{\|BD\|}{\|DC\|}$.

Problema 5. Se consideră un triunghi ABC și fie D proiecția lui A pe BC . Perpendiculara în A pe AB intersectează pe BC în E . Dacă $\|AB\| = 13$, $\|BC\| = 21$ și $\|AD\| = 12$ să se afle perimetrul triunghiului ACE .

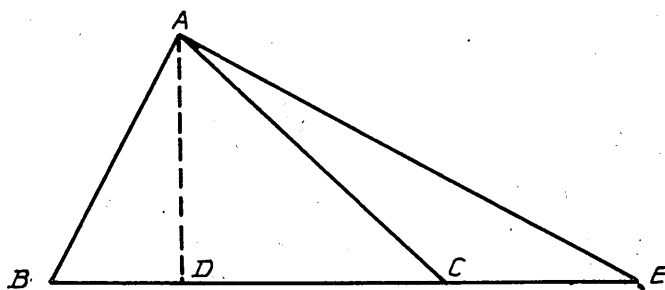


Fig. 105.

Soluție. Cazul 1: $m(\hat{B}) < 90^\circ$. În triunghiul ABD :
 $\|BD\|^2 = \|AB\|^2 - \|AD\|^2$;
 $\|BD\| = 5$; $\|DC\| = \|BC\| - \|BD\| = 21 - 5 = 16$. În
 triunghiul ADC : $\|AC\|^2 = \|AD\|^2 + \|DC\|^2 = 400$ (teorema lui Pitagora). $\|AC\| = 20$.

În triunghiul ABE : $\|AB\|^2 = \|BD\| \cdot \|BE\|$ (teorema catetei) $\|BE\| = \frac{169}{5}$; $\|CE\| = \|BE\| - \|BC\| = \frac{64}{5}$; $\|DE\| = \|DC\| + \|CE\| = \frac{144}{5}$.

În triunghiul ABE , $\|AE\|^2 = \|BE\| \cdot \|DE\|$ (teorema catetei) $\Rightarrow \|AE\| = \frac{156}{5}$. Perimetrul triunghiului ACE va fi egal cu: $20 + \frac{156}{5} + \frac{64}{5} = 64$.

Cazul 2: $m(\hat{B}) > 90^\circ$. $\|DB\| = 5 \Rightarrow \|DC\| = 26$; $\|AC\|^2 = \|AD\|^2 + \|DC\|^2 \Rightarrow \|AC\| = 2\sqrt{205}$.

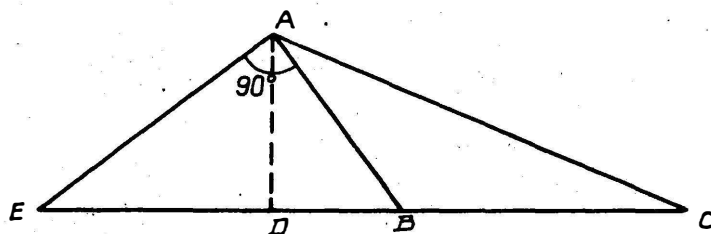


Fig. 106.

obținem: $\|AE\|^2 = \|AD\|^2 + \|ED\|^2 = \frac{78676}{25}$; $AE = \frac{2}{5}\sqrt{19669}$.

Deci în acest caz perimetrul triunghiului AEC este: $2\sqrt{205} + \frac{274}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{19669} \approx 118,06$.

Problema (6) Prin vârful A al triunghiului isoscel ABC se duce o paralelă la BC pe care se consideră un punct M. Să se demonstreze că $\|MB\|^2 + \|MC\|^2 = 2(\|MA\|^2 + \|AB\|^2)$.

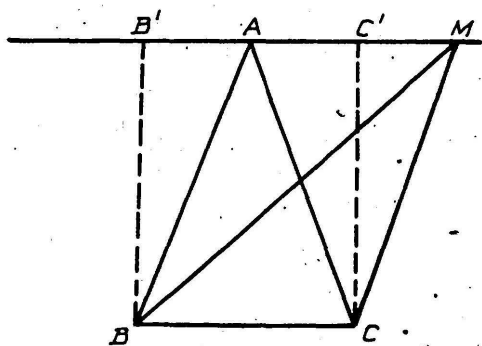


Fig. 107.

(unghiuri drepte). $\Rightarrow |B'A| \equiv |AC'|$.

Adunând egalitățile (1) și (2) termenii $2\|AM\| \cdot \|B'A\|$ și $-2\|AM\| \cdot \|AC'\|$ se reduc și rămâne: $\|MB\|^2 + \|MC\|^2 = 2(\|MA\|^2 + \|AB\|^2)$ (am înlocuit și pe $\|AC\|$ cu $\|AB\|$, cele 2 segmente fiind congruente).

Problema 7. În dreptunghiul ABCD perpendiculara din A pe diagonala $|BD|$ intersectează dreapta BC în F. Să se demonstreze că: $\|AB\|^2 = \|BF\| \cdot \|BC\|$

În triunghiul ABE aplicăm teorema înălțimii:

$$\begin{aligned} \|AD\|^2 &= \|DB\| \cdot \|ED\| \Rightarrow \\ \Rightarrow \|ED\| &= \frac{144}{5} \Rightarrow \|EC\| = \\ &= \|ED\| + \|DC\| = \frac{274}{5}. \end{aligned}$$

În triunghiul AED aplicăm teorema lui Pitagora

Soluție. Ducem $CC' \perp AM$, $BB' \perp AM$.

Aplicăm teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile MAB și MAC: $\|MB\|^2 = \|AB\|^2 + \|MA\|^2 + 2\|MA\| \cdot \|B'A\|$; (1)
 $\|MC\|^2 = \|AC\|^2 + \|MA\|^2 - 2\|AM\| \cdot \|AC'\|$. (2)

$\triangle B'AB \equiv \triangle C'AC$ (cazul: I.C.): $|AB| \equiv |AC|$ (ipoteză), $|BB'| \equiv |CC'|$ (distanțe între 2 drepte paralele) și $\widehat{BB'A} \equiv \widehat{CC'A}$.

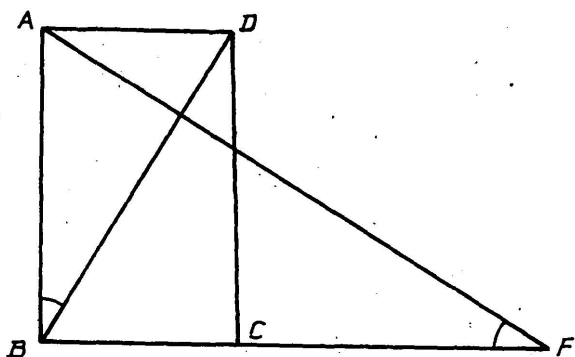


Fig. 108.

Problema 8 Se consideră triunghiul ABC, $\hat{A} \in 90^\circ$ în care $\|AB\| = \|AC\| + 6$ și $\|BC\| = 30$. Să se determine $\|CD\|$, $|CD|$ fiind bisectoarea unghiului $\hat{C}$, $D \in |AB|$.

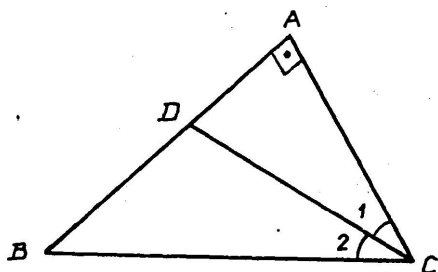


Fig. 109.

Soluție. În triunghiul ABC aplicând teorema lui Pitagora obținem: $\|BC\|^2 = \|AB\|^2 + \|AC\|^2 = 900$, iar $\|AB\| = \|AC\| + 6$ (ipoteză). Notînd $\|AC\| = x$ avem: $(\|AC\| + 6)^2 + \|AC\|^2 = 900$ sau: $2x^2 + 12x - 864 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 432 = 0 \Rightarrow x_1 = -24$ și nu convine (lungimea unui segment este pozitivă); și

$$x_2 = 18.$$

Deci $\|AC\| = 18$ și $\|AB\| = 24$.

În triunghiul ABC aplicăm teorema bisectoarei: $\frac{\|AC\|}{\|BC\|} = \frac{\|AD\|}{\|DB\|}$, deci:

$\frac{18}{30} = \frac{\|AD\|}{24 - \|AD\|} \Rightarrow \|AD\| = 9$. În triunghiul ADC ($\hat{A} \in 90^\circ$) aplicăm teorema lui Pitagora: $\|DC\|^2 = \|AD\|^2 + \|AC\|^2 = 405 \Rightarrow \|DC\| = 3\sqrt{45} = 9\sqrt{5}$.

Problema 9 Se consideră triunghiul ABC și înălțimea $|BD|$, $D \in |AC|$.

Pe laturile $|AB|$ și $|BC|$ se construiesc triunghiurile dreptunghice ABE, BCF, $m(\hat{BAE}) = m(\hat{BCF}) = 90^\circ$ și $|AE| \equiv |DC|$, $|FC| \equiv |AD|$. Să se arate că $|BF| \equiv |BE|$.

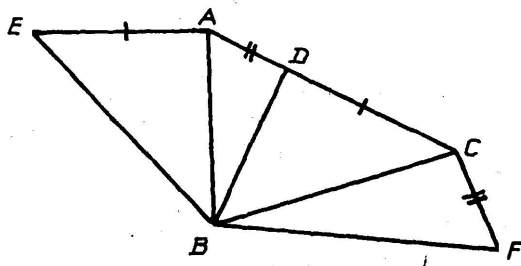


Fig. 110.

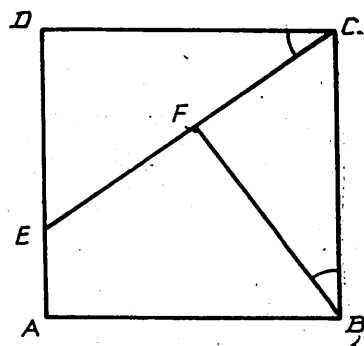
Soluție. În triunghiul AEB, și în BDC aplicăm teorema lui Pitagora și obținem:

$$\|EB\|^2 = \|AB\|^2 + \|EA\|^2 = \|AB\|^2 + \|DC\|^2 = \|AB\|^2 + \|BC\|^2 - \|BD\|^2.$$

Aplicăm tot teorema lui Pitagora în triunghiurile: BCF și în ADB: $\|BF\|^2 =$

$$= \|BC\|^2 + \|CF\|^2 = \|BC\|^2 + \|AD\|^2 = \|BC\|^2 + \|AB\|^2 - \|BD\|^2 \Rightarrow |EB| = |BF|.$$

Problema 10. Se consideră pătratul ABCD, cu $\|AB\| = 4$ și punctul $E \in |AD|$ astfel ca $\|AE\| = 1$. Să se afle distanța de la punctul B la dreapta CE.

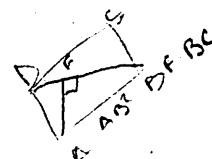


Soluție. În triunghiul DEC: $\|EC\|^2 = \|DE\|^2 + \|DC\|^2 = 25 \Rightarrow \|EC\| = 5$.

$\triangle FBC \sim \triangle DEC$ pentru că: $\widehat{D} \equiv \widehat{BFC}$ (unghiuri drepte); $\widehat{ECD} \equiv \widehat{FBC}$ (unghiuri ascuțite cu laturi perpendiculare). $\Rightarrow \frac{\|FB\|}{\|DC\|} = \frac{\|BC\|}{\|EC\|} \Rightarrow \frac{\|FB\|}{4} = \frac{4}{5} \Rightarrow \|FB\| = \frac{16}{5}$

Fig. 111.

Exercițiul recapitulativ de la pagina 75.



Problema 1. Lungimile bazelor unui trapez sînt a, b , $a > b$ și distanța dintre baze este h . Să se afle:

a) distanța dintre punctul de intersecție al laturilor neparalele și baza mică;

b) distanța dintre punctul de intersecție a diagonalelor și baza mare.

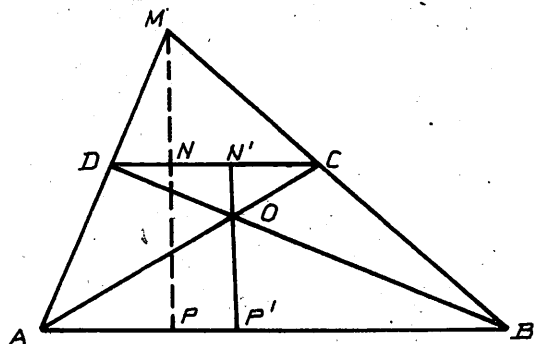


Fig. 112.

Soluție. Fie $\{M\} = AD \cap CB$.

$\triangle MCD \sim \triangle MAB$ ($DC \parallel AB$ - ipoteză)

$$\frac{\|MN\|}{\|MP\|} = \frac{\|DC\|}{\|AB\|} \Rightarrow \frac{\|MN\|}{\|MN\| + h} = \frac{b}{a} \Rightarrow \|MN\| = \frac{bh}{a-b}$$

b) Fie $O \in AC \cap BD$. $\triangle DOC \sim$

$\triangle AOB$ ($DC \parallel AB$); $\Rightarrow \frac{\|ON'\|}{\|OP\|} = \frac{\|DC\|}{\|AB\|}$

$$\Rightarrow \frac{h - \|OP'\|}{\|OP\|} = \frac{b}{a}.$$

$$\|OP'\| = \frac{ah}{a+b}. \quad (MN \perp DC, MP \perp AB, N'P' \perp AB; N \in \|DC\|, P \in \|AB\|, N' \in |DC|, P' \in |AB|).$$

Problema 2. Să se arate că lungimea medianei $|AM|$ ($M \in BC$) a triunghiului ABC , este:

$$\|AM\|^2 = \frac{2(\|AB\|^2 + \|AC\|^2) - \|BC\|^2}{4}$$

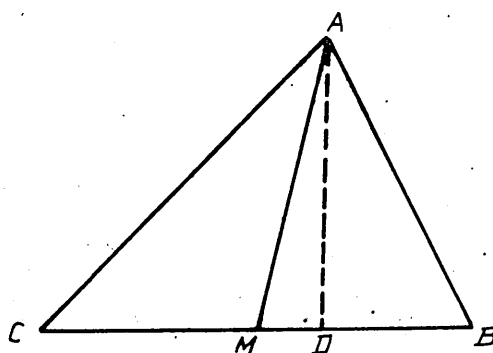


Fig. 113.

$$+ 4m^2 \Rightarrow m^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

Soluție. Notăm $\|AM\| = m$, $\|BC\| = a$,

$\|AB\| = c$, $\|AC\| = b$. Ducem $AD \perp BC$. Aplicăm teorema lui Pitagora generalizată pentru triunghiurile: AMC și BAM :

$$c^2 = \frac{a^2}{4} + m^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \|DM\| ; \text{ și }$$

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + m^2 + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \|DM\|. \text{ Le adunăm:}$$

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m^2 \Rightarrow 2(b^2 + c^2) = a^2 +$$

Problema 3. Se consideră triunghiul ABC în care $\|AB\| = 40$, $\|BC\| = 50$,

$\|CA\| = 60$ și bisectoarea $|AD|$, $D \in |BC|$. Să se afle în ce raport împarte bisectoarea $|BE|$, segmentul $|AD|$.

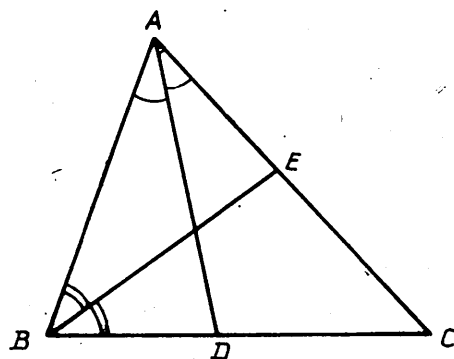


Fig. 114.

Soluție. În triunghiul ABC aplicăm teorema bisectoarei ($|AD|$ bisectoarea unghiului $\hat{A}$ - ipoteză):

$$\frac{\|BD\|}{\|AB\|} = \frac{\|DC\|}{\|AC\|} = \frac{\|BD\| + \|DC\|}{\|AB\| + \|AC\|} = \frac{\|BC\|}{100} = \frac{50}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{\|BD\|}{40} = \frac{1}{2} \Rightarrow \|BD\| = 20.$$

Aplicăm teorema bisectoarei în triunghiul

ABD ($|BM|$ - bisectoare - ipoteză):

$$\frac{\|AM\|}{\|MD\|} = \frac{\|AB\|}{\|BD\|} = \frac{40}{20} \Rightarrow \frac{\|AM\|}{\|MD\|} = 2.$$

Problema 4. Se dă un pătrat $ABCD$ și $M \in \text{Int } ABCD$ astfel încât

$\widehat{MCD} = \widehat{MDC} = 15^\circ$. Să se arate că triunghiul ABM este echilateral.

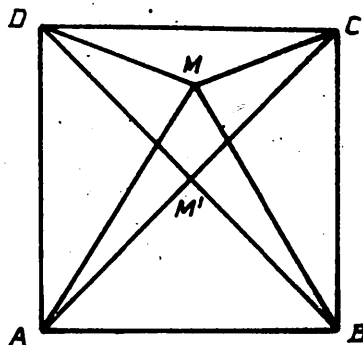


Fig. 115.

Cum M și $M' \in \text{Int } ABCD \Rightarrow$ ele sînt de aceeași parte a lui CD , iar $\widehat{M'CD} \equiv \widehat{MCD} \in 15^\circ \Rightarrow |CM'| = |CM|$. Analog: $|DM'| = |DM|$; cum $M' \in |CM|$ și $M' \in |DM| \Rightarrow M' \in |CM \cap DM| = \{M\} \Rightarrow M' = M \Rightarrow$ triunghiul ABM este echilateral.

Problema 5. Fie $|AC|$ cea mai lungă dintre diagonalele paralelogramului $ABCD$ și E, F picioarele perpendicularelor din C pe AB și AD . Să se arate că: $\|AB\| \cdot \|AE\| + \|AD\| \cdot \|AF\| = \|AC\|^2$.

Soluție. Aplicăm teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile ABC și ACD : $\|BC\|^2 = \|AC\|^2 + \|AB\|^2 - 2\|AB\| \cdot \|AE\|$ și $\|CD\|^2 = \|AC\|^2 + \|AD\|^2 - 2\|AD\| \cdot \|AF\|$. Le adunăm și ținem seama că $\|DC\| = \|AB\|$ și $\|AD\| = \|BC\|$. Obținem: $2\|AC\|^2 - 2\|AB\| \cdot \|AE\| - 2\|AD\| \cdot \|AF\| = 0 : 2 \Rightarrow \|AC\|^2 = \|AB\| \cdot \|AE\| + \|AD\| \cdot \|AF\|$ (S-au redus termenii: $\|BC\|^2$ cu $\|AD\|^2$ și $\|CD\|^2$ cu $\|AB\|^2$).

Problema 6. Se consideră pătratul $ABCD$ și punctele E, F care determină pe $|CD|$ segmentele $|DE| \equiv |EF| \equiv |FC|$. Fie $\{G\} = AE \cap BC$ și H mijlocul lui $|AG|$. Să se arate că $\|DH\| = \frac{1}{2} \|AC\|$.

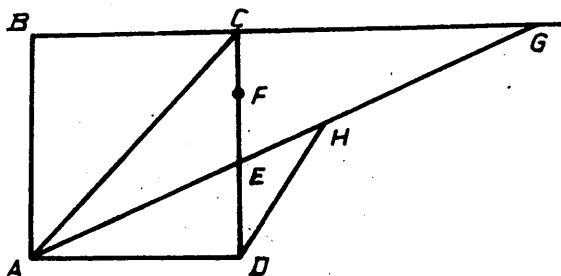


Fig. 116.

Soluție. $\triangle AED \sim \triangle GEC$ ($AD \parallel GC$)
 $\Rightarrow \frac{\|AE\|}{\|EG\|} = \frac{\|DE\|}{\|EC\|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \|EG\| = 2\|AE\|$

$\|EG\| - \|EH\| = \|HG\| = \|AE\| + \|EH\|$
 $\Rightarrow 2\|AE\| - \|EH\| = \|AE\| + \|EH\| \Rightarrow$
 $\Rightarrow \|AE\| = 2\|EH\|.$

$$\triangle AEC \sim \triangle DEH \text{ pentru c\^a: } \widehat{DEH} \equiv \widehat{AEC} \text{ (opuse la v\^rful)} \text{ \^si } \frac{\|AE\|}{\|EH\|} = \frac{\|EC\|}{\|DE\|} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\|DH\|}{\|AC\|} = \frac{\|DE\|}{\|EC\|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \|DH\| = \frac{1}{2} \|AC\|.$$

Problema 7. Se consider\^a triunghiul ascu\^titunghic ABC \^si D piciorul perpendicularei din A pe BC. Se noteaz\^a cu E \^si F intersec\^ia perpendicularelor pe BC \^in punctele B \^si C cu \^inal\^timile din C \^si B. S\^a se demonstreze c\^a dac\^a $|AD| \equiv |BC|$ atunci:

- triunghiurile BDE \^si CDF s\^int isoscele;
- triunghiul EDF este dreptunghic \^si DA este bisectoarea unghiului EDF.

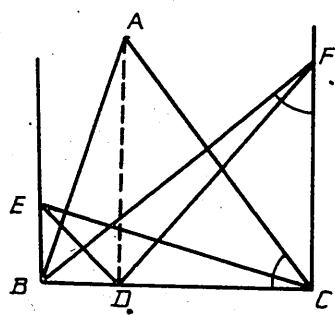


Fig. 117.

Solu\^ie.

a) $\triangle ADC \equiv \triangle BCF$ (cazul: C.U.): $|AD| \equiv |BC|$ (ipotez\^a); $\widehat{ADC} \equiv \widehat{BCF}$ (unghiuri drepte); $\widehat{ACB} \equiv \widehat{BFC}$ (unghiuri ascu\^tite cu laturi perpendiculare). $\Rightarrow |DC| \equiv |FC| \Rightarrow \triangle CDF$ este triunghi isoscel.

La fel: $\triangle ADB \equiv \triangle CBE$ (cazul: C.U.): $|AD| \equiv |BC|$ (ipotez\^a); $\widehat{ADB} \equiv \widehat{ECB}$ (unghiuri drepte); $\widehat{BAD} \equiv \widehat{ECB}$ (unghiuri ascu\^tite cu laturi perpendiculare). $\Rightarrow |EB| \equiv |BD| \Rightarrow \triangle BED$ este isoscel.

b) Triunghiul EDB este dreptunghic \^si isoscel $\Rightarrow m(\widehat{EDB}) = 45^\circ$; triunghiul DFC este tot dreptunghic \^si isoscel $\Rightarrow m(\widehat{FDC}) = 45^\circ \Rightarrow m(\widehat{EDF}) = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EDF} \in 90^\circ \Rightarrow \triangle EDF$ este dreptunghic \^in D.

$AD \parallel EB$ (fiind perpendiculare pe aceea\^si dreapt\^a) $\Rightarrow \widehat{ADE} \equiv \widehat{BED}$ (alterne interne) $\Rightarrow m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{BED}) = 45^\circ$. La fel: $AD \parallel FC \Rightarrow \widehat{FDA} \equiv \widehat{DFC}$ (alterne interne); $\Rightarrow m(\widehat{FDA}) = m(\widehat{DFC}) = 45^\circ \Rightarrow \widehat{EDA} \equiv \widehat{ADF} \in 45^\circ \Rightarrow DA$ este bisectoarea unghiului $\widehat{EDF}$.

Problema 8. Fie A, B, C, D centrele de simetrie ale p\^atratelor construite \^in exterior pe laturile unui romb. S\^a se arate c\^a ABCD este p\^atrat.

Solu\^ie. Not\^am rombul MQPN. $AMB = BNC = PCD = DQA$ (cazul: L.U.L.): $|DP| \equiv |PC| \equiv |CN| \equiv |NB| \equiv |BM| \equiv |MA| \equiv |AQ| \equiv |QD| \equiv |DP|$ (ca jum\^at\^a\^ti de diagonale ale unor p\^atrate congruente; laturile p\^atratelor s\^int laturi ale rombului, deci s\^int congruente); $\widehat{DPC} \equiv \widehat{AMB} \equiv \widehat{CNB} \equiv \widehat{AQD}$ (Not\^am cu

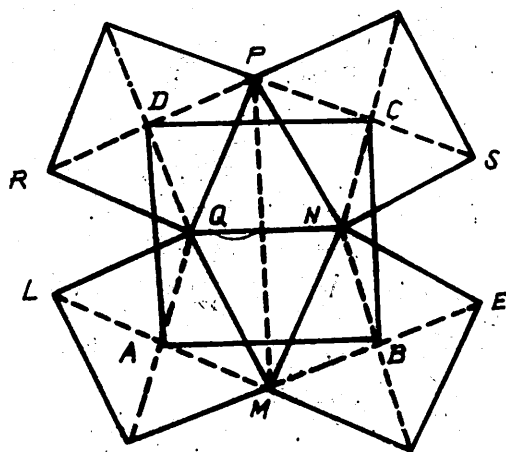


Fig. 118.

α măsura unghiului ascuțit al rombului.
 $\Rightarrow m(\widehat{DPC}) = m(\widehat{AMB}) = 45^\circ + 45^\circ + \alpha = 90^\circ + \alpha$;
 $m(\widehat{CNB}) = m(\widehat{AQD}) = 45^\circ + 45^\circ + \alpha$ pentru că $m(\widehat{SNE}) = \alpha$, $\widehat{SNE}$ și $\widehat{QPN}$ avînd laturi respectiv perpendiculare și fiind unghiuri ascuțite).

Din congruența celor 4 triunghiuri rezultă că: $|AB| \equiv |BC| \equiv |CD| \equiv |AD|$
 $\Rightarrow ABCD$ romb. Tot din congruența triunghiurilor rezultă că $\widehat{CBN} \equiv \widehat{ABM} \Rightarrow$
 $\widehat{ABC} \equiv \widehat{CBN} + \widehat{NBA} \equiv \widehat{NBA} + \widehat{ABM} \equiv \widehat{NBM} \in 90^\circ$ (pentru că diagonalele pătrului sînt perpendiculare) $\Rightarrow \widehat{CBA} \in 90^\circ$. Cum $ABCD$ era romb, avînd un unghi drept este pătrat.

tului sînt perpendiculare) $\Rightarrow \widehat{CBA} \in 90^\circ$. Cum $ABCD$ era romb, avînd un unghi drept este pătrat.

Problema 9. Se consideră triunghiul ABC cu $\|AB\| = 34$, $\|BC\| = 56$, $M \in |AC|$, $|AM| \equiv |MC|$, $\|BM\| = 39$. Să se afle distanța de la M la dreapta BC .

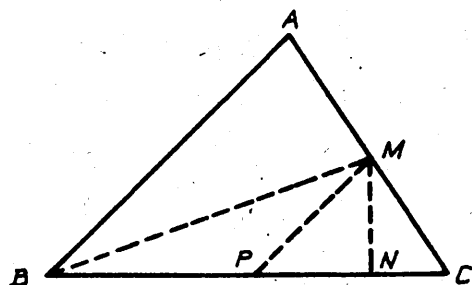


Fig. 119.

Soluție. Ducem $MP \parallel AB$, $P \in |BC|$ și

$MN \perp BC$. Cum $|AM| \equiv |MC|$ (ipoteză) și $MP \parallel AB \Rightarrow |BP| \equiv |PC| \Rightarrow |MP|$ linie mijlocie în triunghiul $ABC \Rightarrow \|MP\| = \frac{\|AB\|}{2} = 17$.
 Aplicăm teorema lui Pitagora generalizată în triunghiul BMP :

$$\|BM\|^2 = \|BP\|^2 + \|MP\|^2 + 2 \|BP\| \cdot \|PN\|;$$

de aici obținem $\|PN\| = 8$.

În triunghiul MPN aplicăm teorema lui Pitagora: $\|MN\|^2 = \|PM\|^2 - \|PN\|^2 = 225 \Rightarrow \|MN\| = 15$.

Problema 10. Se consideră triunghiul ABC cu $\|AB\| = \|AC\|$, $\widehat{BAC}$ obtuz și $AD \perp AB$, $D \in (BC)$. Să se afle $\frac{\|CD\|}{\|BD\|}$ știind că $\|BC\| = 32$ și distanța de la A la dreapta BC este 12.

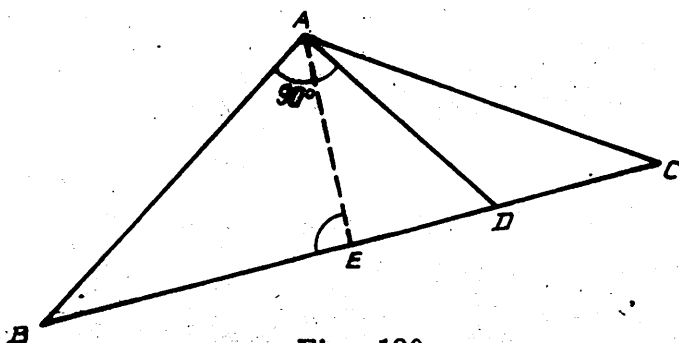


Fig. 120.

Soluție. Ducem $AE \perp BC$, $E \in BC$ și $AD \perp AB$, $D \in BC$. În triunghiul BAE aplicăm teorema lui Pitagora:

$$\|AB\|^2 = \|AE\|^2 + \|BE\|^2 = 400 \Rightarrow$$

$\|AB\| = 20$ ($\|BE\| = \|EC\| = \frac{1}{2} \|BC\|$, pentru că triunghiul ABC este isoscel și $AE \perp BC$).

În triunghiul BAD aplicăm teorema catetei: $\|AB\|^2 = \|BD\| \cdot \|BE\| \Rightarrow$
 $\Rightarrow \|BD\| = \frac{400}{16} = 25. \Rightarrow \|BD\| = 25. \Rightarrow \|DC\| = \|BC\| - \|BD\| \Rightarrow \|DC\| = 32 - 25 = 7.$
 $\Rightarrow \|DC\| = 7. \Rightarrow \frac{\|CD\|}{\|BD\|} = \frac{7}{25}.$

Problema (11). Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($\hat{A} \in 90^\circ$), M piciorul perpendicularei din A pe BC, N mijlocul laturii |BC| și P intersecția dreptei AN cu perpendiculara din M pe AC. Dacă $|AP| \equiv |PN|$ să se arate că unghiurile ascuțite ale triunghiului ABC au măsurile 60° și 30° .

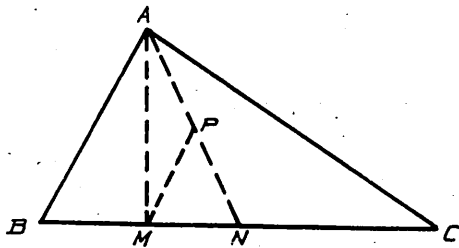


Fig. 121.

Soluție. $|AP| \equiv |PN|$ (ipoteză) (1);
 $MP \perp AC$ și $AB \perp AC$ (ipoteză) $\Rightarrow MP \parallel AB$ (2)
 Din (1) și (2) $\Rightarrow |BM| \equiv |MN| \Rightarrow |MP|$ linie mijlocie în triunghiul ABN.
 $BM \equiv |MN|$ și $AM \perp BC \Rightarrow$ triunghiul ABN este isoscel ($|AB| \equiv |AN|$). Dar $\|AN\| = \frac{\|BC\|}{2}$ ($|AN|$ fiind mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic ABC). Cum am demonstrat că triunghiul ABN este isoscel având $|AB| \equiv |AN|$, iar $|AN| \equiv |BN| \Rightarrow |AB| \equiv |AN| \equiv |BN|$ și deci triunghiul ABN este echilateral. $\Rightarrow m(\hat{ABC}) = 60^\circ$. Cum $m(\hat{C}) = 180^\circ - m(\hat{ABC}) - m(\hat{BAC}) = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.
 $\Rightarrow m(\hat{C}) = 30^\circ$.

Problema (12). Fie un dreptunghi ABCD. Să se demonstreze că pentru orice punct M este verificată relația: $\|MA\|^2 + \|MC\|^2 = \|MB\|^2 + \|MD\|^2$.

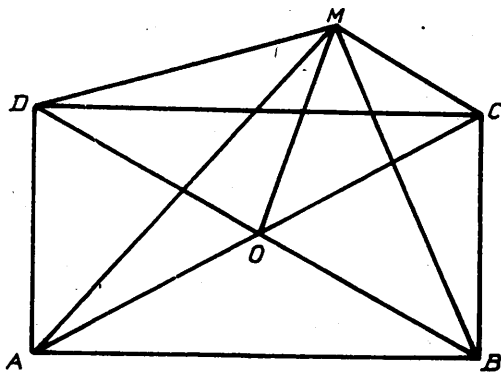


Fig. 122.

Soluție. Fie $\{O\} = AC \cap DB$. MO este mediană în triunghiurile MAC și în MBD pentru că $|AO| \equiv |OC|$ și $|DO| \equiv |OB| \Rightarrow \|MO\|^2 = \frac{2(\|MA\|^2 + \|MC\|^2) - \|AC\|^2}{4}$ și
 $\|MO\|^2 = \frac{2(\|MB\|^2 + \|MD\|^2) - \|DB\|^2}{4}$.
 $2(\|MA\|^2 + \|MC\|^2) - \|AC\|^2 = 2(\|MB\|^2 + \|MD\|^2) - \|DB\|^2$; dar
 $\|AC\| = \|DB\| \Rightarrow \|MA\|^2 + \|MC\|^2 = \|MB\|^2 + \|MD\|^2$. Analog pentru M interior triunghiului.

Ter $\|BC\| = \|AD\|$. Deci: $\frac{1}{4} \|DB\|^2 = \frac{1}{4} (\|AB\|^2 + \|DC\|^2 + \|BC\|^2 + \|AD\|^2 - \|AC\|^2) \Rightarrow \|DB\|^2 + \|AC\|^2 = \|AB\|^2 + \|DC\|^2 + \|BC\|^2 + \|AD\|^2$.

Problema 17. Să se afle raportul dintre suma pătratelor lungimilor laturilor unui triunghi și suma pătratelor medianelor. Să se deducă de aici că într-un triunghi dreptunghic, suma pătratelor medianelor corespunzătoare catetelor este egală cu de 5 ori pătratul mediane relative la ipotenuză.

Soluție. Calculăm medianele triunghiului cu formula din problema 2, pag. 75 (exerciții recapitulative, cap. 2):

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4};$$

$$m_b^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4} \text{ și}$$

$$m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

$$\text{Adunăm și obținem: } m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4} (a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Dacă triunghiul este dreptunghic: } a^2 = b^2 + c^2 \text{ și } m_a = \frac{1}{2} a, \quad m_b^2 + m_c^2 + \frac{1}{4} a^2 = \frac{3}{4} \cdot 2 a^2 \Rightarrow m_b^2 + m_c^2 = \frac{5}{4} a^2.$$

Problema 18. Se consideră trapezul ABCD. Paralela cu bazele BC și AD ale trapezului ce trece prin punctul de intersecție al diagonalelor intersectează laturile neparalele în punctele E și F. Să se arate că: $\|EF\| = \frac{2}{\frac{1}{\|BC\|} + \frac{1}{\|AD\|}}$

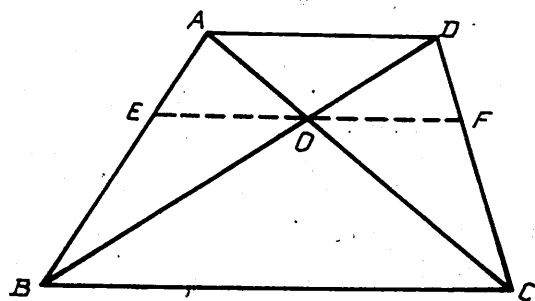


Fig. 127.

Soluție. Relația de demonstrat se mai scrie: $\frac{1}{\|BC\|} + \frac{1}{\|AD\|} = \frac{2}{\|EF\|}$

$$\triangle BOE \sim \triangle BDA \text{ (EO } \parallel \text{ AD ipoteză)} \Rightarrow$$

$$\frac{\|EO\|}{\|AD\|} = \frac{\|BE\|}{\|AB\|}$$

$$\triangle AEO \sim \triangle ABC \text{ (EO } \parallel \text{ BC)} \Rightarrow \frac{\|EO\|}{\|BC\|} = \frac{\|AE\|}{\|AB\|}$$

$$\text{Adunând cele 2 egalități obținem: } \|EO\| \left(\frac{1}{\|AD\|} + \frac{1}{\|BC\|} \right) = \frac{\|BE\| + \|AE\|}{\|AB\|} = \frac{\|AB\|}{\|AB\|} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\|BC\|} + \frac{1}{\|AD\|} = \frac{1}{\|EO\|}.$$

Dar $\|EO\| = \|OF\|$ (conform problemei 12, § 8, cap. 2, pag. 70)
 $\Rightarrow EF = 2 \|EO\| \Rightarrow \frac{1}{\|BC\|} + \frac{1}{\|AD\|} = \frac{2}{\|EF\|}$.

Problema 19. În patrulaterul convex ABCD, E este mijlocul laturii |AB| și F mijlocul laturii |CD|. Să se demonstreze că mijloacele segmentelor |AF|, |CE|, |BF|, |DE| sînt vîrfurile unui paralelogram.

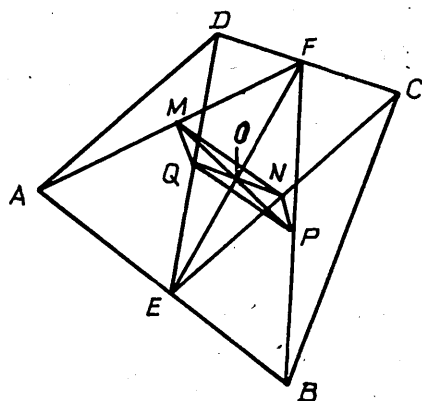


Fig. 128.

Fie O mijlocul segmentului |EF|, M, N, P, Q respectiv mijloacele segmentelor |AF|, |CE|, |BF|, |DE|, M fiind mijlocul lui |AF| și O mijlocul lui |EF| $\Rightarrow MO$ este linie mijlocie în triunghiul AFE $\Rightarrow \|MO\| = \frac{1}{2} \|AE\|$. La fel:
 $\|OP\| = \frac{1}{2} \|EB\|$ ($|OP|$ linie mijlocie în EFB)
 și $OP \parallel EB$. $\circ OM \parallel AB$ și $OP \parallel AB \Rightarrow M, O, P$ coliniare și $\|MO\| = \|OP\| = \frac{\|AB\|}{4}$ (1) (pentru că $\|AE\| = \|EB\|$).



La fel: $|OQ|$ linie mijlocie în EDF;
 $|ON|$ linie mijlocie în EFC. $\Rightarrow OQ \parallel DF$ și
 $ON \parallel FC \Rightarrow O, Q, N$ coliniare. $\|OQ\| = \frac{\|DF\|}{2} = \frac{\|DC\|}{4}$ și $\|ON\| = \frac{\|FC\|}{2} = \frac{\|DC\|}{4}$
 $\Rightarrow \|OQ\| = \|ON\|$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow MNPQ$ paralelogram.

Problema 20. Printr-un punct variabil D situat pe latura [BC] a unui triunghi ABC se duce o paralelă la mediana AM, M fiind mijlocul laturii |BC|. Această paralelă intersectează dreptele |AB| și |AC| în punctele E, respectiv F. Să se arate că: $\frac{\|AF\|}{\|AC\|} = \frac{\|AE\|}{\|AB\|}$ și $\|DE\| + \|DF\| = \text{constant}$.

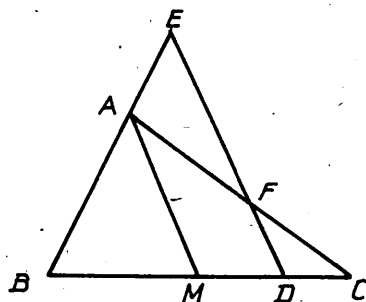


Fig. 129.

Soluție. Aplicăm teorema lui Thales în triunghiul BED ($AM \parallel ED$ - ipoteză): $\frac{\|AE\|}{\|AB\|} = \frac{\|MD\|}{\|BM\|}$.

Analog în triunghiul AMC ($FD \parallel AM$) $\Rightarrow \frac{\|AF\|}{\|AC\|} = \frac{\|MD\|}{\|MC\|}$; însă: $\|BM\| = \|MC\|$ (ipoteză), deci:
 $\frac{\|AE\|}{\|AB\|} = \frac{\|AF\|}{\|AC\|}$.

Tot în triunghiul BED avem: $\frac{\|DE\|}{\|AM\|} = \frac{\|BD\|}{\|BM\|}$ ($\triangle BED \sim \triangle BAM$, $AM \parallel DE$). La fel: $\triangle AMC \sim \triangle FDC$ ($FD \parallel AM$) $\Rightarrow \frac{\|DF\|}{\|AM\|} = \frac{\|DC\|}{\|MC\|}$.

Adunând ultimele 2 egalități obținem: $\frac{\|DE\| + \|DF\|}{\|AM\|} = \frac{\|BC\|}{\frac{1}{2}\|BC\|} \Rightarrow$
 $\|DE\| + \|DF\| = 2\|AM\| = \text{constant.}$

Problema (21). Se consideră un trapez isoscel ABCD cu bazele $\|AB\|$, $\|DC\|$, $\|AB\| = 2a$, $\|DC\| = 2b$, în care diagonala $\|AC\|$ este bisectoarea unghiului $\hat{A}$.

Să se exprime cu a și b lungimile diagonalelor și lungimile laturilor neparalele ale trapezului. (Se presupune $b < a < 3b$).

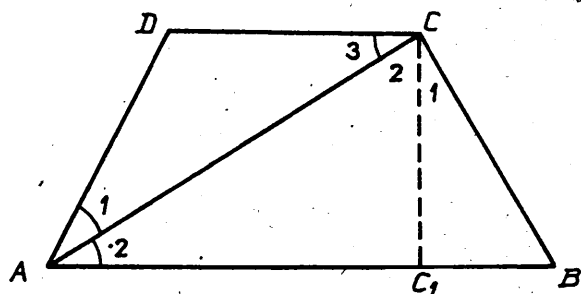


Fig. 130.

Soluție. Triunghiul ADC isoscel pentru că: $\hat{A}_1 \equiv \hat{A}_2$ ($\|AC\|$ bisectoare - ipoteză), $\hat{A}_2 \equiv \hat{C}_3$ (alterne interne) $\Rightarrow \hat{A}_1 \equiv \hat{C}_3 \Rightarrow \|AD\| = \|DC\| = 2b$.

Ducem $CC_1 \perp AB$, $C_1 \in \|AB\|$.

Aplicând teorema lui Pitagora obținem; $\|AC\|^2 = \|AB\|^2 + \|BC\|^2 -$

$$- 2\|AB\| \cdot \|C_1B\|; \|AC\|^2 = 4a^2 + 4b^2 - 2 \cdot 2a(a-b) \quad (\|CB\| = \|AD\|) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|CB\| = 2b; \|C_1B\| = \frac{\|AB\| - \|CD\|}{2} \quad (\text{pentru că trapezul este isoscel}). \|AC\|^2 =$$

$$= 4b^2 + 4ab = 4b(a+b) \Rightarrow \|AC\| = 2\sqrt{b(a+b)}.$$

CAPITOLUL III

CERCUL

Definiții. Poziția unei drepte față de un cerc.

Problemele de la pagina 79.

Problema 1. Să se arate că prin 2 puncte distincte trec o infinitate de cercuri și să se determine locul geometric al centrelor acestor cercuri.

Soluție. Fie A și B cele 2 puncte distincte. Dacă prin aceste puncte trece un cerc atunci ele trebuie să fie egal depărtate de centrul cercului care este un punct fix (conform definiției cercului). Dar în plan există o infinitate de puncte egal depărtate de A și B și anume mulțimea punctelor mediatoarei segmentului AB (conform teoremei 1, § 13, pag. 43, cap. 1). Deci vor exista o infinitate de cercuri care trec prin A și B și locul geometric al centrelor lor este mediatoarea segmentului AB (S-a demonstrat că mediatoarea este locul geometric al punctelor egal depărtate de capetele unui segment, deci de A și B).

Problema 2. Fie A, B, C 3 puncte distincte ale unui cerc. Să se arate că ele nu pot fi coliniare și că centrul cercului este intersecția mediatoarelor laturilor triunghiului ABC.

Soluție.

a) Folosim metoda reducerii la absurd. Presupunem că A, B, C sînt coliniare. Duc $OD \perp AC$, $D \in AC$. Dacă $B \in DC$, $\Rightarrow |DB| < |DC|, \Rightarrow |OB| < |OC|$. (Am presupus că O, centrul cercului nu aparține dreptei AB; dacă ar aparține am avea direct: $|OB| < |OC|$). Deci punctul O nu este egal depărtat de A, B și C. Am ajuns la contradicția că 3 puncte de pe cerc nu sînt egal depărtate de centrul cercului (este contrazisă definiția cercului). Deci A, B, C, dacă aparțin cercului nu pot fi coliniare.

Dacă $B \in |AD|$ sau $B = D$ se procedează analog.

b) Fie A, B, C pe cercul $C(O, r)$; O trebuie să fie egal depărtat de A, B, C . Deci $\|OA\| = \|OB\|$; $\Rightarrow O$ se află pe mediatoarea lui $|AB|$; $\|OB\| = \|OC\| \Rightarrow O$ se află pe mediatoarea lui $|BC|$; $\|OC\| = \|OA\|$; O se află pe mediatoarea lui $|AC|$. Deci O se află pe toate mediatoarele laturilor triunghiului, deci O este punctul de intersecție al mediatoarelor laturilor triunghiului.

Problema 3. Să se arate că dacă două cercuri au trei puncte distincte comune, cercurile coincid.

Soluție. Dacă A, B, C sînt cele 3 puncte comune celor 2 cercuri, conform problemei 2, § 1, cap. 3, pag. 79, centrul fiecăruia dintre cele 2 cercuri este punctul de intersecție al mediatoarelor laturilor triunghiului ABC ; (cele trei puncte nu pot fi coliniare pentru că atunci ele nu ar putea aparține unui cerc). Deci cele 2 cercuri vor avea același centru și anume punctul de intersecție al mediatoarelor laturilor triunghiului ABC . Cum $\|OA\| = \|OB\| = \|OC\| = r$, r este raza fiecăruia dintre cele 2 cercuri fiind distanța de la centrul fiecăruia la un punct de pe cerc. Avînd același centru și aceeași rază cele 2 cercuri coincid.

Problema 4. Să se arate că discul este o mulțime convexă.

Soluție. $D(O, r) = C(O, r) \cup \text{Int } C(O, r)$. Dacă A și $B \in D(O, r) \Rightarrow \|OA\| \leq r$ și $\|OB\| \leq r$. Dacă $P \in |AB| \Rightarrow \|OP\| < \|OA\|$ sau $\|OP\| < \|OB\|$ (pentru că dacă ducem $OD \perp AB$, $D \in AB$, atunci $P \in |AD|$ și în acest caz $|PD| < |AD| \Rightarrow |OP| < |OA|$; sau $P \in |DB|$ și în acest caz $|PD| < |PB| \Rightarrow |OP| < |OB|$; sau $P = D$ și în acest caz $|OP| < |OA|$ și $|OP| < |OB|$). $\Rightarrow |OP| < r$ în oricare din cazuri. $\Rightarrow P \in D(O, r) \Rightarrow |AB| \subset D(O, r)$. Deci $D(O, r)$ este o mulțime convexă.

Problema 5. Să se demonstreze că centrul unui cerc este centru de simetrie pentru cerc și al discului pe care-l determină.

Soluție. 2 puncte M și M' sînt simetrice față de un punct O dacă $O \in |MM'|$ și $\|OM\| = \|OM'\|$. Dacă $M \in C(O, r)$ și ducem diametrul $|MM'|$, $\Rightarrow O \in |MM'|$ și $\|OM\| = \|OM'\| = r$, deci M și M' sînt simetrice față de O și $M' \in C(O, r)$. Deci orice punct de pe cerc are simetricul tot pe cerc (simetricul față de O), deci O este centru de simetrie pentru cerc. Analog pentru

disc: dacă $N \in D(O, r)$ și N' simetricul său față de O ; $\Rightarrow O \in |NN'|$ și $\|ON\| = \|ON'\|$. $N \in D(O, r) \Rightarrow \|ON\| \leq r \Rightarrow \|ON'\| \leq r \Rightarrow N' \in D(O, r)$. Deci orice punct al discului are simetricul față de O tot pe disc, deci O este centru de simetrie și pentru $D(O, r)$.

Problema 6. Arătați că orice dreaptă care conține centrul cercului este axă de simetrie a cercului și a discului.

Soluție. Fie $M \in C(O, r) \Rightarrow \|OM\| = r$. Construim M' simetricul lui M față de d (d fiind o dreaptă ce conține centrul cercului); deci $MM' \perp d$ și $MM' \cap d = \{N\}$ și $\|MN\| = \|NM'\|$. Să arătăm că $M' \in C(O, r)$. $\triangle OMN \equiv \triangle OM'N$ (cazul: C.C.): $|ON|$ - latură comună, $|MN| \equiv |NM'|$ - construcție, $\widehat{MNO} \equiv \widehat{NM'O}$ pentru că $MM' \perp d$). $\Rightarrow \|OM'\| = \|OM\| = r \Rightarrow M' \in C(O, r)$. Analog pentru disc: luând $M \in D(O, r)$, $\Rightarrow \|OM\| \leq r$. Dacă M' este simetricul lui M față de d , deci $MM' \perp d$, $MM' \cap d = \{N\}$ și $\|MN\| = \|M'N\|$; se arată că și în primul caz că $\triangle OMN \equiv \triangle OM'N \Rightarrow \|OM'\| = \|OM\| \leq r \Rightarrow M' \in D(O, r)$. Deci d este axă de simetrie și pentru $D(O, r)$.

Problema 7. Să se arate că dacă punctele A și B aparțin unui disc de rază r atunci $\|AB\| \leq 2r$.

Soluție.

a) Dacă $A, B \in D(O, r)$ și A, B, O necoliniare, atunci $\|OA\| \leq r$, $\|OB\| \leq r$, iar în triunghiul AOB : $\|AB\| < \|OA\| + \|OB\| \leq r + r = 2r$; $\Rightarrow \|AB\| < 2r$.

b) Dacă A, O, B coliniare $\Rightarrow \|AB\| = \|OA\| + \|OB\| \leq r + r = 2r$ $\Rightarrow \|AB\| \leq 2r$, dacă $O \in |AB|$. Dacă $A \in |OB| \Rightarrow \|AB\| < \|OA\| + \|OB\| < 2r$. $\Rightarrow \|AB\| < 2r$ (la fel dacă $B \in |OA|$). Deci $(\forall) A, B \in D(O, r) \Rightarrow \|AB\| \leq 2r$.

Problema 8. Să se arate că o dreaptă care conține un punct din interiorul unui cerc intersectează cercul.

Soluție. Fie $P \in \text{Int } C(O, r)$ și $P \in d$; $\Rightarrow \|OP\| < r$. Ducem $OM \perp d$, $M \in d$. În triunghiul OMP , dreptunghic în M , $|OP| > |OM|$ (ipotenuza este mai mare decât o catetă). $\Rightarrow \|OM\| < \|OP\| < r$. Dacă $d(O, d) < r$ atunci dreapta d și $C(O, r)$ au exact 2 puncte comune (conform teoremei 2, § 1, cap. 3, pag. 78).

Problema 9. Fie d o tangentă sau o dreaptă exterioară cercului $C(O, r)$. Arătați că $C(O, r) \subset [dO]$.

Soluție. Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că există $A \in C(O, r)$ și $A \notin [dO] \Rightarrow A$ și O sînt de o parte și de alta a dreptei d . Atunci $|OA| \cap d \neq \emptyset \Rightarrow |OA| \cap d = \{M\} \Rightarrow M \in |OA|$; dar $\|OA\| = r$ pentru că $A \in C(O, r)$; $M \in |OA| \Rightarrow \|OM\| < \|OA\| = r; \Rightarrow \|OM\| < r, \Rightarrow M \in \text{Int } C(O, r)$. Conform problemei 8, § 1, pag. 79, cap. 3, rezultă că dacă o dreaptă d conține un punct din interiorul unui cerc, atunci ea are 2 puncte în comun cu cercul, ceea ce contrazice ipoteza. Deci presupunerea făcută este falsă și $C(O, r) \subset [dO]$.

Problema 10. Să se afle locul geometric al centrelor cercurilor tangente la o dreaptă dată într-un punct dat.

Soluție. Fie o dreaptă d și $A \in d$. Dacă $C(O, r)$ este tangent la d în punctul $A, \Rightarrow OA \perp d$; dacă alt cerc $C(O', r')$ este tangent la d în $A \Rightarrow O'A \perp d$. Cum într-un punct al unei drepte se poate duce o singură perpendiculară pe dreaptă, rezultă că A, O, O' sînt coliniare. Deci toate centrele cercurilor tangente la dreapta d în punctul A se găsesc pe o dreaptă perpendiculară în A pe d . Notăm această dreaptă cu d' . Să arătăm acum că orice punct al lui d' poate fi centrul unui cerc tangent în A la d . Fie $O \in d'$. Cum $d' \perp d$ și $A \in d' \Rightarrow OA \perp d$. Dacă construim $C(O, r)$ unde $r = \|OA\|$, acest cerc va fi tangent la d , deoarece $d(O, d) = r$ (aplicăm teorema 2, pag. 78, § 1, cap. 3). Deci orice punct al lui d' poate fi centrul unui cerc tangent în A la d . Deci locul geometric al centrelor cercurilor tangente la o dreaptă dată într-un punct dat este perpendiculara pe dreaptă în acel punct.

Problema 11. Fie A, B 2 puncte fixe. Se consideră un cerc variabil de centru M , tangent dreptei AB în punctul B . Perpendiculara din B pe AM taie din nou cercul în T . Să se afle locul geometric al punctului T .

Soluție. Fie $d' \perp AB$ și $B \in d'$. Fie $M \in d'$ și cercul de centru M , tangent dreptei AB în B . $BP \perp AM$, $P \in AM$ și BP taie din nou cercul în T .

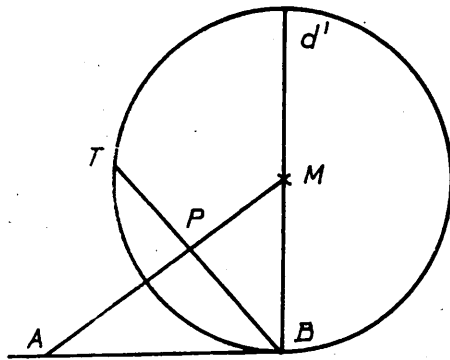


Fig. 131.

Problema 12. Să se afle locul geometric al mijloacelor segmentelor care unesc un punct fix A cu un punct variabil M, situat pe un cerc dat $C(O, r)$.

Soluție. Ducem AO care intersectează cercul în M și M' și fie L un punct variabil pe cerc. AL intersectează cercul încă o dată în L'. Fie P mijlocul lui |AM|, P' al lui |AM'|, Q al lui |AL|, Q' al lui |AL'|.

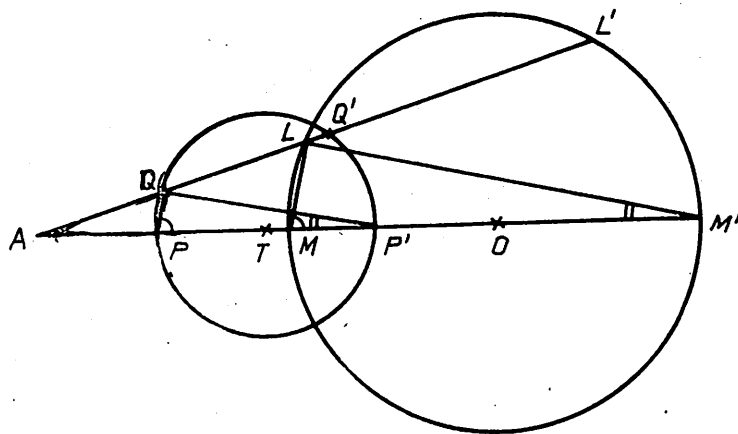


Fig. 132.

Deci $\|AP\| = \|PM\|$,

$\|AP'\| = \|P'M'\|$, $\|AQ\| = \|QL\|$, $\|AQ'\| = \|Q'L'\|$

A, M, M' fixe $\Rightarrow$ P și P' fixe. În triunghiul

ALM, |QP| linie mijlocie $\Rightarrow QP \parallel LM$. În triunghiul

ALM', |QP'| linie mijlocie $\Rightarrow QP' \parallel LM'$. $\Rightarrow$

$\widehat{QPM} \equiv \widehat{LMM'}$ (corespondente) și $\widehat{QP'P} \equiv \widehat{LM'M}$

(corespondente) $\Rightarrow \widehat{PQP'} \equiv$

$\widehat{MLM'}$. Dar $m(\widehat{MLM'}) = 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{PQP'}) = 90^\circ$. Rezultă că din punctul Q, va-

riabil, segmentul fix |PP'| se vede sub un unghi constant cu măsura de 90° . Analog și pentru Q', se demonstrează că $m(\widehat{PQ'P'}) = 90^\circ$. Deci punctele Q și Q' aparțin unui cerc de diametru |PP'|; $\|PP'\| = \|AP'\| - \|AP\| = \frac{\|AM'\|}{2} - \frac{\|AM\|}{2} = \frac{\|MM'\|}{2} = r$. Fie T mijlocul lui |PP'|. Demonstrăm că T coincide cu mijlocul

lui |AO|, pe care îl notăm cu T'; $\|AT'\| = \frac{\|AO\|}{2} = \frac{r + \|AM\|}{2} = \frac{r + 2\|MP\|}{2} = \frac{r}{2} + \|MP\|$; $\|AT\| = \|AP\| + \|PT\| = \|PM\| + \|PT\| = \|PM\| + \frac{r}{2} \Rightarrow \|AT'\| =$

$\|AT\| \Rightarrow T = T'$. Deci punctele Q și Q' aparțin unui cerc de rază $\frac{r}{2}$ și de centru T, mijlocul lui |AO|, deci cercului $C(T, \frac{r}{2})$.

Reciproc: să arătăm că orice punct care aparține cercului $C(T, \frac{r}{2})$ este mijlocul unui segment cu un capăt în A și cu celălalt pe cercul $C(O, r)$. Fie $Q \in C(T, \frac{r}{2})$ și L simetricul lui A față de Q. Să arătăm că $L \in C(O, r)$. $\|AQ\| = \|OL\|$ (construcție), $\|AT\| = \|TO\|$ (demonstrație) $\Rightarrow |QT|$ linie mijlocie în triunghiul ALO $\Rightarrow \|LO\| = 2\|QT\| = r \Rightarrow L \in C(O, r)$. Rezultă că locul geometric căutat este $C(T, \frac{r}{2})$.

Problema 13. Vîrfurile A și B ale triunghiului ABM sînt fixe, iar M este un punct variabil. Să se afle locul geometric al punctului M, știind că mediana AA' a triunghiului ABM are o lungime dată 1.

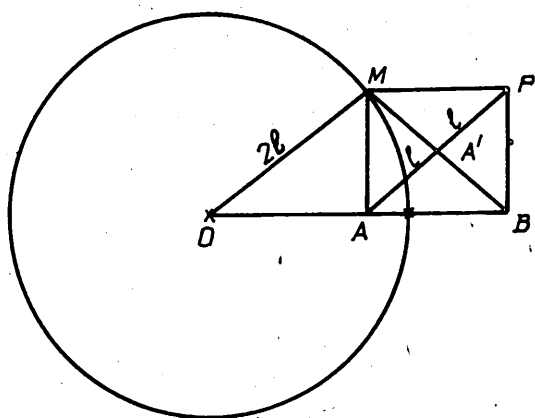


Fig. 133.

Soluție. Fie triunghiul ABM, A, B fixe și M variabil. $\Rightarrow \|AB\| = \text{constant}$. $\|AA'\| = \text{const.}$ (ipoteză). Prolungim $|AA'|$ cu un segment $|A'P|$ de mărime 1, deci $\|AA'\| = \|A'P\| = 1$, $A' \in |AP|$. Mai construim segmentul $|OA| \equiv |AB|$, $A \in |OB|$. AMPB paralelogram pentru că $\|MA'\| = \|A'B\|$ (ipoteză) și $\|AA'\| = \|A'P\|$ (construcție). $\Rightarrow \|MP\| = \|AB\|$ și $MP \parallel AB$; dar $\|AB\| = \|AO\|$ (construcție);

$\Rightarrow \|MP\| \parallel OA$ și $\|MP\| = \|OA\|$, deci OAPM paralelogram. $\Rightarrow \|OM\| = \|AP\| = 2\|AA'\| = 2$. Cum O este fix și $\|OM\| = 2 = \text{constant} \Rightarrow M$ se mișcă pe un cerc cu centrul în O și de rază 2, adică $C(O, 2)$.

Reciproc: să arătăm că orice punct $M \in C(O, 2)$ formează cu A și B un triunghi (dacă A, B, M nu sînt coliniare) a cărui mediană $|AA'|$ are lungimea 1 ($A' \in |MB|$ și $\|MA'\| = \|A'B\|$).

Fie deci $M \in C(O, 2)$; și A, B, M, necoliniare. Fie $|AA'|$ mediana din A a triunghiului ABM. Deci $A' \in |MB|$, $\|MA'\| = \|A'B\|$. Punctul O este determinat prin relația: $\|OA\| = \|AB\|$. Deoarece $\|OA\| = \|AB\|$ și $\|A'B\| = \|A'M\| \Rightarrow |AA'|$ este linie mijlocie în triunghiul OMB și deci $\|AA'\| = 1 (= \frac{1}{2}\|OM\|)$. Deci locul geometric căutat este $C(O, 2)$ din care scoatem punctele sale de intersecție cu AB.

Problema 14. Dacă vîrfurile unui patrulater aparțin unui cerc, atunci patrulaterul este convex.

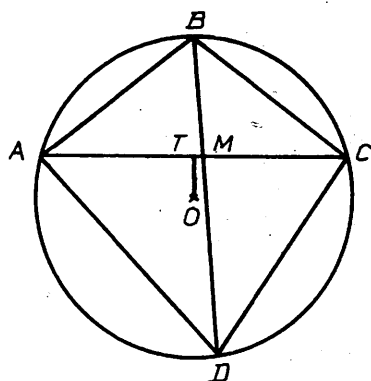


Fig. 134.

Soluție. Luăm pe cerc 4 puncte A, B, C, D astfel ca B și D să fie de o parte și de alta a dreptei AC. $\Rightarrow |BD| \cap AC = \{M\}$, conform teoremei de separare a planului. A și C $\in C(O, r)$; $C(O, r) \subset D(O, r) \Rightarrow A, C \in D(O, r) \Rightarrow |AC| \subset D(O, r)$ pentru că $D(O, r)$ este o mulțime convexă. La fel: B, D $\in C(O, r) \Rightarrow |BD| \subset D(O, r)$. Cum $M \in |BD| \Rightarrow M \in \text{Int } C(O, r)$. Dar $M \in AC \Rightarrow M \in \text{Int } C(O, r) \cap AC$. Să demonstrăm că

$\text{Int } C(O, r) \cap AC = |AC|$, deci că $M \in |AC|$. Dacă $M \in \text{Int } C(O, r) \cap AC$, dar $M \notin |AC| \Rightarrow A \in |MC|$ sau $C \in |AM|$. Fie $A \in |MC|$. Ducem $OT \perp AC$, $T \in |AC|$. $T \in |AC|$, $A \in |MC| \Rightarrow A \in |MT| \Rightarrow |AT| < |MT| \Rightarrow |AO| < |MO| \Rightarrow \|MO\| > r$, deci $M \notin \text{Int } C(O, r)$ ceea ce contrazice ipoteza. Celălalt caz se discută la fel. Deci dacă $M \in \text{Int } C(O, r) \cap AC \Rightarrow M \in |AC| \Rightarrow |BD| \cap |AC| = \{M\}$. Deci cele 2 diagonale ale patrulaterului au un punct comun. Atunci conform problemei 15, § 6, pag. 2, cap. 1, patrulaterul este convex.

Coarde. Arce. Unghiuri la centru.

Problemele de la pagina 84.

Problema 1. Să se demonstreze că dacă diametrul unui cerc conține mijlocul unui arc $\widehat{AB}$ sau a coardei $|AB|$, atunci diametrul este perpendicular pe coarda $|AB|$.

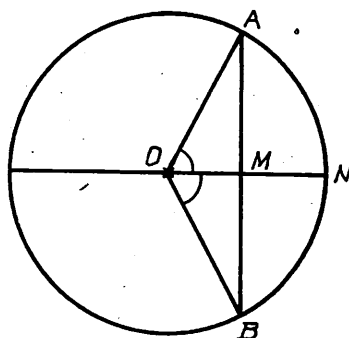


Fig. 135.

Soluție. Fie $M \in |AB|$ astfel ca $|AM| \equiv |MB|$.
 $\triangle OAM \equiv \triangle OBM$ (cazul: L.L.L.): $|OA| \equiv |OB|$ (raze);
 $|OM|$ - latură comună; $|AM| \equiv |MB|$ (construcție).
 $\Rightarrow \widehat{OMA} \equiv \widehat{OMB}$; dar $m(\widehat{AMB}) + m(\widehat{OMB}) = 180^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow m(\widehat{OMA}) = m(\widehat{OMB}) = 90^\circ \Rightarrow OM \perp AB$.

Dacă $N \in \widehat{AB}$ și $m(\widehat{AN}) = m(\widehat{NB}) \Rightarrow \widehat{AON} \equiv \widehat{NOB}$.

Fie $ON \cap AB = \{M\}$. $\triangle OAM \equiv \triangle OBM$ (cazul: L.U.L):
 $|OA| \equiv |OB|$ (raze); $|OM|$ - latură comună; $\widehat{OAM} \equiv$
 $\widehat{OBM}$ (demonstrație). $\Rightarrow \widehat{OMA} \equiv \widehat{OMB}$ și cum $m(\widehat{AMO}) +$
 $+ m(\widehat{OMB}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{AMO}) = m(\widehat{OMB}) = 90^\circ \Rightarrow OM \perp AB$.

Problema 2. Dacă centrul unui cerc este la distanță egală de 2 coarde ale cercului, atunci coardele sînt congruente.

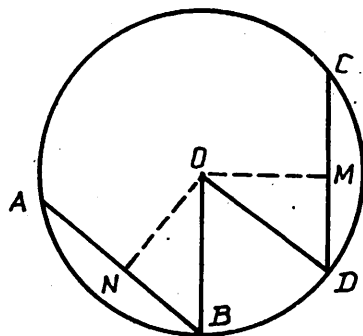


Fig. 136.

Soluție. Fie $OM \perp CD$, $M \in CD$; $ON \perp AB$, $N \in$
 $\in AB \Rightarrow \|CM\| = \|MD\|$ și $\|AN\| = \|NB\|$ (conform
 teoremei 2, pag. 82, § 2, cap. 3). $\triangle OMD \equiv$
 $\equiv \triangle ONB$ (cazul: I.C.): $|ON| \equiv |OM|$ (ipoteză);
 $|OB| \equiv |OD|$ (raze); $\widehat{OMD} \equiv \widehat{ONB}$ (ipoteză) $\Rightarrow |MD| \equiv$
 $\equiv |NB| \Rightarrow |CD| \equiv |AB|$ pentru că $|CD| \equiv 2|MD|$,
 iar $|AB| \equiv 2|NB|$.

Problema 3. Dacă coardele $|AB|$ și $|CD|$ sînt congruente atunci $AC \parallel$
 $\parallel BD$ sau $AD \parallel BC$.

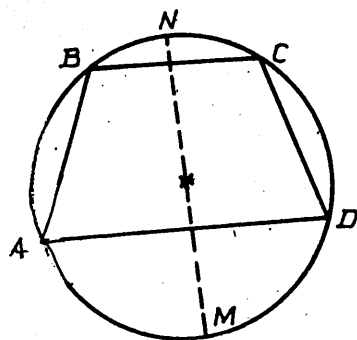


Fig. 137.

Soluție. Dacă $|AB| \equiv |CD|$ și ordinea pe cerc a punctelor este A, B, C, D, ducem diametrul $MN \perp AD \Rightarrow \widehat{AM} \equiv \widehat{MD}$, conform teoremei 2, pag. 82, § 2, cap. 3. Din $|AB| \equiv |BC| \Rightarrow \widehat{AB} \equiv \widehat{CD}$, conform teoremei 3, pag. 83, cap. 3, § 2. Cum $m(\widehat{MD}) + m(\widehat{DC}) + m(\widehat{CN}) = 180^\circ$ și $m(\widehat{AM}) + m(\widehat{AB}) + m(\widehat{BN}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{BN}) = m(\widehat{NC}) \Rightarrow MN \perp BC$,

conform problemei 1, pag. 84, § 2, cap. 3. Cum și $AD \perp MN \Rightarrow AD \parallel BC$.
Dacă $|AB| \equiv |DC|$ și ordinea pe cerc este A, C, D, B atunci se arată analog că $AC \parallel BD$.

Problema 4. Se consideră cercul $C(O, r)$, punctul $M \in C(O, r)$ și tangenta în M la cerc. Să se demonstreze că pentru orice coardă $|AB|$, $AB \parallel h$ punctul M este mijlocul arcului $\widehat{AMB}$.

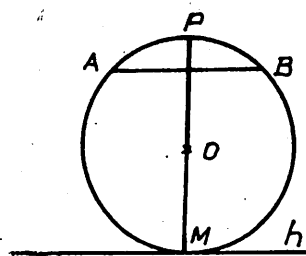


Fig. 138.

Soluție. h tangentă la cerc $\Rightarrow OM \perp h$; dar $AB \parallel h \Rightarrow OM \perp AB \Rightarrow \widehat{AP} \equiv \widehat{PB}$ (teorema 2, pag. 82, § 2, cap. 3). Cum $\widehat{PAM} \equiv \widehat{PBM}$ ($|PM|$ diametru) și $\widehat{PA} \equiv \widehat{PB} \Rightarrow \widehat{AM} \equiv \widehat{BM}$.

Problema 5. Fie A și B două puncte ale cercului $C(O, r)$, A și B nefiind diametral opuse și C punctul comun al tangentelor în A și B la cercul $C(O, r)$. Să se arate că dreapta AB separă punctele O și C.

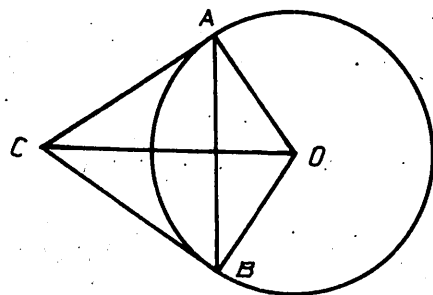


Fig. 139.

Soluție. $\triangle CAO \equiv \triangle CBO$ (cazul: I.C.):
 $|AO| \equiv |OB|$ (raze), $|CO|$ - latură comună,
 $\widehat{CAO} \equiv \widehat{CBO}$ (unghiuri drepte). $\Rightarrow |CA| \equiv |CB|$
 $\Rightarrow \triangle CAB$ isoscel. $\Rightarrow \widehat{CAB}$ și $\widehat{CBA}$ sînt unghiuri ascuțite. $\Rightarrow m(\widehat{CBA}) < m(\widehat{CBO}) \Rightarrow |BA| \subset \text{Int } \widehat{CBO} \Rightarrow |BA| \cap |CO| \neq \emptyset$ (teorema transversalei). $\Rightarrow C$ și O sînt în semiplane opuse față de AB .

Problema 6. Să se arate că dacă 2 coarde ale unui cerc nu sînt congruente, atunci coarda cu lungimea mai mare are distanța la centru mai mică și reciproc.

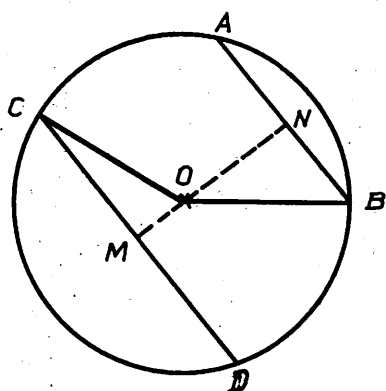


Fig. 140.

Soluție. Fie $|AB| < |CD|$; $OM \perp CD$, $M \in |CD|$ și $ON \perp AB$, $N \in |AB|$. $\Rightarrow$ N mijlocul lui $|AB|$ și M mijlocul lui $|CD|$ (teorema 2, pag. 82, § 2, cap. 3) $\Rightarrow |NB| < |CM|$.

Din triunghiurile ONB și COM aplicînd teorema lui Pitagora obținem: $\|NO\|^2 = r^2 - \|NB\|^2$ și $\|OM\|^2 = r^2 - \|CM\|^2$; cum $\|NB\| < \|CM\| \Rightarrow \|NO\| > \|OM\|$.

Reciproc: să arătăm că dacă $|ON| > |OM| \Rightarrow |CD| > |AB|$. Tot din triunghiurile ONB și COM cu teorema lui Pitagora obținem: $\|NO\|^2 = r^2 - \|NB\|^2$ și $\|OM\|^2 = r^2 - \|CM\|^2$ și cum $\|NO\| > \|OM\|$ (ipoteză) $\Rightarrow r^2 - \|NB\|^2 > r^2 - \|CM\|^2 \Rightarrow \|NB\|^2 < \|CM\|^2 \Rightarrow \|NB\| < \|CM\|$. Cum $\|AB\| = 2\|NB\|$ și $\|CD\| = 2\|CM\| \Rightarrow |AB| < |CD|$.

Problema 7. Să se demonstreze unicitatea mijlocului unui arc.

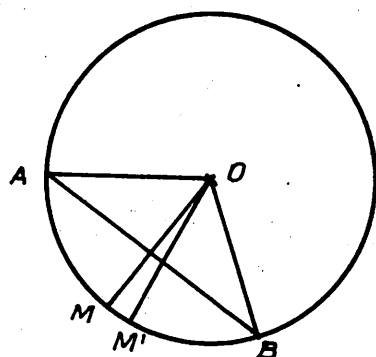


Fig. 141.

Soluție. Rezolvăm prin reducere la absurd. Presupunem că arcul $\widehat{AB}$ are un mijloc M și unul M' , deci $\widehat{AM} \equiv \widehat{MB}$ și $\widehat{AM'} \equiv \widehat{M'B}$, $m(\widehat{AOM}) = m(\widehat{AM}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$ și $m(\widehat{AOM'}) = m(\widehat{AM'}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$. Deci $m(\widehat{AOM}) = m(\widehat{AOM'})$, ceea ce contrazice teorema de construcție a unui unghi, conform căreia în același semiplan nu putem construi 2 unghiuri care să aibă $[AB$ ca latură comună (AB fiind dreapta care determină semiplanul). $\Rightarrow$

$$|OM| = |OM'| \Rightarrow M = M'.$$

Problema 8. Fie $\widehat{AB}$ un arc mare al cercului $C(O, r)$ și $d = AB$. Să se arate că $\widehat{AB} = C(O, r) \cap [dO$.

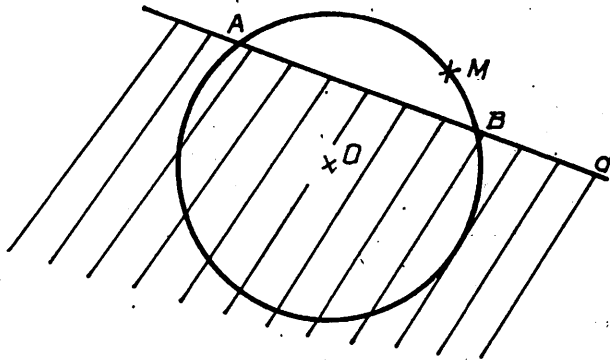


Fig. 142.

Soluție. Presupunem, prin absurd, că ar exista în $C(O, r) \cap [dO$ și puncte ale arcului mic $\widehat{AB}$. Dacă M aparține arcului mic $\widehat{AB}$ și $M \neq A$, $M \neq B$, $M \in \text{Int } \widehat{AOB}$ și $M \notin |AB| \Rightarrow |OM| \cap |AB| \neq \emptyset$ (conform teoremei transversalei) $\Rightarrow O$ și M sînt în semiplane opuse față de $d \Rightarrow M \notin [dO \Rightarrow M \notin C(O, r) \cap$

$\cap [dO$, contrar presupunerii făcute inițial. $\Rightarrow C(O, r) \cap [dO$ nu conține puncte ale arcului mic $\widehat{AB} \Rightarrow C(O, r) \cap [dO$ conține numai puncte ale arcului mare $\widehat{AB}$.

Problema 9. Se dau: un cerc $C(O, r)$, un punct $A \in C(O, r)$ și un număr real $\alpha \in (0, 360^\circ)$, $\alpha \neq 180^\circ$. Să se arate că există exact 2 puncte M și $M' \in C(O, r)$ astfel ca $m(\widehat{AM}) = \alpha$ și $m(\widehat{AM'}) = \alpha$.

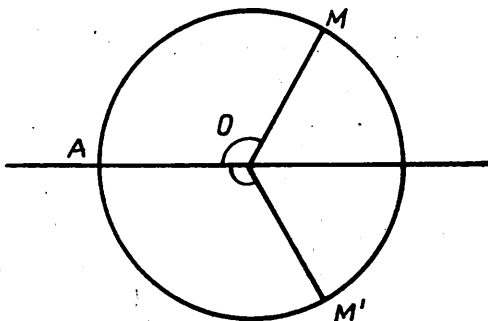


Fig. 143.

Soluție. Dacă $\alpha \in (0, 180^\circ)$: AO limitează 2 semiplane. Conform teoremei de construcție a unui unghi, în fiecare semiplan există cîte o semidreaptă unică $|OM$ într-un semiplan și OM' în celălalt, astfel încît $m(\widehat{AOM}) = m(\widehat{AOM'}) = \alpha$. Deci cele 2 puncte M și M' formează soluția problemei.

Dacă $\alpha \in (180^\circ, 360^\circ)$, considerăm un alt număr real $\beta = 360^\circ - \alpha$. Rezultă că $\beta \in (0, 180^\circ)$ și construim ca și în primul caz 2 puncte M și M' astfel ca $m(\widehat{AOM}) = m(\widehat{AOM'}) = \beta$. În acest caz $m(\widehat{AMM'}) = m(\widehat{AM'M}) = \alpha$.

Problema 10. Să se afle locul geometric al mijloacelor coardelor unui cerc, care au o lungime dată.

Soluție. Fie $\|AB\| = \|CD\|$ și $OM \perp AB$, $M \in AB$, $ON \perp CD$, $N \in CD$. Dacă $\|AB\| = \|CD\| \Rightarrow \|OM\| = \|ON\|$, conform teoremei 4, pag. 83, § 2, cap. 3, $\Rightarrow \|AM\| = \|MB\|$ și $\|CN\| = \|ND\|$. Rezultă că orice coardă am lua congruentă cu $|AB|$, mijloacele lor sînt egal depărtate de O , O fix. Dacă notăm $\|OM\| = a \Rightarrow$ punctul M se află pe un cerc de centru O și rază a .

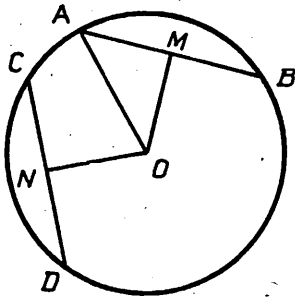


Fig. 144.

Reciproc: dacă M se află pe cercul $C(O, a)$, să arătăm că M este mijlocul unei coarde a cercului $C(O, r)$, coardă ce are lungime constantă.

Fie $M \in C(O, a)$ și $a < r$. Tangenta în M la cercul $C(O, a)$ determină în cercul $C(O, r)$ o coardă $|AB|$ care conține pe M (pentru că cele 2 cercuri sînt concentrice și $a < r \Rightarrow M \in \text{Int } C(O, r) \Rightarrow$ o dreaptă ce trece prin M taie $C(O, r)$ exact în 2 puncte, conform problemei 8, pag. 79, § 1, cap. 3).

$\triangle AMO \equiv \triangle BMO$ (cazul: I.C.): $|AO| \equiv |OB|$ (raze); $|OM|$ - latură comună; $\widehat{AMO} \equiv \widehat{OMB}$ (unghiuri drepte) $\Rightarrow |AM| \equiv |MB|$. Din triunghiul AOM cu teorema lui Pitagora obținem: $|AM|^2 = r^2 - a^2 = \text{const.} \Rightarrow |AM| = \text{const.} \Rightarrow |AB| = 2|AM| = \text{constant}$.

Locul geometric căutat este un cerc concentric cu cel dat și de rază $a =$ distanța de la centru la una dintre coarde.

Problema 11. Se dau punctele distincte A, B și dreapta d perpendiculară pe AB . M fiind un punct variabil pe d , să se afle locul geometric al punctului diametral opus lui M în cercul care trece prin A, B și M .

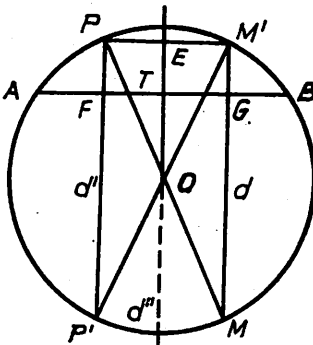


Fig. 145.

Soluție. Fie $M \in d$ și P diametral opus lui M în cercul ce trece prin A, B și M . $\Rightarrow |MO| = |PO|$. Fie $M' \in d \cap C(O, r)$ unde $C(O, r)$ este cercul ce trece prin A, B, M . Fie P' diametral opus lui M' în $C(O, r)$. $\Rightarrow |M'O| = |OP'|$. $\Rightarrow PM'MP'$ paralelogram; $\Rightarrow PP' \parallel d$. Notăm dreapta $PP' = d'$. $d' \parallel d$ și d' simetrica dreptei d față de O . Deci punctele P ale locului geometric căutat aparțin dreptei d' .

Reciproc: să arătăm că orice punct $P \in d'$ este diametral opus unui punct $M \in d$ în cercul ce trece prin A, B, M .

Arătăm întâi că d' este o dreaptă fixă. $MM' \parallel PP'$ și $MM' \perp AB \Rightarrow PP' \perp AB$. Fie $T \in AB$ astfel ca $|AT| \equiv |TB|$. Ducem prin T o dreaptă $d'' \perp AB$. $\Rightarrow d'' \parallel d \parallel d'$. Fie $\{E\} = d'' \cap PM'$. $\triangle PEO \equiv \triangle M'EO$ (cazul: L.U.L.): $|PO| \equiv |OM'|$ (raze), $|OE|$ - latură comună, $\widehat{POE} \equiv \widehat{M'OE}$ ($OE \perp PM'$, $|OP| \equiv |OM'|$) $\Rightarrow |PE| \equiv |EM'|$. Cum $PM' \perp d'' \Rightarrow d''$ este axă de simetrie pentru

$\{P, M'\}$. La fel se arată că și P', M sînt simetrice față de d'' . Rezultă că d'' este axă de simetrie pentru $d \cup d'$ (conform problemei 9, pag. 48, cap. 1, exerciții recapitulative). Cum d și d'' sînt fixe rezultă că și d' este fixă.

Fie $P \in d'$. Ducem $BM \perp PB$, unde $M \in d \Rightarrow P$ și M sînt diametral opuse în cercul ce trece prin P, B, M . Să arătăm că și A aparține acestui cerc.

Fie $\{L\} = PM \cap d''$, d'' este mediatoarea segmentului $|AB|$ (construcție) $\Rightarrow |LA| \equiv |LB|$; d și d' fiind simetrice față de $d'' \Rightarrow |FT| \equiv |TG|$ unde $\{F\} = d' \cap AB$ și $\{G\} = d \cap AB$ ($F \in d'$ și $G \in d$ și $|FG| \subset AB$). Atunci conform teoremei paralelelor echidistante $\Rightarrow |PL| \equiv |LM|$ (dacă mai multe paralele determină pe o secantă segmente congruente, ele determină pe orice altă secantă segmente congruente). Cum triunghiul PBM este dreptunghic și $|PL| \equiv |ML| \Rightarrow |LB| \equiv |PL| \equiv |LM|$; dar $|LA| \equiv |LB| \Rightarrow |LA| \equiv |LB| \equiv |LM| \equiv |LP| \Rightarrow P, A, B, M$ aparțin unui cerc cu centrul în L . Deci oricare ar fi $P \in d'$ există $M \in d$ astfel ca P și M să fie diametral opuse în cercul ce trece prin A, B, M .

Deci locul geometric căutat este dreapta d' simetrică cu d față de o dreaptă d'' ce trece prin mijlocul segmentului $|AB|$ și este perpendiculară pe AB .

Problema 12. Două cercuri se intersectează în A și B . O secantă variabilă trecînd prin A taie cercurile a doua oară în M, N . Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului MN .

Soluție. Fie P mijlocul lui $|MN|$; $P \in |MN|$ și $|MP| \equiv |PN|$. Ducem $OQ \perp MN$, $Q \in MN$ și $O'Q' \perp MN$, $Q' \in MN \Rightarrow |MQ| \equiv |QA|$ și $|AQ'| \equiv |Q'N|$ (teorema 2, pag. 82, § 2, cap. 3) $\Rightarrow |QQ'| = \frac{1}{2} |MN| = |MP| = |PN| \Rightarrow |MQ| =$

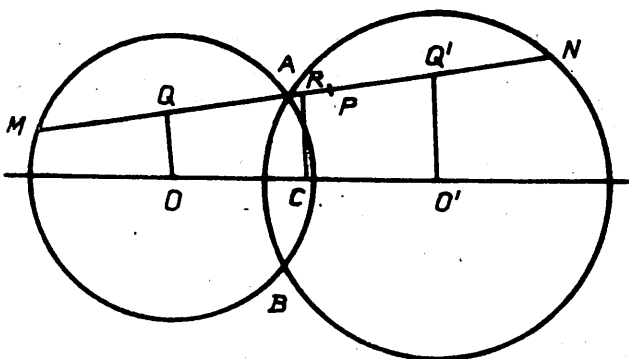


Fig. 146.

$= |PQ'| \Rightarrow |QA| = |PQ'|$ segmentele $|AP|$ și $|QQ'|$ au același mijloc, R . Fie C mijlocul lui $|OO'|$; $|CR|$ este linie mijlocie în trapezul $OO'Q'Q \Rightarrow CR \parallel OQ \parallel O'Q' \Rightarrow CR \perp QQ'$ și cum $|AR| \equiv |RP| \Rightarrow CR$ mediatoarea segmentului $|AP| \Rightarrow |CP| = |CA| = \text{const.}$ și cum

C este fix $\Rightarrow$ locul geometric al punctului P este un cerc de centru C și rază $\|CA\|$.

Va trebui să demonstrăm și că orice punct $P \in C(C, \|AC\|)$, unde C este mijlocul lui $|OO'|$, este mijlocul unui segment $|MN|$ determinat pe secanta AP de punctele M și N în care ea taie a doua oară cercurile.

Ducem $CR \perp MN$, $R \in MN$. Cum $|CA| \equiv |CP|$ (A și P fiind puncte pe cerc) $\Rightarrow$ triunghiul ACP isoscel și $|CR|$ înălțime $\Rightarrow |CR|$ este și mediană. $\Rightarrow |AR| \equiv |RP|$. $OQ \perp MN$, $Q \in MN$ și $O'Q' \perp MN$, $Q' \in MN$. Cum $|CO| \equiv |CO'|$, $|CR|$ este linie mijlocie în trapezul $QOO'Q'$ și deci $|QR| \equiv |RQ'|$. Din $|AR| \equiv |RP|$ și $|QR| \equiv |RQ'| \Rightarrow |QA| \equiv |PQ'|$. Arătăm că P este mijlocul lui $|MN|$ ($\|MP\| = \|PN\|$).

$\|PN\| = \|AN\| - \|AP\| = 2\|Q'N\| - \|AP\| = 2(\|PQ'\| + \|AP\|) - \|AP\| = 2(\|QA\| + \|AP\|) - \|AP\| = 2\|QA\| + \|AP\| = \|MA\| + \|AP\| = \|MP\|$. $\Rightarrow |PN| \equiv |MP|$. Deci orice punct P al cercului $C(C, \|CA\|)$ este mijlocul unui segment $|MN|$ determinat pe secanta AP de punctele de intersecție ale secantei cu cele 2 cercuri date inițial, puncte diferite de A .

Deci locul geometric căutat este $C(C, \|CA\|)$.

Unghi înscris

Problemele de la pagina 89.

Problema 1. Pe cercul $C(O, r)$ se consideră coarda $|AB|$ și unghiul $\widehat{ABM}$. Să se demonstreze că dacă $m(\widehat{ABM}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$, arcul AB fiind inclus în $\text{Int } \widehat{ABM}$, atunci BM este tangentă cercului $C(O, r)$, în B .

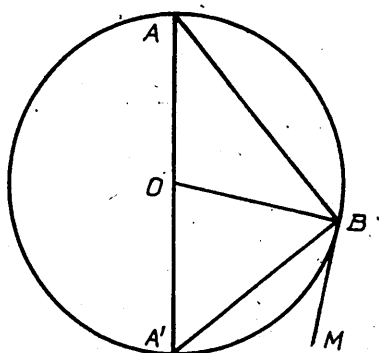


Fig. 147.

Soluție. $m(\widehat{ABM}) = \frac{1}{2} [m(\widehat{AA'}) + m(\widehat{A'B})] =$
 $= \frac{1}{2} [(180^\circ + m(\widehat{A'B}))] = 90^\circ + \frac{1}{2} m(\widehat{A'B})$ (pentru că am
 luat A și A' diametral opuse în cerc). Triunghiul
 AOB este isoscel ($|OA| \equiv |OB|$ - raze) $\Rightarrow m(\widehat{OAB}) =$
 $= m(\widehat{ABO})$. Cum $m(\widehat{OAB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{A'B}) = m(\widehat{ABO}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow m(\widehat{ABM}) = 90^\circ + m(\widehat{ABO})$; dar $m(\widehat{ABM}) = m(\widehat{ABO}) +$
 $+ m(\widehat{OBM})$ (pentru că $|BOC| \text{ Int } \widehat{ABM} \Rightarrow m(\widehat{OBM}) =$
 $= 90^\circ \Rightarrow OB \perp BM \Rightarrow BM$ tangentă la cerc.

Problema 2. Două cercuri se intersectează în M și N . Fie M' și M'' punctele diametral opuse lui M în cele 2 cercuri. Să se arate că M' , N și M'' sînt coliniare.

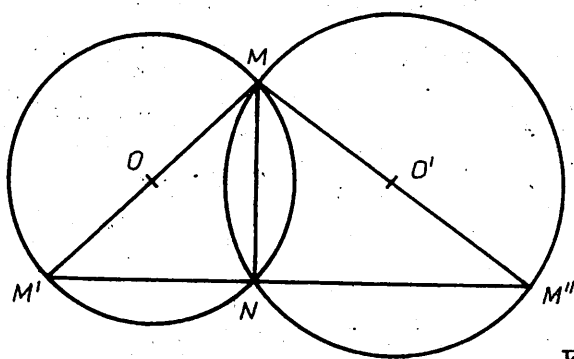


Fig. 148.

Soluție. $m(\widehat{MNM'}) = \frac{1}{2} m(\widehat{MM'})$
 $= 90^\circ$ și $m(\widehat{MNM''}) = \frac{1}{2} m(\widehat{MM''}) = 90^\circ$
 (pentru că MM' și MM'' sînt diame-
 tre în cele 2 cercuri. $\Rightarrow m(\widehat{M'NM''})$
 $= 180^\circ \Rightarrow M', N, M''$ sînt coliniare.

Problema 3. Intr-un cerc se duc 2 coarde perpendiculare $|AB|$ și $|CD|$. Fie M un punct al cercului situat pe arcul $\widehat{BD}$ sau $\widehat{AC}$. Să se arate că $m(\widehat{AMD}) + m(\widehat{BMC}) = 90^\circ$.

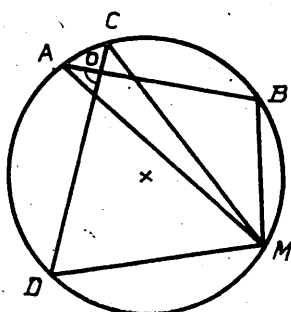


Fig. 149.

Soluție. $m(\widehat{AOD}) = \frac{m(\widehat{AD}) + m(\widehat{BC})}{2}$ ($\widehat{AOD}$ fiind
 unghi cu vîrf în interiorul cercului. Dar $m(\widehat{AOD}) =$
 $= 90^\circ$ ($AB \perp CD$ - ipoteză). $m(\widehat{DMA}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AD})$ și
 $m(\widehat{CMB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{BC})$; $m(\widehat{DMA}) + m(\widehat{CMB}) = m(\widehat{AOD}) = 90^\circ$
 (Am considerat $O = AB \cap CD$). Am analizat cazul
 cînd $M \in BD$; dacă M se găsește pe arcul $\widehat{AC}$ demonstra-
 ția se face în mod asemănător.

Problema 4. Într-un cerc $C(O, r)$ se înscrie triunghiul ABC . Dacă $m(\widehat{B}) = 35^\circ$ și $m(\widehat{C}) = 43^\circ$ să se găsească măsurile unghiurilor $\widehat{BAO}$ și $\widehat{CAO}$.

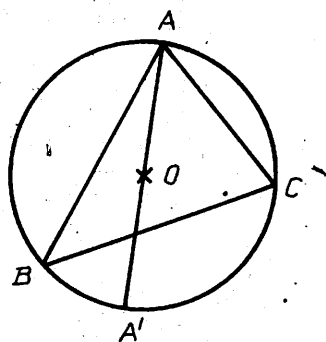


Fig. 150.

Soluție. $m(\widehat{ABC}) = 35^\circ \Rightarrow m(\widehat{AC}) = 70^\circ \Rightarrow$
 $m(\widehat{A'C}) = 110^\circ$ (A' fiind diametral opus lui A).
 $\Rightarrow m(\widehat{A'AC}) = \frac{1}{2} m(\widehat{A'C}) = 55^\circ$. $m(\widehat{ACB}) = 43^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow m(\widehat{AB}) = 86^\circ \Rightarrow m(\widehat{BA'}) = 180^\circ - m(\widehat{AB}) = 94^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow m(\widehat{BAA'}) = \frac{1}{2} m(\widehat{BA'}) = 47^\circ$. Deci $m(\widehat{BAO}) = 47^\circ$ și
 și $m(\widehat{CAA'}) = 55^\circ$.

Problema 5. În triunghiul ABC înscris într-un cerc $C(O, r)$ se duc înălțimile corespunzătoare vîrfurilor B și C și diametrul prin A . Să se arate că cele 2 înălțimi și diametrul determină un triunghi asemenea cu ABC .

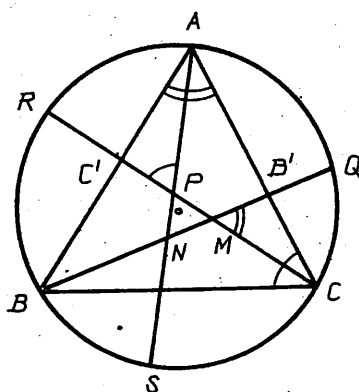


Fig. 151.

$$m(\widehat{ARP}) = \frac{m(\widehat{RA}) + m(\widehat{SC})}{2} = \frac{m(\widehat{RA}) + m(\widehat{RB})}{2} = m(\widehat{ACB}); m(\widehat{QMC}) = \frac{m(\widehat{RB}) + m(\widehat{QC})}{2} = \frac{m(\widehat{SC}) + m(\widehat{BS})}{2} = m(\widehat{BAC}).$$

Cum $\widehat{APR} \equiv \widehat{ACB}$ și $\widehat{QMC} \equiv \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{NPM} \equiv \widehat{ACB}$ și $\widehat{NMP} \equiv \widehat{BAC} \Rightarrow \Delta MNP \sim \Delta ABC$.

Problema 6. Pe un cerc se dau 3 puncte oarecare A, B, C . Fie D mijlocul arcului $\widehat{AB}$, E mijlocul arcului $\widehat{AC}$; dreapta DE intersectează pe AB în F și pe AC în G . Să se arate că $|AF| \equiv |AG|$.

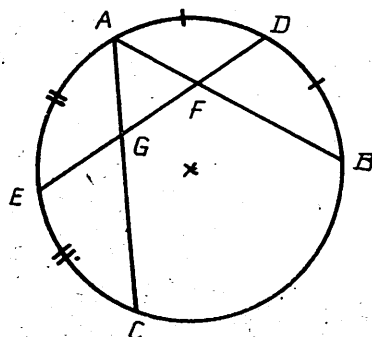


Fig. 152.

Soluție. $m(\widehat{AFE}) = \frac{m(\widehat{AE}) + m(\widehat{DB})}{2}$ ($\widehat{AFE}$ fiind unghi interior); $m(\widehat{AGD}) = \frac{m(\widehat{AD}) + m(\widehat{EC})}{2}$ ($\widehat{AGD}$ unghi interior cercului). Dar $\widehat{AD} \equiv \widehat{DB}$ (ipoteză) și $\widehat{AE} \equiv \widehat{EC}$ (ipoteză). $\Rightarrow m(\widehat{AFE}) = m(\widehat{AGD}) \Rightarrow$ triunghiul AGF isoscel. $\Rightarrow |AF| = |AG|$.

Problema 9. În triunghiul ABC înscris într-un cerc $C(O, r)$ se duce perpendiculara din A pe BC care taie a doua oară cercul în D. Notînd cu E punctul diametral opus lui A, să se arate că unghiurile $\widehat{BAC}$ și $\widehat{DAE}$ au aceeași bisectoare.

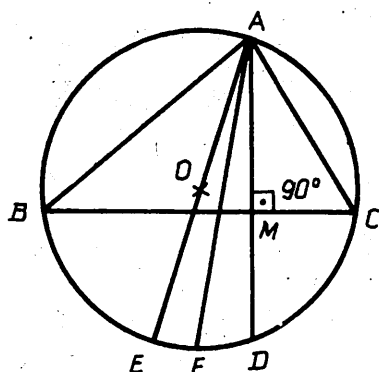


Fig. 155.

Soluție. Fie $|AF|$ bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.
 $|AF| \subset \text{Int } \widehat{BAC}$ și $\widehat{BAF} \equiv \widehat{FAC} \Rightarrow \widehat{BF} \equiv \widehat{FC}$.
 $m(\widehat{AMC}) = 90^\circ$ ($AM \perp BC$ - ipoteză). Dar $m(\widehat{AMC}) =$
 $= \frac{m(\widehat{AC}) + m(\widehat{BD})}{2} \Rightarrow m(\widehat{AC}) + m(\widehat{BE}) + m(\widehat{EF}) +$
 $+ m(\widehat{FD}) = 180^\circ$. Dar $m(\widehat{AC}) + m(\widehat{CD}) + m(\widehat{FD}) +$
 $+ m(\widehat{EF}) = 180^\circ$ ($|AE|$ diametru) $\Rightarrow m(\widehat{BE}) =$
 $= m(\widehat{CD}) \Rightarrow \widehat{BAE} \equiv \widehat{DAC}$.

$\widehat{EAF} \equiv \widehat{BAF} - \widehat{BAE}$; $\widehat{FAD} \equiv \widehat{FAC} - \widehat{DAC}$; cum $\widehat{BAF} \equiv \widehat{FAC}$ ($|BF|$ bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$), iar $\widehat{BAE} \equiv \widehat{DAC}$ (demonstrație) $\Rightarrow \widehat{EAF} \equiv \widehat{FAD}$. Am analizat cazul cînd O și C sînt de o parte și de alta a dreptei AM. Dacă O și C sînt de aceeași parte a lui AM se procedează la fel, numai că punctele D și E își schimbă locul între ele, ordinea punctelor pe arcu BC fiind: B, D, F, E.

Dacă $|AO| = |AM|$ (triunghiul ABC isoscel), punctele D, E, F coincid. Proprietatea rămîne valabilă deoarece unghiurile $\widehat{DAF}$ și $\widehat{FAE}$ sînt congruente avînd măsura zero.

În fiecare din cazuri trebuia arătat că $|AF| \subset \text{Int } \widehat{EAD}$: din: $\widehat{BAF} = \widehat{FAC}$ și $|AF| \subset \text{Int } \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{FC}$; din: $m(\widehat{AC}) + m(\widehat{CE}) = 180^\circ = m(\widehat{AC}) + m(\widehat{BD}) \Rightarrow \widehat{CE} = \widehat{BD}$; cum $E, F, D \in \widehat{BC}$ și $\widehat{BF} = \widehat{FC}$ și $\widehat{CE} = \widehat{BD} \Rightarrow F \in \widehat{ED} \Rightarrow |AF| \subset \text{Int } \widehat{EAD}$.

Din $|AF| \subset \text{Int } \widehat{EAD}$ și $\widehat{EAF} = \widehat{FAD} \Rightarrow |AF|$ bisectoarea unghiului $\widehat{EAD}$.

Problema 10. Două cercuri se intersectează în A și B. O secantă variabilă trecînd prin A taie cercurile a doua oară în M și N.

a) Să se arate că măsura unghiului $\widehat{MBN}$ este constantă.

b) Să se determine poziția secantei MN astfel ca distanța $\|MN\|$ să fie maximă.

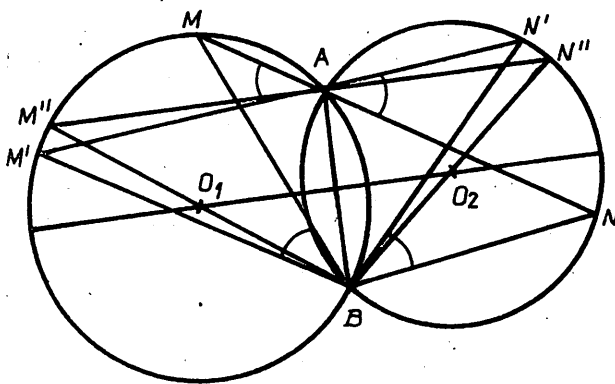


Fig. 156.

Soluție.

a) Fie MN și M'N' două poziții ale secantei ce trece prin A.
 $m(\widehat{MBN}) = m(\widehat{MBA}) + m(\widehat{ABN})$;
 $\widehat{MAM'} = \widehat{NAN'}$ (opuse la vîrf) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow m(\widehat{MM'}) = m(\widehat{NN'}) \Rightarrow m(\widehat{MBM'}) =$
 $= m(\widehat{NBN'})$; $m(\widehat{MBN}) = m(\widehat{NBN'}) +$
 $+ m(\widehat{N'BM})$; $m(\widehat{M'BN'}) = m(\widehat{MBM'}) +$
 $+ m(\widehat{N'BM})$; $\Rightarrow \widehat{MBN} = \widehat{M'BN'} \Rightarrow$
 $m(\widehat{MBN}) = \text{constant}.$

b) Ducem secanta $M''N'' \parallel O_1O_2$. Cum $AB \perp O_1O_2 \Rightarrow AB \perp M''N''$.
 $\Rightarrow \widehat{M''AB} = \widehat{N''AB} \in 90^\circ \Rightarrow |M''B|$ și $|N''B|$ sînt diametri în cele 2 cercuri.
 Deci triunghiul MBN cu unghiul $\widehat{MBN}$ constant are latura $|MN|$ de lungime maximă dacă $MN \parallel O_1O_2$, deoarece în acest caz laturile $|MB|$ și $|NB|$ au lungimi maxime (fiind diametri).

Problema 11. Să se afle locul geometric al mijloacelor coardelor unui cerc $C(O, r)$ care trec printr-un punct fix A.

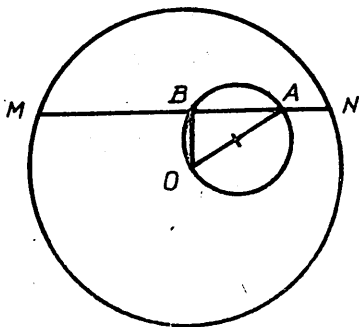


Fig. 157.

Soluție. Fie coarda $|MN|$ ce trece prin A și B mijlocul ei. $\Rightarrow |MB| = |BN|$; $OB \perp MN \Rightarrow$
 $m(\widehat{OBA}) = 90^\circ$ (diametrul ce trece prin mijlocul unei coarde este perpendicular pe ea). Cum $|OA| = \text{const.}$ și O și A puncte fixe, iar $m(\widehat{OBA}) = 90^\circ$
 $\Rightarrow B$ aparține unui cerc de diametru $|OA|$.

Reciproc: să arătăm că orice punct care aparține cercului de diametru $|OA|$ este mijlocul unei coarde a cercului inițial, coardă ce trece prin A

și punctul ales.

Fie B un punct pe cercul de diametru $|OA|$. Ducem coarda ce trece prin B și A (în primul cerc $C(O, r)$). Fie M și N punctele în care ea taie $C(O, r)$; $m(\widehat{OBA}) = 90^\circ$ ($|OA|$ diametru) $\Rightarrow OB \perp MN \Rightarrow |MB| = |BN|$. Deci B este mijlocul coardei $|MN|$.

Am analizat cazul cînd $A \in \text{Int } C(O, r)$. Dacă $A \in C(O, r)$ se procedează analog și se obține ca loc geometric tot un cerc de diametru $|OA|$ ca și în

primul caz. Dacă $A \notin \text{Int } C(O, r) \cup C(O, r)$ atunci se procedează ca și în celelalte cazuri, dar se obține ca loc geometric un arc din cercul de diametru $|AO|$, cuprins în interiorul cercului $C(O, r)$.

Problema 12. Fie $|AB|$ un diametru fix al unui cerc $C(O, r)$, iar M un punct variabil pe cerc. Se ia pe raza $|OM|$ un punct P astfel ca $\|OP\|$ să fie egală cu distanța de la M la dreapta AB . Să se afle locul geometric al punctului P .

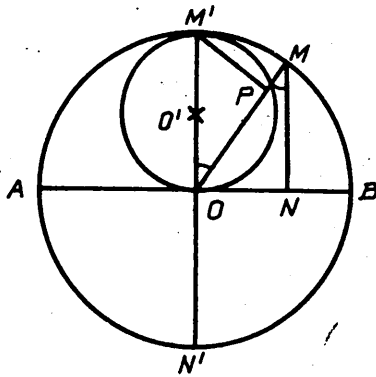


Fig. 158.

Soluție. Fie diametrul $M'N' \perp AB$ și un punct $M \in \widehat{AM'B} - \{M'\}$. Ducem $MN \perp AB$ și luăm punctul $P \in |OM|$ astfel ca $\|OP\| \equiv |MN|$. $\Rightarrow \triangle OMN \equiv \triangle OM'P$ (cazul: L.U.L.): $|MN| \equiv |OP|$ (ipoteză); $|OM| \equiv |OM'|$ (raze); $\widehat{OMN} \equiv \widehat{OM'P}$ (alterne interne). $\Rightarrow \widehat{ONM} \equiv \widehat{OPM'}$. Cum $m(\widehat{ONM}) = 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{OPM'}) = 90^\circ$. Deci punctul P aparține unui cerc de diametru $|OM'|$. Dacă $M = M'$, $M'O \perp AB$. În acest caz $P = M'$ și $\|OP\| =$

$\|OM'\| = d(M', AB)$, deci M' aparține locului geometric. Când M ajunge în $B \Rightarrow P = O$, deci O face parte din locul geometric.

Reciproc: orice punct P am lua pe cercul de diametru $|OM'|$, notînd cu M punctul în care OP taie cercul inițial, astfel ca $M \in \widehat{AM'B} \Rightarrow \|OP\| = d(M, AB)$.

Fie P pe cercul de diametru $|OM'|$. $\triangle OPM' \equiv \triangle OMN$ (cazul: I.U.): $|OM'| \equiv |OM|$ (raze), $\widehat{M'OM} \equiv \widehat{OMN}$ (alterne interne), $\widehat{M'PO} \equiv \widehat{MNO}$ (unghiuri drepte). $\Rightarrow |MN| \equiv |OP|$. Rezultă că pentru punctele M de pe semicercul $\widehat{AM'B}$ locul geometric este cercul de diametru $|OM'|$. La fel se arată că pentru punctele de pe semicercul $\widehat{AN'B}$ locul geometric este cercul de diametru $|ON'|$. Deci locul geometric căutat este format din 2 cercuri unul de diametru $|OM'|$ și altul de diametrul $|ON'|$.

Problema 13. Fie $|AB|$ o coardă fixă a unui cerc, iar $|PQ|$ o coardă variabilă ca poziție, dar de lungime fixă. Să se afle locurile geometrice ale punctelor $AP \cap BQ$ și $AQ \cap BP$.

Soluție. $|AB|$ fixă $\Rightarrow m(\widehat{AB}) = \text{constant}$; $\|PQ\| = \text{constant} \Rightarrow m(\widehat{PQ}) = \text{constant}$. Notăm $m(\widehat{AB}) = \alpha$, unde $\widehat{AB}$ este arc mic; notăm $m(\widehat{PQ}) = \beta$, unde $\widehat{PQ}$ e arc mic.

Cazul 1: P și Q se află pe arcul mare $\widehat{AB}$. Fie $\{R\} = AQ \cap PB$ și $\{S\} = AP \cap BQ$. $m(\widehat{ARB}) = \frac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{PQ})}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \text{const.}$ Cum $|AB|$ este o coardă fixă și $m(\widehat{ARB}) = \text{const.} = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^\circ \Rightarrow$ locul geometric al punctului R este în acest caz arc capabil de un unghi de $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^\circ$.

Pentru punctul S procedăm la fel:

$$m(\widehat{ASB}) = \frac{m(\widehat{AB}) - m(\widehat{PQ})}{2} = \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^\circ = \text{constant. } (\widehat{ASB} = \text{unghi cu vârful în exteriorul cercului}).$$

Am presupus $|AB| > PQ$. Deci, din punctul S segmentul fix $|AB|$ se vede sub un unghi constant de măsură $\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^\circ$. Deci locul geometric al lui S este arc capabil de unghiul de $\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^\circ$.

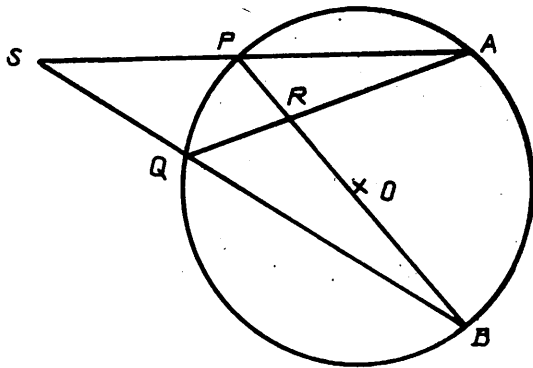
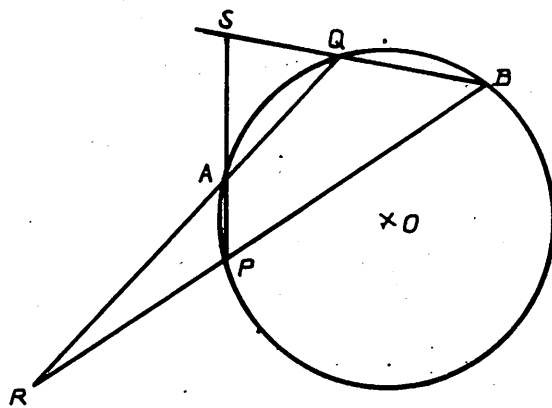


Fig. 159.

Cazul 2: P aparține arcului mare $\widehat{AB}$ și Q aparține arcului mic $\widehat{AB}$.



$$\begin{aligned} m(\widehat{ARB}) &= \frac{m(\widehat{QB}) - m(\widehat{AP})}{2} = \\ &= \frac{m(\widehat{AB}) - m(\widehat{AQ}) - m(\widehat{AP})}{2} = \\ &= \frac{m(\widehat{AB}) - m(\widehat{PQ})}{2} = \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^\circ = \\ &= \text{constant.} \end{aligned}$$

Deci din punctul R, segmentul fix $|AB|$ se vede sub un unghi constant de măsură $\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^\circ$. Deci locul geometric al lui R este arc capabil de $\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^\circ$; (dacă $|AB| > |PQ|$).

$$\begin{aligned} m(\widehat{ASB}) &= \frac{m(\widehat{PB}) - m(\widehat{AQ})}{2} = \frac{m(\widehat{AB})_{\text{mare}} - m(\widehat{AP}) - [m(\widehat{PQ}) - m(\widehat{AP})]}{2} = \\ &= \frac{m(\widehat{AB})_{\text{mare}} - m(\widehat{PQ})}{2} = \frac{360^\circ - \alpha - \beta}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} = \text{const.} \end{aligned}$$

Deci coarda $|AB|$ fixă este văzută din S sub unghi constant; locul geometric al punctului S este un arc capabil de unghiul de $(180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2})^\circ$.

Cazul 3: P și Q aparțin arcului mic $\widehat{AB}$; $m(\widehat{BRQ}) = \frac{m(\widehat{BQ}) + m(\widehat{AP})}{2} =$
 $= \frac{m(\widehat{AB}) - m(\widehat{AP}) - m(\widehat{PQ}) + m(\widehat{AP})}{2} = \frac{m(\widehat{AB}) - m(\widehat{PQ})}{2} = \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^{\circ} = \text{constant}.$

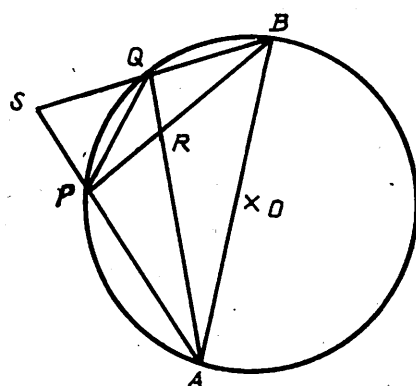


Fig. 161.

Locul geometric al lui R este arcul capabil de un unghi de $(180^{\circ} - \frac{\alpha - \beta}{2})^{\circ}$ (pentru că segmentul fix $|AB|$ se vede din punctul R sub un unghi fix de măsură $180^{\circ} - m(\widehat{BRQ}) = 180^{\circ} - \frac{\alpha - \beta}{2}$).

$$\begin{aligned} m(\widehat{ASB}) &= \frac{m(\widehat{AB}) \text{ mare} - m(\widehat{PQ})}{2} = \\ &= \frac{360^{\circ} - m(\widehat{AB})_{\text{mic}} - m(\widehat{PQ})}{2} = 180^{\circ} - \frac{\alpha + \beta}{2} = \\ &= \text{constant}. \end{aligned}$$

Deci segmentul fix $|AB|$ se vede din S sub unghi constant $\Rightarrow$ locul geometric al lui S este un arc capabil de un unghi de $(180 - \frac{\alpha + \beta}{2})^{\circ}$.

Dacă $|PQ| > |AB|$ în loc de $\alpha - \beta$ vom avea $\beta - \alpha$ și deci, pentru a nu le mai considera cazuri separate putem lua $|\alpha - \beta|$.

Problema 14. $|AB|$ fiind o coardă fixă, iar M un punct variabil al unui cerc, să se afle locul geometric al punctului P astfel ca $M \in |AP|$ și $|MP| \equiv |MB|$.

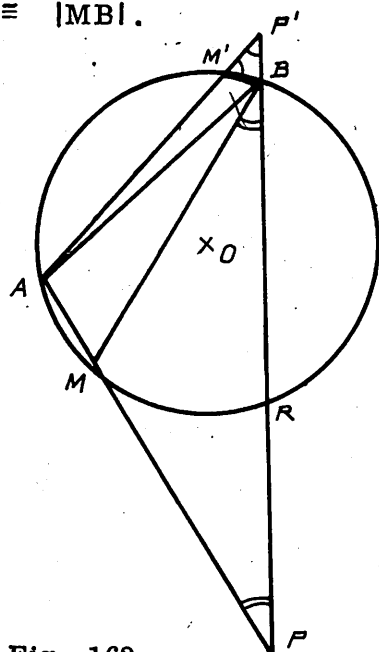


Fig. 162.

Soluție. Considerăm cazul când M aparține arcului mare $\widehat{AB}$.

$|MB| \equiv |MP|$ (ipoteză) $\Rightarrow$ triunghiul BMP isoscel; $\Rightarrow \widehat{MPB} \equiv \widehat{MBP}$. $\widehat{AMB}$ unghi exterior triunghiului BMP $\Rightarrow m(\widehat{AMB}) = 2 m(\widehat{MPB}) = 2 m(\widehat{APB})$.
 Dar $m(\widehat{AMB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB}) = \text{constant}$ pentru că coarda $|AB|$ este fixă. $\Rightarrow m(\widehat{APB}) = \frac{1}{4} m(\widehat{AB}) = \text{const.}$ Deci din punctul P segmentul fix $|AB|$ se vede sub unghi constant. $\Rightarrow$ locul geometric al punctului P este un arc capabil de un unghi de măsură $\frac{1}{4} m(\widehat{AB})$.

Dacă M' se află pe arcul mic $\widehat{AB}$ și $|M'B| \equiv |M'P'| \Rightarrow m(\widehat{AM'B}) = 2 m(\widehat{M'P'B})$ ($\widehat{AM'B}$ fiind unghi exterior triunghiului $M'P'B$), $\Rightarrow m(\widehat{M'P'B}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AM'B}) = \frac{1}{4} m(\widehat{ARB})$, unde $\widehat{ARB}$ este arcul mare $\widehat{AB}$. $\Rightarrow m(\widehat{M'P'B}) = \text{const.}$ Deci locul geometric al punctelor P' este un arc capabil de un unghi de măsură $\frac{1}{4} m(\widehat{ARB})$ și de capete A și B.

Rezultă că atunci când M descrie întregul cerc, locul geometric al punctului P este format din 2 arce de cerc de capete A și B , unul capabil de un unghi de măsură $\frac{1}{4} m(\widehat{AB})$ și altul capabil de un unghi de măsură $\frac{1}{4} m(\widehat{ARB})$.

Problema 15. Se dau: un cerc, pe el un punct fix A , o dreaptă d și un punct fix $B \in d$. Prin A și B ducem un cerc variabil care taie din nou cercul dat în P și dreapta dată în Q . Să se arate că dreapta PQ trece printr-un punct fix.

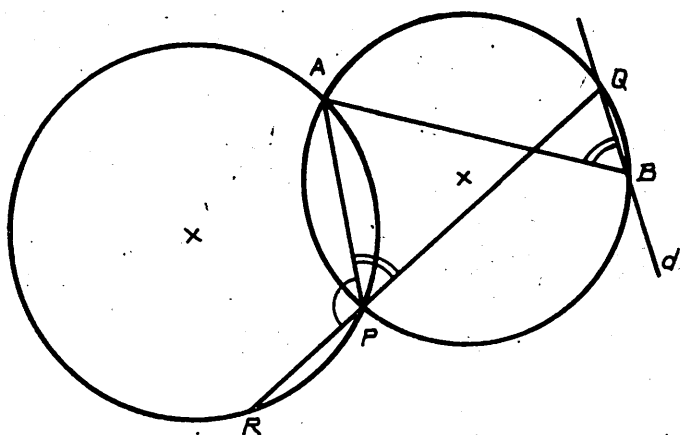


Fig. 163.

R punctul în care PQ taie a doua oară cercul dat inițial (cercul fix); $m(\widehat{APR}) = 180^\circ - m(\widehat{APQ}) = \text{const.} \Rightarrow m(\widehat{AR})_{\text{mare}} = \text{const.}$ Cum A este fix $\Rightarrow R$ este fix; dar R aparține și dreptei variabile PQ ; rezultă că dreapta PQ trece printr-un punct fix.

Problema 16. Fie ABC un triunghi, CB' semidreapta opusă lui CB , iar $D \in \text{Int } \widehat{ACB'}$. Să se arate că dreapta CD este tangentă cercului circumscris triunghiului ABC dacă și numai dacă $\widehat{ACD} \equiv \widehat{ABC}$.

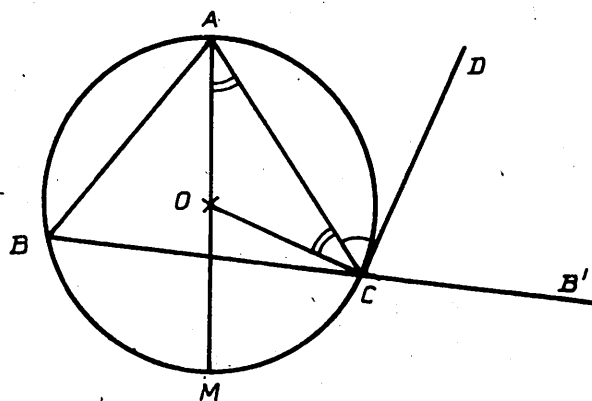


Fig. 164.

Soluție. Punctele A și B și dreapta d fiind fixe, rezultă că unghiul cuprins între dreptele AB și d este constant.

$\Rightarrow m(\widehat{ABQ}) = \text{constant}$. Dar $m(\widehat{ABQ}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AQ}) = m(\widehat{APQ})$ (pentru că $\widehat{ABQ}$ și $\widehat{APQ}$ sînt unghiuri înscrise în cerc).

$\Rightarrow m(\widehat{APQ}) = \text{const.}$ Notăm cu

Soluție.

a) Presupunem că CD este tangentă la cerc și arătăm că $\widehat{ACD} \equiv \widehat{ABC}$; $m(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AC})$ ($\widehat{ABC}$ fiind unghi înscris în cerc); $m(\widehat{ACD}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AC})$ ($\widehat{ACD}$ fiind unghi înscris - format de o coardă cu o tangentă); $\Rightarrow m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACD})$.

b) Presupunem acum că $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACD}$ și demonstrăm că CD este tangentă la cerc. Triunghiul OAC este isoscel ($|OA| \equiv |OC|$ - raze); $\Rightarrow \widehat{OCA} \equiv \widehat{OAC}$. Dar $\widehat{ACD} \equiv \widehat{ABC}$ (ipoteză) $\Rightarrow m(\widehat{OCA}) + m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{OAC}) + m(\widehat{ABC}) = \frac{m(\widehat{MC}) + m(\widehat{AC})}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ (pentru că $|AM|$ - diametru) $\Rightarrow OC \perp CD$, deci CD este tangentă la cerc.

Problema 17. Fie $|AB|$ un diametru al unui cerc, $|AC|$ o coardă, $DE \perp AB$, $E = pr_{AC} D$ și F unul dintre punctele de intersecție ale dreptei DE cu cercul dat. Să se demonstreze că cercurile circumscrise triunghiurilor FCE, FBD sînt tangente.

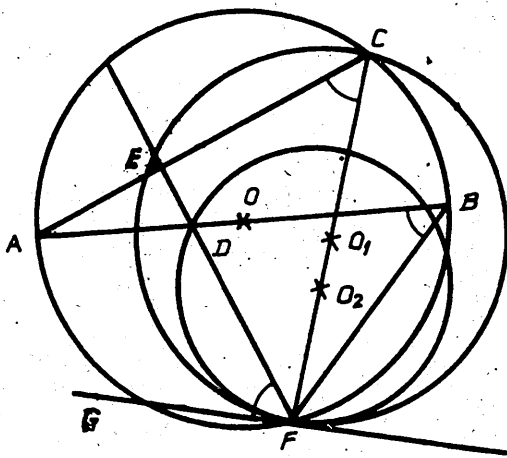


Fig. 165.

Soluție. $|AB|$ diametru $\Rightarrow BC \perp AC$; dar $DE \perp AC$ (ipoteză) $\Rightarrow BC \parallel DE$. Deci B și C sînt de aceeași parte a lui DE. De cealaltă parte a lui DE alegem punctul G astfel ca $\widehat{EFG} \equiv \widehat{ECF}$ (conform teoremei de construcție a unui unghi, unghiul $\widehat{EFG}$ unic). Conform problemei 16, § 3, cap. 3, pag. 90 $\Rightarrow FG$ este tangenta cercului circumscris triunghiului FEC.

$$m(\widehat{ACF}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AF}); m(\widehat{ABF}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AF})$$

$\Rightarrow m(\widehat{ACF}) = m(\widehat{ABF}) = m(\widehat{EFG}) \Rightarrow \widehat{ABF} \equiv \widehat{EFG} \Rightarrow FG$ este tangentă și cercului circumscris triunghiului BDF. Cele 2 cercuri: cel circumscris triunghiului FCE și cel circumscris triunghiului FBD sînt tangente la aceeași dreaptă în același punct, sînt tangente între ele.

Problema 18. Triunghiul MAB înscris în cercul dat $C(O, r)$ are vîrfurile A și B fixe, iar vîrfurile M variabil pe cerc. Să se afle locurile geometrice descrise de: a) ortocentru; b) centrul cercului înscris; c) centrul de greutate al triunghiului MAB.

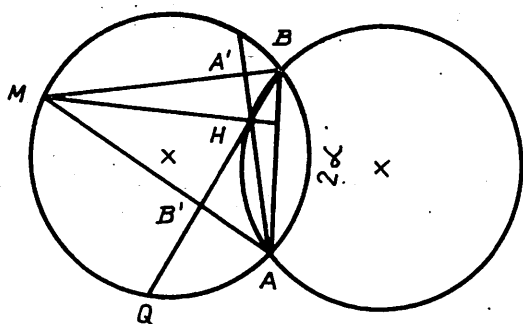


Fig. 166.

$\Rightarrow m(\widehat{AHB}) = m(\widehat{B'HA'}) = 180^\circ - m(\widehat{AMB}) = 180^\circ - \alpha$; (pentru că $\widehat{AHB} \equiv \widehat{B'HA'}$ - opuse la vîrf; și $m(\widehat{AMB}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2} = \alpha$, fiind unghi înscris). Deci $m(\widehat{AHB}) = \beta = \text{constant}$. Rezultă că din punctul H segmentul fix $|AB|$ se vede sub un unghi constant. Deci locul geometric al punctului H este arc capabil de unghiul β și de capete A și B. ($\beta = 180^\circ - \alpha$).

Am analizat cazul cînd M aparține arcului mare $\widehat{AB}$. Dacă M este variabil pe arcul mic $\widehat{AB}$, atunci $m(\widehat{AHB}) = 180^\circ - m(\widehat{AMB}) = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$. Deci, în acest caz, locul geometric este un arc capabil de α° și de capete A și B. Deci, cînd M este variabil descriind tot cercul, locul geometric al lui H este format din 2 arce de cerc de capete A și B, unul capabil de α° , altul capabil de $(180 - \alpha)^\circ$, deci cele 2 arce completează un cerc din care lipsesc punctele A și B, cerc simetric cu cel dat față de $|AB|$.

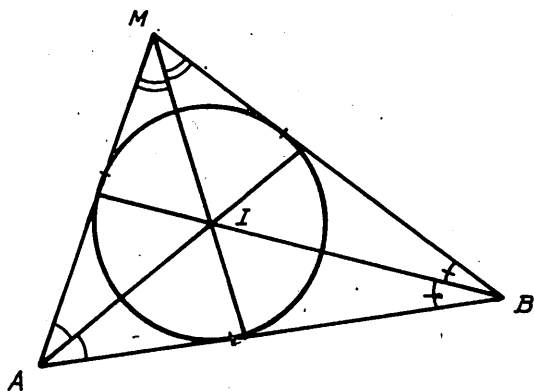


Fig. 167.

$= 90^\circ + \frac{m(\widehat{M})}{2} = 90^\circ + \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$ (pentru că în acest caz $m(\widehat{M}) = \frac{360^\circ - 2\alpha}{2} = 180^\circ - \alpha$). Deci și în acest caz $m(\widehat{AIB}) = \text{const}$. Deci segmentul fix $|AB|$ se vede din orice punct al arcului mare $\widehat{AB}$ sub un unghi de măsură $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, iar din orice punct al arcului mic $\widehat{AB}$ sub un unghi de măsură $180^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Rezultă că locul geometric este format din 2 arce de cerc deschise, unul capabil de unghiul de $(90^\circ + \frac{\alpha}{2})^\circ$ și altul capabil de $(180^\circ - \frac{\alpha}{2})^\circ$, ambele de capete A și B.

Soluție. Fie $AA' \perp MB$ și $BB' \perp AM$

și $\{H\} = AA' \cap BB'$ ($A' \in MB$, $B' \in AM$). A și B fiind fixe $\Rightarrow |AB|$ fix $\Rightarrow m(\widehat{AB}) = \text{const}$. Notăm $m(\widehat{AB}) = 2\alpha$ ($\widehat{AB}$ fiind arcul mic). În patrulaterul $MA'HB'$, $m(\widehat{MA'H}) = m(\widehat{MB'H}) = 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{AMB}) + m(\widehat{B'HA'}) = 180^\circ$ (pentru că suma unghiurilor unui patrulater este 360°) $\Rightarrow$

b) Centrul cercului înscris se află

la intersecția bisectoarelor unghiurilor

triunghiului. A și B fixe $\Rightarrow |AB|$ fix $\Rightarrow$

$$\Rightarrow m(\widehat{AB}) = 2\alpha^\circ = \text{const.} \quad (\widehat{AB} - \text{arcul mic}).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m(\widehat{AIB}) &= 180^\circ - [m(\widehat{IAB}) + m(\widehat{IBA})] = \\ &= 180^\circ - \frac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{B})}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - m(\widehat{M})}{2} = \\ &= 90^\circ + \frac{\alpha^\circ}{2}. \end{aligned}$$

Am considerat M pe arcul mare $\widehat{AB}$.

Dacă M este pe arcul mic $\widehat{AB} \Rightarrow m(\widehat{AIB}) =$

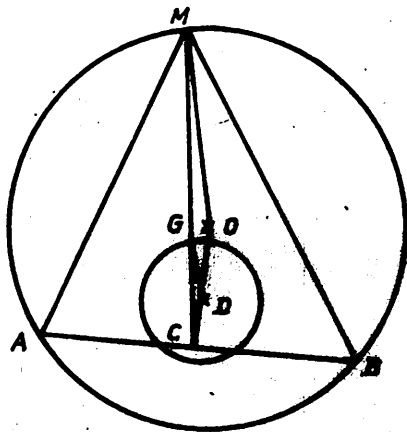


Fig. 168.

e) Centrul de greutate al triunghiului se află la intersecția medianelor. Fie $C \in |AB|$, $|AC| \equiv |CB| \Rightarrow |CM|$ mediană. Centrul de greutate al triunghiului este un punct $G \in |CM|$ astfel ca $\|MG\| = 2\|GC\|$ (conform teoremei 3, pag. 57, § 3, cap. 2). Pe $|OC|$ luăm punctul D astfel ca $\|OD\| = 2\|DC\| \Rightarrow \frac{\|CD\|}{\|CO\|} = \frac{\|CG\|}{\|CM\|} \Rightarrow GD \parallel OM \Rightarrow \triangle CGD \sim \triangle CMO$ (teorema fundamentală a asemănării); $\Rightarrow \frac{\|GD\|}{\|OM\|} = \frac{\|CG\|}{\|CM\|} = \frac{1}{3} \Rightarrow \|GD\| = \frac{1}{3}\|OM\| = \text{const.}$ Notăm $\|OM\| = r$. Punctele C și O sînt fixe $\Rightarrow D$ este fix. Punctul D fiind fix și segmentul $|GD|$ de lungime constantă $\|GD\| = \frac{r}{3} \Rightarrow G$ descrie un cerc de centru D și rază $\frac{r}{3}$.

Reciproc: să arătăm că orice punct $G \in C(D, \frac{r}{3})$ este centrul de greutate al unui triunghi ABM cu $M \in C(O, r)$ și $M \in GC$.

Fie $G \in C(D, \frac{r}{3})$. Ducem $OM \parallel GD$ astfel ca M și G să fie de aceeași parte a lui OC. Știm că $\frac{\|CD\|}{\|CO\|} = \frac{\|GD\|}{\|OM\|} = \frac{1}{3}$ (din construcție); $\widehat{CDG} \equiv \widehat{COM}$ (correspondente) $\Rightarrow \triangle CDG \sim \triangle COM$ (conform teoremei 3, pag. 67, § 8, cap. 2): $\Rightarrow \widehat{OCG} \equiv \widehat{OCM}$; cum M și G sînt de aceeași parte a lui OC $\Rightarrow C, G, M$ coliniare. Tot din $\triangle CDG \sim \triangle COM \Rightarrow \frac{\|CG\|}{\|CM\|} = \frac{\|CD\|}{\|CO\|} = \frac{1}{3}$. Din: $|AC| \equiv |CB|$ ($C \in |AB|$) și $\frac{\|CG\|}{\|CM\|} = \frac{1}{3} \Rightarrow G$ centru de greutate al triunghiului ABM .

Rezultă că locul geometric al punctului G este cercul $C(D, \frac{r}{3})$.

Poligoane înscrise și circumscrie.

Problemele de la pagina 92.

Problema 1. Fiind dat triunghiul ABC, să se arate că există 4 cercuri tangente dreptelor AB, BC, CA (un cerc înscris și 3 cercuri exînscrise).

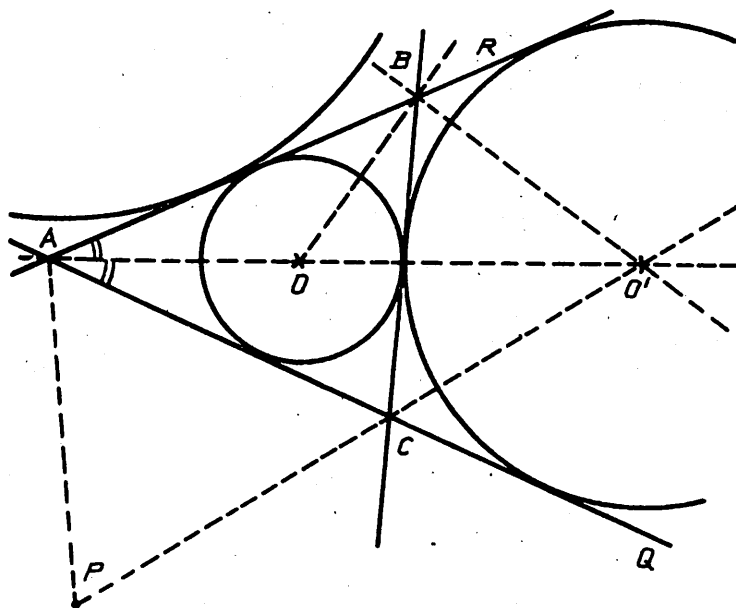


Fig. 169.

Soluție. Conform

teoremei 4, § 13, cap. 1, pag. 44, rezultă că bisectoarele unghiurilor unui triunghi sînt concurente.

Fie O punctul lor comun.

Conform teoremei 3, § 13, cap. 1, pag. 44, rezultă că:

$$d(O, AB) = d(O, BC) = d(O, CA) = r;$$

O, fiind egal depărtat de laturile triunghiului, va fi cen-

trul unui cerc de rază r tangent la laturile triun-

ghiului, deci al cercului înscris în triunghi.

Conform problemei 2, pag. 58, § 4, cap. 2, rezultă că bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ și bisectoarele unghiurilor exterioare ale triunghiului, care au ca latură l_{BC} respectiv l_{CB} sînt concurente. Fie O' punctul lor de concurență.

Tot în aceeași problemă am arătat că $d(O', BC) = d(O', AB) = d(O', AC) = r'$.

Deci O' este centrul unui cerc tangent dreptei BC și semidreptelor l_{BR} și l_{CQ}, opuse respectiv semidreptelor l_{BA} și l_{CA}, deci O' este centrul cercului tangent laturii l_{BC} a triunghiului și prelungirilor laturilor l_{AB} și l_{AC}. Deci C(O', r') este un cerc exînscris triunghiului. La fel se arată că există încă 2 cercuri exînscrise tangente laturilor l_{AB} și l_{AC} ale triunghiului.

Rezultă că există 4 cercuri tangente laturilor triunghiului: unul înscris și 3 exînscrise.

Problema 2. Să se calculeze apotema și lungimea laturii unui poligon regulat cu n laturi, înscris în cercul de rază r pentru $n = 3, 4, 6, 8$.

Soluție.

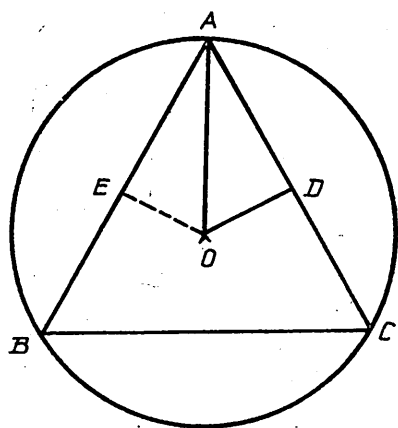


Fig. 170.

a) pentru $n = 3$ avem un triunghi echilateral înscris în cerc. Ducem $OD \perp AC$ ($D \in AC$) și $OE \perp AB$ ($E \in AB$).
 $|AB| \equiv |AC| \Rightarrow |OD| \equiv |OE|$ (conform teoremei 4, pag. 83, § 2, cap. 3). $\triangle AEO = \triangle ADO$ (cazul: I.C.): $|AO|$ - latură comună, $|EO| \equiv |OD|$ (demonstrație), $\widehat{AEO} \equiv \widehat{ADO}$ (unghiuri drepte - construcție). $\Rightarrow \widehat{EAO} \equiv \widehat{DAO} \Rightarrow m(\widehat{DAO}) = 60^\circ : 2 = 30^\circ$.
 $\Rightarrow \|OD\| = \frac{\|AO\|}{2}$ (conform problemei 3, pag. 53, § 2, cap. 2). $\Rightarrow a_3 = \frac{r}{2}$. (Am notat a_3 apotema triunghiului echilateral). Cu teorema lui Pitagora obținem din triunghiul AOD: $\|AD\|^2 = \|AO\|^2 - \|OD\|^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4} \Rightarrow \|AD\| = \frac{r\sqrt{3}}{2}$; $\|AC\| = 2\|AD\| = r\sqrt{3}$. $\Rightarrow l_3 = r\sqrt{3}$.

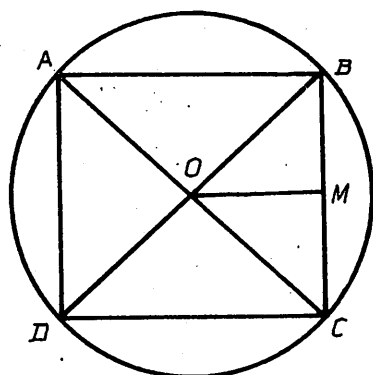


Fig. 171.

b) Pentru $n = 4$ obținem un pătrat înscris în cerc. $\|AB\|^2 = \|AO\|^2 + \|OB\|^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$ (teorema lui Pitagora; triunghiul AOB este dreptunghic pentru că diagonalele pătratului sînt perpendiculare). $\Rightarrow \|AB\| = r\sqrt{2}$. $\Rightarrow l_4 = r\sqrt{2}$.

Ducem $OM \perp BC$, $M \in BC$. În triunghiul OBM $m(\widehat{OBM}) = 45^\circ$, $m(\widehat{OMB}) = 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{BOM}) = 45^\circ \Rightarrow \triangle OBM$ este triunghi dreptunghic isoscel $\Rightarrow \|OM\| = \|BM\| = \frac{\|BC\|}{2} \Rightarrow \|OM\| = \frac{r\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

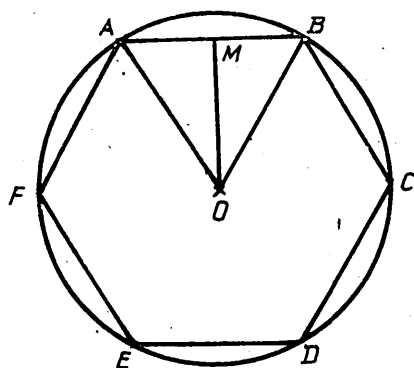


Fig. 172.

c) Pentru $n = 6$ obținem un hexagon regulat înscris în cerc. $m(\widehat{AOB}) = 360^\circ : 6 = 60^\circ$. Cum $|AO| \equiv |OB|$ (raze) $\Rightarrow AOB$ este un triunghi echilateral; $\Rightarrow \|AB\| = r$; $l_6 = r$.

Din triunghiul AOM ($OM \perp AB$, $M \in AB$) aplicînd teorema lui Pitagora obținem:

$$\|OM\|^2 = \|AO\|^2 - \|AM\|^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4}$$

$$\Rightarrow \|OM\| = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

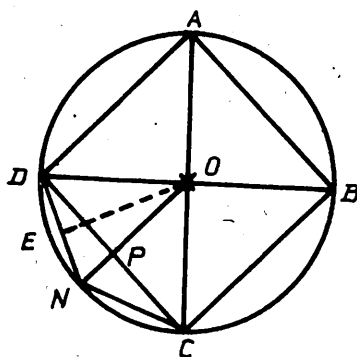


Fig. 173.

$$\|DN\|^2 = r^2(2 - \sqrt{2}) \Rightarrow \|DN\| = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

$$l_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}. \text{ Apotema } |OE| \text{ (} OE \perp DN, E \in DN \text{)} \text{ o aflăm din tri-}$$

$$\text{unghiul } OED \text{ cu teorema lui Pitagora: } \|OE\|^2 = \|DO\|^2 - \|DE\|^2 = r^2 - \frac{r^2(2 - \sqrt{2})}{4} =$$

$$= \frac{r^2(2 + \sqrt{2})}{4} \Rightarrow \|OE\| = \frac{r\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}. \text{ Deci } a_8 = \frac{r\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}.$$

Problema 3. Să se arate că orice dreptunghi este înscrisibil.

Soluție. Dreptunghiul avînd toate unghiurile drepte, suma măsurilor oricăror unghiuri opuse este 180° ; deci dreptunghiul este un patrulater înscrisibil (fiind convex și avînd unghiurile opuse suplementare).

Problema 4. Să se arate că dacă în trapezul isoscel ABCD poate fi înscris un cerc, atunci distanța dintre cele 2 baze este medie proporțională între lungimile bazelor.

Soluție. Fie P, Q, R, S punctele de tangență ale trapezului cu cercul: $P \in AB$, $Q \in BC$, $R \in CD$, $S \in AD \Rightarrow |CR| \equiv |QC|$, $|RD| \equiv |DS|$, $|SA| \equiv |AP|$, $|PB| \equiv |BQ|$ (fiind tangente duse din același punct la cerc). Notăm $\|BC\| = b$ și $\|AD\| = a$. Ducem $CM \perp AD$, $M \in AD$. $\|CD\| = \|CR\| + \|RD\| = \|CQ\| + \|SD\| = \frac{b+a}{2}$;
 $\|MD\| = \frac{\|AD\| - \|BC\|}{2} = \frac{a-b}{2} \Rightarrow \|CM\|^2 = \|CD\|^2 - \|MD\|^2 \Rightarrow \|CM\|^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$; $\|CM\| = \sqrt{ab}$. Deci înălțimea trapezului este medie proporțională între lungimile bazelor.

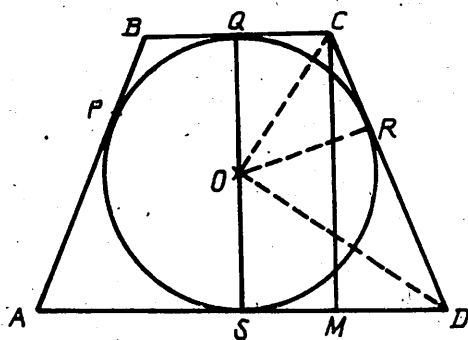


Fig. 174.

Metoda a doua: COD este un triunghi dreptunghic pentru că: $m(\widehat{QCR}) + m(\widehat{SDR}) = 180^\circ$ (fiind unghiuri interne de aceeași parte a secantei); $\widehat{COQ} \equiv \widehat{COR}$ și $\widehat{DOR} = \widehat{DOS}$ (cazul: I.C.) $\Rightarrow \widehat{OCR} \equiv \widehat{OCQ}$ și $\widehat{ODR} \equiv \widehat{ODS}$; $\Rightarrow m(\widehat{OCR}) + m(\widehat{ODC}) = 180^\circ : 2 = 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{COD}) = 90^\circ \Rightarrow COD$ este triunghi drept-

unghic. Aplicăm teorema înălțimii:

$$\|OR\|^2 = \|CR\| \cdot \|RD\| = \frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{4} \Rightarrow \|OR\| = \frac{\sqrt{ab}}{2} \Rightarrow \|QS\| = \sqrt{ab} \Rightarrow \|CM\| = \sqrt{ab}.$$

Problema 5. Să se arate că dacă un trapez este inscriptibil, atunci el este isoscel.

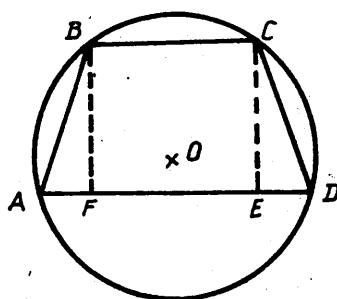


Fig. 175.

Soluție. ABCD inscriptibil $\Rightarrow m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$; ABCD trapez $\Rightarrow m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$. La fel se arată că $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$. Ducem $BF \perp AD$ și $CE \perp AD$; $F, E \in AD$. $\triangle ABF \equiv \triangle DCE$ (cazul: C.U.): $\|BF\| \equiv \|CE\|$ (distanțe între drepte paralele). $\widehat{A} \equiv \widehat{D}$ (demonstrație), $\widehat{AFB} \equiv \widehat{DEC}$ (unghiuri drepte). $\Rightarrow |AB| \equiv |CD| \Rightarrow ABCD$ trapez isoscel.

Problema 6. Să se determine măsura arcului mic determinat de o latură a unui poligon regulat cu n laturi înscris în $C(O, r)$.

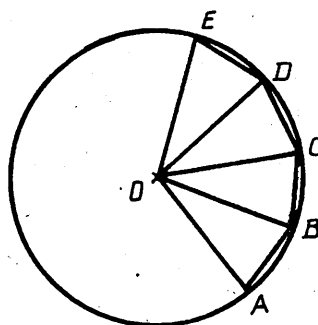


Fig. 176.

Soluție. Fie $|AB| \equiv |BC| \equiv |CD| = \dots$ (laturi ale poligonului regulat); $\Rightarrow \widehat{AB} \equiv \widehat{BC} \equiv \widehat{CD} \equiv \dots$ (la coarde congruente corespund arce congruente) $\Rightarrow m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{COD}) = \dots = \frac{360^\circ}{n}$. Deci $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{BC}) = m(\widehat{CD}) = \dots = \frac{360^\circ}{n}$.

Problema 7. Fie un cerc $C(O, r)$. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n > 2$ există un poligon regulat cu n laturi înscris în cerc și un poligon regulat cu n laturi circumscris cercului.

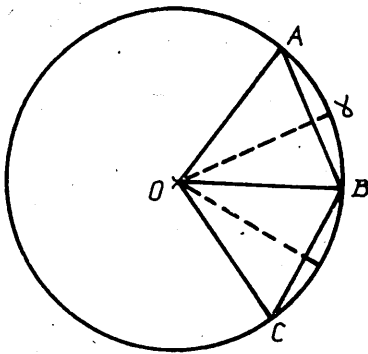


Fig. 177.

Soluție. Considerăm dreapta OA ($A \in C(O, r)$) și fie $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$. Cum $n > 2 \Rightarrow 0^\circ < \alpha < 180^\circ$. Într-unul din semiplanele limitate de dreapta OA, există o semidreaptă unică OB care formează cu semidreapta OA un unghi de măsură $\frac{360^\circ}{n}$. (axioma de construcție a unghiurilor). $B \in C(O, r), \Rightarrow m(\widehat{AOB}) = \alpha$. La fel, în semiplanul limitat de OB și care

nu conține punctul A construim un unghi BOC de măsură α . $C \in C(O, r) \Rightarrow m(\widehat{BC}) = \alpha$. Procedând în mod asemănător obținem pe cerc n puncte și n arce congruente de măsură α . Unind punctele A, B, C, D, ... obținem un poligon regulat înscris în cerc. $\widehat{AB} \equiv \widehat{BC} \equiv \widehat{CD} \equiv \dots \Rightarrow |AB| \equiv |BC| \equiv \dots$ (la arce congruente corespund coarde congruente). Deci toate laturile poligonului construit sînt congruente. $m(\widehat{ABC}) = \frac{m(\widehat{AC}) \text{ mare}}{2}$, pentru că $\widehat{ABC}$ este unghi înscris în cerc. $\Rightarrow m(\widehat{ABC}) = \frac{360^\circ - 2\alpha}{2} = 180^\circ - \alpha$. La fel se arată că și celelalte unghiuri ale poligonului au aceeași măsură ca și $\widehat{ABC}$. Deci toate unghiurile poligonului sînt congruente; rezultă că poligonul este regulat. Ducînd tangente la cerc în punctele A, B, C, D, ... obținem un poligon circumscris cercului. Să arătăm că este regulat.

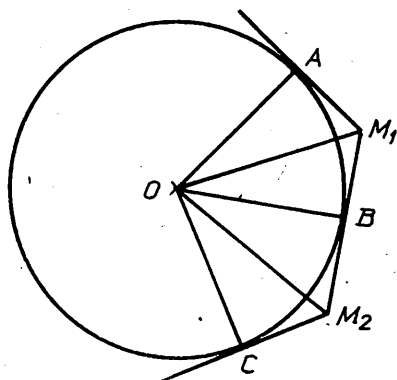


Fig. 178.

$\widehat{M_1OB} \equiv \widehat{M_2OB}$ (au măsura $\frac{360^\circ}{n} : 2 = \frac{180^\circ}{n}$, din $\triangle AM_1O \equiv \triangle BM_1O$ și din $\triangle BM_2O \equiv \triangle CM_2O$). $\Rightarrow |M_1B| = |BM_2| = a$. La fel se procedează pentru toate perechile de triunghiuri alăturate.

Rezultă că toate laturile poligonului circumscris cercului au aceeași lungime ca și $|M_1M_2| = |M_1B| + |BM_2| = a + a = 2a$. Acest poligon are și toate unghiurile congruente avînd aceeași măsură ca și unghiul $\widehat{AM_1B}$ și anume:

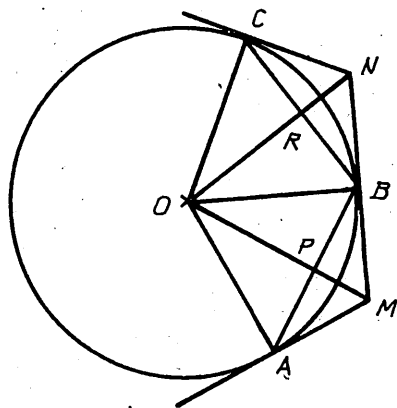
Notăm M_1 punctul de intersecție al tangentei în A cu tangenta în B la cerc; notăm cu M_2 punctul de intersecție al tangentei în B cu tangenta în C.

$\triangle AM_1O \equiv \triangle BM_1O$ (cazul: I.C.): $|OM_1|$ - latură comună, $|OA| \equiv |OB|$ (raze), $\widehat{OAM_1} \equiv \widehat{OBM_1}$ (unghiuri drepte - raza este perpendiculară pe tangentă). $|AM_1| = |M_1B| = a$. La fel triunghiul $\triangle M_1OB \equiv \triangle M_2OB$ (cazul: C.U.): $|OB|$ - latură comună, $\widehat{OBM_1} \equiv \widehat{OBM_2}$ (unghiuri drepte),

$m(\widehat{AM_1B}) = 180^\circ - \alpha$ (din patrulaterul AM_1BO în care $m(\widehat{OAM_1}) = m(\widehat{OBM_1}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{AOB}) = \alpha$). Polygonul circumscris cercului avînd toate laturile congruente și toate unghiurile congruente este un poligon regulat.

Problema 8. Se consideră un cerc $C(O, r)$ și 2 poligoane regulate cu n laturi, unul înscris și celălalt circumscris cercului. Să se arate că dacă se notează cu l_n și L_n lungimile laturilor celor 2 poligoane, atunci:

$$L_n = \frac{2 r l_n}{\sqrt{4 r^2 - l_n^2}}.$$



Soluție. $\triangle OAP \sim \triangle OMA$ ($\widehat{AOM}$ unghi comun, $\widehat{MAO} \equiv \widehat{APO}$ - unghiuri drepte: am demonstrat în problema precedentă că $\widehat{AOM} \equiv \widehat{MOB}$ $\Rightarrow OM$ bisectoare a unghiului $\widehat{AOB}$ și cum triunghiul AOB este isoscel $\Rightarrow OM \perp AB$ - este și înălțime) $\Rightarrow \frac{\|OP\|}{\|AO\|} = \frac{\|AO\|}{\|MO\|} = \frac{\|AP\|}{\|AM\|} \Rightarrow \frac{\|OP\|}{r} = \frac{r}{\|MO\|} = \frac{l_n}{L_n} \Rightarrow \|MO\| = \frac{r L_n}{l_n}$; $\|OP\| = \frac{r l_n}{L_n}$.

În triunghiul AMO aplicînd teorema catetei: $\|AM\|^2 = \|OM\| \cdot \|MP\| = \|OM\| (\|MO\| - \|OP\|)$.

Fig. 179.

$$\begin{aligned} \left(\frac{L_n}{2}\right)^2 &= \frac{r L_n}{l_n} \left(\frac{r L_n}{l_n} - \frac{r l_n}{L_n}\right) = \frac{r^2 L_n}{l_n} \left(\frac{L_n}{l_n} - \frac{l_n}{L_n}\right) = \frac{r^2 (L_n^2 - l_n^2)}{l_n^2} \Rightarrow L_n^2 = \frac{4 r^2 L_n^2 - 4 r^2 l_n^2}{4 r^2 - l_n^2} \\ &\Rightarrow L_n^2 (4 r^2 - l_n^2) = 4 r^2 L_n^2 - 4 r^2 l_n^2 \\ L_n^2 &= \frac{4 r^2 l_n^2}{4 r^2 - l_n^2} \Rightarrow L_n = \frac{2 r l_n}{\sqrt{4 r^2 - l_n^2}}. \end{aligned}$$

Problema 9. Să se arate că într-un patrulater înscritibil o bisectoare interioară se intersectează cu bisectoarea exterioară a unghiului opus pe cercul circumscris patrulaterului.

Soluție. Fie $ABCD$ un patrulater înscritibil și DM' bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$, iar BM bisectoarea unghiului $\widehat{ABT}$ (BT și BC fiind semidrepte opuse).

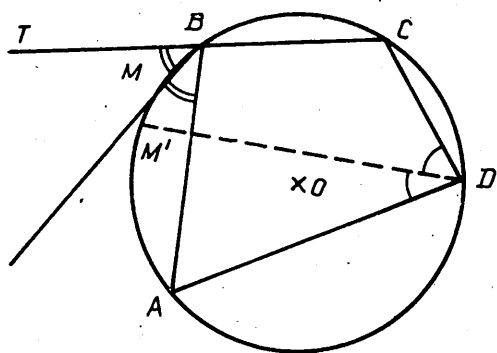


Fig. 180.

Arătăm întâi că BM și DM' se intersectează. Am notat cu M punctul în care bisectoarea unghiului $\widehat{ABT}$ taie cercul și cu M' punctul în care bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$ taie cercul. $|BM| \subset \text{Int } \widehat{ABT} \Rightarrow M \in \widehat{AB}$; $|DM'| \subset \text{Int } \widehat{ADC} \Rightarrow M' \in \widehat{CBA}$. Patrulaterul $ABCD$ fiind inscriptibil rezultă că $\widehat{ABT} \equiv \widehat{ADC}$ (avînd același suplement: unghiul $\widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{TBM} \equiv \widehat{ADM'} \Rightarrow \widehat{MBA} \equiv \widehat{ADM'} \equiv \widehat{CDM'}$. Dar $m(\widehat{MBA}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AM})$ și $m(\widehat{ADM'}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AM'})$. Cum $\widehat{MBA} \equiv \widehat{ADM'} \Rightarrow \widehat{AM} \equiv \widehat{AM'}$. Cum M și M' sînt de aceeași parte a lui AD (pentru că $M \in \widehat{AB}$ și $M' \in \widehat{CBA}$, iar B și C sînt de aceeași parte a lui AD - patrulaterul fiind convex) $\Rightarrow M = M'$. Rezultă că cele 2 bisectoare au un punct comun M și acesta se află pe cercul circumscris patrulaterului.

Problema 10. Prin punctele comune A și B a 2 cercuri $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$ se duc secantele arbitrare MAN și PBQ , $M \in C(O_1, r_1)$ și $P \in C(O_1, r_1)$. Să se demonstreze că $MP \parallel NQ$.

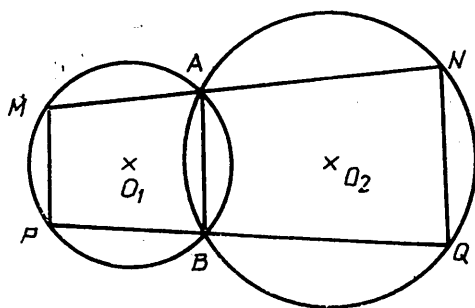


Fig. 181.

Soluție. $AMPB$ fiind înscris în cerc $m(\widehat{MPB}) + m(\widehat{MAB}) = 180^\circ$. La fel: $ABQN$ fiind inscriptibil rezultă $m(\widehat{BAN}) + m(\widehat{BQN}) = 180^\circ$. Dar $m(\widehat{MAB}) + m(\widehat{BAN}) = 180^\circ$. $m(\widehat{MPB}) + m(\widehat{BQN}) = 180^\circ \Rightarrow MP \parallel QN$ (dacă unghiurile interne de aceeași parte a secantei sînt suplementare, dreptele sînt paralele).

Problema 11. În cercul $C(O, r)$ se duce diametrul $|AB|$ și tangenta în A , pe care se iau două puncte oarecare C și D , A separă C și D . Dreptele CB și DB intersectează cercul $C(O, r)$ în E și F . Să se arate că patrulaterul $CDFE$ este inscriptibil. Ce devine acest patrulater în cazul cînd $|AC| \equiv |AD|$?

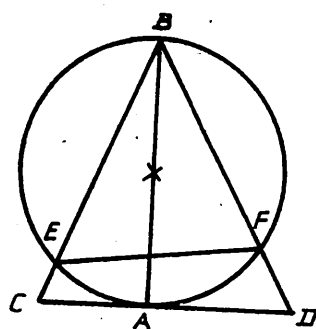


Fig. 182.

(unghiurile corespondente fiind congruente dreptele sînt paralele).

Din $EF \parallel CD$ și $m(\hat{C}) = m(\hat{D}) \Rightarrow EFDC$ trapez isoscel.

Problema 12. Să se arate că un paralelogram este inscriptibil dacă și numai dacă este un dreptunghi.

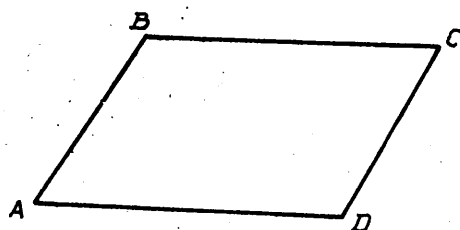


Fig. 183.

este inscriptibil. ABCD este patrulater convex. $AB \parallel CD \Rightarrow A$ și B sînt de aceeași parte a lui CD , pentru că $|AB| \cap CD = \emptyset$. La fel B și C sînt de aceeași parte a lui AD , C și D sînt de aceeași parte a lui AB și A și D sînt de aceeași parte a lui BC . Deci ABCD este convex. $m(\hat{A}) = m(\hat{C}) = 90^\circ \Rightarrow m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 180^\circ \Rightarrow ABCD$ inscriptibil.

Problema 13. Fie A' , B' , C' mijloacele laturilor unui triunghi ABC , iar D piciorul unei înălțimi ($D \in BC$). Să se arate că punctele A' , B' , C' și D sînt pe un cerc.

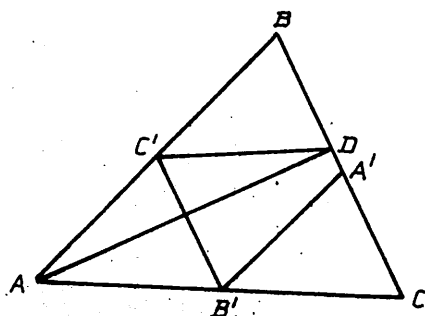


Fig. 184.

Soluție. $m(\hat{EFB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{BE})$; $m(\widehat{BCD}) =$

$$\frac{1}{2} (m(\widehat{BA}) - m(\widehat{EA})) = \frac{1}{2} [180^\circ - (180^\circ - m(\widehat{BE}))] = \frac{1}{2} m(\widehat{BE}) \Rightarrow \widehat{EFB} \equiv \widehat{BCD}. \text{ Cum } m(\widehat{EFB}) + m(\widehat{EFD}) = 180^\circ \\ \Rightarrow m(\widehat{BCD}) + m(\widehat{EFD}) = 180^\circ \text{ adică } m(\widehat{ECD}) + m(\widehat{EFD}) = 180^\circ \Rightarrow \text{patrulaterul } CDFE \text{ este inscriptibil.}$$

Dacă $|AC| \equiv |AD|$, cum $AB \perp CD \Rightarrow$ triunghiul BCD este isoscel. $\Rightarrow m(\hat{C}) = m(\hat{D})$; dar $m(\hat{C}) = m(\hat{EFB})$ (demonstrație) $\Rightarrow m(\hat{C}) = m(\hat{EFB}) = m(\hat{D}) \Rightarrow CD \parallel EF$

Soluție.

a) Dacă ABCD este paralelogram și este inscriptibil $m(\hat{A}) + m(\hat{C}) = 180^\circ$ și $m(\hat{A}) = m(\hat{C}) \Rightarrow m(\hat{A}) = m(\hat{C}) = 90^\circ$. La fel rezultă că $m(\hat{B}) = m(\hat{D}) = 90^\circ \Rightarrow ABCD$ este dreptunghi.

b) Dacă ABCD dreptunghi să arătăm că

Soluție. $|AC'| \equiv |C'B|$, $C' \in AB \Rightarrow |C'D|$ mediană; $AD \perp BC \Rightarrow \widehat{ADB} \in 90^\circ \Rightarrow |DC'| \equiv |C'A|$ (mediana dusă pe ipotenuză este congruentă cu jumătatea ipotenuzei).

$|A'B'|$ linie mijlocie în triunghiul ABC (A' mijlocul lui $|BC|$ = ipotuză, B' mijlocul lui $|AC|$ = ipotuză) $\Rightarrow \|A'B'\| = \frac{1}{2} \|AB\| = \|AC'\| \Rightarrow |A'B'| \equiv |C'D|$. (1).

$B'C'$ linie mijlocie în triunghiul ABC (B' fiind mijlocul lui $|AC|$ și C' mijlocul lui $|AB|$); $\Rightarrow B'C' \parallel BC \Rightarrow B'C' \parallel DA'$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow DA'B'C'$ este trapez isoscel $\Rightarrow DA'B'C'$ este patrulater inscriptibil.

Problema 14. Fie A, B, C un triunghi, A', B' mijloacele laturilor $|BC|$ și $|AC|$, D piciorul înălțimii din A , H ortocentrul, iar A_1 mijlocul segmentului $|AH|$. Să se arate că punctele A', B', A_1 și D sînt situate pe un cerc în fiecare din următoarele cazuri posibile:

- a) $H \in |AD|$; b) $H = D$; c) $A \in (HD)$.

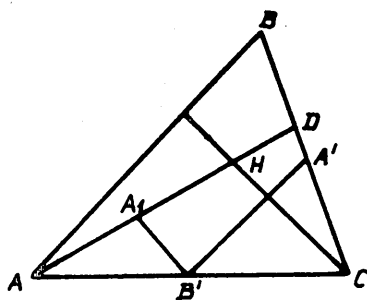


Fig. 185.

$m(\widehat{A_1 B' A'}) = 90^\circ$. Cum $m(\widehat{A_1 D A'}) = 90^\circ$ ($AD \perp BC$ - ipoteză) $\Rightarrow m(\widehat{A_1 D A'}) + m(\widehat{A_1 B' A'}) = 180^\circ \Rightarrow A_1 B' A' D$ este patrulater inscriptibil.

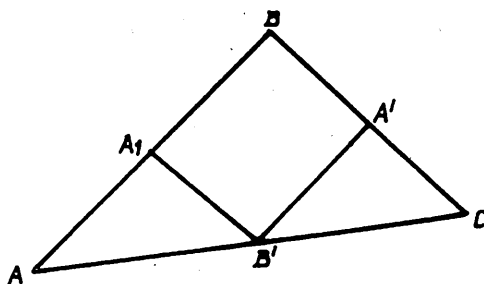


Fig. 186.

$m(\widehat{B}) = 90^\circ \Rightarrow A_1 B A' B'$ este dreptunghi și deci este inscriptibil.

Soluție.

a) $|A'B'|$ linie mijlocie în triunghiul ABC (A' mijlocul lui $|BC|$ - ipoteză, B' mijlocul lui $|AC|$ - ipoteză) $\Rightarrow A'B' \parallel AB$. H ortocentrul triunghiului $\Rightarrow HC \perp AB$. $\Rightarrow HC \perp A'B'$. În triunghiul AHC , $|A_1 B'|$ este linie mijlocie (B' mijlocul lui $|AC|$, iar A_1 mijlocul lui $|AH|$ - ipoteză) $\Rightarrow HC \parallel A_1 B'$. Deci $A'B' \perp HC$ și $HC \parallel A_1 B' \Rightarrow A'B' \perp A_1 B' \Rightarrow$

b) Dacă $H = D \Rightarrow CD \perp AB$; dar și $AD \perp BC \Rightarrow B = D$ (altfel triunghiul ABD ar avea 2 unghiuri drepte: $\widehat{B}$ și $\widehat{D}$). În acest caz $A_1 B A' B'$ este dreptunghi pentru că $|A'B'|$ fiind linie mijlocie în triunghiul $ABC \Rightarrow A'B' \parallel AB$ și $\|A'B'\| = \frac{1}{2} \|AB\| = \|A_1 B\| \Rightarrow A_1 B A' B'$ paralelogram și cum

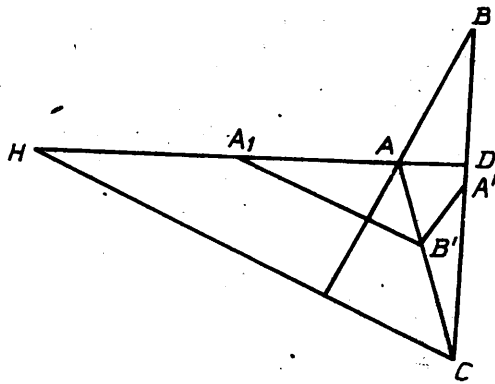


Fig. 187.

c) Dacă $A \in |HD| \Rightarrow$ ortocentrul nu aparține interiorului triunghiului ABC, deci ABC este triunghi obtuzunghic.

$|A_1B'|$ linie mijlocie în triunghiul AHC;
 $\Rightarrow A_1B' \parallel HC$. $|A'B'|$ linie mijlocie în
 triunghiul ABC $\Rightarrow A'B' \parallel AB$. Dar $HC \perp$
 $\perp AB$; $\Rightarrow A_1B' \perp AB$; cum $A'B' \parallel AB \Rightarrow$
 $\Rightarrow A_1B' \perp A'B'$; $\Rightarrow m(\widehat{A_1B'A'}) = 90^\circ$ și
 cum și $m(\widehat{ADA'}) = 90^\circ (HD \perp BC) \Rightarrow m(\widehat{ADC}) +$
 $+ m(\widehat{A_1B'A'}) = 180^\circ \Rightarrow A_1B'A'D$ este in-
 scriptibil.

Problema 15. Fie ABC un triunghi, D, E, F picioarele înălțimilor, A' , B' , C' mijloacele laturilor, H ortocentrul, A_1 , B_1 , C_1 mijloacele segmen-
 telor $|AH|$, $|BH|$, $|CH|$. Să se arate că punctele D, E, F, A' , B' , C' , A_1 ,
 B_1 , C_1 sînt pe un cerc (numit cercul lui Euler sau cercul celor 9 puncte ale
 triunghiului ABC).

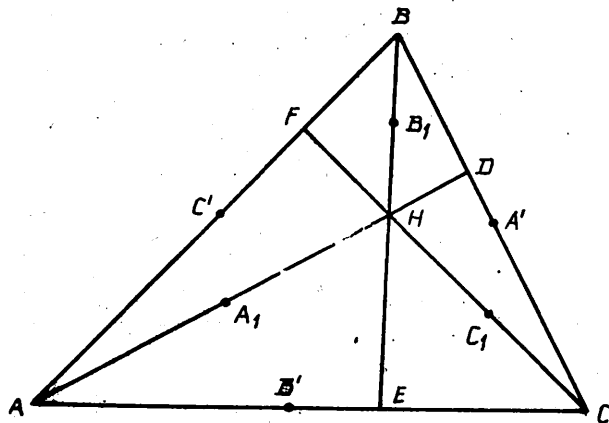


Fig. 188.

Soluție. Conform problemei
 13, pag. 93, § 4, cap. 3, puncte-
 le A' , B' , C' , D sînt conciclice.
 Analog: A' , B' , C' , F sînt con-
 ciclice și A' , B' , C' , E sînt concicli-
 ce. Cele 3 cercuri avînd 3 puncte
 comune coincid. Deci: A' , B' , C' ,
 D, E, F sînt conciclice.

Conform problemei 14, pag. 93, § 4, cap. 3, punctele A' , B' , D,
 A_1 sînt conciclice. Cercul lor are în comun cu cercul anterior punctele A' , B' ,
 D, deci cele 2 cercuri coincid. Analog, pe acest cerc sînt situate și punctele
 B_1 și C_1 . Deci toate cele 9 puncte: A' , B' , C' , D, E, F, A_1 , B_1 , C_1 sînt
 conciclice.

Problema 16. Folosind notațiile exercițiului 15 să se arate că dreptele
 $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ sînt concurente.

Soluție. Folosim desenul și notațiile problemei precedente. $m(\widehat{A'DA_1}) = 90^\circ$ pentru că $AD \perp BC$ (ipoteză; $|A'A_1|$ este diametru în cercul lui Euler, deci mijlocul O al lui $|A'A_1|$ este centrul cercului lui Euler. Analog, $m(\widehat{B'B_1E}) = 90^\circ \Rightarrow |B'B_1| = \text{diametru}$ în cercul lui Euler și $m(\widehat{C'FC_1}) = 90^\circ \Rightarrow |C'C_1| = \text{diametru}$ în cercul lui Euler. $\Rightarrow O \in |B'B_1|$ și $O \in |C'C_1|$. $\Rightarrow$ Dreptele $A'A_1, C'C_1, B'B_1$ sînt concurente, avînd ca punct comun centrul cercului lui Euler.

Problema 17. Fie ABC un triunghi, D, E, F picioarele înălțimilor. Să se arate că cercurile circumscrise triunghiurilor AEF, BFD, CDE au un punct comun.

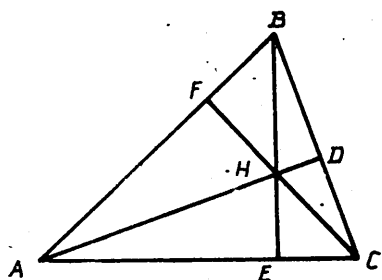


Fig. 189.

Soluție. Patrulaterul $AFHE$ inscriptibil ($CF \perp AF$ și $BE \perp AC \Rightarrow m(\widehat{AFH}) + m(\widehat{AEH}) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$). La fel: $BFHD$ inscriptibil ($CF \perp AB$ și $AD \perp BC \Rightarrow m(\widehat{BFH}) + m(\widehat{BDH}) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$). $EHDC$ inscriptibil ($AH \perp BC$ și $BE \perp AC \Rightarrow m(\widehat{HDC}) + m(\widehat{HEC}) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$). $\Rightarrow$ Cercul circumscris triunghiului AEF coincide cu cercul circumscris patrulaterului $AEHF$; la fel cercul circumscris triunghiului BFD coincide cu cel circumscris lui $BFHD$; cel circumscris triunghiului CDE coincide cu cel circumscris lui $EHDC$; $\Rightarrow H$ este punct comun tuturor acestor 3 cercuri.

Problema 18. Se consideră un patrulater convex avînd diagonalele perpendiculare care se intersectează în punctul O . Să se arate că proiecțiile lui O pe laturi sînt vîrfurile unui patrulater inscriptibil.

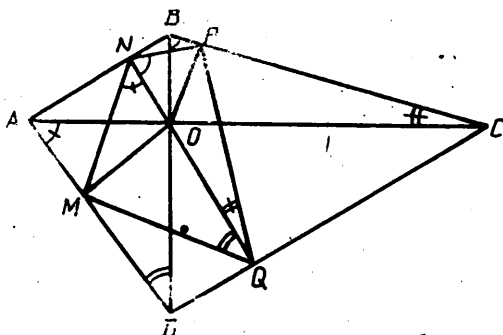


Fig. 190.

Soluție. Fie $ABCD$ patrulaterul convex și $AC \perp BD$; fie $P = \text{pr}_{BC} O$, $Q = \text{pr}_{DC} O$, $M = \text{pr}_{AD} O$, $N = \text{pr}_{AB} O$. $POQC$ inscriptibil pentru că $OP \perp BC$ și $OQ \perp DC$ (ipoteză) $\Rightarrow m(\widehat{OPC}) + m(\widehat{OQC}) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BCO} \equiv \widehat{QOP}$ (1). $MOQD$ inscriptibil ($OM \perp AD$ și $OQ \perp DC$ - ipoteză; $\Rightarrow m(\widehat{OMD}) + m(\widehat{OQD}) = 180^\circ$. $\Rightarrow \widehat{QOM} \equiv \widehat{ODM}$ (2). $MONA$ inscriptibil ($ON \perp AB$ și $OM \perp AD$ - ipoteză; $\Rightarrow m(\widehat{ANO}) + m(\widehat{AMO}) = 180^\circ$). $\Rightarrow \widehat{ONM} \equiv \widehat{OAM}$ (3). $NOPB$ inscriptibil ($ON \perp AB$ și $OP \perp BC$

- ipoteză; $\Rightarrow m(\widehat{ONB}) + m(\widehat{OPB}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{ONP}) = m(\widehat{OBP})$ (4). Din relațiile (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow m(\widehat{MNP}) + m(\widehat{MQP}) = m(\widehat{ONM}) + m(\widehat{ONP}) + m(\widehat{OQM}) + m(\widehat{OQP}) = m(\widehat{OAM}) + m(\widehat{OBP}) + m(\widehat{ODM}) + m(\widehat{OCP})$; dar $m(\widehat{OAM}) + m(\widehat{ODM}) = 90^\circ$ (AOD triunghi dreptunghic - ipoteză); $m(\widehat{OBP}) + m(\widehat{OCP}) = 90^\circ$ (BOC triunghi dreptunghic - ipoteză); $\Rightarrow m(\widehat{MNP}) + m(\widehat{MQP}) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ (5). ABCD convex $\Rightarrow$ MNPQ convex. (6). Din (5) și (6) $\Rightarrow$ MNPQ inscriptibil.

Problema 19. Fie $\widehat{AOB}$ un unghi drept, M și N puncte variabile respectiv pe $|OA|$ și $|OB|$, iar MNPQ un pătrat astfel ca MN să separe punctele O și P. Să se afle locul geometric al centrului pătratului.

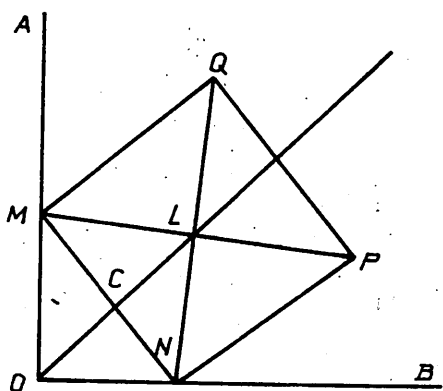


Fig. 191.

Soluție. Fie pătratul ABCD și L centrul său ($\{L\} = NQ \cap MP$).

$|LP| \cap MN = \emptyset \Rightarrow L$ și P sînt de aceeași parte a lui MN ; Dar P și O sînt de o parte și de alta a lui MN ; $\Rightarrow L$ și O sînt de o parte și de alta a lui MN . $\Rightarrow |OL| \cap MN \neq \emptyset$. Fie $|OL| \cap MN = \{C\}$. $L \in \text{Int } \widehat{AOB} \Rightarrow |OL| \cap |MN| \neq \emptyset$ (teorema transversalei).

$\Rightarrow |OL| \cap |MN| = \{C'\}$; $C' \in OL$ și $C' \in MN$;

$C' \in OL$ și $C' \in MN \Rightarrow C' = C$, pentru că

în caz contrar $OL = MN$, absurd, ar însemna că centrul pătratului se află pe latură.

$C \in |OL|$ și $C \in |MN| \Rightarrow |MN| \cap |OL| = \{C\}$, adică cele 2 diagonale ale patrulaterului se intersectează; $\Rightarrow$ patrulaterul OMNL este convex. $m(\widehat{MON}) + m(\widehat{MLN}) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow OMLN$ este inscriptibil. $\Rightarrow m(\widehat{LON}) = m(\widehat{LMN}) = 45^\circ = \text{const.} = m(\widehat{LOA}) \Rightarrow L$ se găsește pe bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$, care este o semidreaptă fixă.

Reciproc: orice punct L de pe bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$ este centrul unui pătrat care are 2 vîrfuri M și N variabile pe $|OA|$ și $|OB|$, iar celelalte 2 vîrfuri P și Q astfel ca MN să le separe de O .

Fie L deci pe bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$. Fie $N \in |OB|$ astfel ca $m(\widehat{OLN}) < 90^\circ$. Ducem $ML \perp LN$, $M \in |OA|$. Fie P astfel ca $P \in |ML|$ și $|ML| \equiv |LP|$ fie Q astfel ca $Q \in LN$ și $|QL| \equiv |LN|$. Să demonstrăm că MNPQ este pătrat de centru L . Cum $|ML| \equiv |LP|$ și $|QL| \equiv |LN|$, rezultă că MNPQ este paralelogram (1).

MLNO inscripibil ($m(\hat{O}) + m(\widehat{MLN}) = 180^\circ$) $\Rightarrow \widehat{LNM} = \widehat{LOA} \in 45^\circ$ și $\widehat{LMN} = \widehat{LON} \in 45^\circ \Rightarrow \widehat{LMN} = \widehat{LNM} \Rightarrow$ triunghiul LMN este isoscel $\Rightarrow |ML| = |LN|$ și $\widehat{MLN} \in 90^\circ \Rightarrow |QN| = |MP|$ (2) și $QN \perp MP$ (3). Din (1), (2), (3) rezultă că MNQP este pătrat. Deci locul geometric al lui L este bisectoarea unghiului AOB.

Problema 20. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și $D \in |BC|$ un punct fix. Paralela prin D la AB taie AC în E. Fie M un punct variabil pe segmentul |AE| și $\{N\} = AB \cap DM$. Cercurile circumscrise triunghiurilor CDM și AMN se intersectează a doua oară în P. Să se afle locul geometric al punctului P.

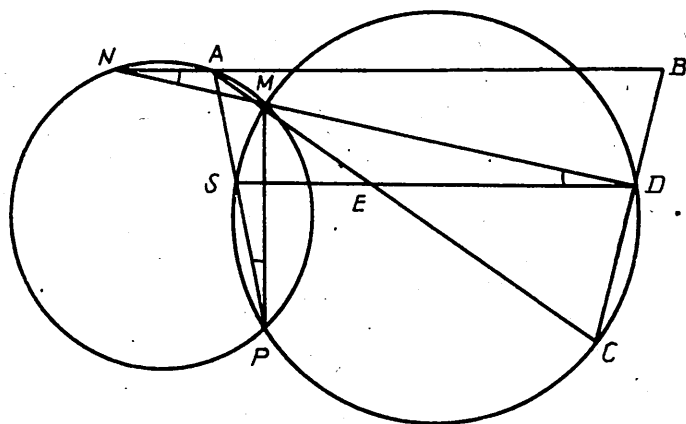


Fig. 192.

Soluție. Fie S punctul în care cercul circumscris triunghiului CDM este intersectat a doua oară de dreapta DE. Să arătăm că $S \in AP$.

$\widehat{MDS} = \widehat{MPS}$ (având aceeași măsură: $\frac{1}{2} m(\widehat{MS})$). În cercul circumscris triunghiului AMN, $\widehat{ANM} = \widehat{APM}$ (având aceeași măsură: $\frac{1}{2} m(\widehat{AM})$). Dar $DE \parallel AB \Rightarrow \widehat{ANM} = \widehat{MDS}$ (alterne

interne) $\Rightarrow \widehat{APM} = \widehat{MPS}$. Cum A și S sînt de aceeași parte a lui MP $\Rightarrow |AP| = |AS| \Rightarrow S \in AP$.

$SD \parallel AB \Rightarrow m(\widehat{BAS}) = m(\widehat{DSP})$ (unghiuri corespondente); dar $m(\widehat{DSP}) + m(\widehat{DCP}) = 180^\circ$ (pentru că patrulaterul SDCP este înscris în cerc) $\Rightarrow m(\widehat{BAS}) + m(\widehat{DCP}) = 180^\circ$ sau: $m(\widehat{BAP}) + m(\widehat{BCP}) = 180^\circ \Rightarrow ABCP$ este inscripibil; $\Rightarrow P$ aparține arcului $\widehat{AC}$ al cercului circumscris patrulaterului ABCP, arc ce nu conține pe B.

Reciproc: fie patrulaterul ABCP inscripibil și P un punct care aparține aceluia arc $\widehat{AC}$ al cercului circumscris patrulaterului, care nu conține pe B. Să arătăm că există un punct $M \in |AE|$ astfel ca cercurile circumscrise triunghiurilor CDM și AMN, unde $\{N\} = AB \cap DM$, să aibă pe |MP| coardă comună.

Fie deci P un punct oarecare al arcului $\widehat{AC}$ al cercului circumscris lui ABC, arc ce nu conține pe B. Fie $D \in |BC|$ și $DE \parallel AB$, $E \in |AC|$ (ipoteză). Construim cercul circumscris lui DCP. El intersectează pe |AE| în M. Fie $\{N\} = DM \cap AB$. DCPM este înscris în cerc (construcție) $\Rightarrow \widehat{NMP} = \widehat{DCP}$;

ABCP inscriptibil (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{NAP} \equiv \widehat{BCP}$; dar $\widehat{DCP} \equiv \widehat{BCP} \Rightarrow \widehat{NAP} \equiv \widehat{NMP}$
 $\Rightarrow$ NAMP inscriptibil; cercul circumscris lui AMN are comun cu cercul circumscris lui DMC coarda $[MP]$.

Rezultă că locul geometric al punctului P este un arc de cerc $\widehat{AC}$ al cercului circumscris lui ABC, arc ce nu conține punctul B.

Problema 21. Fie ABC un triunghi și D, E, F picioarele înălțimilor. Să se arate că:

- Triunghiurile AEF, DEC, DBF sînt asemenea cu triunghiul ABC.
- Bisectoarele triunghiului DEF (triunghi ortic) coincid cu înălțimile triunghiului ABC.

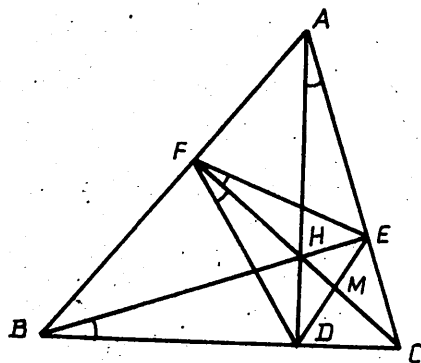


Fig. 193.

Soluție. $\widehat{BFC} \equiv \widehat{BEC} \in 90^\circ$ (ipoteză) $\Rightarrow$ BFEC inscriptibil; $\Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{AEF}$ (1). $\triangle AEF \sim \triangle ABC$, pentru că $\widehat{ABC} \equiv \widehat{AEF}$ (din (1)) și $\widehat{BAC}$ unghi comun.

Analog pentru celelalte triunghiuri.

b) $F \in \text{Int } \widehat{BCA} \Rightarrow |DE| \cap |CF| \neq \emptyset \Rightarrow |DE| \cap |CF| = \{M\} \Rightarrow M \in |DE| \Rightarrow M \in \text{Int } \widehat{DFE} \Rightarrow$

$FM \subset \text{Int } \widehat{DFE}$. (1) BFHD inscriptibil pentru că $m(\widehat{BFH}) + m(\widehat{BDH}) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ ($HF \perp AB$ și $HD \perp BC$ - ipoteză). $\Rightarrow m(\widehat{DFM}) = m(\widehat{HBD})$. La fel: AFHE inscriptibil pentru că $m(\widehat{AFH}) + m(\widehat{AEH}) = 180^\circ$ ($HE \perp AC$ și $HF \perp AB$ - ipoteză); $\Rightarrow m(\widehat{MFE}) = m(\widehat{HAE})$. Dar $\widehat{HAE} \equiv \widehat{HBD}$ (avînd același complement: $\widehat{AHE} \equiv \widehat{BHD}$ - opuse la vîrf); $\Rightarrow \widehat{DFM} \equiv \widehat{MFE}$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow FC$ bisectoarea unghiului $\widehat{DFE}$. Analog se arată și pentru celelalte 2 înălțimi ale triunghiului ABC că sînt bisectoare ale triunghiului ortic.

Problema 22. Se ia un punct M pe cercul circumscris unui triunghi ascuțitunghic ABC. Să se arate că proiecțiile P, Q, R ale punctului M pe BC, CA, AB sînt 3 puncte situate pe o dreaptă (dreapta lui Simson). Să se considere apoi cazul triunghiului obtuzunghic.

Soluție. Fie M pe arc mic $\widehat{AC}$ care nu-l conține pe B. (ABC ascuțitunghic $\Rightarrow m(\widehat{ABC}) < 90^\circ \Rightarrow \widehat{AC}$ este un arc mic). $\Rightarrow Q \in |AC|$. Patrulaterul ABCM fiind înscris în cerc $\Rightarrow m(\widehat{BAM}) + m(\widehat{BCM}) = 180^\circ$. Rezultă că unul din cele 2

unghiuri este obtuz. Fie $\widehat{BAM}$ obtuz. $\Rightarrow A \in |BR|$. Punctele Q și R aparțin cercului de diametru $|AM|$ și cum $Q \in |AC|$, iar $R \in |AA'|$ (semidreaptă opusă lui $|AB|$) și $M \in \text{Int } \widehat{A'AC} \Rightarrow |AM| \cap |RQ| \neq \emptyset$.

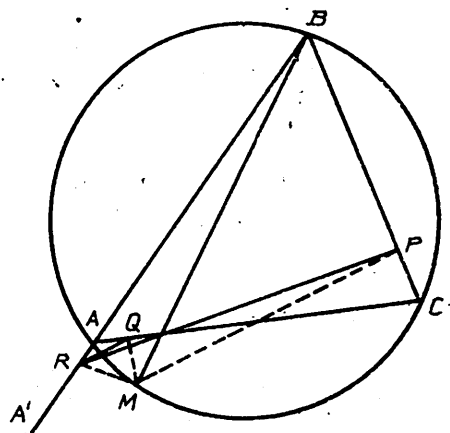


Fig. 194.

Rezultă că: $\widehat{MRQ} \equiv \widehat{MAQ} \equiv \widehat{MBP} \equiv \widehat{MRP}$; $\Rightarrow \widehat{MRQ} \equiv \widehat{MRP}$. Să arătăm că Q și P sînt de aceeași parte a lui MR. Din faptul că BPMP este convex $\Rightarrow I$ și B sînt de aceeași parte a lui RM; AQMR convex $\Rightarrow A, Q$ de aceeași parte a lui RM; $A \in RB \Rightarrow A$ este între B și R $\Rightarrow |AB| \cap |RM| = \emptyset \Rightarrow A$ și B de aceeași parte a lui RM; $\Rightarrow A, B, P, Q$ sînt de aceeași parte a lui RM; cum P și Q sînt de aceeași parte a lui RM și $m(\widehat{MRQ}) = m(\widehat{MRP}) \Rightarrow |RP| = |RQ| \Rightarrow R, Q, P$ sînt coliniare.

Dacă M este de aceeași parte a lui AC ca și B sau dacă triunghiul este obtuzunghic demonstrațiile sînt analoge.

$\Rightarrow R$ și Q sînt de o parte și de alta a dreptei $AM \Rightarrow AQMR$ este patrulater convex. Cum $m(\widehat{AQM}) + m(\widehat{ARM}) = 180^\circ$ ($MQ \perp AQ$ și $MR \perp AA'$ - ipoteză) $\Rightarrow AQMR$ patrulater inscriptibil. Analog se arată și că patrulaterul BPMP este inscriptibil.

$(M \in \text{Int } \widehat{ABC} \Rightarrow M \in \text{Int } \widehat{RBP}; R \in AB \text{ și } P \in BC \Rightarrow |RP| \cap |BM| \neq \emptyset; \Rightarrow P \text{ și } R \text{ de o parte și de alta a lui } BM; \Rightarrow BRMC \text{ convex; } m(\widehat{APM}) + m(\widehat{BRM}) = 180^\circ$ ($MP \perp BC$ și $MR \perp AB$).

Poziția relativă a două cercuri

Problemele de la pagina 98.

Problema 1. Două cercuri $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$ au razele $r_1 = 2$ și $r_2 = 3$, $\|O_1 O_2\| = d$. Să se studieze pozițiile relative ale celor 2 cercuri după valorile lui d .

Soluție.

- a) Dacă $d > r_1 + r_2 = 2 + 3 = 5$, deci dacă $d > 5$ cercurile sînt exterioare.
- b) Dacă $d = 5$ cercurile sînt tangente exterior.
- c) Dacă $r_2 - r_1 < d < r_2 + r_1$ adică $1 < d < 5$ cercurile sînt secante.
- d) Dacă $d < r_2 - r_1$, adică $d < 1$ cercurile sînt interioare.
- e) Dacă $d = 1$ cercurile sînt tangente interior.
- f) Dacă $d = 0$ cercurile sînt concentrice.

Problema 2. Se dă un cerc $C(O, r)$ și punctul O' , $\|OO'\| = 2$. Fie cercul $C(O', x)$. Să se studieze pozițiile relative ale celor 2 cercuri după valorile lui x , dacă $r = 3$.

Soluție.

- a) Cercuri exterioare dacă: $\|OO'\| > r + x$, adică $2 > 3 + x \Rightarrow x < -1$; imposibil.
- b) Cercuri tangente exterior dacă: $\|OO'\| = r + x$, adică $2 = 3 + x \Rightarrow x = -1$; imposibil.
- c) Cercuri secante dacă $|r - x| < \|OO'\| < r + x$, adică: $|3 - x| < 2 < 3 + x \Rightarrow 1 < x < 5$ sau: $x \in (1, 5)$.
- d) Tangente interior dacă: $\|OO'\| = |r - x| \Rightarrow 2 = |r - x| \Rightarrow x = 1$ sau $x = 5$.
- e) Cercuri interioare dacă $\|OO'\| < |3 - x| \Rightarrow 2 < |3 - x|$; obținem $x > 5$ sau $0 < x < 1$ adică $x \in (0, 1) \cup (5, \infty)$.

Problema 3. Fiind date cercurile $C(O_1, r)$, $C(O_2, 5)$ și $\|O_1 O_2\| = 2(r - 5)$, să se discute după valorile lui r pozițiile relative ale celor 2 cercuri.

Soluție. Cum $\|O_1 O_2\| \geq 0 \Rightarrow r - 5 \geq 0 \Rightarrow r \geq 5$.

- a) Cercuri exterioare: $2(r - 5) > r + 5 \Rightarrow r > 15$.
- b) Cercuri tangente exterior: $2(r - 5) = r + 5 \Rightarrow r = 15$.
- c) Cercuri secante: $|r - 5| < 2(r - 5) < r + 5 \Rightarrow r \in (5, 15)$.
- d) Cercuri tangente interior: $2(r - 5) = r - 5 \Rightarrow r = 5$.
- e) Cercuri interioare: $2(r - 5) < r - 5 \Rightarrow r < 5$ imposibil.

Problema 4. Să se arate că 2 cercuri tangente au o tangentă comună în punctul lor comun.

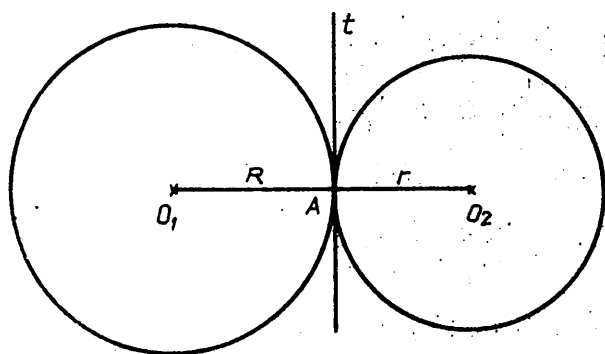


Fig. 195.

Soluție. Fie $C(O_1, R)$ și $C(O_2, r)$ tangente în A (considerăm cazul când cercurile sînt tangente exterior). $\|O_1 O_2\| = R + r$, adică $\|O_1 O_2\| = \|O_1 A\| + \|A O_2\|$; O_1, A, O_2 coliniare. Ducem o dreaptă $t \perp O_1 O_2$ astfel ca $A \in t$. Cum $A \in C(O_1, R)$ și $t \perp O_1 A \Rightarrow t$ este tangentă la $C(O_1, R)$. Cum $A \in C(O_2, r)$ și $t \perp O_2 A$, t este tangentă și la $C(O_2, r)$; t este tangentă comună celor 2 cercuri. Dacă cercurile sînt tangente interior $\|O_1 O_2\| = R - r \Rightarrow \|O_1 O_2\| = \|O_1 A\| - \|O_2 A\|$, sau: $\|O_1 A\| = \|O_1 O_2\| + \|O_2 A\| \Rightarrow O_1, O_2, A$ sînt coliniare. Dacă duc $t \perp O_1 O_2$ și $A \in t \Rightarrow O_1 A \perp t$ și $A \in C(O_1, R) \Rightarrow t$ este tangentă la cercul $C(O_1, R)$; $O_2 A \perp t$ și $A \in C(O_2, r) \Rightarrow t$ este tangentă la cercul $C(O_2, r) \Rightarrow t$ este o tangentă comună a celor 2 cercuri.

Problema 5. Să se arate că dacă 2 cercuri au interioarele disjuncte au tangente comune.

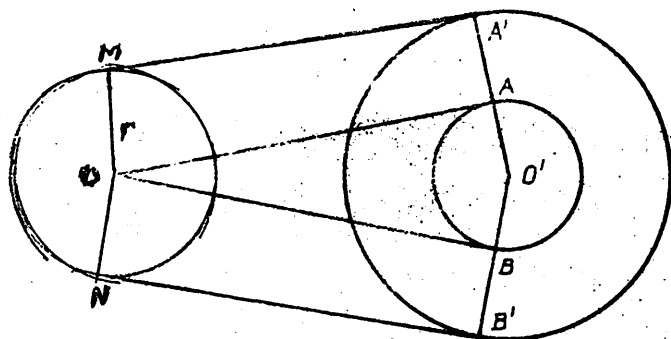


Fig. 196.

Soluție. Fie cele 2 cercuri cu interioarele disjuncte $C(O, r)$ și $C(O', R)$. Construim un cerc $C(O', r')$ unde $r' = R - r$. Conform teoremei 1, pag. 96, § 5, cap. 3, prin orice punct exterior unui cerc trec 2 drepte tangente la cerc. Construim deci cele 2 tangente din O la

$C(O', r')$. Fie A și B punctele de tangență cu $C(O', r) \Rightarrow O'A \cap C(O', R) = \{A'\}$ și $O'B \cap C(O', R) = \{B'\}$. Ducem $OM \parallel O'A'$ unde $M \in C(O, r)$ și $ON \parallel O'B'$, $N \in C(O, r)$. $OAA'M$ este dreptunghi pentru că $OM \parallel AA'$ și $|OM| \equiv |AA'|$, iar $m(\widehat{OAA'}) = 90^\circ$ (din construcție) $\Rightarrow OM \perp MA'$ și $AA' \perp MA'$; cum $A' \in C(O', R)$ și $M \in C(O, r) \Rightarrow MA'$ este tangentă ambelor cercuri, deci este o tangentă comună exterioară. Pentru construcția lui NB' se procedează la fel.

Dacă cu centrul în O' se construiește un cerc de rază $R + r$, procedându-se ca în cazul precedent se obțin tangentele comune interioare ale celor 2 cercuri.

Problema 6. Fie cercurile $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$. Să se arate că dacă există punctele $A \in C(O_1, r_1)$ și $B \in C(O_2, r_2)$ astfel încât $A \in \text{Int } C(O_2, r_2)$ și $B \in \text{Ext } C(O_2, r_2)$, atunci cercurile sînt secante.

Soluție. Ca să arătăm că cercurile sînt secante trebuie să arătăm că $|O_1O_2| = d > |r_1 - r_2|$. Presupunem prin absurd că $d \leq |r_1 - r_2|$. Dacă

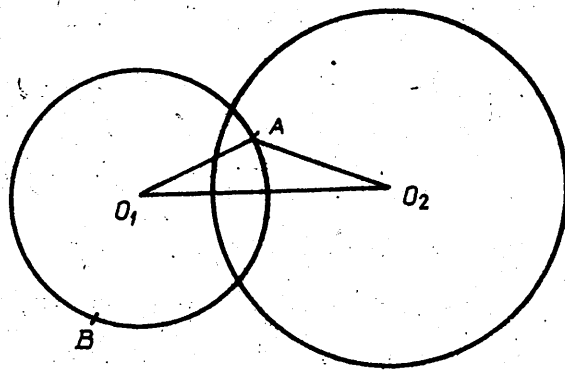


Fig. 197.

$d < |r_1 - r_2| \Rightarrow$ cercurile sînt interioare, deci sau toate punctele lui $C(O_1, r_1)$ sînt interioare $C(O_2, r_2)$, ceea ce contrazice ipoteza că există $B \in \text{Ext } C(O_2, r_2)$ sau toate punctele lui $C(O_1, r_1)$ sînt exterioare lui $C(O_2, r_2)$, ceea ce contrazice ipoteza că există $A \in C(O_1, r_1)$ și $A \in \text{Int } C(O_2, r_2)$.

Deci nu se poate ca $d < |r_1 - r_2|$.

Dacă $d = |r_1 - r_2|$ cercurile sînt tangente interioare. Dacă $r_1 < r_2$ rezultă că nu există $B \in C(O_1, r_1)$ și $B \in \text{Ext } C(O_2, r_2)$, ceea ce contrazice ipoteza. Dacă $r_1 > r_2$ nu există $A \in C(O_1, r_1)$ și $A \in \text{Int } C(O_2, r_2)$, ceea ce contrazice ipoteza.

Dacă $r_1 = r_2 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow$ cercuri concentrice, se arată analog că este contrazisă ipoteza. $\Rightarrow d = 0$ imposibil. $\Rightarrow d > |r_1 - r_2|$ și cum $d < |r_1 + r_2| \Rightarrow$ cercurile sînt secante.

Problema 7. Să se arate că dacă cercurile $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$ sînt tangente, axa lor radicală este tangenta comună, iar dacă cercurile sînt secante, axa lor radicală este dreapta determinată de punctele comune celor două cercuri.

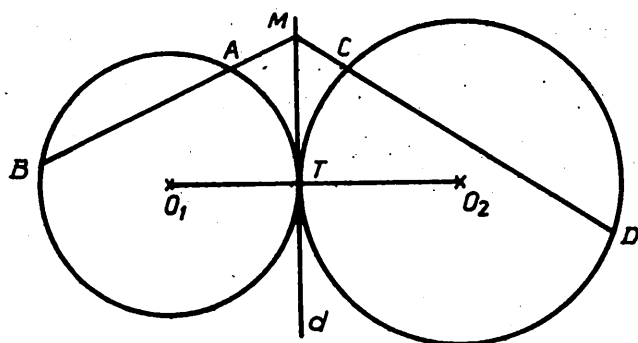


Fig. 198.

cercul $C(O_2, r_2)$ este $\|MC\| \cdot \|MD\| = \|MT\|^2$. Rezultă că orice punct al tangentei comune a celor 2 cercuri are aceeași putere față de cele 2 cercuri, deci

d este axa radicală a celor 2 cercuri.

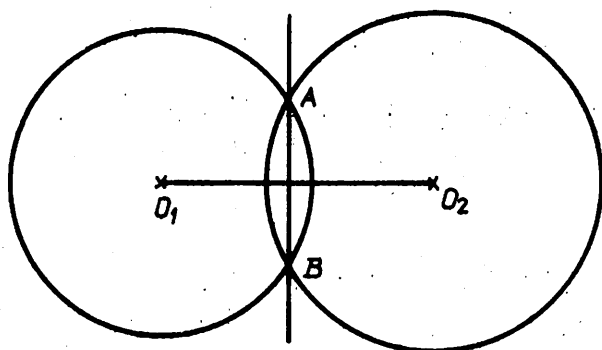


Fig. 199.

dreaptă și cum știm că axa radicală a 2 cercuri este o dreaptă (perpendiculară pe linia centrelor), rezultă că dreapta care trece prin A și B este axa radicală a celor 2 cercuri ($AB \perp O_1O_2$).

Problema 8. Să se construiască tangentele comune la două cercuri date.

Soluție. În problema 5, pag.98, § 5, cap. 3, am arătat construcția tangentele comune exterioare. Să construim acum și tangentele comune interioare și să vedem în ce caz cercurile admit tangente comune interioare sau exterioare. Fie $C(O, r)$ și $C(O', R)$ cercuri exterioare. Construim un cerc $C(O', R')$ unde $R' = R + r$. Ducem tangentele la acest cerc din punctul O. Fie

Soluție.

a) Presupunem că cele 2 cercuri sînt tangente. Fie d tangenta lor comună. Fie $M \in d$. Puterea lui M față de cercul $C(O_1, r_1)$ este $\|MA\| \cdot \|MB\| = \|MT\|^2$ unde MT este tangenta comună, T punctul comun (de tangență). Puterea lui M față de

b) Dacă cele 2 cercuri sînt secante, fie A și B punctele lor comune. A și B au puteri egale față de cele 2 cercuri, deci ele aparțin axei radicale. Cum prin 2 puncte distincte trece o singură

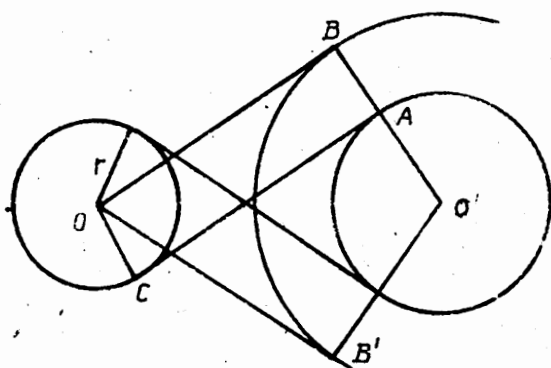


Fig. 200.

B și B' punctele de tangență. Notăm $\{A\} = C(O', R) \cap BO'$ și ducem $AC \parallel OB$ și $|AC| \equiv |OB|$; $\Rightarrow$ OCAB dreptunghi (paralelogram cu un unghi drept: $O'B \perp OB$, deci $m(\widehat{OBO'}) = 90^\circ$). $\Rightarrow \|OC\| = r \Rightarrow$ și $C \in C(O, r)$ și $OC \perp AC \Rightarrow AC$ tangentă comună interioară la cele 2 cercuri. Analog se duce cea paralelă cu OB' . Notăm $\|OO'\| = d$. Din modul de construcție a tangentelor rezultă că:

- a) dacă $d > r + R$ există și tangente comune interioare și exterioare;
- b) dacă $R - r < d < R + r$ există tangente comune exterioare și nu există tangente comune interioare;
- c) dacă $d < R - r$ nu există tangente comune;
- d) dacă $d = R + r$ există o tangentă comună interioară și 2 tangente comune exterioare;
- e) dacă $d = R - r$ există o singură tangentă comună în punctul de tangență al celor 2 cercuri.

Problema 9. Să se construiască tangentele la un cerc, paralele cu o dreaptă dată.

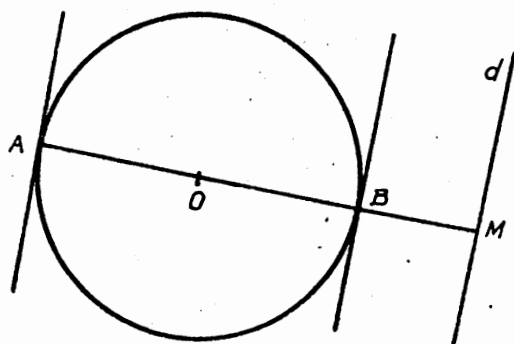


Fig. 201.

Soluție. Ducem un diametru al cercului perpendicular pe dreapta dată (pe care o notăm cu d). Acesta taie cercul în punctele A și B. Prin A și B ducem paralele la d. Ele vor fi tangente la cerc, pentru că, fiind paralele cu d $\Rightarrow$ sînt perpendiculare pe AB în punctele A și B care aparțin cercului.

Problema 10. Să se construiască cercul care trece prin 2 puncte date și este tangent unei drepte date.

Soluție .

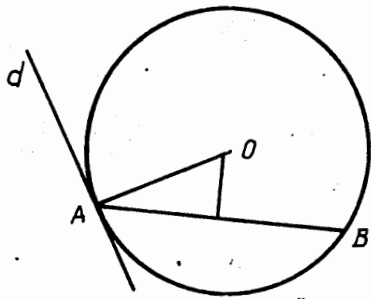


Fig. 202.

$|AB|$ cu perpendiculara în A pe d .

Cazul 1: cînd dreapta dată trece printr-unul din cele 2 puncte. Cum centrul O al cercului se găsește pe mediatoarea segmentului $|AB|$, construim această mediatoare. Cum cercul trebuie să fie tangent la dreapta d care trece prin A , raza dusă în A va trebui să fie perpendiculară pe d . Deci, centrul se află la intersecția mediatoarei lui

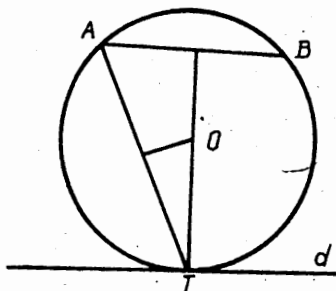


Fig. 203.

Cazul 2: dreapta $AB \parallel d$. Ducînd mediatoarea segmentului $|AB|$, aceasta va tăia pe d în punctul T , unde cercul va fi tangent la d , pentru că d este perpendiculară pe mediatoare. Centrul cercului va fi la intersecția mediatoarei segmentului $|AB|$ cu mediatoarea segmentului $|AT|$ sau $|BT|$.

Fig. 203. Cazul 3: dacă $AB \cap d = \{C\}$, $C \in |AB| \Rightarrow d$ este secantă cercului ce trece prin A și B , deci problema nu are soluție.

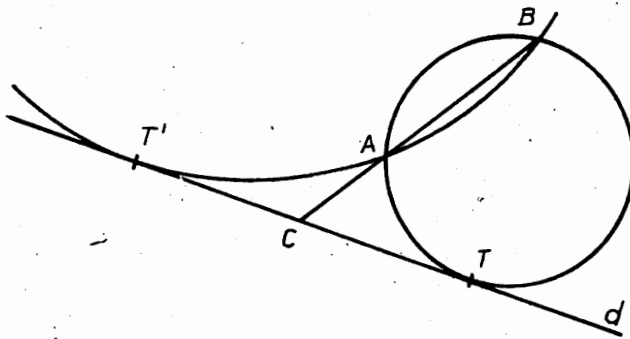


Fig. 204.

Cazul 4: dacă d nu este paralelă cu AB și $AB \cap d = \{C\}$, $B \in |AC|$. Puterea punctului C față de cercul pe care vrem să-l construim este $\|CA\| \cdot \|CB\| = \|CT\|^2$, unde T este punctul de tangență al cercului cu dreapta d . Pentru construirea lui

|CT| procedăm astfel: ducem din A o perpendiculară pe BC. Ea intersectează cercul de diametru |BC| în F, $m(\widehat{CFB}) = 90^\circ$, pentru că $\widehat{CFB}$ este un unghi înscris în semicerc. $\|CF\|^2 = \|CA\| \cdot \|CB\|$ (teorema catetei). Cercul de centru C și de rază |CF| intersectează dreapta d în 2 puncte: T și T'. Avem: $\|CT\|^2 = \|CT'\|^2 = \|CA\| \cdot \|CB\|$. Problema admite deci 2 soluții. Cercul căutat este circumscris fie triunghiului ABT, fie lui ABT'. Centrul său se află la intersecția mediatoarelor laturilor triunghiului.

Problema 11. Să se construiască cercul care trece prin punctele A și B și este tangent unui cerc dat $C(O, r)$.

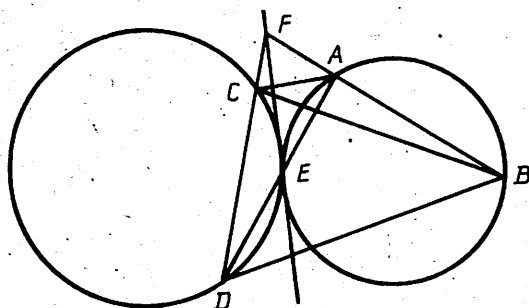


Fig. 205.

Soluție.

Cazul 1: când A și B sînt exterioare cercului. Fie E punctul de contact, necunoscut între cele 2 cercuri, în care trebuie să fie tangentă și fie F intersecția dintre AB și tangenta comună celor 2

cercuri. Dacă se duce secanta FCD la cercul dat, puterea punctului F față de cerc va fi $\|FE\|^2 = \|FD\| \cdot \|FC\| = \|FA\| \cdot \|FB\| \Rightarrow \frac{\|FA\|}{\|FC\|} = \frac{\|FD\|}{\|FB\|}$. Din această relație și din faptul că $\widehat{DFA}$ este unghi comun triunghiurilor DAF și FBC $\Rightarrow \triangle DAF \sim \triangle FBC \Rightarrow \widehat{FAD} = \widehat{FCB} \Rightarrow m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DCB})$ (avînd suplemente de măsuri egale); cum patrulaterul ABDC este convex, rezultă că este inscripțibil.

Deci, pentru a rezolva problema, ducem prin A și B un cerc care să intersecteze cercul dat în C și D. Punctul F rezultă ca intersecție între AB și CD, apoi din F se duce FE tangentă la cerc, care determină punctul de tangență E. Deoarece din F se pot duce 2 tangente la cerc: FE și FE', rezultă că problema va admite 2 soluții: va exista un cerc tangent exterior cu cel dat și unul tangent interior, ambele trecînd prin A și B. Centrele celor 2 cercuri se află la intersecția mediatoarei segmentului |AB| cu perpendiculara pe tangenta FE sau FE', în punctul de tangență.

Cazul 2: dacă unul din cele 2 puncte: A sau B se află în interiorul cercului, atunci problema nu admite soluție, cercurile care trec prin A și B fiind secante cu cercul dat.

Cazul 3: când A și B sînt interioare cercului dat, se procedează ca și în cazul 1, și se vor obține 2 soluții: cercuri tangente interior cu cel dat. Punctele A și B fiind interioare cercului, nu se poate construi un cerc exterior celui dat care să le conțină.

Problema 12. Să se construiască un cerc care să treacă printr-un punct dat și să fie tangent la 2 drepte date.

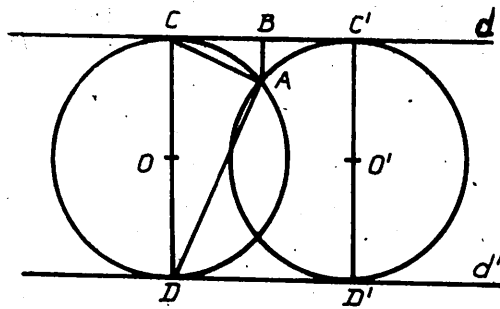


Fig. 206.

Soluție.

Cazul 1: dacă dreptele date d și d' sînt paralele și punctul A nu se află între ele, atunci problema nu are soluție. Dacă $d \parallel d'$ și A se află între ele, fie D și C punctele de tangență. Ducem $AB \perp d$, $B \in d$.

$\triangle ABC \sim \triangle ACD$ pentru că: $\widehat{CAD} \in 90^\circ$ (înscriș în semicerc), $\widehat{ABC} \in 90^\circ$ (construcție) $\Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{CAD}$; $\widehat{ADC} \equiv \widehat{ACB}$ (au aceeași măsură: $\frac{1}{2} m(\widehat{AC})$). $\Rightarrow \frac{\|AC\|}{\|DC\|} = \frac{\|AB\|}{\|AC\|} \Rightarrow \|AC\|^2 = \|AB\| \cdot \|DC\|$. Notăm $\|AB\| = h$ și $\|DC\| = 2r$ (sînt cunoscute).

Construim pe $\|AC\|$ astfel: ducem un semicerc de diametru $h + 2r$; pe acest diametru, de capete M și N , luăm un punct A , astfel ca $\|MA\| = h$ și $\|AN\| = 2r$. În A ridicăm o perpendiculară pe MN . Ea intersectează semicercul în C . Deci $CA \perp MN$ și cum $\widehat{MCN} \in 90^\circ$ (fiind înscriș în semicerc) $\Rightarrow \|AC\|^2 = \|MA\| \cdot \|AN\| = h \cdot 2r$ (teorema înălțimii).

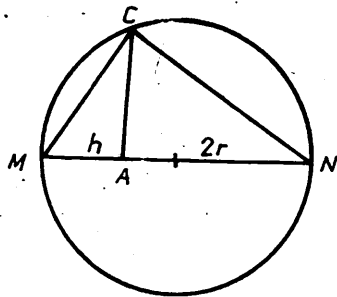


Fig. 207.

Dacă am găsit pe $\|AC\|$, cu centrul în punctul A , ducem un arc de cerc de rază $\|CA\|$; el intersectează pe d în 2 puncte C și C' , din care ducînd perpendiculare pe d' obținem punctele D și D' (picioarele acestor perpendiculare). Vor exista deci 2 cercuri, unul de diametru $\|CD\|$, celălalt de diametru $\|C'D'\|$, ambele trecînd prin A și reprezentînd soluții ale problemei. Deci problema are în acest caz 2 soluții.

Dacă A este pe una din cele 2 drepte paralele, atunci el coincide cu C sau cu D , cu C' sau cu D' .

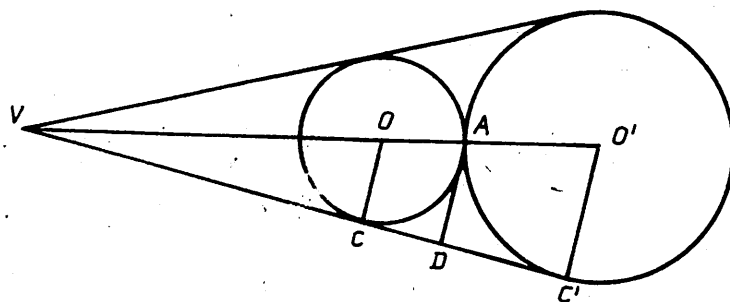


Fig. 208.

Cazul 2: $d \cap d' \neq \emptyset$ și A aparține bisectoarei unghiului $\widehat{V}$ (unul din unghiurile formate de dreptele d și d'). Fie O situat între A și V , centrul cercului căutat și C unul din punctele de tan-

gență; ($C \in d'$); fie $AD \perp d'$, $D \in d'$. Cum, $OC \perp d' \Rightarrow \Delta VOC \sim \Delta VAD$ ($OC \parallel AD$); $\Rightarrow \frac{\|OC\|}{\|AD\|} = \frac{\|VO\|}{\|VA\|}$. Notăm $\|AD\| = d$ și $\|VA\| = h$ (cunoscute). $\Rightarrow \frac{\|OC\|}{d} = \frac{h - \|OA\|}{h}$;

dar $\|OC\| = \|OA\|$ (raze) $\Rightarrow \|OA\| (h + d) = dh$; $\frac{\|OA\|}{d} = \frac{h}{h + d}$

Pentru aflarea lui $\|OA\|$ facem următoarea construcție auxiliară: pe semidreptele $|MN$ și $|MR$ fie punctele N respectiv Q astfel încât $\|MN\| = h + d$, $\|NP\| = h$, $\|MQ\| = d$; $\|QR\| = \|OA\|$ se va determina prin condiția ca $QN \parallel$

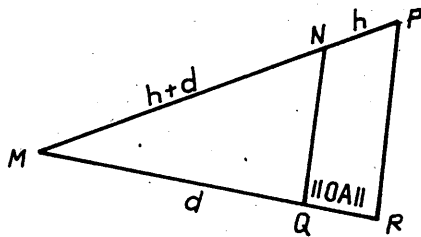


Fig. 209.

RP . Conform teoremei lui Thales rezultă că: $\frac{\|QR\|}{d} = \frac{h}{h + d}$. Rezultă $\|QR\| = \|OA\|$. Cu $\|OA\|$ aflat, din A se duce un arc de cerc de rază $\|OA\|$, care intersectează pe $|VA|$ în O , centrul cercului căutat și știind raza $\|OA\|$ se poate trasa cercul.

Dacă A se află între V și O' (centrul cercului căutat), raționament analog. Deci în acest

caz problema are 2 soluții.

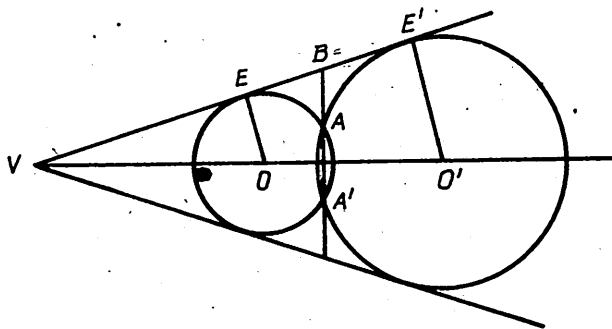


Fig. 210.

cercul trece și prin A' , simetricul lui A față de bisectoarea unghiului $\widehat{V}$. Presupunem că $A \notin d$ și $A \notin d'$; fie $AA' \cap d = \{B\}$ și E punctul de tangență al cercului cu dreapta d ; $\|BA\| \cdot \|BA'\| = \|BE\|^2$; $\|AB\|$ și $\|A'B\|$ fiind cunoscute se poate afla $\|BE\|$, deci punctul de tangență al cercului căutat cu dreapta d . Mediatoarea segmentului $|EA|$ intersectează bisectoarea unghiului $\widehat{V}$ în O , care este centrul cercului căutat. Pentru

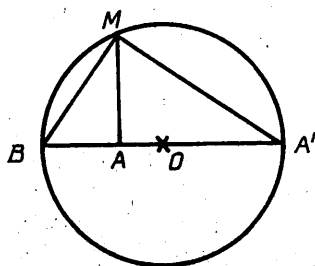


Fig. 211.

aflarea lui $|BE|$ procedăm astfel: construim un semicerc de diametru $|BA'|$ și luăm pe el un segment $|BA|$. În A ridicăm o perpendiculară pe BA' care intersectează semicercul în M .

$\widehat{A'MB} \in 90^\circ$ (fiind înscris în semicerc) $\|MB\|^2 = \|BA\| \cdot \|BA'\|$ (teorema catetei). $\|MB\| = \|EB\|$. Cu piciorul

Cazul 3: dacă $d \cap d' \neq \emptyset$

și A nu aparține bisectoarei unghiului $\widehat{V}$ (unul din unghiurile formate de d și d'), atunci, cercul căutat fiind tangent la d și la d' rezultă că centrul lui se află pe bisectoarea unghiului $\widehat{V}$. Această bisectoare este axă de simetrie pentru cerc. Deci cer-

compasului în B trasăm un arc de cerc de rază $\|MB\|$, care intersectează dreapta d în 2 puncte E și E' . Deci vor exista 2 cercuri care trec prin A și sînt tangente dreptelor d și d' . Deci și în acest caz problema are 2 soluții.

Problema 13. Se dă un cerc $C(O, r)$ în care este înscris triunghiul isoscel ABC ($\|AB\| \equiv \|AC\|$). Prin A se duce o secantă care intersectează BC în E și cercul în F . Să se arate că AB este tangentă la cercul circumscris triunghiului BEF .

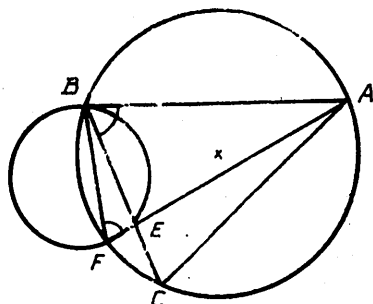


Fig. 212.

Soluție. $m(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AC})$, fiind unghi înscris în cerc; $m(\widehat{BFA}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AB})$. Cum $\|AB\| = \|AC\|$ (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{AC} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{BFA} \Rightarrow BA$ tangentă la cercul circumscris triunghiului BEF .

Problema 14. Se dă cercul $C(O, r)$ și punctul exterior M a cărui distanță la centrul cercului este $2r$. Din M se duce tangenta MN la cercul $C(O, r)$ și se prelungește $|MO|$ pînă ce intersectează cercul în P . Tangenta în P la cerc intersectează tangenta MN în Q . Să se arate că $2\|PQ\| = \|MQ\|$ și $\|QM\| = 2\sqrt{3}r$, iar triunghiul PQN este echilateral.

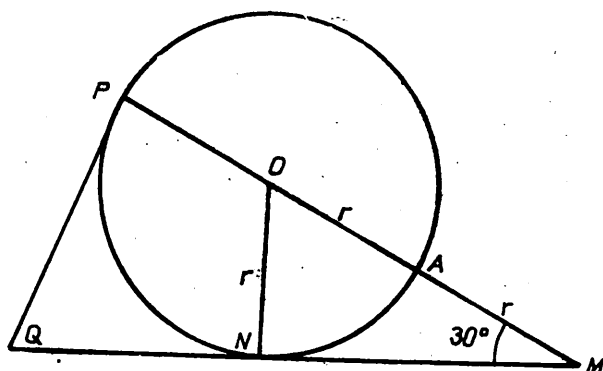


Fig. 213.

Soluție. Fie $\{A\} = MO \cap C(O, r)$; $\|MO\| = 2r$, $\|OA\| = r \Rightarrow \|AM\| = r$. $ON \perp MN \Rightarrow m(\widehat{ONM}) = 90^\circ$. Cum în triunghiul dreptunghic OMN , $\|OM\| = 2r = 2\|ON\| \Rightarrow m(\widehat{OMN}) = 30^\circ$; în triunghiul dreptunghic MPQ , $m(\widehat{PMQ}) = 30^\circ \Rightarrow \|PQ\| = \frac{\|QM\|}{2}$, iar $m(\widehat{PQN}) = 60^\circ$.

Dar $\|PQ\| \equiv \|QN\|$ (tangente duse din același punct la cerc); $\Rightarrow \|QN\| = \frac{1}{2} \|QM\|$. În triunghiul ONM (dreptunghic în N) aplicăm teorema lui Pitagora și obținem: $\|NM\|^2 = \|OM\|^2 - \|ON\|^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2 \Rightarrow \|NM\| = r\sqrt{3}$. Cum $\|QN\| = \frac{1}{2} \|QM\| \Rightarrow \|QN\| \equiv \|NM\| \Rightarrow \|QN\| = r\sqrt{3} \Rightarrow \|QM\| = 2r\sqrt{3}$. Cum $\|PQ\| \equiv \|QN\|$ și $m(\widehat{PQN}) = 60^\circ \Rightarrow PQN$ este echilateral.

Problema 15. Fiind date punctele A, C și $B \in [AC]$, ducem tangenta CT la cercul de diametru $[AB]$. Cercul cu centrul C și rază $[CT]$ intersectează AB în M și N. Să se arate că avem relația: $\|AM\| \cdot \|AN\| = \|AB\| \cdot \|AC\|$.

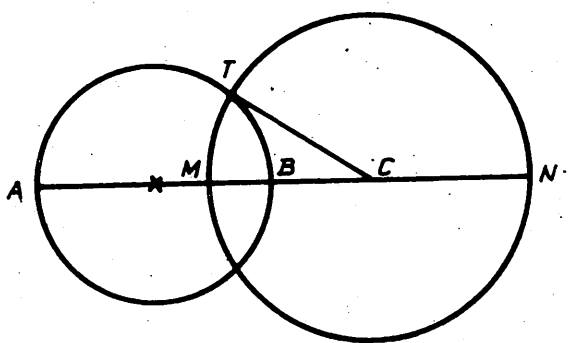


Fig. 214.

$$\Rightarrow \|AM\| \cdot \|AN\| = \|AB\| \cdot \|AC\|.$$

Problema 16. O dreaptă arbitrară d tăie 2 cercuri în punctele A, B, C, D și axa lor radicală în O. Să se arate că avem relațiile: $\frac{\|OA\|}{\|OB\|} = \frac{\|CA\|}{\|CB\|} = \frac{\|DA\|}{\|DB\|}$.

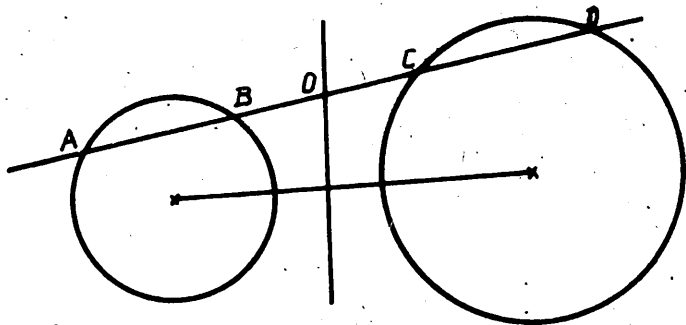


Fig. 215.

(unul interior și altul exterior segmentului) care împart segmentul în același raport.

Deci relația dată în problemă pentru a fi demonstrată nu este corectă.

Soluție. Scriem puterea punctului C față de cercul de diametru $[AB]$: $\|CB\| \cdot \|CA\| = \|CT\|^2$. Scriem puterea punctului A față de cercul de centru C: $\|AM\| \cdot \|AN\| = (\|AC\| - \|CT\|) \cdot (\|AC\| + \|CT\|) = \|AC\|^2 - \|CT\|^2 = \|AC\|^2 - \|CB\| \cdot \|CA\| = \|AC\| \cdot (\|AC\| - \|BC\|) = \|AC\| \cdot \|AB\|$ (Am folosit faptul că $\|CT\| = \|CM\| = r$).

Soluție. Vom arăta că relația cerută nu poate fi adevărată. Cum A, B, C, D coliniare (ipoteză), rezultă că punctele O, C, D împart segmentul $[AB]$ în același raport, ceea ce este imposibil, deoarece există numai 2 puncte

Lungimea cercului

Problemele de la pagina 101.

Problema 1. Să se afle măsura în radiani a unghiurilor de 30° , 45° , 20° , 12° , 135° .

Soluție. Cum măsura în radiani a unui unghi este măsura în radiani a unui arc de cerc, de pe un cerc de rază r , cu centrul în vârful unghiului, aparținând interiorului unghiului, avem: $\mu(\widehat{AB}) = \frac{\pi}{180^\circ} m(\widehat{AB})$.

$$\text{Deci: } \mu(\widehat{AB}) = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 30^\circ = \frac{\pi}{6}; \mu(\widehat{AB}) = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 45^\circ = \frac{\pi}{4}; \mu(\widehat{AB}) = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 20^\circ = \frac{\pi}{9}; \mu(\widehat{AB}) = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 12^\circ = \frac{\pi}{15}; \mu(\widehat{AB}) = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 135^\circ = \frac{3\pi}{4}.$$

Problema 2. Să se calculeze o valoare aproximativă a lui π cu ajutorul unui octogon regulat înscris într-un cerc.

Soluție. Am arătat în problema 2, pag. 92, § 4, cap. 3, că lungimea laturii unui octogon regulat înscris în cerc este: $l_8 = r \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Perimetrul octogonului va fi: $8 r \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Putem lua cu aproximație π egal cu raportul între perimetrul octogonului și diametrul cercului, deci: $\pi \approx \frac{8 r \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2 r} = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}}$; $\sqrt{2} \approx 1,41$; $2 - \sqrt{2} \approx 0,59$; $\sqrt{0,59} \approx 0,76$; $\pi \approx 4 \cdot 0,76$; $\pi \approx 3,04$.

Problema 3. Fie cercurile $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$ și patrulaterale convexe $A_1 B_1 C_1 D_1$ și $A_2 B_2 C_2 D_2$ înscrise în cercurile $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$. Să se arate că dacă patrulateralele sînt asemenea, atunci:

$$\frac{\text{Perimetrul } A_1 B_1 C_1 D_1}{r_1} = \frac{\text{Perimetrul } A_2 B_2 C_2 D_2}{r_2}.$$

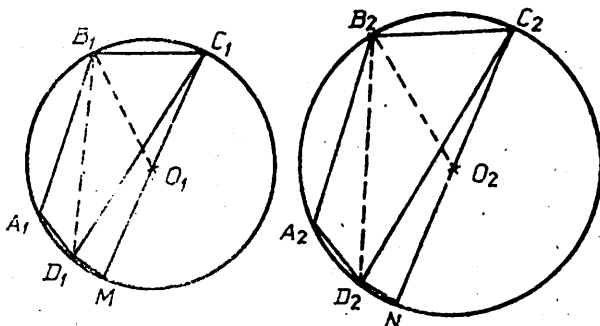


Fig. 216.

Soluție. Patrulateralele fiind asemenea rezultă:

$$\frac{\|A_1 B_1\|}{\|A_2 B_2\|} = \frac{\|B_1 C_1\|}{\|B_2 C_2\|} = \frac{\|C_1 D_1\|}{\|C_2 D_2\|} = \frac{\|D_1 A_1\|}{\|D_2 A_2\|} = \frac{\text{Perimetrul } A_1 B_1 C_1 D_1}{\text{Perimetrul } A_2 B_2 C_2 D_2}.$$

$\triangle B_1 C_1 D_1 \sim \triangle B_2 C_2 D_2$ pentru că: $\widehat{B_1 C_1 D_1} = \widehat{B_2 C_2 D_2}$ (ipoteză: $\widehat{A_1} \equiv \widehat{A_2}$, $\widehat{B_1} \equiv \widehat{B_2}$, $\widehat{C_1} \equiv \widehat{C_2}$, $\widehat{D_1} \equiv \widehat{D_2}$); și $\frac{\|B_1 C_1\|}{\|B_2 C_2\|} = \frac{\|C_1 D_1\|}{\|C_2 D_2\|}$ (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{B_1 D_1 C_1} = \widehat{B_2 D_2 C_2} \Rightarrow$

$\widehat{B_1 C_1} = \widehat{B_2 C_2} \Rightarrow \widehat{B_1 M} = \widehat{B_2 N}$ (pentru că am luat $|C_1 M|$ și $|C_2 N|$ diametre în cele 2 cercuri). $\Rightarrow \widehat{B_1 C_1 M} = \widehat{B_2 C_2 N} \Rightarrow \triangle B_1 C_1 O_1 \sim \triangle B_2 C_2 O_2$ (triunghiuri isoscele cu unghiurile de la bază congruente) $\Rightarrow \frac{\|B_1 C_1\|}{\|B_2 C_2\|} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\text{Perimetrul } A_1 B_1 C_1 D_1}{\text{Perimetrul } A_2 B_2 C_2 D_2}$.

Deci:
$$\frac{\text{Perimetrul } A_1 B_1 C_1 D_1}{r_1} = \frac{\text{Perimetrul } A_2 B_2 C_2 D_2}{r_2}.$$

Problema 4. Să se afle lungimea unui arc cuprins între laturile unui unghi la centru cu măsura de 1 radian și măsura în grade a acestui unghi.

Soluție. $\mu(\widehat{AB}) = \frac{l_{\widehat{AB}}}{r} \Rightarrow l_{\widehat{AB}} = r \mu(\widehat{AB}) = r.$
 $\mu(\widehat{AB}) = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot m(\widehat{AB}) \Rightarrow m(\widehat{AB}) = \frac{180^\circ \cdot 1}{\pi} \approx 57^\circ.$

Problema 5. Fie cercurile $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$ pentru care $\|O_1 O_2\| = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = \sqrt{3}$. Să se arate că sînt secante și să se afle perimetrul figurii formate de cele 2 arce mici determinate de punctele comune celor 2 cercuri.

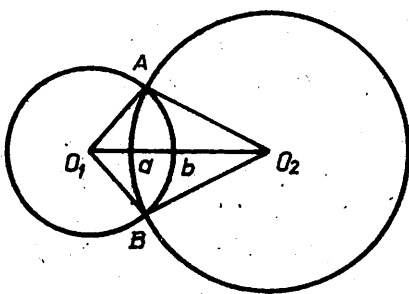


Fig. 217.

Soluție. Cum $\|O_1 O_2\| = 2 \Rightarrow \sqrt{3} - 1 < \|O_1 O_2\| < r_1 + r_2 = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow$ cercurile sînt secante.

$\|O_1 A\| = 1$; $\|O_2 A\| = \sqrt{3}$; $\|O_1 O_2\| = 2 \Rightarrow \|O_1 A\|^2 + \|O_2 A\|^2 = \|O_1 O_2\|^2 \Rightarrow \widehat{AO_1 O_2} \in 90^\circ$ (conform reciprocei teoremei lui Pitagora). Cum $\|O_1 A\| = 1 = \frac{1}{2} \|O_1 O_2\| \Rightarrow m(\widehat{AO_2 O_1}) = 30^\circ \Rightarrow m(\widehat{AO_1 O_2}) = 60^\circ \Rightarrow m(\widehat{AO_1 B}) = 120^\circ$ și $m(\widehat{AO_2 B}) = 60^\circ$.

Dar $l_{\widehat{AB}} = \frac{\pi r \alpha}{180^\circ}$; $l_{AaB} = \frac{\pi \sqrt{3} \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi \sqrt{3}}{3}$ și $l_{AbB} = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 120^\circ}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow \text{Perimetrul} = \frac{\pi}{3} (\sqrt{3} + 2).$

Problema 6. Fie $|AB|$ un diametru al cercului $C(O, r)$ și M, N două puncte distincte, $M \in |AB|$, $N \in |AB|$ și cercurile $C(M, r_1)$, $C(O, r_1)$, $C(N, r_1)$ astfel încât perechile de cercuri $C(M, r_1)$, $C(O, r_1)$ și $C(O, r_1)$, $C(N, r_1)$ să fie tangente exterioare, iar cercurile $C(M, r_1)$ și $C(N, r_1)$ să fie tangente interioare cu cercul $C(O, r)$. Să se calculeze suma lungimilor cercurilor $C(M, r_1)$, $C(O, r_1)$, $C(N, r_1)$ în funcție de r . Generalizare.

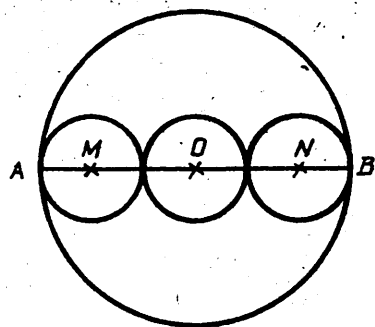


Fig. 218.

Soluție. $r = 3 r_1; \Rightarrow r_1 = \frac{r}{3}; L_1 = L_2 = L_3 = 2\pi \frac{r}{3}; L_1 + L_2 + L_3 = \frac{2\pi r}{3} + \frac{2\pi r}{3} + \frac{2\pi r}{3} = 2\pi r.$

În cazul general:

$r = n r_1 \Rightarrow r_1 = \frac{r}{n}$; toate cele n cercuri au raza cît r_1 . Deci:

$$L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n = 2\pi \left(\frac{r}{n} + \frac{r}{n} + \dots + \frac{r}{n} \right) = 2\pi n \cdot \frac{r}{n} = 2\pi r.$$

Deci suma lungimilor cercurilor rămîne $2\pi r$

și cînd divizarea lui $|AB|$ se face prin mai multe puncte.

Exerciții recapitulative, pagina 101.

Problema 1. Să se arate că lungimea segmentului determinat de punctele de tangență de pe tangenta comună la două cercuri tangente exterioare este media geometrică a diametrelor celor 2 cercuri.

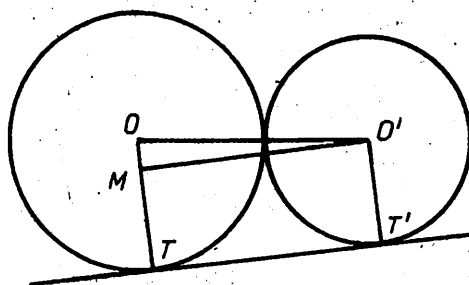


Fig. 219.

Soluție. Fie O și O' centrele celor 2 cercuri și R, r razele lor. Cercurile fiind tangente exterioare $\|OO'\| = R + r$; fie T și T' punctele de tangență ale celor 2 cercuri cu tangenta lor comună; ducem $O'M \perp OT$, $M \in OT$. $\|OM\| = R - r$. În triunghiul $OO'M$ dreptunghic în M ($O'M \perp OT$) aplicăm teorema

lui Pitagora și obținem: $\|O'M\|^2 = \|OO'\|^2 - \|OM\|^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr = r.$

$TT'O'M$ este dreptunghi, pentru că: $MO' \parallel TT'$ și $MT \parallel O'T'$ (perpendiculare pe aceeași dreptă) și $\widehat{O'MT} = 90^\circ$ (construcție). $\Rightarrow \|TT'\|^2 = 4Rr = (2R)(2r).$

Deci $\|TT'\|$ este media geometrică a diametrelor celor 2 cercuri.

Problema 2. Să se calculeze raza cercului circumscris unui triunghi isoscel ABC, în care $\|AB\| = \|AC\| = 20$, $\|BC\| = 24$.

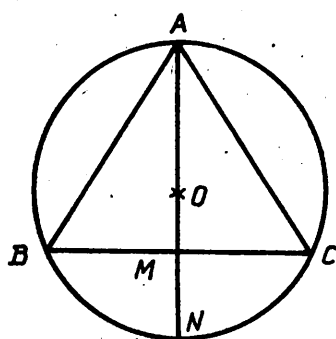


Fig. 220.

Soluție. Ducem $AM \perp BC$, $M \in BC$. $m(\widehat{AMB}) = \frac{1}{2} [m(\widehat{AB}) + m(\widehat{NC})] = \frac{1}{2} [m(\widehat{AC}) + m(\widehat{NC})]$, pentru că $|AB| \equiv |AC| \Rightarrow \widehat{AB} \equiv \widehat{AC}$. Dar $m(\widehat{AMB}) = 90^\circ$ ($AM \perp BC$) (construcție); $m(\widehat{AC}) + m(\widehat{NC}) = 180^\circ \Rightarrow |AN|$ diametru. $\Rightarrow O \in |AN|$ ($\{N\} = AM \cap C(O, r)$). Triunghiul ABC fiind isoscel și $AM \perp BC \Rightarrow \|MB\| = \|MC\| = 12$. În triunghiul ABM avem: $\|AM\|^2 = \|AB\|^2 - \|BM\|^2 = 400 - 144 = 256 \Rightarrow \|AM\| = 16$; $m(\widehat{ABN}) = 90^\circ$ (unghi înscris în semicerc - $|AN|$ fiind diametru). $\Rightarrow \|AB\|^2 = \|AM\| \cdot \|AN\|$ (conform teoremei catetelor). $\Rightarrow 20^2 = 16 \cdot 2R$; $\Rightarrow R = \frac{25}{2}$.

Problema 3. Distanța de la un punct oarecare al unui cerc la o coardă este media geometrică a distanțelor de la același punct la tangentele duse la cerc prin extremitățile coardei.

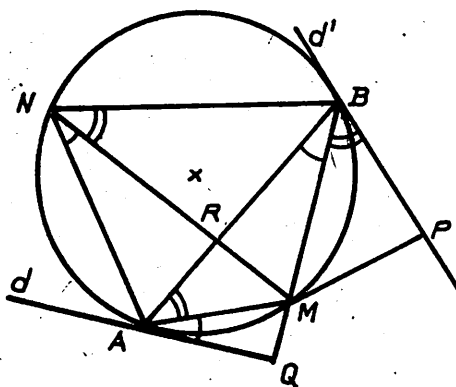


Fig. 221.

Soluție. Fie coarda $|AB|$, un punct M pe arcul mic $\widehat{AB}$, d și d' tangentele în A și B la cerc; $MQ \perp d$, $Q \in d$; $MP \perp d'$, $P \in d'$; $MR \perp AB$, $R \in |AB|$; prelungim $|MR|$ până întâlnește din nou cercul în N . $\Delta RMB \sim \Delta RNA$ pentru că $m(\widehat{ANR}) = m(\widehat{RBM}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AM})$; $\widehat{ARN} \equiv \widehat{MRB}$ (opuse la vîrf). $\Rightarrow \frac{\|MR\|}{\|AR\|} = \frac{\|MB\|}{\|RB\|}$ (1). $\Delta NAR \sim \Delta AMQ$ pentru că: $\widehat{AQM} \equiv \widehat{ARN}$ (unghiuri drepte); $\widehat{ANM} \equiv \widehat{QAM}$ (au ca măsură $\frac{1}{2} m(\widehat{AM})$). $\Rightarrow \frac{\|AR\|}{\|MQ\|} = \frac{\|AN\|}{\|NR\|}$

$\Rightarrow \frac{\|AN\|}{\|AM\|} = \frac{\|NR\|}{\|AQ\|} \Rightarrow \Delta MBP \sim \Delta NRB$ pentru că: $\widehat{MPB} \equiv \widehat{NRB}$ (unghiuri drepte), $\widehat{MBP} \equiv \widehat{MNB}$ (au aceeași măsură: $\frac{1}{2} m(\widehat{MB})$). $\Rightarrow \frac{\|MP\|}{\|RB\|} = \frac{\|MB\|}{\|NB\|} = \frac{\|BP\|}{\|NR\|}$ (3). Din (3)

$\Rightarrow \|MP\| = \frac{\|MB\| \cdot \|RB\|}{\|NB\|}$. Din (2) $\Rightarrow \|MQ\| = \frac{\|AR\| \cdot \|AM\|}{\|AN\|}$. Din (1) $\Rightarrow \|MR\| = \frac{\|AR\| \cdot \|MB\|}{\|AN\|}$

$\Rightarrow \frac{\|AR\| \cdot \|MB\|}{\|AN\|} \Rightarrow \|MP\| \cdot \|MQ\| = \frac{\|MB\| \cdot \|AR\| \cdot \|RB\| \cdot \|AM\|}{\|AN\| \cdot \|NB\|} = \|MR\| \cdot \frac{\|RB\| \cdot \|AM\|}{\|NB\|}$ (4).

Din (1) $\Rightarrow \|MR\| = \frac{\|AR\| \cdot \|RB\|}{\|NR\|}$. Dar $\triangle ARM \sim \triangle NRB$ pentru că: $\widehat{ARM} \equiv \widehat{NRB}$ (opuse la vîrf); $\widehat{MAR} \equiv \widehat{RNB}$ (au aceeași măsură: $\frac{1}{2} m(\widehat{MB}) \Rightarrow \frac{\|AR\|}{\|NR\|} = \frac{\|AM\|}{\|NB\|} \Rightarrow \|MR\| = \frac{\|RB\| \cdot \|AM\|}{\|NB\|}$. Din (4) $\Rightarrow \|MP\| \cdot \|MQ\| = \|MR\| \cdot \|MR\| = \|MR\|^2 \Rightarrow \|MP\| \cdot \|MQ\| = \|MR\|^2$.

Problema 4. Fie 2 puncte fixe A și B situate pe diametrul unui semicerc și egal depărtate de centru, iar M și N două puncte variabile pe semicerc, astfel ca $AM \parallel BN$. Să se demonstreze că produsul: $\|AM\| \cdot \|BN\|$ este constant.

Soluție. Fie $|PQ|$ un diametru al cercului, A și $B \in |PQ|$. Prolungim $|MA|$ și $|NB|$ pînă înțînesc din nou cercul în punctele M' și respectiv N' . Ducem $OP' \perp MM'$, $P' \in |MM'|$; $OS \perp NN'$, $S \in |NN'| \Rightarrow OP' \perp MM'$, $OS \perp NN'$ și $MM' \parallel NN' \Rightarrow P', O, S$ coliniare.

$\triangle AOP' \equiv \triangle BOS$ (cazul: I.U.): $|OA| \equiv |OB|$ (ipoteză), $\widehat{AOP'} \equiv \widehat{BOS}$ (opuse la vîrf), $\widehat{OP'A} \equiv \widehat{OSB}$ (unghiuri drepte) $\Rightarrow |OP'| \equiv |OS| \Rightarrow |MM'| \equiv |NN'|$ (fiind coarde egal depărtate de centru). $\Rightarrow |M'P'| \equiv |SN|$ (ca jumătăți de coarde congruente).

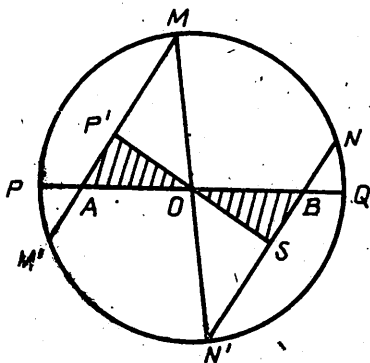


Fig. 222.

Tot din congruența triunghiurilor AOP' și BOS rezultă că $|AP'| \equiv |SB|$. Din $|M'P'| \equiv |SN|$ și $|AP'| \equiv |SB| \Rightarrow |M'A| \equiv |NB|$ (1). Puterea punctului A față de cerc este: $\|AM\| \cdot \|AM'\| = \|AP\| \cdot \|AQ\|$; $\|AM\| \cdot \|BN\| = \|AP\| \cdot \|AQ\| = \text{constant}$ (am ținut seama de (1)).

Deci $\|AM\| \cdot \|BN\| = \text{constant}$.

Problema 5. Fie H ortocentrul unui triunghi ABC, iar A', B', C' picioarele înălțimilor. Să se arate că: $\|HA\| \cdot \|HA'\| = \|HB\| \cdot \|HB'\| = \|HC\| \cdot \|HC'\|$.

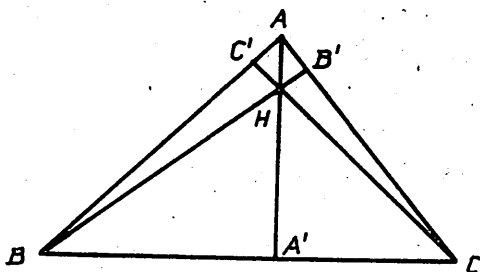


Fig. 223.

Soluție. Fie H ortocentrul unui triunghi ABC. $\triangle AHB' \sim \triangle HBA'$, pentru că: $\widehat{HB'A} \equiv \widehat{HA'B} \in 90^\circ$; $\widehat{AHB'} \equiv \widehat{BHA'}$ (opuse la vîrf) $\Rightarrow \frac{\|HA'\|}{\|HB'\|} = \frac{\|HB\|}{\|HA\|} \Rightarrow \|HA'\| \cdot \|HA\| = \|HB'\| \cdot \|HB\|$. La fel: $\triangle HCB' \sim \triangle HBC'$ ($\widehat{CHB'} \equiv \widehat{BHC'}$ - opuse la vîrf; $\widehat{HB'C} \equiv \widehat{HC'B} \in 90^\circ$) $\Rightarrow \frac{\|HB'\|}{\|HC'\|} = \frac{\|HC\|}{\|HB\|}$.

$\Rightarrow \frac{\|HA'\|}{\|HB'\|} = \frac{\|HC\|}{\|HB\|} \Rightarrow \|HA'\| \cdot \|HB\| = \|HB'\| \cdot \|HC\|$. Deci $\|HA\| \cdot \|HA'\| = \|HB\| \cdot \|HB'\| = \|HC\| \cdot \|HC'\|$.

Problema 6. Pe laturile unui hexagon regulat se construiesc în exterior pătrate care au câte o latură comună cu hexagonul. Să se arate că vîrfurile acestor pătrate, diferite de vîrfurile hexagonului, formează un dodecagon regulat.

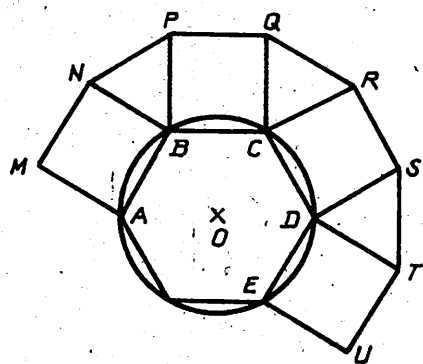


Fig. 224.

Soluție. Hexagonul fiind regulat rezultă că toate pătratele au laturi de aceeași lungime: 1. Toate unghiurile hexagonului sînt congruente și au măsura 120° . $m(\widehat{ABC}) = 120^\circ$; $m(\widehat{NBP}) = 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 60^\circ$. Triunghiul $\widehat{BNP}$ are $|BN| = |BP|$ și $m(\widehat{NBP}) = 60^\circ$; $\Rightarrow$ triunghiul BNP este echilateral; $\Rightarrow |NP| = |BN| = 1$ și $m(\widehat{BNP}) = m(\widehat{NPB}) = 60^\circ \Rightarrow |MN| = |NP| = |PQ| = \dots$ și $m(\widehat{MNP}) = m(\widehat{NPQ}) = \dots = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.

La fel se arată că toate celelalte laturi sînt congruente și toate celelalte unghiuri sînt congruente; deci poligonul este regulat.

Problema 7. Dacă 3 cercuri sînt două câte două tangente exterioare, care este raportul între suma lungimilor acestor cercuri și perimetrul triunghiului format de centrele lor.

Soluție. Fie O , O' și O'' centrele celor 3 cercuri. Perimetrul triunghiului $OO'O''$ este: $2r + 2r' + 2r'' = 2(r + r' + r'')$. $L_1 = 2\pi r$; $L_2 = 2\pi r'$; $L_3 = 2\pi r''$; $\frac{2\pi r + 2\pi r' + 2\pi r''}{2(r + r' + r'')} = \pi$.

Problema 8. Considerăm trapezul $ABCD$ cu laturile paralele $|AB|$ și $|CD|$; fie E intersecția dreptei AD cu cercul circumscris triunghiului BCD și F intersecția dreptei AD cu paralela din C la BE . Presupunînd că $D \in |AE|$, să se arate că:

- 1) Patrulaterul $ABCF$ este inscriptibil.
- 2) $|BC|$ este medie geometrică între $|AD|$ și $|EF|$.

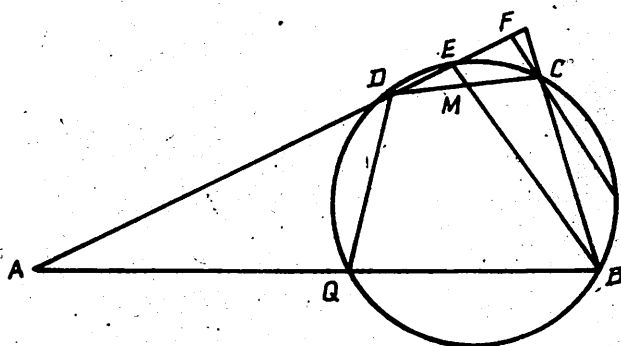


Fig. 225.

Soluție 1) $m(\widehat{DEB}) = m(\widehat{DCB}) = \frac{1}{2} m(\widehat{DQB})$; $m(\widehat{EFC}) = m(\widehat{DEB})$ ($FC \parallel EB$). $\Rightarrow \widehat{EFC} \equiv \widehat{DCB}$. Dar $m(\widehat{DCB}) + m(\widehat{CBA}) = 180^\circ$ (pentru că $ABCD$ trapez). $m(\widehat{EFC}) + m(\widehat{CBA}) = m(\widehat{DCB}) + m(\widehat{CBA}) = 180^\circ$. Deci: $m(\widehat{AFC}) + m(\widehat{CBA}) = 180^\circ$. $ADCB$ convexe $\Rightarrow ABCF$ convexe. $\Rightarrow ABCF$ inscriptibil.

2) $\triangle BCM \sim \triangle AQD$ pentru că: $\widehat{AQD} \equiv \widehat{DCB}$ (patrulaterul DCBQ inscriptibil);
 $\widehat{DAQ} \equiv \widehat{EDC}$ (corespondente: $DC \parallel AB$) și $\widehat{EDC} \equiv \widehat{EBC}$ (au măsura: $\frac{1}{2} m(\widehat{EC})$) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \widehat{DAQ} \equiv \widehat{EBC}$ adică $\widehat{DAQ} \equiv \widehat{MBC} \Rightarrow \frac{\|BC\|}{\|AQ\|} = \frac{\|MB\|}{\|AD\|} = \frac{\|CM\|}{\|QD\|}$. Dar $|QD| \equiv |BC|$
 $(QB \parallel DC \Rightarrow \widehat{QD} \equiv \widehat{CB} \Rightarrow |QD| \equiv |CB|) \Rightarrow \|BC\|^2 = \|AQ\| \cdot \|CM\|$. Puterea punctului A față de cerc: $\|AQ\| \cdot \|AB\| = \|AD\| \cdot \|AE\| \Rightarrow \|AQ\| = \frac{\|AD\| \cdot \|AE\|}{\|AB\|}$.
 $EM \parallel FC$; în triunghiul DFC aplicăm teorema lui Thales: $\frac{\|DE\|}{\|EF\|} = \frac{\|DM\|}{\|MC\|} \Rightarrow \|CM\| = \frac{\|EF\| \cdot \|DM\|}{\|DE\|}$; $\triangle EDM \sim \triangle EAB$ ($DM \parallel AB$) $\Rightarrow \frac{\|AE\|}{\|DE\|} = \frac{\|AB\|}{\|DM\|} \Rightarrow \frac{\|AE\|}{\|AB\|} = \frac{\|DE\|}{\|DM\|} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{\|AE\|}{\|AB\|} \cdot \frac{\|DM\|}{\|DE\|} = 1$.

$$\text{Deci: } \|BC\|^2 = \|AQ\| \cdot \|CM\| = \frac{\|AD\| \cdot \|AE\|}{\|AB\|} \cdot \frac{\|EF\| \cdot \|DM\|}{\|DE\|} = \|AD\| \cdot \|EF\|.$$

$$\text{Deci: } \|BC\|^2 = \|AD\| \cdot \|EF\|.$$

Problema 9. Se dau două cercuri $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$ tangente exterioare. Prin punctul lor comun de tangență T se duc două drepte arbitrare ATC și DTB care intersectează cercul $C(O_1, r_1)$ în A și D și $C(O_2, r_2)$ în C și B. Să se arate că patrulaterul ABCD este trapez.

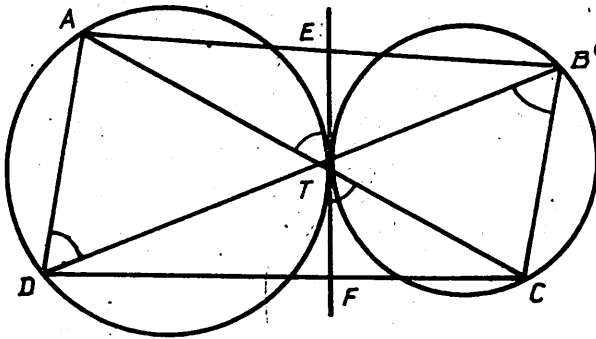


Fig. 226.

Soluție. Fie EF tangenta comună a celor 2 cercuri. $m(\widehat{ADT}) = m(\widehat{ATE}) = \frac{1}{2} \cdot m(\widehat{AT})$. Dar $m(\widehat{ATE}) = m(\widehat{FTC})$ (opuse la vîrf). $m(\widehat{FTC}) = m(\widehat{TBC}) = \frac{1}{2} m(\widehat{TC})$
 $\Rightarrow m(\widehat{ADT}) = m(\widehat{TBC}) \Rightarrow AD \parallel BC$ (unghiurile alterne interne fiind congruente).

Dacă $|DT| \equiv |TB| \Rightarrow \triangle ATD \equiv \triangle BTC$ ($\widehat{ATD} \equiv \widehat{BTC}$ - opuse la vîrf; $|DT| = |TB|$ - ipoteza făcută; $\widehat{ADT} \equiv \widehat{TBC}$ - demonstrație) $\Rightarrow |AT| \equiv |TC|$; deci în acest caz ABCD este paralelogram. Dacă $|DT| \neq |TB| \Rightarrow |AD| \neq |BC|$ și cum $AD \parallel BC \Rightarrow ABCD$ trapez.

Problema 10. Se dă triunghiul ABC înscris în cercul $C(O, r)$, $O \in \text{Int } ABC$; se duce înălțimea AD și diametrul prin A. Se proiectează vîrfurile B și C pe acest diametru în E și F și se intersectează DE și DF cu AC și AB respectiv în G și H. Să se demonstreze că punctele A, H, D, G sînt conciclice.

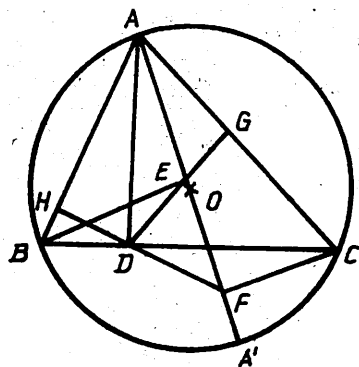


Fig. 227.

Soluție. Fie $BE \perp AA'$ și $FC \perp AA'$, $E \in AA'$ și $F \in AA'$. $DE \cap AC = \{G\}$; $DF \cap AB = \{H\}$;
 $m(\widehat{BEA}) = m(\widehat{ADB}) = 90^\circ$ (pentru că $BE \perp AA'$ și $AD \perp BC$ - ipoteză). Rezultă că patrulaterul ABDE este inscriptibil. $\Rightarrow m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{EDC})$. Analog: $m(\widehat{AFC}) = m(\widehat{ADC}) = 90^\circ$ (pentru că: $FC \perp AA'$ și $AD \perp BC$ - ipoteză) $\Rightarrow ACFD$ inscriptibil. $\Rightarrow m(\widehat{FDC}) = m(\widehat{FAC})$.

Cum $\widehat{BAE} \equiv \widehat{EDC}$ și $\widehat{FAC} \equiv \widehat{FDC}$ prin adunare obținem: $m(\widehat{BAE}) + m(\widehat{FAC}) = m(\widehat{EDC}) + m(\widehat{FDC})$; $\Rightarrow m(\widehat{BAG}) = m(\widehat{GDF})$. Dar $m(\widehat{GDF}) + m(\widehat{GDH}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{HAG}) + m(\widehat{GDH}) = 180^\circ \Rightarrow AGDH$ inscriptibil, deci punctele A, H, D, G sînt conciclice.

Problema 11. Fie cercurile $C(O_1, r_1)$, $C(O_2, r_2)$ secante în A și B. Prin punctele A și B se duc două secante paralele CAD și EBF care intersectează cele două cercuri, respectiv în punctele C, D și E, F. Să se demonstreze că patrulaterul CDFE este paralelogram.

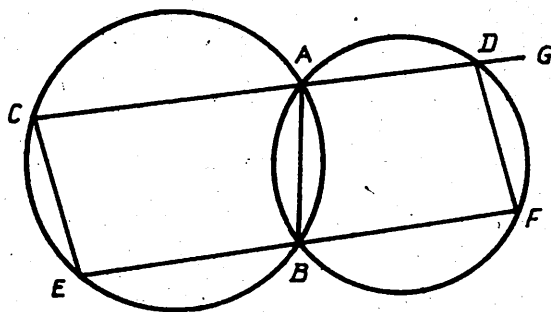


Fig. 228.

Soluție. Patrulaterul ABEC este înscris în cerc; $\Rightarrow m(\widehat{C}) + m(\widehat{ABE}) = 180^\circ$. Dar $m(\widehat{ABE}) + m(\widehat{ABF}) = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} \equiv \widehat{ABF}$. ABFD înscris în cerc; $\Rightarrow m(\widehat{ABF}) + m(\widehat{ADF}) = 180^\circ$ și știm că $m(\widehat{ADF}) + m(\widehat{ADG}) = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ABF} \equiv \widehat{ADG}$. Din $\widehat{C} \equiv \widehat{ABF}$ și $\widehat{ABF} \equiv \widehat{ADG} \Rightarrow \widehat{C} \equiv \widehat{ADG} \Rightarrow EC \parallel FD$ (1).

Cum $CD \parallel EF$ (ipoteză) (2). $\Rightarrow$ Din (1) și (2) $\Rightarrow CDFE$ paralelogram.

Problema 12. Se dau 2 cercuri $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$, cercul $C(O_2, r_2)$ trecînd prin centrul O_1 . Tangentele comune la aceste cercuri au punctele de contact cu cercul $C(O_2, r_2)$ în A și B. Să se demonstreze că dreapta AB este tangentă cercului $C(O_1, r_1)$.

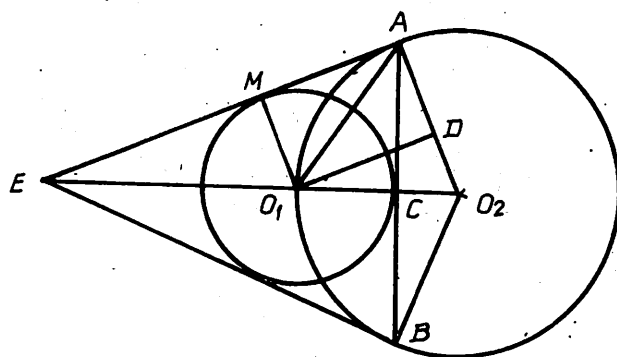


Fig. 229.

(unghiuri drepte). $\Rightarrow |O_1C| \equiv |AD|$. Dar $|AD| \equiv |MO_1|$, pentru că ADO_1M este dreptunghi (avînd unghiurile A, D, M drepte). $\Rightarrow \|O_1C\| = \|MO_1\| = r_1$. Cum $\|O_1C\| = r_1$ și $AC \perp O_1C$ (prin construcție). $\Rightarrow AC$ tangentă la $C(O_1, r_1)$.

Problema 13. Se consideră două cercuri $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$ tangente exterioare în punctul T. Tangenta exterioară comună AB se intersectează cu tangenta în T la cele 2 cercuri în punctul C, iar cu linia centrelor O_1O_2 în punctul M.

1) Să se calculeze lungimea segmentelor $|AB|$ și $|TC|$ în funcție de r_1 și r_2 .

2) Să se arate că dreptele AT și BT sînt perpendiculare.

3) Să se calculeze lungimea segmentului $|MO_1|$ și măsura unghiului $\widehat{O_1MA}$ în cazul particular: $r_1 = a$, $r_2 = 3a$.

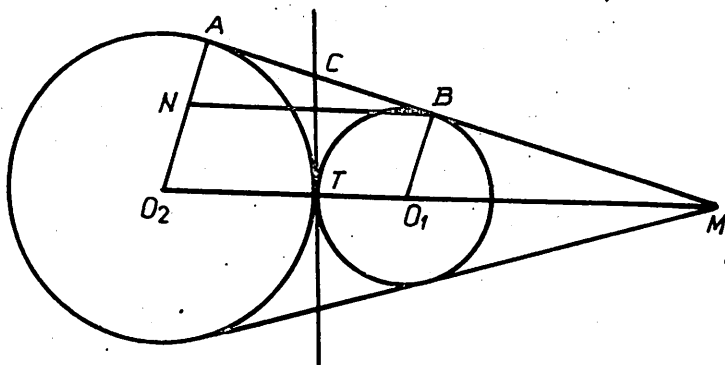


Fig. 230.

Soluție. $\|AO_2\| = \|O_1O_2\| = r_2$ (ipoteză). $\Rightarrow AO_1O_2$ este triunghi isoscel cu baza $|AO_1|$. Ducem $AC \perp O_1O_2$ și $O_1D \perp AO_2$. $|AD|$ și $|O_1C|$ sînt congruente pentru că $\triangle AO_1D \equiv \triangle O_1AC$ (cazul: I.U.): $|AO_1|$ - latură comună; $\widehat{O_1AD} \equiv \widehat{AO_1C}$ (unghiuri de la baza triunghiului isoscel); $\widehat{ADO_1} \equiv \widehat{ACO_1}$

Soluție. Ducem $NB \parallel$

$\|O_1O_2\|$. În triunghiul BAN, dreptunghic în A, avem:

$$\begin{aligned} \|BA\|^2 &= \|NB\|^2 - \|AN\|^2 = \\ &= (r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2 = \\ &= 4r_1r_2. \Rightarrow \|BA\| = 2\sqrt{r_1r_2}. \end{aligned}$$

$|CA| \equiv |CT|$ și $|CT| \equiv |CB|$ (tangente din același punct exterior la cerc).

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|CT\| &= \frac{1}{2} \|AB\|. \Rightarrow \|CT\| = \\ &= \sqrt{r_1r_2}. \end{aligned}$$

2) În triunghiul ATB: $|TC| \equiv |AC| \equiv |CB|$; $\Rightarrow$ ATB este dreptunghic în T, conform problemei 9, pag. 52, § 1, cap. 2. $\Rightarrow AT \perp TB$.

3) $\triangle MBO_1 \sim \triangle MAO_1$ ($O_1B \parallel O_2A$ - fiind perpendiculare pe aceeași dreaptă).

$$\Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{\|MO_1\|}{\|MO_2\|} \Rightarrow \frac{a}{3a} = \frac{\|MO_1\|}{\|MO_2\|} ; \text{ dar } \|MO_2\| = \|MO_1\| + 4a ; \text{ înlocuind obținem:}$$

$$\|MO_1\| = 2a \text{ și } \|MO_2\| = 6a.$$

În triunghiul O_1BM dreptunghic în B: $\|O_1B\| = a$ și $\|O_1M\| = 2a$; $\Rightarrow$
 $\Rightarrow m(\widehat{O_1MB}) = 30^\circ \Rightarrow m(\widehat{O_1MA}) = 30^\circ$.

CAPITOLUL IV
ELEMENTELE DE GEOMETRIE ANALITICA

Coordonate în plan

Problemele de la pagina 104.

Problema 1. Figurați punctele: $M(3,5)$, $N(-1,4)$, $P(2,-2)$, $Q(0,4)$,
 $R(-6,0)$.

Soluție.

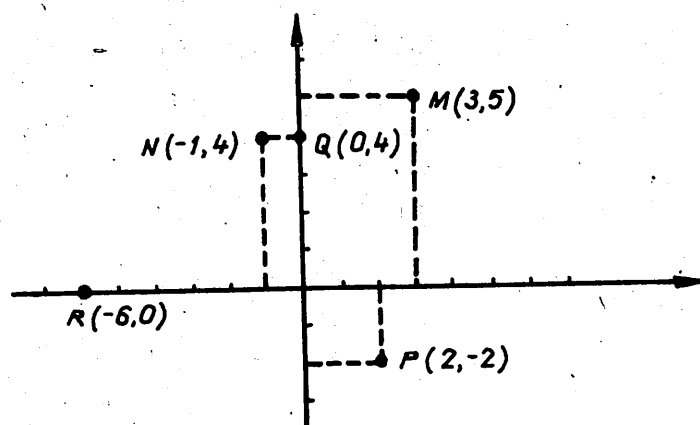


Fig. 231.

Problema 2. Aflați locul geometric al punctelor $M(x, 2)$, când x ia toate valorile din $\mathbb{R}$.

Soluție. Orice punct M al locului geometric are proprietatea că $y = 2$, deci are aceeași distanță până la axa xx' , când $x \in \mathbb{R}$. Conform problemei 10, pag. 52, § 1, cap. 2, locul geometric al punctelor situate la aceeași distanță de o dreaptă dată și aflate în același semiplan (unul din cele 2 semiplane limitate de dreaptă), este o dreaptă paralelă cu cea dată. Deci, în cazul nostru, locul geometric este o dreaptă paralelă cu axa xx' și aflată la o distanță de 2 unități de ea, în semiplanul în care $y > 0$. Deci locul geometric este dreapta de ecuație $y = 2$.

Problema 3. Aflați locul geometric al punctelor care au abscisa 5.

Soluție. Fie M un punct al locului geometric. $\Rightarrow M(5, y)$. Când y ia diferite valori din R , iar $x = 5$, punctul M se mișcă pe o dreaptă paralelă cu yy' . Ea are ecuația $x = 5$. Deci locul geometric al punctelor M aflate la distanță constantă de 5 unități față de axa yy' este o dreaptă paralelă cu axa yy' și anume dreapta de ecuație $x = 5$.

Problema 4. Să se afle coordonatele mijlocului segmentului $[CD]$, știind că $C(1, 6)$ și $D(5, 3)$.

Soluție. Mijlocul segmentului are coordonatele date de formulele:
 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ și $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, (x_1, y_1) și (x_2, y_2) fiind coordonatele capetelor segmentului. $\Rightarrow x = \frac{1 + 5}{2} = 3$ și $y = \frac{6 + 3}{2} = \frac{9}{2}$; $\Rightarrow$ mijlocul segmentului este punctul de coordonate $(3, \frac{9}{2})$.

Problema 5. Fie $M(2, -1)$ și $N(4, 3)$. Să se afle coordonatele simetricelor lui M față de originea O și față de punctul N . Să se arate că abscisele și ordonatele a două puncte simetrice față de originea O a axelor de coordonate sînt numere opuse.

Soluție. Fie M' simetricul lui M față de $O \Rightarrow |MO| \equiv |M'O|$ și $O \in [MM']$. Deci O este mijlocul segmentului $[MM']$. $\Rightarrow x_O = \frac{x_M + x_{M'}}{2}$ și $y_O = \frac{y_M + y_{M'}}{2}$. Inlocuind coordonatele cunoscute obținem: $0 = \frac{-1 + y_{M'}}{2}$ și $0 = \frac{2 + x_{M'}}{2}$ și $0 = \frac{-1 + y_{M'}}{2}$; $\Rightarrow x_{M'} = -2$ și $y_{M'} = 1$. $\Rightarrow M'(-2, 1)$.

Pentru N procedăm la fel. Fie N' simetricul lui N față de O .

$x_O = \frac{x_N + x_{N'}}{2}$ și $y_O = \frac{y_N + y_{N'}}{2}$; $\Rightarrow x_{N'} = -4$ și $y_{N'} = -3$; deci $N'(-4, -3)$.

Cazul general: fie $P(x_P, y_P)$ și simetricul lui față de origine $P'(x_{P'}, y_{P'})$; $\frac{x_P + x_{P'}}{2} = 0$ și $\frac{y_P + y_{P'}}{2} = 0 \Rightarrow x_P = -x_{P'}$ și $y_P = -y_{P'}$. Deci coordonatele punctelor P și P' , simetrice față de O , sînt numere opuse.

Problema 6. Aflați distanța dintre punctele:

a) $M(-2, 7)$ și $N(5, -2)$; b) $P(-\frac{\pi}{2}, 2)$ și $Q(\frac{\pi}{2}, 2)$; c) $S(-2\sqrt{5}, -4\sqrt{5})$ și $T(6\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$; d) $P(a, b+1)$ și $Q(a-3, b)$.

Soluție. Formula cu care calculăm distanța între 2 puncte este:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, unde (x_1, y_1) și (x_2, y_2) sînt coordonatele celor două puncte.

$$a) d(M, N) = \sqrt{(-2 - (-5))^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{130}.$$

$$b) d(P, Q) = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)^2 + (2 - 2)^2} = \sqrt{\pi^2} = \pi.$$

$$c) d(S, T) = \sqrt{(6\sqrt{5} + 2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5} + 4\sqrt{5})^2} = \sqrt{320 + 180} = 10\sqrt{5}.$$

$$d) d(P, Q) = \sqrt{(a - 3 - a)^2 + (b - b - 1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10},$$

Problema 7. Să se determine x știind că distanța dintre punctele $P(-5, 2)$ și $Q(7, x)$ este 13.

Soluție. $d(P, Q) = \sqrt{(7 + 5)^2 + (x - 2)^2} = 13$. Ridicăm la pătrat:
 $144 + x^2 - 4x + 4 = 169 \Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0 \Rightarrow x_1 = 7$ și $x_2 = -3$. Deci există două puncte care îndeplinesc condiția din problemă și anume: $Q(7, 7)$ și $Q'(7, -3)$.

Problema 8. Să se arate că triunghiul cu vîrfurile în punctele $M(1, 2)$, $N(3, -4)$ și $P(5, -2)$ este dreptunghic.

Soluție. Aplicăm reciproca teoremei lui Pitagora. Calculăm lungimile laturilor:

$$\begin{aligned} \|MN\|^2 &= (3 - 1)^2 + (-4 - 2)^2 = 4 + 36 = 40; \|MP\|^2 = (5 - 1)^2 + (-2 - 2)^2 = 32; \\ \|NP\|^2 &= (5 - 3)^2 + (-2 + 4)^2 = 4 + 4 = 8; \text{ se observă că: } \|MP\|^2 + \|NP\|^2 = \|MN\|^2 = 40; \end{aligned}$$

rezultă că triunghiul MNP este dreptunghic în P.

Problema 9. Să se arate că triunghiul cu vîrfurile în punctele: $M(1, 2)$, $N(4, 5)$, $P(a, 6-a)$ este isoscel, oricare ar fi a număr real, $a \neq \frac{5}{2}$.

$$\text{Soluție. } \|MP\|^2 = (a-1)^2 + (6-a-2)^2 = 2a^2 - 10a + 17.$$

$$\|NP\|^2 = (4-a)^2 + (5-6+a)^2 = 2a^2 - 10a + 17; \|MN\|^2 = 9 + 9 = 18.$$

$$\text{Observăm că } \|MP\|^2 = \|NP\|^2 \Rightarrow \|MP\| = \|NP\|; \Rightarrow \text{MNP este isoscel.}$$

Condiția $a \neq \frac{5}{2}$ este pusă ca să excludem cazul cînd punctele sînt coliniare. Ca să scriem ecuația dreptei ce trece prin punctele M și N folosim funcția: $f(x) = a'x + b; f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Avem condițiile: $f(1) = 2$ și $f(4) = 5; \Rightarrow a' + b = 2$ și $4a' + b = 5; \Rightarrow b = 1$ și $a' = 1; \Rightarrow f(x) = x + 1$. Condiția ca $P \notin MN$ este ca $f(a) \neq 6 - a; \Rightarrow a + 1 \neq 6 - a \Rightarrow 2a \neq 5 \Rightarrow a \neq \frac{5}{2}$.

Problema 10. Să se arate că patrulaterul cu vîrfurile în punctele: $M(1, 5)$ și $N(\frac{2}{5}, \frac{19}{5})$, $P(2, 3)$ și $Q(\frac{13}{5}, \frac{21}{5})$ este dreptunghi.

Soluție.

$$d(M, N) = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5};$$

$$d(P, Q) = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}; \Rightarrow |MN| \equiv |PQ| \quad (1).$$

$$d(M, Q) = \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{80}{25}} = \frac{4\sqrt{5}}{5};$$

$$d(N, P) = \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{80}{25}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}; \Rightarrow |MQ| \equiv |NP| \quad (2). \text{ Din (1) și (2)}$$

$\Rightarrow$ MQPN paralelogram (3).

Calculăm lungimile diagonalelor. $d(M, P) = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$; $d(N, Q) = \sqrt{\frac{421}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{125}{25}} = \sqrt{5}$. $\Rightarrow |MP| \equiv |NQ|$ (4). Din (3) și (4) $\Rightarrow$ MQPN dreptunghi.

Problema 11. Să se arate că triunghiul cu vîrfurile $M(1, 2)$, $N(6, -1)$ și $P(5, -2)$ este dreptunghic.

Soluție. Arătăm că are 2 laturi perpendiculare. Condiția de perpendicularitate este: $(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) = 0$. La noi (x_1, y_1) este $N(6, -1)$; (x_2, y_2) este $M(1, 2)$ și (x_0, y_0) este $P(5, -2)$. Inlocuim:
 $(6 - 5)(1 - 5) + (-1 + 2)(2 + 2) = -4 + 4 = 0$; $\Rightarrow MP \perp NP$; $\Rightarrow$ MNP este dreptunghic în P.

Problema 12. Fie $M(2, 3)$, $N(3, 2)$. Să se afle punctul $P(x, 0)$, știind că $MP \perp MN$.

Soluție. Condiția de perpendicularitate: $(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) = 0$. Inlocuim: $(3 - 2)(x - 2) + (2 - 3)(0 - 3) = 0 \Rightarrow x - 2 + 3 = 0$.
 $\Rightarrow x = -1$; $\Rightarrow P(-1, 0)$.

Problema 13. Fie $M(1, 3)$, $N(-3, 5)$. Să se afle intersecția axei ordonate cu mediatoarea segmentului $|MN|$.

Soluție. Fie $P(x, y)$ un punct pe mediatoare. Mediatoarea trece prin mijlocul Q al segmentului $|MN|$, unde $Q(-1, 4)$. Punem condiția de perpendicularitate:

laritate: $MQ \perp PQ$; $(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) = 0$, unde (x_0, y_0) este $Q(-1, 4)$. $\Rightarrow (1 + 1)(x + 1) + (3 - 4)(y - 4) = 0 \Rightarrow 2(x + 1) - (y - 4) = 0 \Rightarrow 2x - y + 6 = 0$ (1). Punctul de pe axa yy' care se află și pe mediatoarea segmentului IMN are $x = 0$ și verifică și relația (1). $\Rightarrow -y + 6 = 0$; $\Rightarrow y = 6$; $\Rightarrow$ Punctul căutat este $E(0, +6)$.

Ecuția dreptei

Problemele de la pagina 109.

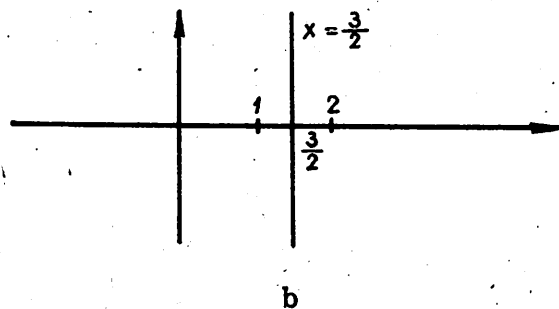
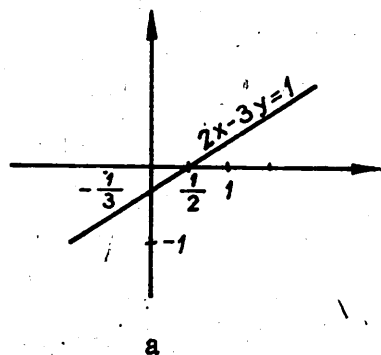
Problema 14. Să se reprezinte grafic ecuațiile: a) $2x - 3y = 1$; b) $2x = 3$; c) $5y - 4 = 0$; d) $3x - y = 0$.

Soluție. a) $x = 0$
 $y = 0$

$$y = -\frac{1}{3};$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$b) x = \frac{3}{2}$$



$$c) y = \frac{4}{5}$$

$$d) x = 0; y = 0; x = 1, y = 3.$$

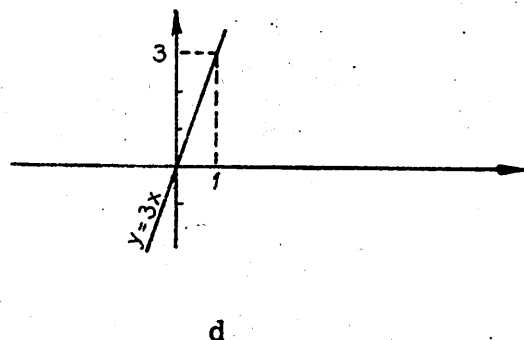
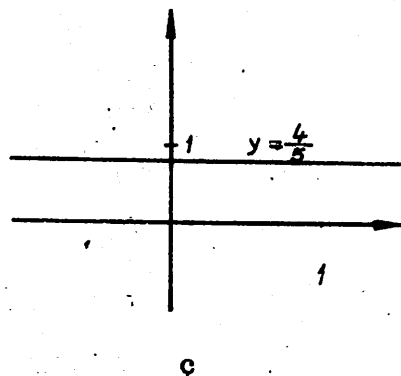


Fig. 232.

Problema 15. Să se determine a și b astfel ca punctele $P_1(2, 3)$ și $P_2(1, -5)$ să fie situate pe dreapta de ecuație $3x - ay - b = 0$.

Soluție. P_1 aparține dreptei; $\Rightarrow 3 \cdot 2 - a \cdot 3 - b = 0$; $3a + b = 6$.
 P_2 aparține dreptei; $\Rightarrow 3 \cdot 1 + a \cdot 5 - b = 0 \Rightarrow 5a - b = -3$. Rezolvăm sistemul format de ecuațiile: $3a + b = 6$ și $5a - b = -3$ și obținem: $a = \frac{3}{8}$ și $b = \frac{39}{8}$.

Problema 16. Fie P_1 punctul de abscisă 5 al dreptei d de ecuație: $2x - 3y = 7$. Să se determine ecuația dreptei d' , perpendiculară pe d în P_1 .

Soluție. $x = 5 \Rightarrow 10 - 3y = 7 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow P_1(5, 1)$. Mai alegem un punct pe dreapta d : de exemplu: $x = 2 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow P_2(2, -1)$. Un punct de pe dreapta d' este $P(x, y)$. Condiția de perpendicularitate: $d \perp d'$:
 $(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) = 0$ devine: $(2 - 5)(x - 5) + (-1 - 1)(y - 1) = 0$
 $\Rightarrow -3(x - 5) - 2(y - 1) = 0$; $-3x - 2y + 17 = 0 \Rightarrow 3x + 2y - 17 = 0$;
(ecuația dreptei d').

Problema 17. Fie $x - 2y = 5$ ecuația dreptei P_1P_2 , unde $P_1(2, y_1)$ și $P_2(x_2, 3)$. Să se scrie ecuația dreptei perpendiculare pe dreapta P_1P_2 în P_1 .

Soluție. $x = 2 \Rightarrow 2 - 2y = 5 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \Rightarrow P_1(2, -\frac{3}{2})$.
 $y = 3 \Rightarrow x - 6 = 5 \Rightarrow x = 11 \Rightarrow P_2(11, 3)$. Fie $d \perp P_1P_2$ și $P_3(x, y) \in d$. Condiția de perpendicularitate: $(x_1 - x_0)(x_2 - x_0) + (y_1 - y_0)(y_2 - y_0) = 0$;
 $(11 - 2)(x - 2) + (3 + \frac{3}{2})(y + \frac{3}{2}) = 0$ de unde după efectuarea calculelor obținem ecuația: $4x + 2y - 5 = 0$.

Coeficientul unghiular al dreptei

Problemele de la pagina 111.

Problema 18. Să se scrie ecuația dreptei determinată de punctele: $P_1(1, -1)$ și $P_2(-3, -3)$.

Soluție. Ecuația are forma: $y = mx + n$. P_1 aparține dreptei: $\Rightarrow m \cdot 1 + n = -1$; $m + n = -1$; P_2 aparține dreptei: $\Rightarrow -3m + n = -3$; rezolvând sistemul format de cele 2 ecuații obținem: $m = \frac{1}{2}$ și $n = -\frac{3}{2}$; $\Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

Problema 19. Să se scrie ecuația dreptei care conține punctul $M(1, -5)$ și care este paralelă cu dreapta de ecuație: $5x + 2y - 1 = 0$.

Soluție. Fie $y = mx + n$ ecuația dreptei d , pe care vrem s-o determinăm. $M \in d; \Rightarrow m + n = -5; m = -n - 5$; ecuația devine: $y = (-n - 5)x + n$. Ecuația dreptei d' este: $5x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$; $d \parallel d'; \Rightarrow m = m'; \Rightarrow -n - 5 = -\frac{5}{2}; \Rightarrow n = -\frac{5}{2}; \Rightarrow m = \frac{5}{2} - 5 \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$; deci ecuația dreptei d este: $y = -\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$ sau: $2y + 5x + 5 = 0$.

Problema 20. Să se arate că punctele: $M(1, 2)$, $N(-5, 7)$ și $P(-1, -2)$ nu sînt coliniare.

Soluție. Scriem ecuația dreptei MN : $y = mx + n$. Punem condițiile ca M și N să aparțină dreptei: $m + n = 2$ și $-5m + n = 7$; rezolvînd sistemul obținem: $m = -\frac{5}{6}$ și $n = \frac{17}{6}$. Deci ecuația dreptei MN va fi $y = -\frac{5}{6}x + \frac{17}{6}$; sau: $5x + 6y - 17 = 0$.

Verificăm dacă P aparține dreptei MN , deci înlocuim $x = -1$ și $y = -2$ în ecuația dreptei MN : $-5 - 12 - 17 \neq 0; \Rightarrow P$ nu aparține dreptei MN ; deci P, M, N nu sînt coliniare.

Problema 21. Sînt coliniare punctele $M(1, 1)$, $N(-5, 5)$, $P(0, \frac{5}{3})$?

Soluție. Ecuația dreptei MN : $y = mx + n$; condițiile ca M și N să aparțină dreptei: $m + n = 1$ și $-5m + n = 5$; rezolvînd obținem: $m = -\frac{2}{3}$ și $n = \frac{5}{3}$. Ecuația dreptei MN va fi: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}; \Rightarrow 3y + 2x - 5 = 0$. Verificăm dacă $P \in MN$. Înlocuim $x = 0$ și $y = \frac{5}{3}$; $5 + 2 \cdot 0 - 5 = 0; \Rightarrow P, M, N$ sînt coliniare.

Problema 22. Să se scrie ecuația dreptei care conține punctul $M(-1, 3)$ și care este perpendiculară pe dreapta $3x - 5y = 0$.

Soluție. Ecuația dreptei d pe care vrem s-o aflăm este de forma: $y = mx + n$; $M \in d; \Rightarrow -m + n = 3; \Rightarrow n = m + 3; \Rightarrow y = mx + m + 3$. Dreapta d' perpendiculară pe d are ecuația $3x - 5y = 0$; ea are coeficientul unghiular $m' = \frac{3}{5}$. Condiția ca cele 2 drepte să fie perpendiculare este: $m = -\frac{1}{m'}$; $\Rightarrow m = -\frac{5}{3}$. Deci ecuația dreptei d va fi: $y = -\frac{5}{3}x + 3 - \frac{5}{3}$; sau $y = -\frac{5}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow 5x + 3y - 4 = 0$.

Problema 23. Să se determine numerele reale a și b , astfel ca dreapta $ax + by - 1 = 0$ să conțină punctul $P(2, 1)$ și să fie perpendiculară pe dreapta $ax + y - 5 = 0$.

Soluție. Fie d dreapta: $ax + by - 1 = 0$. $P \in d \Rightarrow 2a + b - 1 = 0$;
 $\Rightarrow b = 1 - 2a$; ecuația dreptei d devine: $ax + (1 - 2a)y - 1 = 0$; această dreaptă are coeficientul unghiular: $m = -\frac{a}{1 - 2a}$, $1 - 2a \neq 0$.

Dreapta $d' \perp d$. Ea are ecuația: $ax + y - 5 = 0$; deci coeficientul ei unghiular este: $m' = -a$. Condiția de perpendicularitate: $m' = -\frac{1}{m}$; $\Rightarrow$
 $\Rightarrow -a = \frac{1 - 2a}{a}$; sau $a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a - 1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$ și $b = -1$.

Problema 24. Fie punctele $P_1(2, a + 1)$, $P_2(0, 1 - a)$, $P_3(1 - 2a, 3)$ și $P_4(1 + 2a, -1)$. Să se arate că dreptele P_1P_2 și P_3P_4 sînt perpendiculare, oricare ar fi numărul real a .

Soluție. Calculăm coeficienții unghiulari ai celor 2 drepte și verificăm dacă condiția de perpendicularitate este îndeplinită.

$$m_{P_1P_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - a - a - 1}{0 - 2} = a; m_{P_3P_4} = \frac{3 + 1}{1 - 2a - 1 - 2a} = \frac{4}{-4a} = -\frac{1}{a}. \text{ Deci:}$$

$$m_{P_1P_2} = -\frac{1}{m_{P_3P_4}}; \Rightarrow P_1P_2 \perp P_3P_4. (m_{P_3P_4} \text{ are sens pentru } a \neq 0).$$

Dacă $a = 0 \Rightarrow P_1(2, 1)$, $P_2(0, 1)$; $\Rightarrow P_1P_2 \parallel xx'$ (1) (pentru că $y_{P_1} = y_{P_2} = 1$); $P_3(1, 3)$ și $P_4(1, -1) \Rightarrow P_3P_4 \parallel yy'$ (2) (pentru că $x_{P_3} = x_{P_4} = 1$).

Din (1) și (2) $\Rightarrow P_1P_2 \perp P_3P_4$. Rezultă că oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, $P_1P_2 \perp P_3P_4$.

Problema 25. Să se arate că punctele $P_1(a, 2a + 3)$, $P_2(1 + a, 2a + 5)$, $P_3(b, 2b - 5)$ și $P_4(1 + b, 2b - 3)$ sînt vîrfurile unui paralelogram.

Soluție. Arătăm că laturile sînt 2 cîte 2 paralele. Calculăm deci coeficienții lor unghiulari.

$$m_{P_1P_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2a + 5 - 2a - 3}{1 + a - a} = 2; m_{P_3P_4} = \frac{2b - 3 - 2b + 5}{1 + b - b} = 2;$$

$$\Rightarrow m_{P_1 P_2} = m_{P_3 P_4} \Rightarrow P_1 P_2 \parallel P_3 P_4 \quad (1).$$

$$m_{P_2 P_4} = m_{P_1 P_3} = \frac{2a - 2b + 8}{a - b}; \Rightarrow P_2 P_4 \parallel P_1 P_3 \quad (2). \text{ Din (1) și (2) rezultă}$$

că $P_1 P_2 P_3 P_4$ este paralelogram.

Problema 26. Să se arate că ecuația unei drepte care conține punctul $P_1(x_1, y_1)$ și care are coeficientul unghiular m este $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Soluție. Fie ecuația dreptei d de forma: $y = mx + n$. P_1 aparține dreptei: $y_1 = mx_1 + n \Rightarrow n = y_1 - mx_1$; ecuația dreptei d devine: $y = mx + y_1 - mx_1$; sau: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Problema 27. Fie $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$. $x_1 \neq x_2$. Să se arate că ecuația $P_1 P_2$ este: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$.

Soluție. $P_1, P_2 \in d$; coeficientul unghiular al dreptei $P_1 P_2$ este: $m_{P_1 P_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (1)$. $P_1 \in d \Rightarrow$ conform problemei 26, pag. 111, § 3, cap. 4,

coordonatele lui P_1 verifică ecuația: $y - y_1 = m(x - x_1)$. (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$.

Problema 28. Fie $P_1(a, 0)$ $a \neq 0$ și $P_2(0, b)$ $b \neq 0$. Să se arate că ecuația dreptei $P_1 P_2$ este: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ (Se numește ecuația dreptei prin tăieturi. De ce?).

Soluție. Fie d dreapta care trece prin punctele P_1 și P_2 și $y = mx + n$ ecuația ei. $P_1 \in d \Rightarrow am + n = 0$; $P_2 \in d \Rightarrow n = b$; $\Rightarrow am + b = 0 \Rightarrow m = -\frac{b}{a}$, cu $a \neq 0$.

Deci $y = -\frac{b}{a}x + b$. Împărțim prin b ($b \neq 0$); $\frac{y}{b} + \frac{x}{a} - 1 = 0$.

Dacă $x = 0 \Rightarrow y = b \Rightarrow P_2(0, b)$ este punctul unde dreapta d intersectează axa yy' . Dacă $y = 0 \Rightarrow x = a \Rightarrow P_1(a, 0)$ este punctul unde dreapta d taie axa xx' . Deci, se numește ecuația dreptei prin tăieturi, deoarece P_1 și P_2 sînt punctele de intersecție ale dreptei respective cu axele de coordonate.

Funcțiile sin și cos definite pe intervalul $[0, \pi]$.

Problemele de la pagina 114.

Problema 29. Notăm cu M punctul de intersecție al dreptei de ecuație:

$x - 3y = 0$ cu semicercul s. Dacă $t = \mu(\widehat{AOM})$, să se calculeze numerele: $\cos t$, $\sin t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$.

Soluție. Fie $M(\cos t, \sin t)$. Coordonatele lui M verifică ecuația:

$x - 3y = 0$. M aparține și semicercului, deci verifică relația: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Avem și condiția: $\sin t \geq 0$. Notăm $\cos t = u$ și $\sin t = v$. Obținem sistemul: $u - 3v = 0$ și $u^2 + v^2 = 1$. Obținem soluția: $v = \frac{1}{\sqrt{10}}$ și $u = \frac{3}{\sqrt{10}}$ (am

ținut seama de faptul că $v \geq 0$).

Rezultă că: $\sin t = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos t = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{1}{3}$, $\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} = 3$.

Problema 30. Dacă $\cos a = -\frac{3}{5}$, să se calculeze $\sin a$, $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{ctg} a$.

Soluție. $\cos a \leq 0 \Rightarrow a \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. (S-au introdus numai funcțiile trigonometrice definite pe $[0, \pi]$).

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \sin^2 a = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$; $\sin a \geq 0 \Rightarrow \sin a = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = -\frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a} = -\frac{3}{4}$

Problema 31. Dacă $\operatorname{tg} a = -\frac{5}{12}$, să se calculeze: $\sin a$, $\cos a$, $\operatorname{ctg} a$.

Soluție. $\operatorname{tg} a < 0 \Rightarrow a \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. $1 + \operatorname{tg}^2 a = 1 + \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a}$

$\cos^2 a = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a} = \frac{144}{169}$. $\cos a < 0 \Rightarrow \cos a = -\frac{12}{13}$

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \sin^2 a = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$; $\sin a > 0 \Rightarrow \sin a = \frac{5}{13}$

$\operatorname{ctg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} a} = -\frac{12}{5}$.

Problema 32. Să se calculeze:

a) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$; b) $\sin \frac{7\pi}{12}$; c) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{12}$; d) $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{12}$.

Soluție.

a) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}}$. Dar $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ (conform exercițiilor

rezolvate; pag. 116, § 4, cap. 4, exerc. d).

$$\text{Din } \sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12} = 1 \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{12} = 1 - \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \right)^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2 + 1}{2}} - \sqrt{\frac{2 - 1}{2}} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{3} \quad (\text{am raționalizat}).$$

b) $\sin \frac{7\pi}{12} = \sin \left(\pi - \frac{7\pi}{12} \right) = \sin \frac{5\pi}{12}$. Dar conform exercițiilor rezolvate, punctul f, pag. 116, § 4, cap. 4 știm că $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. Din relația: $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ aflăm $\sin^2 \frac{5\pi}{12} = 1 - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} (\sqrt{2 + \sqrt{3}}) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{2 - 1}{2}} \right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

c) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{12} = \frac{\sin \frac{7\pi}{12}}{\cos \frac{7\pi}{12}}$; $\cos \frac{7\pi}{12} = -\cos \left(\pi - \frac{7\pi}{12} \right) = -\cos \left(\frac{5\pi}{12} \right) =$
 $= -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = -2 - \sqrt{3}$.

d) $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{12} = -\operatorname{ctg} \left(\pi - \frac{11\pi}{12} \right) = -\frac{\cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12}}$; $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

și $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ (conform exercițiilor rezolvate de la pag. 116, § 4, cap. 4, exerc. d, e).

$$\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{12} = -2 - \sqrt{3}.$$

Problema 33. Dacă $\cos a = 0,8$, $\cos b = \frac{1}{3}$, să se calculeze: $\cos(a-b)$.

Soluție. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$; $a, b \in (0, \frac{\pi}{2})$.

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}; \sin a \geq 0 \Rightarrow \sin a = \frac{3}{5}; \sin^2 b = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}; \sin b = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \cos(a - b) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4+6\sqrt{2}}{15}.$$

Problema 34. Dacă $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, să se demonstreze că: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$. În plus dacă $x \neq 0$ și $x \neq \frac{\pi}{2}$ să se arate că $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$ și $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$.

Soluție.

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos x &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \text{ pentru că } \sin \frac{\pi}{2} = 1 \text{ și } \cos \frac{\pi}{2} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos x + \sin \frac{\pi}{2} \sin x = \sin x.$$

$$\text{c) } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

$$\text{d) } \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x \quad (x \neq \frac{\pi}{2}).$$

Unghiul unei drepte cu axa absciselor

Problemele de la pagina 119.

Problema 35. Să se determine unghiul următoarelor drepte x cu axa absciselor:

$$\text{a) } y = 0; \quad \text{b) } x = 0; \quad \text{c) } y = x\sqrt{3} + 1; \quad \text{d) } y + x = 1.$$

Soluție. Dacă ecuația dreptei este $y = mx + n$, $m = \operatorname{tg} \alpha$, unde α este unghiul format de dreaptă cu direcția pozitivă a axei xx' .

$$\text{a) } m = 0 \Rightarrow \alpha = 0;$$

b) dreapta de ecuație $x = 0$ este axa yy' ; ea este perpendiculară pe axa xx' , deci unghiul lor este $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{c) } m = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3};$$

$$\text{d) } y = -x + 1; \Rightarrow m = -1 \Rightarrow \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Problema 36. Se dă punctul $P \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2} \right)$ $a > 0$. Să se afle $m(\widehat{AOP})$ și $\mu(\widehat{AOP})$.

Soluție. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{-a\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \mu(\widehat{AOP}) = \frac{5\pi}{6}; m(\widehat{AOP}) = \frac{5}{6} \cdot 180^\circ = 150^\circ.$

Problema 37. Dreptele de ecuații $x\sqrt{7} + y\sqrt{2} = 0$ și $3x - 4y = 0$ intersectează semicercul s , respectiv în punctele M și N . Să se calculeze $\cos t$, unde $t = \mu(\widehat{MON})$.

Soluție. Fie $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$ și $N(\cos \beta, \sin \beta)$.

$\sqrt{7} \cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha = 0$ și $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1; \alpha \in [0, \pi]; \sin \alpha \geq 0$; se obține: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$ și $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}$; $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{7}}{3}\right)$

Pentru N procedăm la fel. Avem ecuațiile: $3 \cos \beta - 4 \sin \beta = 0$ și $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1; \sin \beta \geq 0$; rezolvând obținem: $\sin \beta = \frac{3}{5}$ și $\cos \beta = \frac{4}{5}$.

Deci $N\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$; $\cos t = \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3\sqrt{7} - 4\sqrt{2}}{15}.$

CAPITOLUL V

FUNCTII TRIGONOMETRICE

Funcția de acoperire universală a cercului unitate

Problemele de la pagina 125.

Problema 1. Să se determine coordonatele punctelor: $F(5\pi)$, $F(-7\pi)$, $F(\frac{13\pi}{4})$, $F(-\frac{15\pi}{4})$, $F(103\pi)$, $F(\frac{103\pi}{2})$, $F(\frac{103\pi}{4})$.

Soluție. Aplicăm teorema 1, pag. 123, § 1, cap. 5: $F(t + 2k\pi) = F(t)$, $(\forall)t \in \mathbb{R}$ și $(\forall)k \in \mathbb{Z}$.

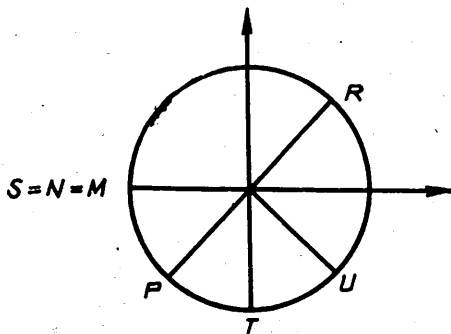


Fig. 233.

$$F(5\pi) = F(4\pi + \pi) = F(\pi) = M(\cos \pi, \sin \pi) = M(-1, 0).$$

$$F(-7\pi) = F(-4 \cdot 2\pi + \pi) = F(\pi) = F(\cos \pi, \sin \pi) = N(-1, 0).$$

$$F(\frac{13\pi}{4}) = F(2\pi + \pi + \frac{\pi}{4}) = F(\pi + \frac{\pi}{4}) = P(-\cos \frac{\pi}{4}, -\sin \frac{\pi}{4}) = P(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

$$F(-\frac{15\pi}{4}) = F(-4\pi + \frac{\pi}{4}) = F(\frac{\pi}{4}) = R(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

$$F(103\pi) = F(51 \cdot 2\pi + \pi) = F(\pi) = S(\cos \pi, \sin \pi) = S(-1, 0).$$

$$F(\frac{103\pi}{2}) = F(51\pi + \frac{\pi}{2}) = F(25 \cdot 2\pi + \pi + \frac{\pi}{2}) = F(\pi + \frac{\pi}{2}) = F(\frac{3\pi}{2}) =$$

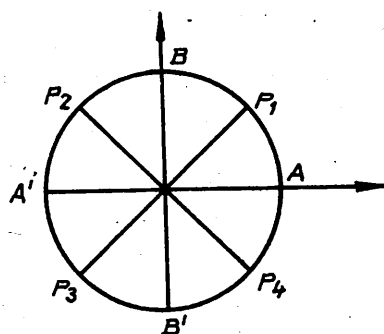
$$= T(0, -1).$$

$$F(\frac{103\pi}{4}) = F(24\pi + \pi + \frac{3\pi}{4}) = F(\frac{7\pi}{4}) = U(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Problema 2. Punctele P_1 , P_3 și P_2 , P_4 sînt respectiv pe bisectoarele unghiurilor axelor de coordonate și pe cercul unitate C . Să se afle toate numerele reale t pentru care:

$$a) F(t) = P_1; \quad b) F(t) = P_2; \quad c) F(t) = P_3; \quad d) F(t) = P_4.$$

Soluție. $F(t) = P_1 \Rightarrow t \in \frac{\pi}{4} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}$:



- b) $F(t) = P_2 \Rightarrow t \in \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z} \right\}$
 c) $F(t) = P_3 \Rightarrow t \in \left\{ \frac{5\pi}{4} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z} \right\}$
 d) $F(t) = P_4 \Rightarrow t \in \left\{ \frac{7\pi}{4} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z} \right\}$

Fig. 234

Problema 3. Să se arate că $F(t)$ sînt simetrice față de dreapta OA (axa absciselor).

Soluție. $F(t) = F(t^* + 2k\pi) = M(\cos t^*, \sin t^*)$; $F(-t) = F(-t^* - 2k\pi) = F(-t^* + 2\pi - 2(k+1)\pi) = F(2\pi - t^*) = F(-t^*) = M'(\cos(-t^*), \sin(-t^*))$.
 $t^* \in [0, 2\pi]$.

Conform lemei 3, pag.123, § 1, cap. 5, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$,

$$AF(t) = AF(-t).$$

Deci $(OM) = (OM')$. $\triangle AF(t)O = \triangle AF(-t)O$ (cazul: L.L.L.) pentru că: $AF(t) = AF(-t)$, $OF(t) = OF(-t)$ (raze) și (OA) latură comună; $\Rightarrow \widehat{AOF}(t) = \widehat{AOF}(-t)$.

Notăm cu H intersecția între (OA) și $(F(t)F(-t))$.

$\triangle AOF(t) \equiv \triangle AOF(-t)$ (cazul: L.U.L.) pentru că: (OH) latură comună, $(OF(t)) \equiv (OF(-t))$ (fiind raze) și $\widehat{AOF}(t) \equiv \widehat{AOF}(-t)$ (din demonstrație). $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \widehat{HF}(t) = \widehat{HF}(-t) \text{ și } \widehat{OHF}(t) \equiv \widehat{OHF}(-t); \text{ dar } m(\widehat{OHF}(t)) + m(\widehat{OHF}(-t)) = 180^\circ; \Rightarrow m(\widehat{OHF}(t)) = m(\widehat{OHF}(-t)) = 90^\circ. \text{ Din:}$$

$(HF(t)) \equiv (HF(-t))$ și $m(\widehat{OHF}(t)) = m(\widehat{OHF}(-t))$, care arată că:

$F(t)F(-t) \perp OA$, rezultă că $F(t)F(-t)$ sînt simetrice față de OA, adică M și M' sînt simetrice față de OA.

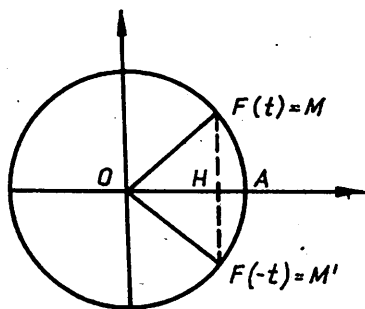


Fig. 235.

Problema 4. Să se arate că $F(t)$ și $F(\pi - t)$ sînt simetrice față de OB .

Soluție. Aplicăm teorema 2, pag. 123, § 1, cap. 5, care arată că $(\forall)t, u \in \mathbb{R} \Rightarrow F(t)F(u) = AF(t-u)$. Obținem: $F(\pi)F(\pi-t) = AF(\pi - (\pi-t)) = AF(t)$.

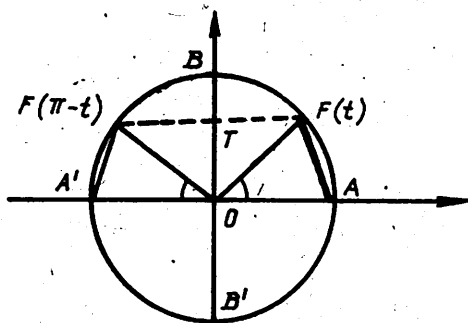


Fig. 236.

$\triangle OAF(t) \equiv \triangle OA'F(\pi-t)$ (cazul: L.L.L.) pentru că: $(OF(t)) \equiv (OA) \equiv (OA') \equiv (OF(\pi-t))$ și $(AF(t)) \equiv (A'F(\pi-t)) \Rightarrow \widehat{A'OF(\pi-t)} \equiv \widehat{AOF(t)} \Rightarrow \widehat{BOF(\pi-t)} \equiv \widehat{BOF(t)}$ (au complemente congruente); notăm cu T punctul în care $F(t)F(\pi-t)$ intersectează OB . $\triangle TOF(t) \equiv \triangle TOF(\pi-t)$ (cazul: L.U.L.): (OT) latură comună, $(OF(t)) \equiv (OF(\pi-t))$ (raze) și $\widehat{TOF(t)} \equiv \widehat{TOF(\pi-t)}$ (demonstrație) $\Rightarrow (TF(t)) \equiv (TF(\pi-t))$ și $\widehat{OTF(t)} \equiv \widehat{OTF(\pi-t)}$; dar $m(\widehat{OTF(t)}) + m(\widehat{OTF(\pi-t)}) = 180^\circ$; $m(\widehat{OTF(t)}) = m(\widehat{OTF(\pi-t)}) = 90^\circ \Rightarrow F(t)F(\pi-t) \perp OB$. Rezultă că $F(t)$ și $F(\pi-t)$ sînt simetrice față de OB .

Problema 5. Să se scrie ecuația dreptei determinată de punctele: $F(\frac{\pi}{2})$ și $F(\frac{5\pi}{3})$.

Soluție. $F(\frac{\pi}{2}) = M(0, 1)$ și $F(\frac{5\pi}{3}) = M'(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Punem condițiile ca cele 2 puncte să aparțină dreptei de ecuație: $y = mx + n$. $\Rightarrow n = 1$ și $\frac{1}{2}m + n = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}m + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m = -2 - \sqrt{3}$. Deci dreapta are ecuația: $y = (-2 - \sqrt{3})x + 1$; sau: $y + (2 + \sqrt{3})x - 1 = 0$.

Funcțiile trigonometrice sin și cos

Problemele de la pagina 128.

Problema 1. Să se calculeze:

- a) $\sin \frac{13\pi}{2}$; b) $\cos \frac{18\pi}{5}$; c) $\sin(-\frac{\pi}{2})$; d) $\cos(-\pi)$;
e) $\cos(-\frac{7\pi}{3})$; f) $\sin(-\frac{13\pi}{3})$; g) $\sin 18\pi$; h) $\cos 13\pi$; i) $\cos 4125\pi$;
j) $\sin 2115\pi$; k) $\cos \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{23\pi}{3}$; l) $\sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{20\pi}{3}$.

Soluție.

$$a) \sin \frac{13\pi}{2} = \sin (6\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1;$$

$$b) \cos \frac{18\pi}{5} = \cos (3\pi + \frac{3\pi}{5}) = \cos (\pi + \frac{3\pi}{5}) = -\cos \frac{3\pi}{5} = \\ = \cos (\pi - \frac{3\pi}{5}) = \cos \frac{2\pi}{5};$$

$$c) \sin (-\frac{\pi}{2}) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1;$$

$$d) \cos(-\pi) = \cos \pi = -1;$$

$$e) \cos(-\frac{7\pi}{3}) = \cos \frac{7\pi}{3} = \cos (2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$f) \sin(-\frac{13\pi}{3}) = -\sin \frac{13\pi}{3} = -\sin (4\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$g) \sin 18\pi = \sin 0 = 0;$$

$$k) \cos 13\pi = \cos \pi = -1;$$

$$i) \cos 4125\pi = \cos \pi = -1;$$

$$j) \sin 2115\pi = \sin \pi = 0;$$

$$k) \cos \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{23\pi}{3} = \cos \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{5\pi}{3} = -\cos (\pi - \frac{5\pi}{6}) + \sin \frac{5\pi}{3} = \\ = -\cos \frac{\pi}{6} - \sin (2\pi - \frac{5\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}.$$

$$l) \sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{20\pi}{3} = -\sin (\frac{5\pi}{4} - \pi) + \cos (6\pi + \frac{2\pi}{3}) = -\sin \frac{\pi}{4} + \\ + \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{2} + 1}{2}.$$

Problema 2. Dacă $x \in (\pi, 2\pi)$ și $\cos x = \frac{7}{25}$, să se calculeze $\sin x$

Soluție. Din $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ și $\sin x < 0$, pentru că $x \in (\pi, 2\pi)$, $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \sin x = -\sqrt{1 - \frac{49}{625}} = -\frac{24}{25} \Rightarrow \sin x = -\frac{24}{25}.$

Problema 3. Să se stabilească care dintre următoarele funcții este pară și care impară:

a) $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin^4 x;$ b) $g: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*;$

c) $h: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^3 + 1;$ d) $i: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}, i(x) = \frac{x}{1+x^2}.$

Soluție.

a) $f(-x) = \sin^4(-x) = \sin^4 x = f(x)$, $(\forall)x \in \mathbb{R}; \Rightarrow f$ este pară;

b) $g(-x) = (-x)^n$; dacă n este par $\Rightarrow g(-x) = x^n \Rightarrow g(-x) = g(x)$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$,
 $\Rightarrow g$ este pară; dacă n este impar $\Rightarrow g(-x) = -x^n = -g(x)$, $(\forall)x \in \mathbb{R}, \Rightarrow g$ este
 impară;

c) $h(-x) = (-x)^3 + 1 \neq \pm h(x)$. Deci funcția nu este nici pară nici impară.

d) $i(-x) = \frac{-x}{1 + (-x)^2} = \frac{-x}{1 + x^2} = -i(x)$, $(\forall)x \in \mathbb{R}. \Rightarrow i$ este impară.

Problema 4. Să se calculeze:

a) $\cos \frac{5\pi}{7} \cos \frac{13\pi}{28} + \sin \frac{5\pi}{7} \sin \frac{13\pi}{28}$;

b) $\cos(x + \frac{\pi}{3}) \cos x + \sin(x + \frac{\pi}{3}) \sin x$.

Soluție.

a) $\cos \frac{5\pi}{7} \cos \frac{13\pi}{28} + \sin \frac{5\pi}{7} \sin \frac{13\pi}{28} = \cos(\frac{5\pi}{7} - \frac{13\pi}{28}) =$
 $= \cos \frac{7\pi}{28} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\cos(x + \frac{\pi}{3}) \cos x + \sin(x + \frac{\pi}{3}) \sin x = \cos(x + \frac{\pi}{3} - x) =$
 $= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Problema 5. Dacă $\sin x > 0$, $\cos y < 0$, $\cos x = -\frac{3}{5}$, $\sin y = \frac{5}{13}$, să
 se calculeze $\cos(x - y)$.

Soluție. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$; $\cos y =$
 $= -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}$; $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y = (-\frac{3}{5})($
 $(-\frac{12}{13}) + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{56}{65}$.

Problema 6. Să se arate că, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$:

a) $1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1$; b) $2(1 + \cos a) - \sin^2 a = (1 + \cos a)^2$;

c) $\cos^3 a + \sin^3 a = (\sin a + \cos a)(1 - \sin a \cos a)$.

Soluție.

$$\begin{aligned} \text{a) } 1 - 2 \sin^2 a &= \cos^2 a + \sin^2 a - 2 \sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a = \\ &= \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = \cos^2 a - 1 + \cos^2 a = 2 \cos^2 a - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2(1 + \cos a) - \sin^2 a &= 2 + 2 \cos a - (1 - \cos^2 a) = 2 + 2 \cos a - 1 + \\ &+ \cos^2 a = \cos^2 a + 1 + 2 \cos a = (1 + \cos a)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \cos^3 a + \sin^3 a &= (\cos a + \sin a)(\cos^2 a - \cos a \sin a + \sin^2 a) = \\ &= (\cos a + \sin a)(1 - \cos a \sin a). \end{aligned}$$

Problema 7. Știind că $a, b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\cos a = -0,8$, $\sin b = 0,96$, să se determine coordonatele punctului $F(a - b)$.

Soluție. $F(a - b) = M(\cos(a - b), \sin(a - b))$.

$$\begin{aligned} \sin a &= \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - 0,64} = \sqrt{0,36} = 0,6; \cos b = -\sqrt{1 - 0,9216} = \\ &= -\sqrt{0,0784} = -0,28; \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b = (-0,8)(-0,28) + \\ &+ 0,6 \cdot 0,96 = 0,224 + 0,576 = 0,8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a = 0,6(-0,28) - 0,96(-0,8) = \\ &= -0,168 + 0,768 = 0,6. \end{aligned}$$

$$\text{Deci } F(a - b) = M(0,8; 0,6).$$

Problema 8. Să se determine coordonatele punctului $F(x)$ știind că

$$\sin x + \cos x = 0,2 \text{ și } \cos x < 0.$$

Soluție. Rezolvăm sistemul: $\sin x + \cos x = 0,2$ și $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Notăm } \sin x + \cos x &= S \text{ și } \sin x \cos x = P. \Rightarrow S = 0,2 \text{ și } S^2 - 2P = 1; \Rightarrow \\ \Rightarrow P &= -0,48. \text{ Rezolvăm ecuația: } z^2 - Sz + P = 0, \text{ adică: } z^2 - 0,2z - 0,48 = 0 \\ \Rightarrow z_1 &= 0,8 \text{ și } z_2 = -0,6. \text{ Cum } \cos x < 0 \Rightarrow \sin x = 0,8 \text{ și } \cos x = -0,6. \end{aligned}$$

Formule pentru $\cos(a + b)$, $\sin(a - b)$, $\sin(a + b)$ și formule deduse din acestea

Problemele de la pagina 129.

Problema 1. Să se calculeze:

$$\text{a) } \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{20} - \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{20};$$

$$\text{b) } \cos \left(\frac{\pi}{6} - x\right) \cos x - \sin \left(\frac{\pi}{6} - x\right) \sin x.$$

Soluție.

$$a) \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{20} - \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{20} = \cos \left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{20} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$b) \cos \left(\frac{\pi}{6} - x \right) \cos x - \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right) \sin x = \cos \left[\left(\frac{\pi}{6} - x \right) + x \right] = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Problema 2. Să se arate că oricare ar fi numerele reale x și y avem:

$$a) \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{\pi}{4} - \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \sin \frac{\pi}{4} = \sin x;$$

$$b) \cos (x - y) \cos y - \sin (x - y) \sin y = \cos x;$$

$$c) \cos (x + y) + \cos (x - y) = 2 \cos x \cos y;$$

$$d) \cos (x + y) - \cos (x - y) = 2 \sin x \sin (-y);$$

$$e) \cos^2 (x - y) - \cos^2 (x + y) = 4 \sin x \cos x \sin y \cos y;$$

$$f) \cos^2 x + \cos^2 y - (\cos x - \cos y)^2 = \cos (x + y) + \cos (x - y);$$

$$g) \cos (x - y) \cos (x + y) = \cos^2 x - \sin^2 y;$$

$$h) \cos \left(\frac{\pi}{2} + x - y \right) = \cos x \sin y - \sin x \cos y;$$

$$i) \sin (x + y) \sin (x - y) = \sin^2 x - \sin^2 y;$$

$$j) (\sin x + \cos y)^2 + (\cos x + \sin y)^2 = 2 [\sin (x + y) + 1];$$

$$k) \sin (x + y) + \cos (x - y) = (\sin x + \cos x)(\sin y + \cos y);$$

Soluție.

$$a) \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{\pi}{4} - \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \sin \frac{\pi}{4} = \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{\pi}{4} - \sin \left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4} \right) \sin \frac{\pi}{4} = \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{\pi}{4} + \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \sin \frac{\pi}{4} = \cos \left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x.$$

$$b) \cos (x - y) \cos y - \sin (x - y) \sin y = \cos (x - y + y) = \cos x.$$

$$c) \cos (x + y) + \cos (x - y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y = 2 \cos x \cos y.$$

$$d) \cos (x + y) - \cos (x - y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y - \cos x \cos y - \sin x \sin y = -2 \sin x \sin y = 2 \sin x \sin (-y).$$

$$e) \cos^2 (x - y) - \cos^2 (x + y) = (\cos x \cos y + \sin x \sin y)^2 - (\cos x \cos y - \sin x \sin y)^2 = \cos^2 x \cos^2 y + 2 \sin x \cos x \sin y \cos y + \sin^2 x \sin^2 y - \cos^2 x \cos^2 y + 2 \sin x \cos x \sin y \cos y - \sin^2 x \sin^2 y = 4 \sin x \cos x \sin y \cos y = 4 \sin x \sin y \cos x \cos y.$$

$$f) m_I = \cos^2 x + \cos^2 y - (\cos x - \cos y)^2 = \cos^2 x + \cos^2 y - \cos^2 x + 2 \cos x \cdot \cos y - \cos^2 y = 2 \cos x \cos y.$$

$$m_{II} = \cos(x+y) + \cos(x-y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y = 2 \cos x \cos y; \quad m_I = m_{II}.$$

$$g) \cos(x-y) \cos(x+y) = (\cos x \cos y + \sin x \sin y)(\cos x \cos y - \sin x \sin y) = \cos^2 x \cos^2 y - \sin^2 x \sin^2 y = \cos^2 x (1 - \sin^2 y) - (1 - \cos^2 x) \sin^2 y = \cos^2 x - \cos^2 x \sin^2 y - \sin^2 y + \cos^2 x \sin^2 y = \cos^2 x - \sin^2 y.$$

$$h) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x - y\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos(x-y) - \sin \frac{\pi}{2} \sin(x-y) = -\sin(x-y) = -\sin x \cos y + \sin y \cos x = \cos x \sin y - \sin x \cos y.$$

$$i) \sin(x+y) \sin(x-y) = (\sin x \cos y + \sin y \cos x)(\sin x \cos y - \sin y \cos x) = \sin^2 x \cos^2 y - \sin^2 y \cos^2 x = \sin^2 x (1 - \sin^2 y) - \sin^2 y (1 - \sin^2 x) = \sin^2 x - \sin^2 x \sin^2 y - \sin^2 y + \sin^2 x \sin^2 y = \sin^2 x - \sin^2 y.$$

$$j) (\sin x + \cos y)^2 + (\cos x + \sin y)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos y + \cos^2 y + \cos^2 x + 2 \sin y \cos x + \sin^2 y = 2 + 2 \sin x \cos y + 2 \sin y \cos x = 2 + 2 \sin(x+y) = 2(\sin(x+y) + 1).$$

$$k) (\sin x + \cos x)(\sin y + \cos y) = \sin x \sin y + \sin x \cos y + \cos x \sin y + \cos x \cos y = \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x+y) + \cos(x-y).$$

Problema 3. Știind că $\sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin b = \frac{1}{2}$, $\cos c = \frac{5,6}{20}$, $\cos a < 0$, $\cos b > 0$, $\sin c < 0$, să se calculeze numerele: $\cos(a+b+c)$ și $\cos(a+b-c)$.

Soluție. $\cos(a+b+c) = \cos(a+b) \cos c - \sin(a+b) \sin c = \cos a \cos b \cos c - \sin a \sin b \cos c - \sin a \cos b \sin c - \sin b \cos a \sin c$.

$$\cos(a+b-c) = \cos a \cos b \cos c - \sin a \sin b \cos c + \sin a \cos b \sin c + \sin b \cos a \sin c.$$

Calculăm: $\cos a = -\sqrt{1 - \frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}$; $\cos b = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$\sin c = -\sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = -\frac{24}{25}.$$

Inlocuind în formulele de mai sus obținem:

$$\cos(a+b+c) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{7}{25} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{25} - \frac{7}{25} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{24}{25}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{-7\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 72 - 24}{100} = \frac{48 - 14\sqrt{3}}{100} = \frac{24 - 7\sqrt{3}}{50}.$$

$$\begin{aligned} \cos(a + b - c) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{7}{25} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{25} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{24}{25}\right) + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{4}{25}\right) = \frac{-7\sqrt{3} - 7\sqrt{3} - 72 + 24}{100} = \frac{-48 - 14\sqrt{3}}{100} = \frac{-24 - 7\sqrt{3}}{50} \end{aligned}$$

Problema 4. Să se arate că oricare ar fi x număr real și k număr întreg avem:

a) $\sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} + x\right] = (-1)^k \cos x;$

b) $\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} + x\right] = (-1)^{k+1} \sin x.$

Soluție.

a) Fie k par; $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} + x\right] &= \left[\sin\left(4n+1\right)\frac{\pi}{2} + x\right] = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(-x) = \cos x = \\ &= (-1)^{2n} \cdot \cos x = (-1)^k \cos x. \end{aligned}$$

Pentru k impar: $k = 2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$ obținem:

$$\begin{aligned} \sin\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} + x\right] &= \sin\left[(4n+3)\frac{\pi}{2} + x\right] = \sin\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2} + x\right) = \\ &= \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x - 2\pi\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x = \\ &= (-1)^{2n+1} \cos x = (-1)^k \cos x. \end{aligned}$$

b) Pentru k par, $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, obținem:

$$\begin{aligned} \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} + x\right] &= \cos\left[(4n+1)\frac{\pi}{2} + x\right] = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(-x) = -\sin x = (-1)^{2n+1} \sin x = \\ &= (-1)^{k+1} \sin x. \end{aligned}$$

Pentru k impar: $k = 2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$ obținem:

$$\begin{aligned} \cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} + x\right] &= \cos\left[(4n+3)\frac{\pi}{2} + x\right] = \cos\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2} + x\right) = \\ &= \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x - 2\pi\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x = (-1)^{2n+1} \sin x = \\ &= (-1)^{k+1} \sin x. \end{aligned}$$

Problema 5. Să se calculeze: a) $\cos \frac{\pi}{8}$; b) $\sin \frac{3\pi}{8}$; c) $\sin \frac{11\pi}{8}$;

d) $\cos \frac{5\pi}{24}$; e) $\cos \frac{7\pi}{8}$.

Soluție. Se aplică formulele: $\cos x = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$ și $\sin x = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$. Pentru alegerea semnului ținem cont de intervalul în care se află x .

$$a) \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2};$$

$$b) \sin \frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{3\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2};$$

$$c) \sin \frac{11\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1 - \cos \frac{11\pi}{4}}{2}} = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}; \left(\cos \frac{11\pi}{4} = \cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \right);$$

$$d) \cos \frac{5\pi}{24} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{5\pi}{12}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{5\pi}{6}}{2}}}{2}}; \cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos \frac{5\pi}{24} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}}{2};$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2 + 1}{2}} - \sqrt{\frac{2 - 1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Deci, } \cos \frac{5\pi}{24} = \frac{\sqrt{2 + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}}{4};$$

$$e) \cos \frac{7\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \frac{7\pi}{4}}{2}} = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}; \left(\cos \frac{7\pi}{4} = \cos \left(2\pi - \frac{7\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Problema 6. Să se verifice identitățile:

$$a) \cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x; \quad b) \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)^2 = 1 - \sin x;$$

$$c) \cos 2x + 2 \sin^2 x = 1; \quad d) 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \sin 2x; \quad e) \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right); \quad f) 3 \sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2\sqrt{3} \sin \left(5x + \frac{\pi}{6} \right).$$

Soluție. a) $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$

b) $\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)^2 = \cos^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 1 - \sin x.$

c) $\cos 2x + 2 \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x + 2 \sin^2 x = 1.$

d) $1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \cos 2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) = \sin 2x.$

e) $2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\sin 2x \cdot \frac{1}{2} + \cos 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x.$

$$f) 2\sqrt{3} \sin(5x + \frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{3} (\sin 5x \cos \frac{\pi}{6} + \cos 5x \sin \frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{3} (\sin 5x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos 5x \cdot \frac{1}{2}) = 3 \sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x.$$

Problema 7. Să se arate că $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$ și $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$.

Soluție. $\sin(\frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5}) = \sin \pi = 0$; $\sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{3\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = 0$.

Notăm $\sin \frac{\pi}{5} = \sin a$ și $\cos \frac{\pi}{5} = \cos a$. Obținem:

$$\sin 2a \cos 3a + \sin 3a \cos 2a = 0; \Rightarrow 2 \sin a \cos a (4 \cos^3 a - 3 \cos a) + (3 \sin a - 4 \sin^3 a)(2 \cos^2 a - 1) = 0; \sin \frac{\pi}{5} \neq 0 \text{ putem împărți prin } \sin a.$$

$$2 \cos a (4 \cos^3 a - 3 \cos a) + (3 - 4 \sin^2 a)(2 \cos^2 a - 1) = 0. \text{ Notăm } \cos a = y.$$

$$8y^4 - 6y^2 + (4y^2 - 1)(2y^2 - 1) = 0 \Rightarrow 16y^4 - 12y^2 + 1 = 0. \text{ Obținem pentru } y^2, 2 \text{ valori: } y^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}; \text{ Cum } \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{6} > \cos \frac{\pi}{5} > \cos \frac{\pi}{4};$$

$$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{5} \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \text{ alegem pentru } y^2 \text{ valoarea: } \frac{3 + \sqrt{5}}{8}; y = \cos \frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sqrt{\frac{3+2}{2}} + \sqrt{\frac{3-2}{2}}) = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

$$\sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{5}} = \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{5}+1}{4})^2} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Problema 8. Să se calculeze $\sin \frac{\pi}{10}$ și $\cos \frac{\pi}{10}$.

Soluție. $\cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{5}+1}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$

$$\sin \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{5}+1}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Problema 9. Să se arate că $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$.

Soluție. $\cos \frac{7\pi}{8} = -\cos(\pi - \frac{7\pi}{8}) = -\cos \frac{\pi}{8}$; $\cos \frac{5\pi}{8} = -\cos(-\frac{5\pi}{8}) = -\cos \frac{3\pi}{8} = -\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}) = -\sin \frac{\pi}{8}$. Identitatea devine:

$$2 \cos^4 \frac{\pi}{8} + 2 \sin^4 \frac{\pi}{8} = \frac{3}{2}.$$

$$2 \cos^4 \frac{\pi}{8} + 2 \sin^4 \frac{\pi}{8} = 2 \left[(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8})^2 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{8} \cos^2 \frac{\pi}{8} \right] =$$

$$= 2 \left[(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{2\pi}{8}) \right] = 2 \left[(1 - \frac{1}{2} \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2})^2) \right] = 2(1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{2}.$$

Problema 10. Să se arate că expresia $E = \cos^2(a+b) + \cos^2(a-b) - \cos 2a \cdot \cos 2b$ este constantă.

Soluție. $E = \cos^2(a+b) + \cos^2(a-b) - \cos 2a \cos 2b =$
 $= \frac{1 + \cos 2(a+b)}{2} + \frac{1 + \cos 2(a-b)}{2} - \cos 2a \cos 2b =$
 $= \frac{1 + \cos 2a \cos 2b - \sin 2a \sin 2b}{2} + \frac{1 + \cos 2a \cos 2b + \sin 2a \sin 2b}{2} -$
 $- \cos 2a \cos 2b = 1 + \cos 2a \cos 2b - \cos 2a \cos 2b = 1 = \text{constant.}$

Funcțiile tg și ctg

Exercițiile de la pagina 134.

Exercițiul 1. Aflația $\text{tg}(a+b)$ dacă $\sin a = \frac{1}{2}$, $\cos b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos a > 0$, $\sin b < 0$.

Soluție. $\sin a = \frac{1}{2}$, $\cos a = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin b = -$
 $-\sqrt{1 - \frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}$; $\text{tg } a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\text{tg } b = \frac{\sin b}{\cos b} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\text{tg}(a+b) =$
 $= \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \text{tg } b} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}(-\frac{\sqrt{3}}{3})} = 0.$

Exercițiul 2. Să se verifice identitățile: a) $\frac{\cos(a+b)}{\cos a \cos b} = 1 - \text{tg } a \text{tg } b$;
b) $\text{tg } x + \text{tg}^2 x \text{tg } 2x = \text{tg } 2x - \text{tg } x$; c) $\text{tg } 2x = \frac{2}{\text{ctg } x - \text{tg } x}$; d) $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} =$
 $= \frac{1 + \text{ctg } a \cdot \text{tg } b}{1 - \text{ctg } a \text{tg } b}$; e) $\text{ctg}(a+b) = \frac{\text{ctg } a \text{ctg } b - 1}{\text{ctg } a - \text{ctg } b}$; f) $\frac{\cos 3x}{\sin x} + \frac{\sin 3x}{\cos x} =$
 $= 2 \text{ctg } 2x$; g) $2 \sin 2x - \frac{\sin 3x}{\cos x} = \text{tg } x$; h) $\text{tg } 3a - \text{tg } 2a - \text{tg } a =$
 $= \text{tg } 3a \text{tg } a \cdot \text{tg } 2a.$

Soluție. a) $\frac{\cos(a+b)}{\cos a \cos b} = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{\cos a \cos b} = \frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} -$
 $-\frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b} = 1 - \text{tg } a \text{tg } b.$

b) Trecând toți termenii în membrul întâi, va trebui să arătăm următoarea identitate: $2 \text{tg } x + \text{tg}^2 x \text{tg } 2x - \text{tg } 2x = 0$; $m_1 = 2 \text{tg } x + \text{tg } 2x(\text{tg}^2 x - 1) =$

$$= 2 \text{tg } x + \frac{2 \text{tg } x}{1 - \text{tg}^2 x} (\text{tg}^2 x - 1) = 2 \text{tg } x - 2 \text{tg } x = 0.$$

c) $\frac{2}{\text{ctg } x - \text{tg } x} = \frac{2}{\frac{1}{\text{tg } x} - \text{tg } x} = \frac{2 \text{tg } x}{1 - \text{tg}^2 x} = \text{tg } 2x.$

d) $\frac{1 + \text{ctg } a \text{tg } b}{1 - \text{ctg } a \text{tg } b} = \frac{1 + \frac{\cos a \sin b}{\sin a \cos b}}{1 - \frac{\cos a \sin b}{\sin a \cos b}} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\sin a \cos b - \cos a \sin b} = \frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}.$

$$e) \frac{\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b - 1}{\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b} = \frac{\frac{\cos a}{\sin a} \frac{\cos b}{\sin b} - 1}{\frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\cos b}{\sin b}} = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{\cos a \sin b + \sin a \cos b} = \frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)}$$

$$= \operatorname{ctg}(a+b).$$

$$g) 2 \sin 2x - \frac{\sin 3x}{\cos x} = 4 \sin x \cos x - \frac{3 \sin x - 4 \sin^3 x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} (4 \cos^2 x - 3 + 4 \sin^2 x) = \frac{\sin x}{\cos x} (4 - 3) = \operatorname{tg} x.$$

$$f) \frac{\cos 3x}{\sin x} + \frac{\sin 3x}{\cos x} = \frac{\cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos(3x - x)}{\frac{1}{2} \sin 2x} = \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x} = 2 \operatorname{ctg} 2x.$$

$$h) \operatorname{tg} 3a - \operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a} - (\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a) = (\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a) \cdot \frac{1 - 1 + \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a} = \frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a} \cdot \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} 3a \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a.$$

Exercițiul 3. Se dau $\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} b = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} c = \frac{1}{8}$. Să se calculeze:

$$\operatorname{tg}(a+b+c).$$

Soluție. $\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tg}(a+b) + \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg}(a+b) \operatorname{tg} c} = \frac{\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} + \operatorname{tg} c}{1 - \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \operatorname{tg} c} =$

$$= \frac{\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} + \operatorname{tg} c}{1 - \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \operatorname{tg} c} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{80}}{1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{16} - \frac{1}{40}} = 1.$$

Exercițiul 4. Știind că $\operatorname{tg} x = \frac{m}{n}$, $n \neq 0$, să se calculeze expresia:

$$E = m \sin 2x + n \cos 2x.$$

Soluție. $E = m \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + n \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2m \operatorname{tg} x + n - n \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} =$

$$= \frac{2m \cdot \frac{m}{n} + n - n \frac{m^2}{n^2}}{1 + \frac{m^2}{n^2}} = \frac{(2m^2 + n^2 - m^2)n}{m^2 + n^2} = \frac{(m^2 + n^2)n}{m^2 + n^2} = n.$$

Exercițiul 5. Dacă $5 \cos x + 10 \sin x - 11 = 0$ să se calculeze $\cos x$, $\sin x$, și $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Soluție. Notăm $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ și înlocuim $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ și $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$$\text{Obținem: } 5 \frac{1-t^2}{1+t} + 10 \cdot \frac{2t}{1+t} - 11 = 0 \Rightarrow 5 - 5t^2 + 20t - 11 - 11t^2 = 0.$$

$$-16t^2 + 20t - 6 = 0 \Rightarrow 8t^2 - 10t + 3 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{3}{4} \text{ și } t_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Dacă } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin x = \frac{24}{25} \text{ și } \cos x = \frac{7}{25}.$$

$$\text{Dacă } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{4}{5} \text{ și } \cos x = \frac{3}{5}.$$

Transformarea sumelor în produse

Exercițiile de la pagina 136.

Exercițiul 1. Să se transforme în produs: a) $\sin 105^\circ + \sin 75^\circ$; b) $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$; c) $\cos \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4}$; d) $\sin \frac{4\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3}$; e) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x$; f) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x$.

Soluție. a) $\sin 105^\circ + \sin 75^\circ = 2 \sin \frac{105^\circ + 75^\circ}{2} \cos \frac{105^\circ - 75^\circ}{2} =$
 $= 2 \sin 90^\circ \cdot \cos 15^\circ = 2 \cos 15^\circ = 2 \cos(45^\circ - 30^\circ) = 2 (\cos 45^\circ \cos 30^\circ +$
 $+ \sin 45^\circ \sin 30^\circ) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$
 b) $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ = 2 \cos \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \cos 45^\circ \cos 30^\circ =$
 $= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$; c) $\cos \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} = -2 \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}}{2} =$
 $= -2 \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$

d) $\sin \frac{4\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} = 2 \sin \pi \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$

e) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = (\sin x + \sin 5x) + \sin 3x = 2 \sin 3x \cos 2x +$
 $+ \sin 3x = 2 \sin 3x (\cos 2x + \frac{1}{2}) = 2 \sin 3x (\cos 2x + \cos \frac{\pi}{3}) = 2 \sin 3x \cdot$
 $\cdot 2 \cos(x + \frac{\pi}{6}) \cos(x - \frac{\pi}{6}) = 4 \sin 3x \cos(x + \frac{\pi}{6}) \cos(x - \frac{\pi}{6}).$

f) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 2 \cos 4x \cos 2x + \cos 4x =$
 $= 2 \cos 4x (\cos 2x + \frac{1}{2}) = 2 \cos 4x (\cos 2x + \cos \frac{\pi}{3}) = 4 \cos 4x \cos(x + \frac{\pi}{6}) \cdot$
 $\cdot \cos(x - \frac{\pi}{6}).$

Exercițiul 2. Să se verifice identitățile:

a) $\frac{\cos 3x - \cos 5x}{\cos 3x + \cos 5x} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 4x$; b) $\frac{1 + \cos 4x}{\sin 3x - \sin x} = \frac{\cos 2x}{\sin x}$; c) $\cos^2 x +$
 $+ \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 6 \cos x \cos 2x \cdot \cos 3x$;

d) $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x + \sin 9x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 9x} = \operatorname{tg} 5x$;

e) $1 + \cos a + \operatorname{ctg} \frac{a}{2} = 2 \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \sin(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}) \cos(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}).$

Soluție. a) $\frac{\cos 3x - \cos 5x}{\cos 3x + \cos 5x} = \frac{-2 \sin 4x \sin(-x)}{2 \cos 4x \cos(-x)} = \operatorname{tg} 4x \operatorname{tg} x;$

b) $\frac{1 + \cos 4x}{\sin 3x - \sin x} = \frac{2 \cos^2 2x}{2 \cos 2x \sin x} = \frac{\cos 2x}{\sin x};$

c) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \frac{1 + \cos 2x}{2} +$

$+ \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \frac{1}{2} (3 + 3 \cos 2x +$

$+ 3 \cos 4x + 3 \cos 6x) = \frac{3}{2} (1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x) = \frac{3}{2} (1 +$

$+ \cos 6x) + (\cos 4x + \cos 2x) = \frac{3}{2} (2 \cos^2 3x + 2 \cos 3x \cos x) =$

$= 3 \cos 3x (\cos 3x + \cos x) = 3 \cos 3x \cdot 2 \cos 2x \cdot \cos x =$

$6 \cos 3x \cos 2x \cos x$

d) $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x + \sin 9x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 9x} =$

$= \frac{2 \sin 5x \cos 4x + 2 \sin 5x \cos 2x + \sin 5x}{2 \cos 5x \cos 4x + 2 \cos 5x \cos 2x + \cos 5x} =$

$= \frac{\sin 5x (2 \cos 4x + 2 \cos 2x + 1)}{\cos 5x (2 \cos 4x + 2 \cos 2x + 1)} = \frac{\sin 5x}{\cos 5x} = \operatorname{tg} 5x.$

e) $1 + \cos a + \operatorname{ctg} \frac{a}{2} = 2 \cos^2 \frac{a}{2} + \operatorname{ctg} \frac{a}{2} = \operatorname{ctg} \frac{a}{2} (2 \cos \frac{a}{2} \sin \frac{a}{2} + 1) =$

$= \operatorname{ctg} \frac{a}{2} (\sin a + 1) = \operatorname{ctg} \frac{a}{2} (\sin a + \sin \frac{\pi}{2}) = \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \cdot 2 \sin (\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos (\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}) =$

$= 2 \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \sin (\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}) \cos (\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}).$

Exercițiul 3. Să se transforme în produse următoarele sume:

a) $S = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x$ și $T = \cos x + \cos 2x +$
 $+ \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x + \cos 6x + \cos 7x.$

Soluție. Înmulțim S cu $2 \sin \frac{x}{2}$ și apoi transformăm fiecare produs în sumă: $2 S \sin \frac{x}{2} = 2 \sin x \sin \frac{x}{2} + 2 \sin 2x \sin \frac{x}{2} + 2 \sin 3x \sin \frac{x}{2} + 2 \sin 4x \sin \frac{x}{2} +$
 $+ 2 \sin 5x \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{5x}{2} -$
 $- \cos \frac{7x}{2} + \cos \frac{7x}{2} - \cos \frac{9x}{2} + \cos \frac{9x}{2} - \cos \frac{11x}{2} = \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{11x}{2} =$
 $= 2 \sin 3x \sin \frac{5x}{2} \Rightarrow S = \frac{2 \sin 3x \sin \frac{5x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin 3x \sin \frac{5x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$

Pentru T procedăm analog:

$2 T \sin \frac{x}{2} = 2 \cos x \sin \frac{x}{2} + 2 \cos 2x \sin \frac{x}{2} + 2 \cos 3x \sin \frac{x}{2} + 2 \cos 4x \sin \frac{x}{2} +$
 $+ 2 \cos 5x \sin \frac{x}{2} + 2 \cos 6x \sin \frac{x}{2} + 2 \cos 7x \sin \frac{x}{2} = \sin \frac{3x}{2} -$
 $- \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{3x}{2} + \sin \frac{7x}{2} - \sin \frac{5x}{2} + \sin \frac{9x}{2} - \sin \frac{7x}{2} + \sin \frac{11x}{2} -$

$$\begin{aligned}
 & - \sin \frac{9x}{2} + \sin \frac{13x}{2} - \sin \frac{11x}{2} + \sin \frac{15x}{2} - \sin \frac{13x}{2} = \sin \frac{15x}{2} - \sin \frac{x}{2} = \\
 & = 2 \cos 4x \sin \frac{7x}{2} \Rightarrow T = \frac{\cos 4x \sin \frac{7x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.
 \end{aligned}$$

Graficele funcțiilor sin, cos și tg

Exercițiile de la pagina 140.

Exercițiul 1. Să se precizeze semnul numerelor:

a) $\sin 5 + \sin 4$; b) $\cos 2 + \cos 4$; c) $\sin \frac{7}{6} - \sin \frac{4}{3}$; d) $\cos \frac{5\pi}{3} - \cos \frac{11\pi}{6}$;

e) $\sin 7 \cos 13 \frac{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{3\pi}{5}}{\sin \frac{23\pi}{14} - \sin \frac{\pi}{9}}$; f) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{9\pi}{14}$.

Soluție. a) $\sin 5 + \sin 4 = 2 \sin 4,5 \cos 0,5$; $4,5 \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$

$\sin 4,5 < 0$; $0,5 \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos 0,5 > 0 \Rightarrow \sin 5 + \sin 4 < 0$.

b) $\cos 2 + \cos 4 = 2 \cos 3 \cos 1$; $3 \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow \cos 3 < 0$; $1 \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos 1 > 0$;
 $\Rightarrow 2 \cos 3 \cos 1 < 0$.

c) $\sin \frac{7\pi}{6} - \sin \frac{4\pi}{3} = 2 \cos \frac{15\pi}{12} \sin \frac{-\pi}{12}$; $\cos \frac{15\pi}{12} < 0$ și $\sin \frac{-\pi}{12} < 0$; $\Rightarrow$
 $\Rightarrow 2 \cos \frac{15\pi}{12} \sin \frac{-\pi}{12} > 0$.

d) $\cos \frac{5\pi}{3} - \cos \frac{11\pi}{6} = 2 \sin \frac{21\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12} < 0$ pentru că $\frac{21\pi}{12} \in (\pi, 2\pi) \Rightarrow \sin \frac{21\pi}{12} < 0$;
 $\frac{\pi}{12} \in (0, \pi) \Rightarrow \sin \frac{\pi}{12} > 0$.

e) $\sin 7 \cos 13 \frac{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{3\pi}{5}}{\sin \frac{23\pi}{14} - \sin \frac{\pi}{9}} = \sin 7 \cos 13 \frac{\sin \frac{2\pi}{5} \sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{221\pi}{252} \sin \frac{193\pi}{252}}$.

$7 \in (2\pi, 3\pi) \Rightarrow \sin 7 > 0$; $13 \in (4\pi, \frac{9\pi}{2}) \Rightarrow \cos 13 > 0$; $\sin \frac{2\pi}{5} > 0$; $\sin \frac{\pi}{5} > 0$;

$\frac{221\pi}{252} \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow \cos \frac{221\pi}{252} < 0$; $\frac{193\pi}{252} \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow \sin \frac{193\pi}{252} > 0$; rezultă că expresia este negativă.

f) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{9\pi}{14} = \frac{\sin (\frac{\pi}{8} - \frac{9\pi}{14})}{\cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{9\pi}{14}} = \frac{\sin (-\frac{29\pi}{56})}{\cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{9\pi}{14}} > 0$, pentru că: $\cos \frac{\pi}{8} > 0$;

$\frac{9\pi}{14} \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow \cos \frac{9\pi}{14} < 0$; $\frac{29\pi}{56} \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow \sin (-\frac{29\pi}{56}) < 0$.

Exercițiul 2. Folosind graficul funcției sin, schițați graficele func-

țiilor: a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |\sin x|$, b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sin |x|$.

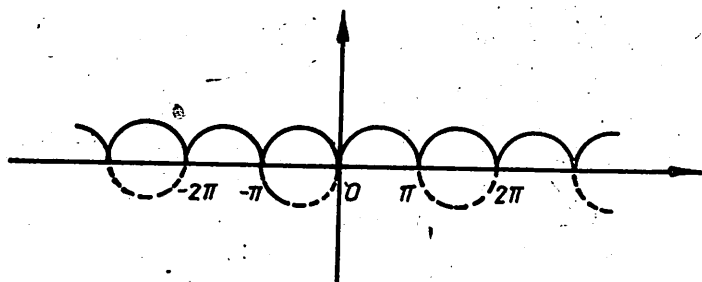


Fig. 237.

Soluție. a)

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x & \text{dacă } \sin x \geq 0 \\ -\sin x & \text{dacă } \sin x < 0 \end{cases}$$

Graficul funcției f se obține din graficul funcției $\sin$, luând pe porțiunile pe care funcția $\sin$ este negativă, simetricul graficului ei față de axa xx' .

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sin |x| = \begin{cases} \sin x & \text{dacă } x \geq 0 \\ \sin (-x) & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$

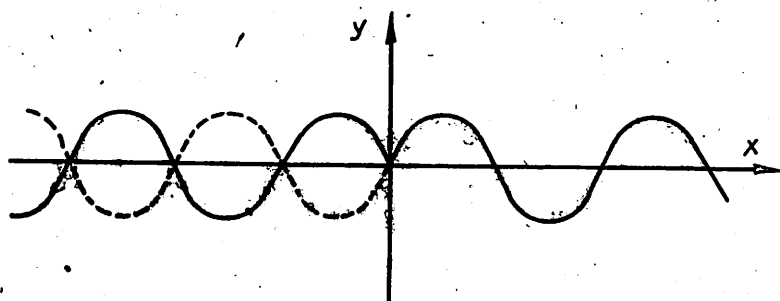


Fig. 238.

Pentru $x \geq 0$, graficul lui g este la fel ca graficul funcției $\sin$; dacă $x < 0$, graficul lui g este simetric cu graficul funcției $\sin$ față de axa xx' .

Exercițiul 3. Să se reprezinte grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2} \sin x - 2$.

Soluție. Funcția f este periodică, având aceeași perioadă ca a funcției $\sin$, deci $T = 2k\pi$. Intr-adevăr: $f(x + T) = \frac{1}{2} \sin (x + T) - 2 = \frac{1}{2} \sin x - 2 = f(x) \quad (\forall) x \in \mathbb{R}$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = \frac{1}{2} \sin x - 2$	-2	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{5}{2}$	-2
		(M)		(m)	

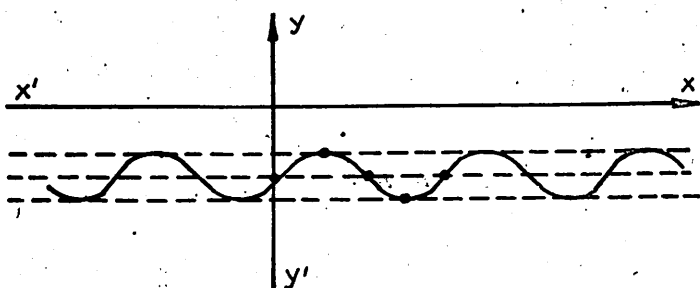
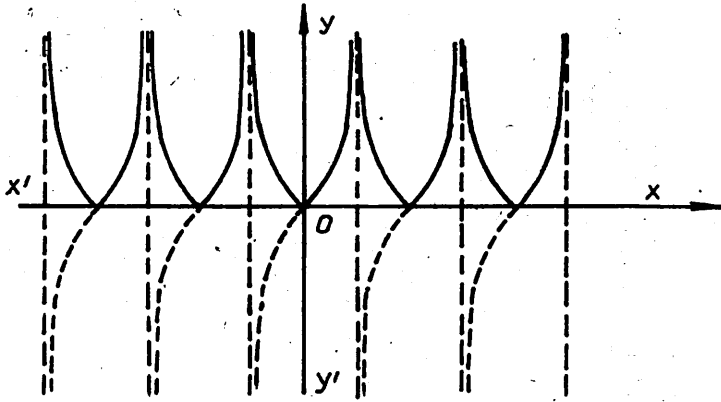


Fig. 239.

Funcția fiind periodică este suficient să trasăm graficul pe un interval de lungimea unei perioade; îl vom trasa pe $[0, 2\pi]$.

Exercițiul 4. Folosind graficul funcției tg , să se schițeze graficul funcției $f: \mathbb{R} \setminus \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |\operatorname{tg} x|$.

Soluție.
$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{dacă } x \in (k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z} \\ -\operatorname{tg} x & \text{dacă } x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi), k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



Graficul funcției f este la fel cu graficul funcției tg pe intervalele pe care funcția tg este pozitivă, iar pe intervalele pe care aceasta este negativă, îl înlocuim cu simetricul lui față de axa xx' .

Fig. 240.

Identități condiționate

Exercițiile de la pagina 143.

Exercițiul 1. Dacă $x = y + z$, să se arate că: a) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y \operatorname{ctg} z$ pentru $\cos x \neq 0$, $\sin y \neq 0$, $\sin z \neq 0$; b) $\cos x + \cos y + \cos z + 1 = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}$.

Soluție. a) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z = \operatorname{tg} (y + z) + \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z =$

$$= \frac{\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z} + \frac{1}{\operatorname{tg} y} + \frac{1}{\operatorname{tg} z} = \frac{\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z} + \frac{\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z}{\operatorname{tg} y \operatorname{tg} z} = (\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z) \cdot$$

$$\frac{1}{(1 - \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z) \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z} = \operatorname{tg} (y + z) \operatorname{ctg} y \operatorname{ctg} z = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y \operatorname{ctg} z.$$

b) $\cos x + \cos y + \cos z + 1 = \cos x + 2 \cos \frac{y+z}{2} \cos \frac{y-z}{2} + 1 = 2 \cos^2 \frac{x}{2} +$
 $+ 2 \cos \frac{y+z}{2} \cos \frac{y-z}{2} = 2 \cos^2 \frac{y+z}{2} + 2 \cos \frac{y+z}{2} \cos \frac{y-z}{2} = 2 \cos \frac{y+z}{2} \cdot$

$$(\cos \frac{y+z}{2} + \cos \frac{y-z}{2}) = 2 \cos \frac{x}{2} \cdot 2 \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2} = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}.$$

Exercițiul 2. Dacă $a + b + c = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci:

a) $\sin a + \sin b + \sin c = (-1)^{k+1} \cdot 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}.$

b) $\cos a + \cos b + \cos c + 1 = (-1)^k \cdot 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}.$

Soluție. a) $a + b + c = 2k\pi \Rightarrow c = 2k\pi - (a + b); \Rightarrow \sin a + \sin b + \sin c = \sin a + \sin b + \sin [2k\pi - (a + b)] = \sin a + \sin b - \sin (a + b) =$
 $= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} - 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2} = 2 \sin \frac{a+b}{2} (\cos \frac{a-b}{2} -$
 $- \cos \frac{a+b}{2}) = 2 \sin \frac{a+b}{2} (-2 \sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b}{2}) = 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2};$
 $\frac{a+b}{2} = \frac{2k\pi - c}{2} = k\pi - \frac{c}{2}.$

Pentru k par, $k = 2n, n \in \mathbb{Z}, \Rightarrow \sin \frac{a+b}{2} = \sin (2n\pi - \frac{c}{2}) =$
 $= -\sin \frac{c}{2}.$
 $\sin a + \sin b + \sin c = 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = -4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} =$
 $= (-1)^{2n+1} \cdot 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} = (-1)^{k+1} \cdot 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}.$

Pentru k impar, $k = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}, \sin \frac{a+b}{2} = \sin (2n\pi + \pi - \frac{c}{2}) =$
 $= \sin (\pi - \frac{c}{2}) = \sin \frac{c}{2}; \Rightarrow \sin a + \sin b + \sin c = 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} =$
 $= 4 \sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b}{2} \cdot \sin \frac{c}{2} = (-1)^{2n+2} \cdot 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} = (-1)^{k+1} \cdot 4 \sin \frac{a}{2} \cdot$
 $\cdot \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}.$

b) $\cos a + \cos b + \cos c + 1 = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2 \cos^2 \frac{c}{2} =$
 $= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2 \cos^2 \frac{a+b}{2} = 2 \cos \frac{a+b}{2} (\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{a+b}{2}) =$
 $= 4 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2}.$

Pentru k par, $k = 2n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{2k\pi - (a+b)}{2} =$
 $= \cos (k\pi - \frac{a+b}{2}) = \cos \frac{a+b}{2}; \cos a + \cos b + \cos c + 1 = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} =$
 $= (-1)^{2n} \cdot 4 \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} = (-1)^k \cdot 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}.$

Pentru k impar, $k = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}, \cos \frac{c}{2} = \cos \frac{2k\pi - (a+b)}{2} =$
 $= \cos (k\pi - \frac{a+b}{2}) = \cos (\pi - \frac{a+b}{2}) = -\cos \frac{a+b}{2}; \Rightarrow \cos a + \cos b + \cos c +$
 $+ 1 = -4 \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} = (-1)^{2n+1} \cdot 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} = (-1)^k \cdot$
 $\cdot 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}.$

Exercițiul 3. Dacă $3 \cos t + 4 \sin t + 5 = 0$, atunci $3 \operatorname{tg} t +$
 $+ 4 \operatorname{ctg} t - 7 = 0.$

Soluție. Rezolvăm sistemul: $3 \cos t + 4 \sin t = -5$ și $\cos^2 t +$
 $+ \sin^2 t = 1. \Rightarrow \cos t = \frac{-5 - 4 \sin t}{3} \Rightarrow \frac{25 + 16 \sin^2 t + 40 \sin t}{9} + \sin^2 t = 1;$
 $\Rightarrow 25 \sin^2 t + 40 \sin t + 16 = 0 \Rightarrow (5 \sin t + 4)^2 \Rightarrow \sin t = -\frac{4}{5}, \cos t = -\frac{3}{5}.$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}; \operatorname{ctg} t = \frac{3}{4}. \text{ Verificăm relația ce trebuie demonstrată:}$$

$$3 \cdot \frac{4}{3} + 4 \cdot \frac{3}{4} - 7 = 0. \text{ Deci relația este adevărată în condițiile date.}$$

Exercițiul 4. Dacă $3 \cos t + 4 \sin t + 5 = 0$, să se arate că $\sin 2t = \frac{24}{25}$. Reciproca este adevărată?

Soluție. Avem de rezolvat sistemul: $3 \cos t + 4 \sin t + 5 = 0$ și $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$; se observă că este același ca și în exercițiul precedent. Rezultă că $\sin t = -\frac{4}{5}$; $\cos t = -\frac{3}{5}$; $\Rightarrow \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \left(-\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$. Reciproca nu este adevărată pentru că valoarea lui $\sin 2t = \frac{24}{25}$ poate fi obținută și din alte valori ale lui $\sin t$ și $\cos t$, de exemplu: $\sin t = \frac{4}{5}$ și $\cos t = \frac{3}{5}$, valori care nu verifică prima relație.

CAPITOLUL VI

ECUAȚII TRIGONOMETRICE

Funcțiile arcsin, arccos, arctg

Exercițiile de la pagina 150.

Exercițiul 1. Să se afle numerele: a) $\arccos \frac{1}{2}$; b) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$; c) $\sin(\arctg \sqrt{3})$; d) $\arctg(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2})$; e) $\sin(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{4}{5})$; f) $\sin(3 \arcsin \frac{1}{4})$.

Soluție. a) $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; b) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3}$; c) $\sin(\arctg \sqrt{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\arctg(\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}) = \arctg(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3}) = \arctg \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.

e) $\sin(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{4}{5})$. Notăm $\arcsin \frac{3}{5} = a$ și $\arcsin \frac{4}{5} = b$; $\sin a = \frac{3}{5}$, $a \in (0, \frac{\pi}{2})$ și $\sin b = \frac{4}{5}$, $b \in (0, \frac{\pi}{2})$; $\Rightarrow \cos a = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$ și $\cos b = \frac{3}{5}$.

Atunci $\sin(\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{4}{5}) = \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = 1$.

f) $\sin(3 \arcsin \frac{1}{4})$. Notăm $\arcsin \frac{1}{4} = a \Rightarrow \sin a = \frac{1}{4}$, $a \in (0, \frac{\pi}{2})$.

$\sin(3 \arcsin \frac{1}{4}) = \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a = 3 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{64} = \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$.

Exercițiul 2. Dacă $x = 2 \arctg \frac{1}{3}$ să se calculeze $\sin x$ și $\cos x$.

Soluție. $x = 2 \arctg \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x}{2} = \arctg \frac{1}{3} \Rightarrow \arctg \frac{x}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos x = \frac{1 - \arctg^2 \frac{x}{2}}{1 + \arctg^2 \frac{x}{2}} \Rightarrow \cos x = \frac{1 - \frac{1}{9}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$; $\Rightarrow \sin x = \frac{3}{5}$. ($x \in (0, \frac{\pi}{2})$).

Exercițiul 3. Să se determine x astfel ca $\arctg \frac{1}{5} + \arctg x = \frac{\pi}{2}$.

Soluție. Ecuația se mai scrie: $\arctg x = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{5} \Rightarrow \arctg(\arctg x) = \arctg(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{5}) \Rightarrow x = \operatorname{ctg}(\arctg \frac{1}{5}) = 5. \Rightarrow x = 5$.

Exercițiul 4. Să se arate că:

- a) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \arccos \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$;
 b) $\arcsin \frac{4}{25} + \arccos \frac{24}{25} = \arcsin \frac{336}{625}$; c) dacă a și b sînt numere reale $a \neq 0$,
 să se arate că $\arcsin \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + b^4}} + \arctg \frac{b^2}{a^2} = \frac{\pi}{2}$; d) $\arcsin \frac{\sqrt{330}}{22} + \arccos \frac{\sqrt{154}}{22} +$
 $+ \arctg \frac{\sqrt{105}}{4} = \pi$; e) $\arcsin \frac{3\sqrt{10}}{10} + \arcsin \frac{\sqrt{10}}{10} = \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{5} +$
 $+ \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5}$; f) $\arctg \frac{4x}{5-3x} - \arctg \frac{5x-3}{4} = \arctg \frac{3}{4}$, $x < \frac{5}{3}$. De ce?
 g) $\frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x - 2 \sin x} = \operatorname{tg}(x + \arctg 2)$, $\operatorname{tg} x \neq \frac{1}{2}$.

Soluție. a) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$; $\cos \frac{5\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}) = \sin \frac{\pi}{12}$; $\sin \frac{\pi}{12} = \sin(60^\circ - 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 45^\circ \cos 60^\circ =$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$; $\Rightarrow \arccos \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{5\pi}{12} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} +$
 $+ \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Notăm $\arcsin \frac{7}{25} = a$ și $\arccos \frac{24}{25} = b$; $\Rightarrow \sin a = \frac{7}{25}$, $a \in (0, \frac{\pi}{2})$ și $\cos b =$
 $= \frac{24}{25}$; $b \in (0, \frac{\pi}{2})$; $\Rightarrow \cos a = \sqrt{1 - \frac{49}{625}} = \frac{24}{25}$ și $\sin b = \sqrt{1 - \frac{576}{625}} = \frac{7}{25}$;
 $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a = \frac{7}{25} \cdot \frac{24}{25} + \frac{24}{25} \cdot \frac{7}{25} = \frac{168}{625} + \frac{168}{625} = \frac{336}{625}$;

$\Rightarrow a + b = \arcsin \frac{336}{625}$ (pentru că: $\sin a = \frac{7}{25} < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a \in (0, \frac{\pi}{4})$; $\cos b =$
 $= \frac{24}{25} > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b \in (0, \frac{\pi}{4}) \Rightarrow (a + b) \in (0, \frac{\pi}{2})$). $\Rightarrow \arcsin \frac{7}{25} + \arccos \frac{24}{25} =$
 $= \arcsin \frac{336}{625}$.

c) Notăm $\arcsin \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + b^4}} = m$ și $\arctg \frac{b^2}{a^2} = n$; $\Rightarrow \sin m = \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + b^4}}$ și cum
 $\frac{a^2}{\sqrt{a^4 + b^4}} > 0 \Rightarrow m \in (0, \frac{\pi}{2})$; $\operatorname{tg} n = \frac{b^2}{a^2} > 0 \Rightarrow n \in (0, \frac{\pi}{2})$; $\sin(m + n) =$
 $= \sin m \cos n + \sin n \cos m = \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + b^4}} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + b^4}} + \frac{b^2}{\sqrt{a^4 + b^4}} \cdot \frac{b^2}{\sqrt{a^4 + b^4}} = 1$;

$\Rightarrow \sin(m + n) = 1$ și cum $(m + n) \in (0, \pi) \Rightarrow m + n = \frac{\pi}{2}$; $\Rightarrow \arcsin \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + b^4}} +$
 $+ \arctg \frac{b^2}{a^2} = \frac{\pi}{2}$.

d) Egalitatea se mai scrie: $\arcsin \frac{\sqrt{330}}{22} + \arccos \frac{\sqrt{154}}{22} = -\arctg \frac{\sqrt{105}}{4}$.

Notăm $\arcsin \frac{\sqrt{330}}{22} = a$ și $\arccos \frac{\sqrt{154}}{22} = b$; $\Rightarrow \sin a = \frac{\sqrt{330}}{22} > \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$;

$\cos b = \frac{\sqrt{154}}{22} < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$; $\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$;

$\cos a = \frac{\sqrt{154}}{22} \Rightarrow \operatorname{tg} a = \sqrt{\frac{330}{134}}$; $\operatorname{tg} b = \sqrt{\frac{330}{154}}$;

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\frac{2\sqrt{330}}{154}}{1 - \frac{330}{154}} = -\frac{\sqrt{105}}{4}$.

$(a+b) \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Rightarrow (a+b-\pi) \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ și $\operatorname{tg}(a+b-\pi) = \operatorname{tg}(a+b) = -\frac{\sqrt{105}}{4}$;

$\Rightarrow a+b-\pi = \arctg(-\frac{\sqrt{105}}{4})$ sau: $a+b-\pi = -\arctg \frac{\sqrt{105}}{4} \Rightarrow \arcsin \frac{\sqrt{330}}{22}$

$+ \arccos \frac{\sqrt{154}}{22} - \pi = -\arctg \frac{\sqrt{105}}{4}$; $\Rightarrow \arcsin \frac{\sqrt{330}}{22} + \arccos \frac{\sqrt{154}}{22} +$

$+ \arctg \frac{105}{4} = \pi$.

e) Notăm $\arcsin \frac{3\sqrt{10}}{10} = a$, $\arcsin \frac{\sqrt{10}}{10} = b$, $\arcsin \frac{2\sqrt{5}}{5} = c$ și $\arcsin \frac{\sqrt{5}}{5} = d$

$\Rightarrow \sin a = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, $a \in (0, \frac{\pi}{2})$; $\sin b = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $b \in (0, \frac{\pi}{2})$; $\sin c = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $c \in (0, \frac{\pi}{2})$;

$\sin d = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $d \in (0, \frac{\pi}{2})$.

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a = \frac{3\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{10}}{10} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} = 1$;

$\sin(c+d) = \sin c \cos d + \sin d \cos c = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = 1$;

$\sin(a+b) = \sin(c+d) = 1$; $(a+b) \in (0, \pi)$ și $(c+d) \in (0, \pi) \Rightarrow a+b = c+d = \frac{\pi}{2}$. $\Rightarrow \arcsin \frac{3\sqrt{10}}{10} + \arcsin \frac{\sqrt{10}}{10} = \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{5} + \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5}$;

f) Notăm $\arctg \frac{4x}{5-3x} = a$ și $\arctg \frac{5x-3}{4} = b$; $\Rightarrow \operatorname{tg} a = \frac{4x}{5-3x}$ și

$a \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; $\operatorname{tg} b = \frac{5x-3}{4}$, $b \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = \frac{\frac{4x}{5-3x} - \frac{5x-3}{4}}{1 + \frac{4x(5x-3)}{(5-3x)4}} = \frac{16x - 25x + 15x^2 + 15 - 9x}{20 - 24x + 20x^2} =$
 $= \frac{3(5x^2 - 6x + 5)}{4(5x^2 - 6x + 5)} = \frac{3}{4}$. Dacă $(a-b) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ și $\operatorname{tg}(a-b) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow a-b > 0$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow \arctg \frac{4x}{5-3x} - \arctg \frac{5x-3}{4} > 0$; $\Rightarrow \arctg \frac{4x}{5-3x} > \arctg \frac{5x-3}{4}$; $\Rightarrow$

$\frac{4x}{5-3x} > \frac{5x-3}{4} \Rightarrow \frac{16x - 25x + 15x^2 + 15 - 9x}{4(5-3x)} > 0 \Rightarrow \frac{15x^2 - 18x + 15}{4(5-3x)} > 0$;

$$\Rightarrow 15x^2 - 18x + 15 > 0 \quad (\forall) x \in \mathbb{R}, \text{ pentru c\acute{a}} \Delta < 0; 5 - 3x > 0 \Rightarrow x < \frac{5}{3}.$$

$$\text{În acest caz } a - b = \arctg \frac{3}{4}; \Rightarrow \arctg \frac{4x}{5-3x} - \arctg \frac{5x-3}{4} = \arctg \frac{3}{4}.$$

$$\text{Am v\acute{a}zut c\acute{a} } a \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \text{ \textbf{și} } b \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}); \Rightarrow (a - b) \in (-\pi, \pi).$$

$$\text{Dac\acute{a} } (a - b) \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \Rightarrow a - b < 0 \Rightarrow x > \frac{5}{3}, \text{ contrar ipotezei.}$$

$$\text{Dac\acute{a} } (a - b) \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \arctg(a - b) \neq \frac{3}{4}, \text{ contrar rezultatului ob\textbf{t}inut.}$$

$$\text{Deci, } (a - b) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

$$\begin{aligned} \text{g) Pentru } \cos x \neq 0 \text{ avem: } \frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x - 2 \sin x} &= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + 2}{1 - 2 \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\operatorname{tg} x + 2}{1 - 2 \operatorname{tg} x} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} a} = \operatorname{tg}(x + a), \text{ unde } \operatorname{tg} a = 2 \Rightarrow a = \arctg 2; \Rightarrow \frac{\sin x + 2 \cos x}{\cos x - 2 \sin x} = \\ &= \operatorname{tg}(x + \arctg 2). \end{aligned}$$

$$\text{Dac\acute{a} } \cos x = 0, \text{ atunci } x = \frac{\pi}{2} \text{ egalitatea precedent\textbf{ă} este verificat\textbf{ă}:}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \frac{\pi}{2} + 2 \cos \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2} - 2 \sin \frac{\pi}{2}} &= \frac{1 + 0}{0 - 2} = -\frac{1}{2}; \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \arctg 2) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \arctg 2 - \frac{\pi}{2}) = \\ &= \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{2} + \arctg 2) = -\operatorname{tg}(-\arctg 2 + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg}(\arctg 2) = \\ &= -\frac{1}{2}. \text{ Deci egalitatea este adev\textbf{ă}rat\textbf{ă} \textbf{și} \textbf{î}n cazul c\textbf{î}nd } \cos x = 0. \end{aligned}$$

Exerci\textbf{ț}iul 5. S\textbf{ă} se rezolve ecua\textbf{ț}iile:

$$\text{a) } \arcsin \frac{1}{1+x^2} + \arccos \frac{3}{5} = \frac{\pi}{2}; \text{ b) } \arctg x + \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3};$$

$$\text{c) } \cos(3 \arccos x) = \cos(2 \arccos x) + 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Solu\textbf{ț}ie. a) Not\textbf{ă}m } \arcsin \frac{1}{1+x^2} &= a \text{ \textbf{și} } \arccos \frac{3}{5} = b; \Rightarrow \sin a = \frac{1}{1+x^2} \\ \text{\textbf{și} } \cos b &= \frac{3}{5}; b, a \in (0, \frac{\pi}{2}); \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{3}{5} + \\ &+ \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{x^2(x^2+2)}}{1+x^2} = 1 \quad \frac{3}{5(1+x^2)} + \frac{4|x|\sqrt{x^2+2}}{(1+x^2)^2} = 1; 3 + 4|x|\sqrt{x^2+2} = \\ &= 5x^2 + 5 \Rightarrow (4|x|\sqrt{x^2+2})^2 = (5x^2+2)^2 \Rightarrow 16x^2(x^2+2) = 25x^4 + 20x^2 + 4 \Rightarrow \\ &9x^4 - 12x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (3x^2-2)^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ \textbf{și} } x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{b) Ecua\textbf{ț}ia se mai scrie: } \arctg x + \arctg \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}; \Rightarrow \operatorname{tg}(\arctg x + \arctg \frac{1}{2}) =$$

$$= \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{x + \frac{1}{2}}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{2x + 1}{2 - x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 6x + 3 = 2\sqrt{3} - \sqrt{3}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3} - 3}{6 + \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3} - 8}{11}.$$

c) Notăm $\arccos x = y \Rightarrow y \in (0, \pi) \Rightarrow \cos 3y = \cos 2y + 1 \Rightarrow 4 \cos^3 y - 3 \cos y = 2 \cos^2 y - 1 + 1 \Rightarrow \cos y (4 \cos^2 y - 2 \cos y - 3) = 0 \Rightarrow \cos y = 0 \Rightarrow$
 $x = \cos y = 0; 4 \cos^2 y - 2 \cos y - 3 = 0 \Rightarrow \cos y = \frac{1 - \sqrt{13}}{4} \Rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{13}}{4}$ și
 $\cos y = \frac{1 + \sqrt{13}}{4}$ care nu este bun pentru că nu aparține intervalului $[-1, 1]$.
 Deci $x \in \left\{0, \frac{1 - \sqrt{13}}{4}\right\}$.

Ecuatii trigonometrice fundamentale

Exercițiile de la pagina 156.

Exercițiul 1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\cos 4x = -\frac{1}{2}$; b) $\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{3} - 2x)$; c) $\sin 3x = \cos x$; d) $\operatorname{tg} 5x = -1$; e) $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) = 1$; f) $\sin(x^2) = \sin x$; g) $\sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Soluție. a) $4x \in \left\{\pm \arccos(-\frac{1}{2}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}; 4x \in \left\{\pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}; x \in \left\{\pm \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$

b) $x + \frac{\pi}{4} = \pm(\frac{\pi}{3} - 2x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$ și $x = \frac{7\pi}{12} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$
 $\Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{12} - 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}.$

c) $\sin 3x = \sin(\frac{\pi}{2} - x); \Rightarrow 3x = (-1)^k(\frac{\pi}{2} - x) + k\pi, k \in \mathbb{Z};$
 $k \text{ par} \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - x + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} (k = 2n) \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}; n \in \mathbb{Z};$

$k \text{ impar} \Rightarrow (k = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow 3x = -\frac{\pi}{2} - x + (2n + 1)\pi, n \in \mathbb{Z}; x = -\frac{\pi}{4} + \frac{(2n + 1)\pi}{2};$
 $x = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{Z}; x \in \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2} / n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + n\pi / n \in \mathbb{Z}\right\}.$

d) $5x = \arccos(-1) + k\pi, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{1}{5}(-\frac{\pi}{4}) + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}; \Rightarrow x \in \left\{-\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z}\right\}$ (Condiție: $5x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{10}, k \in \mathbb{Z}$);

e) $\operatorname{tg} 2x = \frac{1}{\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4})} \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg}(x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \operatorname{tg} 2x =$
 $= \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x) \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} - x + k\pi, k \in \mathbb{Z}; 3x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3},$

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (\text{Condiții: } x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, i \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})$$

$$f) \sin x^2 = \sin x \Rightarrow x^2 = (-1)^k x + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Pentru } k = 2n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 = x + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}; x^2 - x - 2n\pi = 0, \Rightarrow x_{1,2} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8n\pi}}{2}, 1 + 8n\pi \geq 0, \Rightarrow n \geq -\frac{1}{8\pi} \text{ și } n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Pentru } k = 2n + 1, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 = -x + (2n + 1)\pi; x^2 + x - (2n + 1)\pi = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(2n + 1)\pi}}{2}, n \in \mathbb{Z}; \text{ din condiția de existență pentru radicali re-}$$

$$\text{zultă că: } 1 + 8n\pi + 4\pi \geq 0, n \geq -\frac{1 - 4\pi}{8\pi} \text{ și } n \in \mathbb{Z}; \Rightarrow n \in \mathbb{N}.$$

$$x \in \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8n\pi}}{2} / n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(2n + 1)\pi}}{2} / n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$\begin{aligned} g) \sin x &= \frac{\sqrt{5} - 1}{4}. \text{ Calculăm } \sin 5x = \sin(3x + 2x) = \sin 3x \cos 2x + \\ &+ \sin 2x \cdot \cos 3x = (3 \sin x - 4 \sin^3 x)(1 - 2 \sin^2 x) + 2 \sin x \cos x(4 \cos^3 x - \\ &- 3 \cos x) = 3 \sin x - 6 \sin^3 x - 4 \sin^3 x + 8 \sin^5 x + 8 \sin x \cos^4 x - \\ &- 6 \sin x \cos^2 x = 3 \sin x - 10 \sin^3 x + 8 \sin^5 x + 8 \sin x(1 - 2 \sin^2 x + \\ &+ \sin^4 x) - 6 \sin x(1 - \sin^2 x) = 3 \sin x - 10 \sin^3 x + 8 \sin^5 x + 8 \sin x - \\ &- 16 \sin^3 x + 8 \sin^5 x - 6 \sin x + 6 \sin^3 x = 5 \sin x - 20 \sin^3 x + 16 \sin^5 x = \\ &= 5 \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{4} - 20 \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right)^3 + 16 \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right)^5 = 1. \Rightarrow \sin 5x = 1 \Rightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + \\ &+ 2k\pi, k \in \mathbb{Z}; \Rightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}; \text{ cum } \sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} < \frac{1}{2} \text{ și} \end{aligned}$$

$$\frac{5 - 1}{4} > 0 \Rightarrow \text{se păstrează din intervalul } [0, 2\pi] \text{ numai soluțiile: } x_1 = \frac{\pi}{10} \text{ și}$$

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{10} = \frac{9\pi}{10}$$

$$\text{Deci } x \in \left\{ \frac{\pi}{10} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{9\pi}{10} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ecuatii trigonometrice care se rezolvă cu ajutorul unor ecuații din algebra

Exercițiile de la pagina 157.

Să se rezolve ecuațiile:

$$\text{Exercițiul 1. } 3 \sin^2 x + 2 \cos x - 1 = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Soluție. } 3(1 - \cos^2 x) + 2 \cos x - 1 &= 0. \text{ Notăm } \cos x = y \Rightarrow -3y^2 + \\ &+ 2y + 2 = 0; \quad y_{1,2} = \frac{\pm 1 - \sqrt{7}}{3}; \Rightarrow \cos x = \frac{1 - \sqrt{7}}{3} \in [-1, 1] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$x \in \left\{ \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{7}}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}, \cos x = \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \notin [-1, 1] \text{ nu are soluții.}$$

$$\text{Deci } x \in \left\{ \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{7}}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exercițiul 2. $2 \cos^2 x - (2a + 1) \cos x + a = 0.$

Soluție. Notăm $\cos x = y \Rightarrow 2y^2 - (2a + 1)y + a = 0$. $\Delta = (2a + 1)^2 - 8a = 4a^2 - 4a + 1 = (2a - 1)^2 \geq 0; \Rightarrow y_{1,2} = \frac{2a + 1 \pm (2a - 1)}{4}; y_1 = a$
și $y_2 = \frac{1}{2}.$

Dacă $\cos x = a$ și $|a| \leq 1$ atunci $x \in \left\{ \pm \arccos a + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Dacă $\cos x = a$ și $|a| > 1$ ecuația nu are soluții.

Dacă $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left\{ \pm \arccos \frac{1}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$
și mulțimea soluțiilor este: $\left\{ \pm \arccos a + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}, |a| \leq 1 \right\} \cup \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Exercițiul 3. $\cos 2x + 2 \sin x - \frac{3}{2} = 0.$

Soluție. $1 - 2 \sin^2 x + 2 \sin x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow -2 \sin^2 x + 2 \sin x - \frac{1}{2} = 0;$
 $\Delta = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}, x \in \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Exercițiul 4. $\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \frac{3}{2}.$

Soluție. $\sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{3}{2};$ notăm $\sin^2 x = y \Rightarrow -2y^2 + 7y - 3 = 0; \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}$ și $y_2 = 3; \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x \in \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\};$
 $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x \in \left\{ (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}; \sin x = \sqrt{3} > 1 \Rightarrow$ nu are soluții;
 $\sin x = -\sqrt{3} < -1$ nu are soluție; deci mulțimea soluțiilor este:
 $x \in \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ (-1)^k \left(-\frac{\pi}{4}\right) + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$ (Condiții: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$).

Exercițiul 5. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}.$

Soluție. $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow -2 \sin^2 x \cos^2 x = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\sin 2x)^2 = 1 \Rightarrow \sin 2x = \pm 1.$
 $\sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}; \sin 2x = -1 \Rightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
 $\Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Exercițiul 6. $\operatorname{tg} x + \sin 2x - 2 = 0.$

Soluție. $\operatorname{tg} x + \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - 2 = 0$; înlocuim $\operatorname{tg} x = y \Rightarrow y + y^3 + 2y - 2 - 2y^2 = 0 \Rightarrow (y - 1)(y^2 - y + 2) = 0 \Rightarrow y = 1$ și $y^2 - y + 2 = 0$, cu $\Delta = -7 < 0$, $\Rightarrow y_{2,3} \notin \mathbb{R}$. $\Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ (Condiție: $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$).

Exercițiul 7. $6 \operatorname{ctg} x + 6 \operatorname{tg} 2x + 5 = 0$.

Soluție. Condiții: $x \neq k\pi$ și $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
 $\frac{6}{\operatorname{tg} x} + 6 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 5 = 0$. Notăm $\operatorname{tg} x = y \Rightarrow 6(1 - y^2) + 12y^2 + 5y - 5y^3 = 0 \Rightarrow (y - 2)(-5y^2 - 4y - 3) = 0$; $\Rightarrow y = 2 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 2 \Rightarrow x \in \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$; și $5y^2 + 4y + 3 = 0$ cu $\Delta < 0 \Rightarrow y_{2,3} \notin \mathbb{R}$. Deci $x \in \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercițiul 8. $\sin x + 2 \cos^2 x + \frac{1}{\sin x} = 2$, $\sin x \neq 0$.

Soluție. $\sin x + \frac{1}{\sin x} + 2(1 - \sin^2 x) = 2$; $\sin x \neq 0 \Rightarrow x = k\pi$; notăm $\sin x = y - 2y^3 + y^2 + 1 = 0 \Rightarrow (1 - y)(1 + y + 2y^2) = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$; și $2y^2 + y + 1 = 0$ cu $\Delta < 0 \Rightarrow y_{2,3} \notin \mathbb{R}$. Deci $x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercițiul 9. $\cos x + \sin^2 x + \frac{2}{1 + \cos x} = 3$.

Soluție. $1 + \cos x \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq -1 \Rightarrow x \neq \pi + 2k\pi$;
 $\cos x + 1 - \cos^2 x + \frac{2}{1 + \cos x} - 3 = 0 \Rightarrow -\cos^3 x - \cos x = 0 \Rightarrow -\cos x (1 + \cos^2 x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x \in \left\{ \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$; sau $x \in \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$; ecuația $1 + \cos^2 x = 0$ nu are soluții.

Ecuatii de forma: $a \cos t + b \sin t + c = 0$

Exercițiile de la pagina 161

Să se rezolve ecuațiile:

Exercițiul 1. $2 \cos t - \sin t + 2 = 0$.

Soluție. Notăm $x = \cos t$ și $y = \sin t$, x și y sînt soluții ale sistemului:
 $2x - y + 2 = 0$ și $x^2 + y^2 = 1$; obținem soluțiile: $x_1 = -\frac{3}{5}$, $y_1 = \frac{4}{5}$ și $x_2 = -1$,

$y_2 = 0$. Dacă $\sin t = \frac{4}{5}$ și $\cos t = -\frac{3}{5}$, cum $\sin t > 0$ și $\cos t < 0 \Rightarrow t$ este în cadranul al doilea, deci $t \in \left\{ \pi - \arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi \right\}$; $\sin t = 0$ și $\cos t = -1 \Rightarrow t \in \left\{ \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Deci $t \in \left\{ \pi - \arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercițiul 2. $(\sqrt{7} - 2\sqrt{2}) \cos t - \sin t + 1 = 0$.

Soluție. Notăm $\cos t = x$ și $\sin t = y; \Rightarrow (\sqrt{7} - 2\sqrt{2})x - y + 1 = 0$ și $x^2 + y^2 = 1; \Rightarrow y = (\sqrt{7} - 2\sqrt{2})x + 1 \Rightarrow x^2 + [(\sqrt{7} - 2\sqrt{2})x + 1]^2 = 1 \Rightarrow x^2(16 - 4\sqrt{14}) + 2(\sqrt{7} - 2\sqrt{2})x = 0$. Obținem soluțiile: $x_1 = 0$, $y_1 = 1$ și $x_2 = -\frac{(\sqrt{7} - 2\sqrt{2})}{8 - 2\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $y_2 = (\sqrt{7} - 2\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{14}}{4}$. Din $\cos t = 0$ și $\sin t = 1 \Rightarrow t \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$; din $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{4}$ și $\sin t = \frac{\sqrt{14}}{2} \Rightarrow t \in \left\{ \arcsin \frac{\sqrt{14}}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 Deci $t \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \arcsin \frac{\sqrt{14}}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercițiul 3. $\cos t + \sin t + \sqrt{2} = 0$.

Soluție. Notăm $\cos t = x$ și $\sin t = y \Rightarrow x + y + \sqrt{2} = 0$ și $x^2 + y^2 = 1$;
 $x = -\sqrt{2} - y \Rightarrow (-\sqrt{2} - y)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow 2y^2 + 2\sqrt{2}y + 1 = 0$ cu $\Delta = 0$
 $\Rightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ și $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; cum $\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ și $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow t$ este în cadranul al treilea $\Rightarrow t \in \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercițiul 4. $5(4 + \sqrt{21}) \cos t - 5 \sin t + 8 + 3\sqrt{21} = 0$.

Soluție. Înlocuim $\cos t = x$ și $\sin t = y; \Rightarrow 5(4 + \sqrt{21})x - 5y + 8 + 3\sqrt{21} = 0$ și $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = (4 + \sqrt{21})x + \frac{8 + 3\sqrt{21}}{5} \Rightarrow x^2 + \left[(4 + \sqrt{21})x + \frac{8 + 3\sqrt{21}}{5} \right]^2 = 1 \Rightarrow x^2 + (4 + \sqrt{21})^2 x^2 + \frac{2}{5}(4 + \sqrt{21})(8 + 3\sqrt{21})x + \left(\frac{8 + 3\sqrt{21}}{5} \right)^2 - 1 = 0$;
 $x^2(38 + 8\sqrt{21}) + x \frac{190 + 40\sqrt{21}}{5} + \frac{228 + 48\sqrt{21}}{25} = 0; \Rightarrow x^2(38 + 8\sqrt{21}) + (38 + 8\sqrt{21})x + \frac{6}{25}(38 + 8\sqrt{21}) = 0; x^2 + x + \frac{6}{25} = 0; x_1 = -\frac{2}{5}$ și $y_1 = \frac{\sqrt{21}}{5}$ și $x_2 = -\frac{3}{5}$, $y_2 = -\frac{4}{5}$. Dacă $\sin t = \frac{\sqrt{21}}{5}$ și $\cos t = -\frac{2}{5} \Rightarrow t$ este în cadranul al treilea
 $\Rightarrow t \in \left\{ \pi + \arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$; $\sin t = \frac{\sqrt{21}}{5}$ și $\cos t = -\frac{2}{5} \Rightarrow t$ este în cadranul al doilea; $\Rightarrow t \in \left\{ \pi - \arcsin \frac{\sqrt{21}}{5} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$. Deci $t \in \left\{ \pi + \arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pi - \arcsin \frac{\sqrt{21}}{5} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercițiul 5. $\sqrt{3} \cos t - \sin t - 2 = 0$.

Soluție. $\sqrt{3} \cos t = 2 + \sin t \Rightarrow 3 \cos^2 t = 4 + 4 \sin t + \sin^2 t; \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3(1 - \sin^2 t) = 4 + 4 \sin t + \sin^2 t; \Rightarrow -4 \sin^2 t - 4 \sin t - 1 = 0 \Rightarrow (2 \sin t + 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin t = -\frac{1}{2}$ și $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ este în cadranul al patrulea $\Rightarrow t \in \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercițiul 6. $\sqrt{3} \cos t - \sin t - \sqrt{3} = 0$.

Soluție. $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}; \Rightarrow \cos \frac{\pi}{6} \cos t - \sin \frac{\pi}{6} \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2};$
 $\cos \left(\frac{\pi}{6} + t \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + t = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi, t \in \mathbb{Z}; t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ și $t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Deci $t \in \left\{ 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Exercițiul 7. Să se determine perioada principală a funcțiilor:

a) $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \sin 5x$; b) $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = \cos \frac{x}{5}$; c) $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_3(x) = \sin 35x + \cos 42x$.

Soluție. a) $f: A \rightarrow B$, unde A este o mulțime simetrică, este o funcție periodică dacă există un număr real $T \neq 0$, astfel încât $f(x + T) = f(x), (\forall) x \in A$. $f_1(x + T) = f_1(x) \Rightarrow \sin 5(x + T) = \sin 5x, (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow 5T = 2k\pi; \Rightarrow T = \frac{2k\pi}{5}$; pentru $k = 1 \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{5}$ (perioada principală).

b) $f_2(x + T) = f_2(x), (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos \frac{x + T}{5} = \cos \frac{x}{5} \Rightarrow \frac{x + T}{5} = \frac{x}{5} + 2k\pi; T = 10k\pi$; pentru $k = 1 \quad T_1 = 10\pi$.

c) $f_3(x + T) = f_3(x), (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin 35(x + T) + \cos 42(x + T) = \sin 35x + \cos 42x$; pentru $x = 0 \Rightarrow \sin 35T + \cos 42T = 1$; pentru $x = \frac{\pi}{7} \Rightarrow \sin 35\left(\frac{\pi}{7} + T\right) + \cos 42\left(\frac{\pi}{7} + T\right) = \sin 5\pi + \cos 6\pi$; sau: $-\sin 35T + \cos 42T = 1$.

Rezolvând sistemul format din ecuațiile: $\sin 35T + \cos 42T = 1$ și $-\sin 35T + \cos 42T = 1$, obținem: $\cos 42T = 1$ și $\sin 35T = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{2k'\pi}{42}$ și $T_2 = \frac{2k''\pi}{35}$, $k' \in \mathbb{Z}$ și $k'' \in \mathbb{Z}$; cum $T_1 = T_2 \Rightarrow \frac{2k'\pi}{42} = \frac{2k''\pi}{35} \Rightarrow k' = \frac{6k''}{5}$; cum $k' \in \mathbb{Z}, \Rightarrow k'' = 5k, k \in \mathbb{Z}, T = \frac{2 \cdot 5k\pi}{35} = \frac{2k\pi}{7}$; pentru $k = 1 \quad T_1 = \frac{2\pi}{7}$.

Exercițiul 8. Să se arate că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sin 4x + \cos \sqrt{2}x$ nu este periodică.

Soluție. $g(x + T) = g(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin 4(x + T) + \cos \sqrt{2}(x + T) = \sin 4x + \cos \sqrt{2}x$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$; pentru $x = 0 \Rightarrow \sin 4T + \cos 2T = 1$; pentru $x = -T \Rightarrow \sin 0 + \cos 0 = -\sin 4T + \cos 2T$; $\Rightarrow \sin 4T + \cos \sqrt{2}T = 1$ și $-\sin 4T + \cos \sqrt{2}T = 1$; rezolvând sistemul obținem: $2 \cos \sqrt{2}T = 2$ și $\sin 4T = 0$; $\cos \sqrt{2}T = 1$ și $\sin 4T = 0 \Rightarrow T = \frac{2k'\pi}{\sqrt{2}}$ și $T = \frac{2k''\pi}{4}$ unde k' și $k'' \in \mathbb{Z}$; cum $\frac{2k'\pi}{\sqrt{2}} = \frac{2k''\pi}{4} \Rightarrow k' = \frac{\sqrt{2}}{4}k''$, contradicție, deoarece k' și $k'' \in \mathbb{Z}$; deci presupunerea că există $T \neq 0$ astfel ca $g(x + T) = g(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$ nu este corectă și deci g nu este periodică.

Exercițiul 9. Să se reprezinte grafic funcția: $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 4 \sin x \cdot \cos x - 4\sqrt{3} \cos^2 x + 2\sqrt{3} - 3$.

Soluție. $h(x) = 2 \sin 2x - 2\sqrt{3}(1 + \cos 2x) + 2\sqrt{3} - 3 = 2 \sin 2x - 2\sqrt{3} \cos 2x - 3 = 4 \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \right) - 3 = 4 \left(\sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin 2x - \cos \frac{\pi}{6} \cos 2x \right) - 3 = -4 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) - 3$. Să arătăm că h este o funcție periodică: $-4 \left[\cos \left(2(x + T) + \frac{\pi}{6} \right) - 3 \right] = -4 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) - 3$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$; $\cos \left(2x + 2T + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$; $\Rightarrow 2T = 2k\pi$; $T = k\pi$. Pentru $k = 1$, $\Rightarrow T_1 = \pi$. Deci este suficient s-o reprezentăm grafic pe un interval de lungime π , de exemplu pe $[0, \pi]$.

x	0	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
h(x)	$-2\sqrt{3} - 3$	1	$2\sqrt{3} - 3$	-7	$-2\sqrt{3} - 3$
		(M)		(m)	

$$h(x) = -4 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) - 3; h(0) = -4 \cos \frac{\pi}{6} - 3 = -2\sqrt{3} - 3; h\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4 \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) - 3 = 2\sqrt{3} - 3; h(\pi) = -4 \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{6} \right) - 3 = -2\sqrt{3} - 3.$$

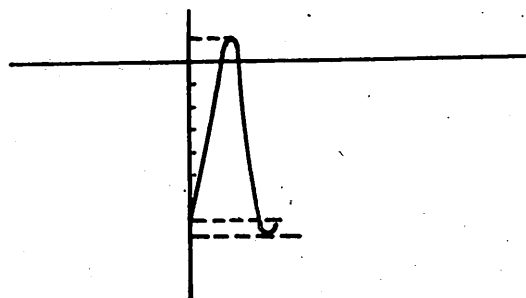


Fig. 241.

Valoarea maximă a funcției h se obține pentru $\cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = -1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12}$

$h_{\max}(x) = h\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -4(-1) - 3 = 1$. Valoarea minimă a lui h se obține pentru $\cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = 1$; $x = \frac{11\pi}{12} \Rightarrow h_{\min}(x) = -4 - 3 = -7$.

Probleme recapitulative

Problemele de la pagina 164.

Problema 1. Fie A și B două puncte distincte, M un punct situat pe dreapta AB și numărul real $a \geq \frac{1}{2} \|AB\|$. Să se arate că există un singur punct $M \in AB$ astfel ca $\|AM\| = a$ și $\|AM\| > \|BM\|$. Să se studieze și cazul $0 < a < \frac{1}{2} \|AB\|$.

Soluție. Notăm cu d dreapta AB. Conform axiomei riglei există un sistem de coordonate pe d astfel încât $x_A = 0$, $x_B > 0$ și pentru fiecare $a \in \mathbb{R}$, există un singur $M \in d$ astfel încât $x_M = a$.

Deoarece $A \neq B$ rezultă $\|AB\| > 0$. Dacă $a \geq \frac{1}{2} \|AB\| > 0 \Rightarrow a > 0$.

Cazul 1: $a \geq \frac{1}{2} \|AB\| \Rightarrow \|AB\| \leq 2a$. Fie $N \in d$ astfel ca $x_N = 2a$. Se știe din teorema 4, pag. 26, § 8, cap. 1, că orice segment are un singur mijloc și acesta aparține segmentului. Există deci $M \in d$, M unic, M mijlocul lui $[AN]$; $x_M = \frac{x_A + x_N}{2} = \frac{0 + 2a}{2} = a$. Deci $\|AM\| = a$. Dacă M separă A și B $\Rightarrow \|AM\| + \|MB\| = \|AB\|$; dar $\|AB\| \leq 2a \Rightarrow \|AM\| + \|NB\| \leq 2a \Rightarrow a + \|MB\| \leq 2a \Rightarrow \|MB\| \leq a \Rightarrow \|MB\| \leq \|AM\|$. Egalitatea este adevărată când $N=B$.

Dacă B separă A și M $\Rightarrow \|AB\| + \|BM\| = \|AM\|$ și cum $\|AB\| > 0$ și $\|BM\| \geq 0 \Rightarrow \|AM\| > \|BM\|$. Deci în ambele cazuri există un singur punct $M \in d$ astfel ca $\|AM\| = a$ și $\|AM\| \geq \|BM\|$.

Cazul 2: $0 < a < \frac{1}{2} \|AB\|$. Deoarece $\|AM\| = a \Rightarrow \|AM\| < \frac{1}{2} \|AB\| \Rightarrow M$ separă A și B $\Rightarrow \|AM\| + \|MB\| = \|AB\|$; cum $\|AM\| < \frac{1}{2} \|AB\| \Rightarrow \|MB\| > \frac{1}{2} \|AB\| \Rightarrow \|AM\| < \|BM\|$.

Problema 2. Să se arate că punctele A, B, C sînt coliniare dacă și numai dacă $(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) = 0$, unde s-a notat $a = \|BC\|$, $b = \|CA\|$, $c = \|AB\|$.

Soluție. Să arătăm că dacă $(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) = 0$, rezultă că A, B, C sînt coliniare. $(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) = 0 \Rightarrow b + c - a = 0$ sau $c + a - b = 0$ sau $a + b - c = 0$; presupunem prin absurd că A, B, C nu sînt coliniare. Atunci în triunghiul ABC avem: $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$, adică $b + c - a > 0$, $a + c - b > 0$, $a + b - c > 0$, relații care contrazic ipoteza. Deci presupunerea făcută nu este corectă și deci A, B, C sînt coliniare.

Reciproc: fie A, B, C coliniare. Să arătăm că $(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) = 0$. Dacă A, B, C sînt coliniare și B este între A și C $\Rightarrow \|AB\| + \|BC\| = \|AC\| \Rightarrow c + a = b \Rightarrow c + a - b = 0$.

Dacă A, B, C coliniare și A este între B și C $\Rightarrow \|BA\| + \|AC\| = \|BC\| \Rightarrow c + b = a \Rightarrow c + b - a = 0$.

Dacă A, B, C sînt coliniare și C este între A și B $\Rightarrow \|AC\| + \|CB\| = \|AB\| \Rightarrow b + a = c \Rightarrow b + a - c = 0$.

Deci în oricare din cazurile posibile una din paranteze este nulă și deci $(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) = 0$.

Problema 3. Dacă A, B, C, D sînt 4 puncte coliniare și F, G, H, I sînt respectiv mijloacele segmentelor |AB|, |BC|, |CD|, |DA|, atunci segmentele |FH| și |IG| au același mijloc.

Soluție. Dacă A, B, C, D $\in d$, considerăm pe d un sistem de coordonate în care notăm abscisele celor 4 puncte cu x_A, x_B, x_C și x_D . Folosind formula abscisei mijlocului unui segment obținem:

$x_F = \frac{x_A + x_B}{2}$, $x_G = \frac{x_C + x_B}{2}$, $x_H = \frac{x_C + x_D}{2}$ și $x_I = \frac{x_A + x_D}{2}$. Mijlocul M al segmentului |FH| va avea abscisa: $x_M = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}$. Mijlocul M' al segmentului |GI| va avea abscisa:

$x_{M'} = \frac{x_A + x_D + x_C + x_B}{4}$; $\Rightarrow x_M = x_{M'}$, $\Rightarrow M = M'$, deci |FH| și |GI| au același mijloc.

Problema 4. Se consideră o dreaptă d și un punct A nesituat pe d. Din A se duce $AB \perp d$ (B $\in d$) și oblicele |AM| și |AN| astfel ca M să fie mijlocul segmentului |BN|. (B, M, N $\in d$). Să se arate că $\widehat{BAM} > \widehat{MAN}$.

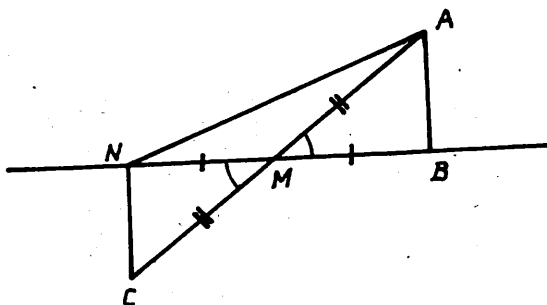


Fig. 242.

Soluție. Fie C simetricul lui A față de M. $\triangle ABM \equiv \triangle CNM$ (cazul: L.U.L.): $|AM| \equiv |CM|$ (construcție), $|NM| \equiv |MB|$ (ipoteză). $\widehat{NMC} \equiv \widehat{AMB}$ (opuse la vîrf). $\Rightarrow |NC| \equiv |AB|$ și $\widehat{ACN} \equiv \widehat{BAM}$.

În triunghiul ABN (dreptunghic în B), $|AN| > |AB|$ (lungimea ipotenuzei este

mai mare decât a unei catete); cum $|AB| \equiv |NC| \Rightarrow |AN| > |NC|$; în triunghiul ANC, cum $|AN| > |NC| \Rightarrow \widehat{ACN} > \widehat{CAN}$, adică $\widehat{ACN} > \widehat{MAN}$; cum $\widehat{ACN} \equiv \widehat{BAM} \Rightarrow \widehat{BAM} \equiv \widehat{MAN}$.

Problema 5. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Dacă D este piciorul înălțimii duse din A, să se arate că punctul D este între B și C.

Soluție. Dacă ABC este triunghi dreptunghic în $\hat{A} \in 90^\circ \Rightarrow$ unghiurile B și C sînt ascuțite, conform problemei 2, pag. 36, § 10, cap. 1, $\Rightarrow m(\widehat{ACB}) < 90^\circ$ și $m(\widehat{ABC}) < 90^\circ$.

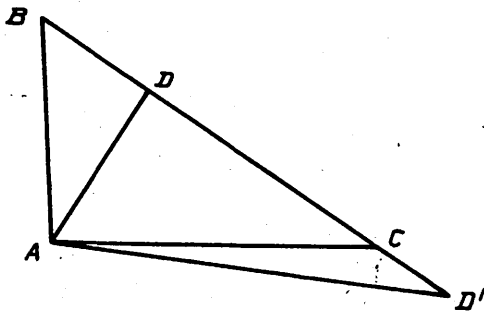


Fig. 243.

$\Rightarrow m(\widehat{ACB}) > 90^\circ$, ceea ce contrazice proprietatea amintită (că unghiurile unui triunghi dreptunghic diferite de unghiul drept au măsura mai mică de 90°). Deci presupunerea că $C \in |BD'|$ este falsă. La fel se arată că nici cazul: $B \in |D'C|$ nu este posibil; $\Rightarrow D \in |BC|$.

Presupunem, prin absurd, că D nu este între B și C. Dacă D ar fi în exteriorul laturii $|BC|$, de exemplu în D' , care este astfel ca $C \in |BD'|$, atunci aplicînd teorema unghiului exterior triunghiului $AD'C$, ar rezulta că $m(\widehat{ACB}) > m(\widehat{AD'B})$ și cum $m(\widehat{AD'B}) = 90^\circ$ (pentru că $AD' \perp BC$)

Problema 6. Fie AM o mediană în triunghiul ABC. Dacă $|AB| < |AC|$, să se arate că $\widehat{BAM} > \widehat{MAC}$.

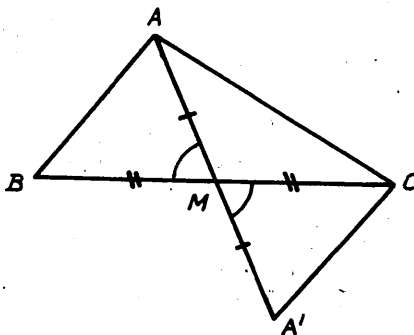


Fig. 244.

$\Rightarrow \widehat{BAM} > \widehat{MAC}$.

Soluție. Fie A' simetricul lui A față de M. $\triangle AMB \equiv \triangle A'MC$ (cazul: L.U.L.): $|BM| = |MC|$ (ipoteză), $|AM| \equiv |MA'|$ (construcție), $\widehat{BMA} \equiv \widehat{CMA'}$ (opuse la vîrf). $\Rightarrow |AB| \equiv |A'C|$ și $\widehat{BAM} \equiv \widehat{MA'C}$. $|AB| < |AC|$ (ipoteză), $|AB| \equiv |A'C|$ (demonstrație) $\Rightarrow |A'C| < |AC|$; în triunghiul $AA'C$ vom avea: $\widehat{A'AC} < \widehat{AA'C}$ sau: $\widehat{MAC} < \widehat{MA'C}$; cum $\widehat{MA'C} \equiv \widehat{BAM}$ (demonstrație)

Problema 7. Să se arate că punctul de intersecție al diagonalelor unui patrulater convex este acel punct din plan ale cărui distanțe la cele patru vîrfuri ale patrulaterului au suma minimă. Rămîne valabilă această proprietate pentru un patrulater concav?

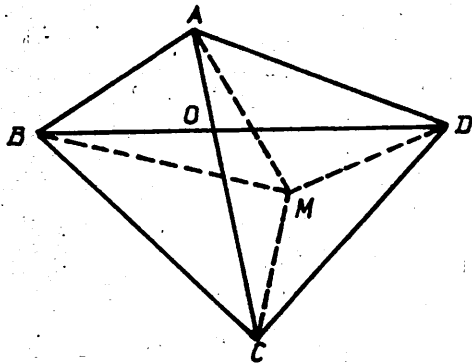


Fig. 245.

Soluție. Fie $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă ABCD este convex și $M \in \text{Int } ABCD$ și $M \notin [AC]$ și $M \notin [BD] \Rightarrow \|MA\| + \|MC\| > \|AC\|$ și $\|MB\| + \|MD\| > \|BD\|$ (am aplicat inegalitățile între laturile triunghiurilor AMC și BMD). $\Rightarrow \|AC\| + \|BD\| < \|MA\| + \|MC\| + \|MD\| + \|MB\|$ (1); $\Rightarrow \|AO\| + \|OC\| + \|OB\| + \|OD\| < \|MA\| + \|MB\| + \|MC\| + \|MD\|$.

Dacă $M \in |AC|$ sau $M \in |BD|$,

$M \in \text{Int } ABCD$: fie de exemplu $M \in |AC| \Rightarrow \|MA\| + \|MC\| = \|AC\|$; cum $M \in |BD| \Rightarrow \|MD\| + \|MB\| > \|BD\|$; adunînd, obținem tot inegalitatea (1); dacă $M \in |BD|$ și $M \notin |AC|$ analog.

Dacă M este exterior patrulaterului, raționamentul este analog.

Dacă ABCD este concav, fie de exemplu $C \in \text{Int } \widehat{ABD}$, atunci: $\|CA\| + \|CB\| + \|CD\| < \|CA\| + (\|BO\| + \|OC\|) + (\|CO\| + \|OD\|) = \|OA\| + \|OB\| + \|OC\| + \|OD\|$. Relația aceasta arată că dacă luăm $M = C$, suma distanțelor de la M la vîrfurile patrulaterului este mai mică decît suma distanțelor de la O la vîrfuri; deci în acest caz (cînd luăm un patrulater concav) proprietatea nu rămîne valabilă.

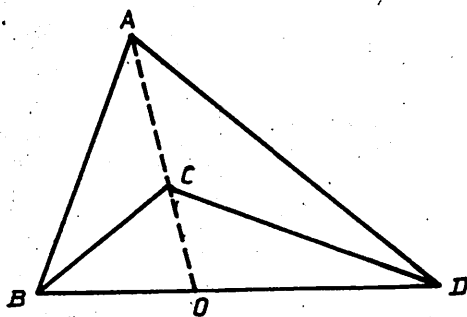


Fig. 246.

Problema 8. Fie ABC un triunghi, iar O un punct din planul triunghiului. Dacă punctele B și C sînt de o parte și de alta a dreptei AO, iar punctele C și A de o parte și de alta a dreptei OB, atunci A și B sînt de o parte și de alta a dreptei OC.

Soluție. B și C fiind de o parte și de alta a dreptei AO rezultă: $\Rightarrow |BC| \cap AO \neq \emptyset$; fie $|BC| \cap AO = \{D\}$ (1); C și A sînt de o parte și de alta a

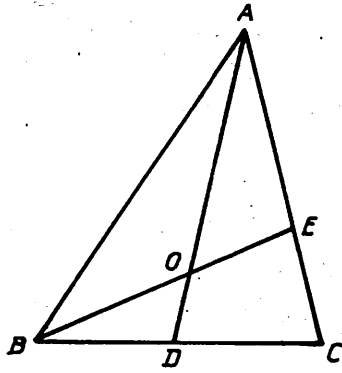


Fig. 247.

dreptei OB; $\Rightarrow |AC| \cap OB \neq \emptyset$; fie $|AC| \cap OB = \{E\}$ (2)
conform problemei 4 (a), pag. 18, § 6, cap. 1,
rezultă că $|BC| \subset \text{Int } \widehat{BAC}$; cum $D \in |BC| \Rightarrow D \in$
 $\in \text{Int } \widehat{BAC}$; $\Rightarrow |AD| \subset \text{Int } \widehat{BAC}$ (conform problemei 4 (b),
O pag. 18, § 6, cap. 1). $E \in |AC|$ (din (2)) $\Rightarrow$
 $|AD| \subset \text{Int } \widehat{BAE}$; $\Rightarrow |AD| \cap |BE| \neq \emptyset$ (teorema trans-
versalei). Fie $|AD| \cap |BE| = \{O'\}$ (3).

$\Rightarrow O' \in AD \cap BE$. Să arătăm că $O' = O$. Din relația (1)

$\Rightarrow D \in AO$; $\Rightarrow O \in AD$; din (2) $\Rightarrow E \in BO$; $\Rightarrow O \in BE$;

dacă $O \in AD$ și $O \in BE \Rightarrow O \in AD \cap BE$; $O = O'$ (căci în caz contrar, dreptele
AD și BE având două puncte comune, pe O și pe O' ar coincide). Deci,
 $|AD| \cap |BE| = \{O\}$; $\Rightarrow O \in |BE|$; $\Rightarrow O \in \text{Int } \widehat{BCE}$; $\Rightarrow |CO| \subset \text{Int } \widehat{BCE}$. Cum $E \in |AC|$ (din
(2)) $\Rightarrow |CO| \subset \text{Int } \widehat{BCA}$; $\Rightarrow |CO| \cap |AB| \neq \emptyset$ (teorema transversalei); $\Rightarrow |CO| \cap |AB| \neq \emptyset$.
Deci A și B sînt de o parte și de alta a lui OC.

Problema 9. Fie O un punct în interiorul triunghiului ABC. Dreptele
BO și CO intersectează AC și AB în D respectiv E. Știind că unghiul $\widehat{BAC}$
este obtuz, să se arate că $\|BD\| + \|CE\| > \|BE\| + \|ED\| + \|DC\|$.

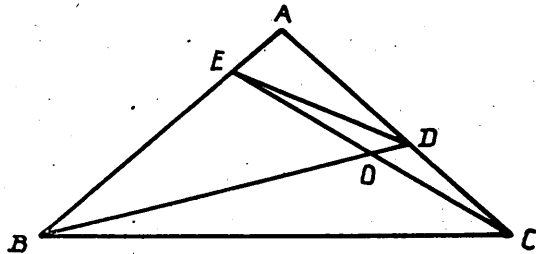


Fig. 248.

Soluție. Conform problemei 2, pag.
36, § 10, cap. 1, dacă un unghi al unui
triunghi este obtuz, celelalte două sînt
ascuțite. Dacă $m(\widehat{BAC}) > 90^\circ$, atunci în
triunghiul ABD, $\widehat{ADB} < \widehat{BAD}$ și deci
 $|DB| > |AB|$ (la unghiul mai mare se opu-
ne latura cu lungimea mai mare);

$\Rightarrow |DB| > |BE| + |EA|$ (1); în triunghiul ACE, $\widehat{CAE} > \widehat{AEC}$; $\Rightarrow |CE| > |AC|$;
 $\Rightarrow |CE| > |AD| + |DC|$ (2); adunînd (1) și (2) obținem: $|BD| + |CE| > |BE| +$
 $+ |CD| + |EA| + |AD|$; în triunghiul ADE: $|ED| < |EA| + |AD| \Rightarrow \|BD\| +$
 $+ \|CE\| > \|BE\| + \|CD\| + \|ED\|$.

Problema 10. Fie $|AD|$ cea mai mare și $|BC|$ cea mai mică latură
a patrulaterului convex ABCD. Să se arate că: $\widehat{ABC} > \widehat{ADC}$ și $\widehat{BCD} > \widehat{BAD}$.

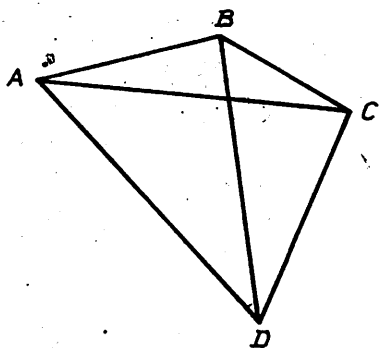


Fig. 249.

re latură); $\Rightarrow \widehat{ACD} > \widehat{CAD}$ (4). Adunăm (3) și (4) și obținem: $\widehat{BCA} + \widehat{ACD} > \widehat{BAC} + \widehat{CAD} \Rightarrow \widehat{BCD} > \widehat{BAD}$.

Soluție. În triunghiul ABD, $|AD| > |AB|$ (pentru că $|AD|$ este cea mai mare latură);
 $\Rightarrow \widehat{ABD} > \widehat{ADB}$ (1); în triunghiul BDC: $|DC| > |BC|$
 (pentru că $|BC|$ este latura cea mai mică);
 $\Rightarrow \widehat{DBC} > \widehat{BDC}$ (2); adunând (1) și (2) obținem: $\widehat{ABD} + \widehat{DBC} > \widehat{ADB} + \widehat{BDC}$; $\Rightarrow \widehat{ABC} > \widehat{ADC}$.

În triunghiul ABC $\Rightarrow |AB| > |BC|$ ($|BC|$ fiind cea mai mică latură); $\Rightarrow \widehat{BCA} > \widehat{BAC}$ (3); în triunghiul ACD: $|AD| > |DC|$ ($|AD|$ fiind cea mai mare latură);

Problema 11. Se dă un triunghi OAB, un punct C pe semidreapta opusă lui OA și un punct D $\in$ OB. Să se demonstreze că semidreapta CD și segmentul AB au un punct comun.

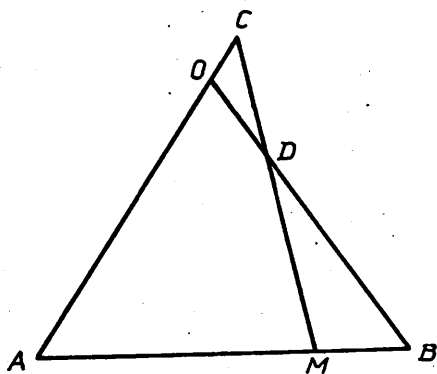


Fig. 250.

Soluție. $C \notin |OA|$ (ipoteză) $\Rightarrow C \notin |OA|$ (1);
 $D \in |OB|$ (ipoteză) (2); din (1) și (2) $\Rightarrow CD$ intersectează latura OB și nu intersectează latura OA a triunghiului OAB și nu trece prin vîrfurile triunghiului; conform corolarului teoremei 1, pag. 15, § 5, cap. 1, rezultă că CD intersectează a treia latură a triunghiului, deci $CD \cap |AB| \neq \emptyset$; fie $CD \cap |AB| = \{M\}$ (3). $|CM| \subset \text{Int } \widehat{CAM}$ (conform problemei 4 (a), pag. 18, § 6, cap. 1); dar

$M \in |AB|$ (din (3)); $\Rightarrow |CM| \subset \text{Int } \widehat{CAB}$ (4) $\Rightarrow CM \cap \text{Int } \widehat{CAB} = |CM|$ (5); din (2) $\Rightarrow D \in |OB| \Rightarrow D \in \text{Int } \widehat{OAB}$; $O \in |AC|$ (ipoteză) $\Rightarrow D \in \text{Int } \widehat{CAB}$ (6); din (3) $\Rightarrow M \in CD \Rightarrow D \in CM$ (7). Din (6) și (7) $\Rightarrow D \in CM \cap \text{Int } \widehat{CAB} = |CM|$ (conform (5)).
 $\Rightarrow D \in |CM|$. Dar $|CD| = \{M / M \in |CD| \text{ sau } D \in |CM|\}$; deci, dacă $D \in |CM| \Rightarrow M \in |CD|$ și deci $|CD \cap |AB| = \{M\}$.

Problema 12. Fie $\widehat{AOB}$ și $\widehat{A'O'B'}$ unghiuri opuse la vîrf ($O \in |AA'|$), $C \in \text{Int } \widehat{A'O'B'}$, $D \in |OA|$ și $P \in CD$. Să se arate că: $P \in \text{Int } \widehat{AOB} \Leftrightarrow D \in |CP|$.

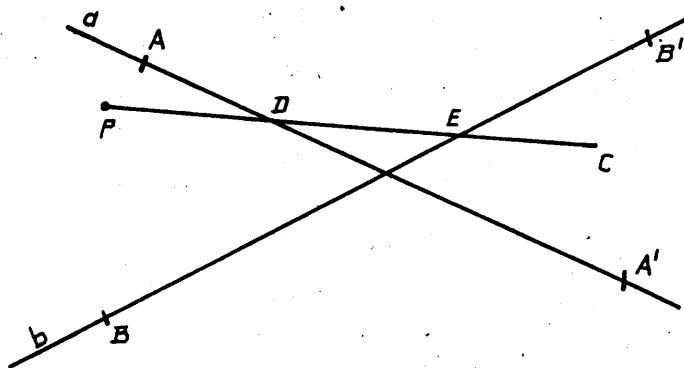


Fig. 251.

Soluție. Să arătăm întâi

că dacă $P \in \text{Int } \widehat{AOB} \Rightarrow D \in |CP|$.

Notăm $AA' = a$. Dreapta a împarte planul în 2 semiplane opuse: $|aB$ și $|aC$. $P \in \text{Int } \widehat{AOB} \Rightarrow P \in |aB$; $\Rightarrow P$ și B sînt de aceeași parte a lui a ; $\Rightarrow |BP| \cap a = \emptyset$ (teorema de separare a planului); $C \in \text{Int } \widehat{A'OB'}$; $\Rightarrow C \in |aB'$;

cum $P \in |aB \Rightarrow P$ și C sînt în semiplane opuse față de a , deci $|CP| \cap a \neq \emptyset$ (teorema de separare a planului); fie $|CP| \cap a = \{D'\}$; să arătăm că $D = D'$. $D \in a$ (ipoteză); $P \in CD$ (ipoteză) $\Rightarrow D \in CP$; $\Rightarrow D \in a \cap CP$; dar și $D' \in a \cap CP \Rightarrow D = D'$ pentru că în caz contrar dreptele a și CP ar coincide (avînd 2 puncte distincte comune), ceea ce contrazice ipoteza conform căreia $P \in \text{Int } \widehat{AOB}$ și $C \in \text{Int } \widehat{A'OB'}$. Deci $|CP| \cap a = \{D\}$; $\Rightarrow D \in |CP|$.

Reciproc: să arătăm că dacă $D \in |CP| \Rightarrow P \in \text{Int } \widehat{AOB}$. $D \in |CP|$ și $D \in |OA$ (ipoteză) $\Rightarrow |CP| \cap OA = \{D\}$; $\Rightarrow C$ și P sînt în semiplane opuse față de a ; dar $C \in \text{Int } \widehat{A'OB'}$ $\Rightarrow C$ și B sînt în semiplane opuse față de a ; $\Rightarrow P$ și B sînt de aceeași parte a lui a ; $\Rightarrow P \in |aB$ (1); notăm $BB' = b$; $C \in \text{Int } \widehat{A'OB'}$ și $D \in |OA \Rightarrow C$ și D sînt în semiplane opuse față de b (2); $\Rightarrow |CD| \cap b \neq \emptyset$ (conform teoremei de separare a planului); fie $|CD| \cap b = \{E\}$. $\Rightarrow E \in |CD|$; $D \in |CP| \Rightarrow |CD| \subset |CP| \Rightarrow E \in |CP|$; dar $E \in b \Rightarrow |CP| \cap b = \{E\}$; deci C și P sînt în semiplane opuse față de b (3). Din (2) și (3) $\Rightarrow P$ și D sînt de aceeași parte a lui b . Cum $D \in |OA$ și $|OAC| \cap b \Rightarrow D \in |bA \Rightarrow P \in |bA$ (4). Din (1) și (4) $\Rightarrow P \in |aB \cap |bA = \text{Int } \widehat{AOB}$. $\Rightarrow P \in \text{Int } \widehat{AOB}$.

Problema 13. Să se arate că două diagonale oarecare ale unui pentagon convex, considerate ca segmente închise, au un punct comun.

Soluție. Dacă diagonalele pleacă din același vîrf, atunci ele au capunct comun chiar punctul din care pleacă.

Dacă diagonalele pleacă din vîrfuri diferite, de exemplu $[AC]$ și $[BD]$, atunci ele sînt diagonale ale unui patrulater convex. ($[AC]$ și $[BD]$ sînt diagonale ale patrulaterului convex $ABCD$). Patrulaterul este convex, conform problemei 21,

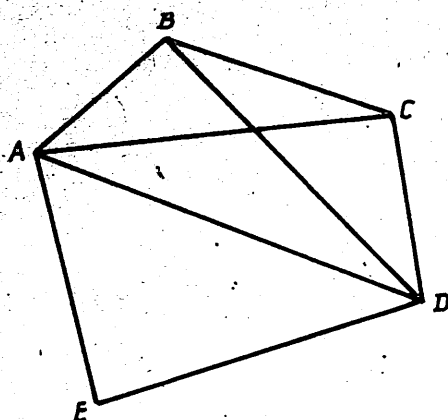


Fig. 252.

[AC] și [BD] au un punct comun).

pag. 21, § 6, cap. 1, care arată că dacă $P_1 P_2 \dots P_n$, cu $n \geq 4$, este un poligon convex, atunci și poligonul $P_2 P_3 \dots P_n$ este convex (deci poligonul obținut lăsând la o parte unul din vîrfurile poligonului inițial).

Pentru patrulaterul convex obținut aplicăm problema 14, pag. 21, § 6, cap. 1, conform căreia diagonalele unui patrulater convex au un punct comun. (În cazul particular luat rezultă că

Problema 14. Să se arate că două triunghiuri dreptunghice care au respectiv înălțimile și medianele corespunzătoare unghiurilor drepte congruente, sînt congruente.

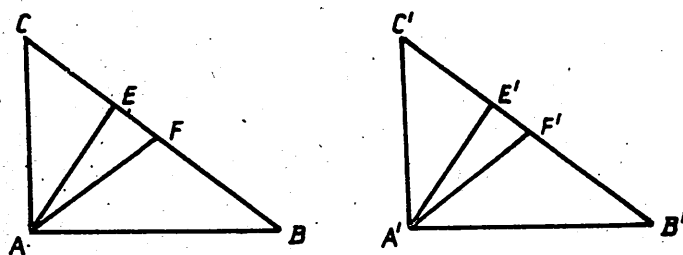


Fig. 253.

Soluție. Triunghiul ABC fiind dreptunghic și |AF| mediana corespunzătoare ipotenuzei, rezultă că: $|AF| \equiv |FC| \equiv |FB| \equiv \frac{1}{2} |BC|$. La fel în triunghiul $A'B'C'$: $|A'F'| \equiv |B'F'| \equiv |F'C'| \equiv \frac{1}{2} |B'C'|$.

Cum $|AF| \equiv |A'F'|$ (ipoteză) $\Rightarrow |BC| \equiv |B'C'|$ (1).

$\triangle AEF \equiv \triangle A'E'F'$ (cazul: I.C.): $|AE| \equiv |A'E'|$ (ipoteză), $|AF| \equiv |A'F'|$ (ipoteză), $\widehat{AEF} \equiv \widehat{A'E'F'}$ (unghiuri drepte: $AE \perp BC$ și $A'E' \perp B'C'$ - ipoteză).

$\Rightarrow \widehat{AFC} \equiv \widehat{A'F'C'}$. $\triangle ACF \equiv \triangle A'C'F'$ (cazul: L.U.L.): $|AF| \equiv |FC|$ și $|A'F'| \equiv |F'C'|$, iar $|AF| \equiv |A'F'| \Rightarrow |AF| \equiv |FC| \equiv |A'F'| \equiv |F'C'|$; $\widehat{AFC} \equiv \widehat{A'F'C'}$ (demonstrație). $\Rightarrow |AC| \equiv |A'C'|$ (2) și $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$ (3). Din (1) și (3) rezultă că $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (cazul: I.C.).

Problema 15. Se consideră trapezul ABCD ($|AB|$ baza mare, $|CD|$ baza mică) și se notează cu O intersecția diagonalelor, iar cu E și F punctele în care paralela prin O la baze intersectează respectiv pe AD și BC. Pe bazele trapezului se construiesc în exterior pătratele $AA'B'B$ și $CC'D'D$. Să se demonstreze că: a) dreptele $A'C'$ și $B'D'$ conțin punctul O; b) dreptele $A'D'$ și $B'C'$ conțin respectiv punctele E și F.

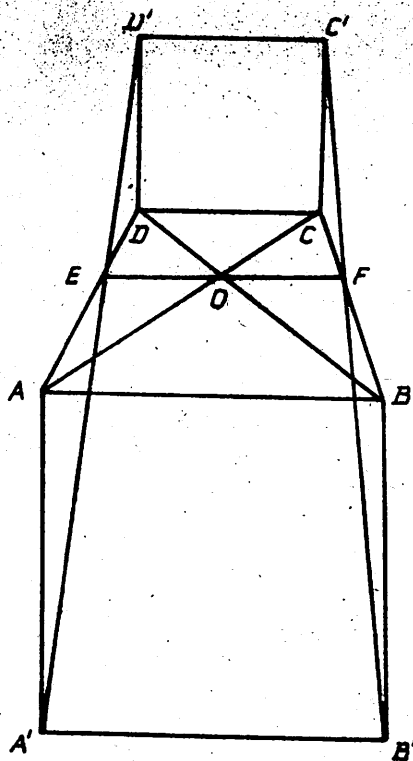


Fig. 254.

Analog se arată și că $|OD'|$ și $|OB'|$ sînt semidrepte opuse. Deci $O \in A'C'$ și $O \in B'D'$.

b) $DD' \perp DC$, $AA' \perp AB$ și $DC \parallel AB \Rightarrow DD' \parallel AA' \Rightarrow \widehat{D'DE} = \widehat{A'AE}$ (alterne interne) (5).

În triunghiul ADC , $EO \parallel DC$, aplicăm teorema lui Thales: $\frac{|ED|}{|EA|} = \frac{|OC|}{|AO|}$

(6) Triunghiul $ODC \sim \triangle OBA$ (pentru că $DC \parallel AB$) $\Rightarrow \frac{|OC|}{|OA|} = \frac{|DC|}{|AB|}$ (7). Din (6) și (7) rezultă că: $\frac{|ED|}{|EA|} = \frac{|DC|}{|AB|}$. Cum $|DC| \equiv |DD'|$ și $|AB| \equiv |AA'| \Rightarrow \frac{|ED|}{|EA|} = \frac{|DD'|}{|AA'|}$

(8). Din (5) și (8) $\Rightarrow \triangle EDD' \sim \triangle EAA'$ (conform teoremei 3, pag. 67 § 8, cap. 2). Rezultă că $\widehat{DED'} = \widehat{AEA'}$. Cum $|ED|$ și $|EA|$ sînt semidrepte opuse, iar A' și D' sînt de o parte și de alta a lui AD , rezultă că $|ED'|$ și $|EA'|$ sînt semidrepte opuse, deci A', E, D' coliniare. $\Rightarrow E \in A'D'$. La fel se arată și că $F \in B'C'$.

Problema 16. Prin vîrfurile C al triunghiului ABC se construiește o dreaptă d_1 care nu mai are alte puncte comune cu triunghiul și se notează cu A_1, B_1, G_1 proiecțiile pe dreapta d_1 , respectiv ale punctelor A, B, G unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC . Să se arate că: a) $|AA_1| + |BB_1| = 3 |GG_1|$; b) dacă d_2 este o dreaptă ce nu are nici un punct comun cu triunghiul

Soluție. $ABCD$ trapez cu $AB \parallel DC$

$\Rightarrow \triangle DOC \sim \triangle AOB$ (teorema fundamentală a asemănării); $\frac{|OC|}{|OA|} = \frac{|DC|}{|AB|}$; dar $|DC| \equiv |CC'|$ (pentru că $DCC'D'$ pătrat) și $|AB| \equiv |A'A|$ (pentru că $ABB'A'$ pătrat); $\Rightarrow \frac{|OC|}{|OA|} = \frac{|CC'|}{|AA'|}$ (1).

$\widehat{DCO} = \widehat{OAB}$ (unghiuri alterne interne:

$AB \parallel DC$) $\Rightarrow \widehat{C'CO} \equiv \widehat{A'AO}$ ($m(\widehat{C'CO}) = 90^\circ + m(\widehat{DCO})$, iar $m(\widehat{A'AO}) = 90^\circ + m(\widehat{OAB})$) (2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow \triangle OCC' \sim \triangle OAA'$ (au cîte două laturi proporționale și unghiurile cuprinse între ele congruente). $\Rightarrow \widehat{C'OC} \equiv \widehat{A'OA}$ (3); dar $|OA|$ și $|OC|$ sînt semidrepte opuse, iar A' și C' sînt de o parte și de alta a dreptei AC (ipoteză) (4).

Din (3) și (4) rezultă că A', O, C' sînt coliniare, adică $|OC'|$ și $|OA'|$ sînt semidrepte opuse.

în triunghiul ADC) $\Rightarrow \frac{\|AB\|}{\|PQ\|} = \frac{2 \|AB\|}{2 \|MN\|} \Rightarrow \frac{\|AB\|}{\|PQ\|} = \frac{\|AB\|}{\|MN\|} \Rightarrow \|PQ\| = \|MN\|$ (7).

La fel se arată că $\|NP\| = \|MQ\|$ (8). Din (7) și (8) rezultă că MNPQ este paralelogram.

2) $|NM|$ și $|NP|$ fiind linii mijlocii în triunghiurile ACD și BCD rezultă că $MN \parallel AD$ și $NP \parallel BD$; $\Rightarrow m(\widehat{MNP}) = m(\widehat{ADP}) = a$. Cum $\widehat{MNP} = \widehat{MQP}$ (unghiuri opuse în paralelogram) $\Rightarrow m(\widehat{MQP}) = a$; $\frac{\|MN\|}{\|NP\|} = \frac{\|DA\|}{\|DB\|} = k$.

Problema 20. Se dau punctele A și B. Să se construiască un pătrat pe ale cărui laturi să se afle punctele A și B și suma distanțelor de la punctul A la vîrfurile pătratului să fie minimă.

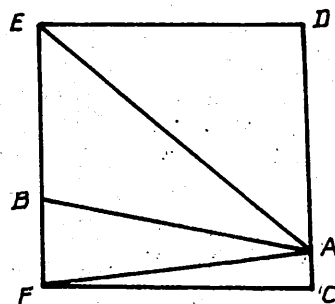


Fig. 260.

Soluție. Fie A pe latura $|CD|$ a pătratului

CDEF; putem presupune că $\|AE\| > \|AB\|$ (schimbînd la nevoie rolul lui E cu cel al lui F). Atunci:

$\|AC\| + \|AD\| + \|AE\| + \|AF\| \geq \|CD\| + \|AB\| + \|AF\| \geq \|AB\| + 2 \|CD\|$ (pentru că $\|AF\| \geq \|FC\| = \|CD\|$ și $\|AE\| \geq \|AB\|$).

$\|CE\| = \sqrt{2} \|CD\|$ și $\|CE\| > \|AB\| \Rightarrow \sqrt{2} \|CD\| > \|AB\|$;
 $\Rightarrow \|CD\| > \frac{1}{\sqrt{2}} \|AB\|$; $\|AC\| + \|AD\| + \|AE\| + \|AF\| \geq$

$\geq \|AB\| + \sqrt{2} \|AB\| = \|AB\| (1 + \sqrt{2})$.

Se observă că dacă A și B sînt vîrfuri opuse în pătrat, atunci suma distanțelor de la punctul A la vîrfurile pătratului este:

$\|AD\| + \|AF\| + \|AB\| = 2 \|AD\| + \|AB\| = \sqrt{2} \|AB\| + \|AB\| = \|AB\| (1 + \sqrt{2})$

($\|AD\| = \|AB\| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$), deci inegalitatea precedentă devine egalitate dacă A și B sînt vîrfuri opuse în pătrat și deci aceasta este soluția problemei (se obține suma minimă).

Problema 21. Fie M un punct în interiorul sau exteriorul unui cerc.

Notăm cu $|AB|$ diametrul ce trece prin M ($M \in |OA|$). Să se demonstreze că pentru orice punct N al cercului, distinct de A și de B avem: $\|MA\| < \|MN\| < \|MB\|$.

Soluție. a) $M \in \text{Int } C(O, r)$; $M \in |OA|$; în triunghiul MON aplicînd inegalitățile între laturi putem scrie: $|\|ON\| - \|OM\|| < \|MN\| < \|ON\| + \|OM\|$; dar

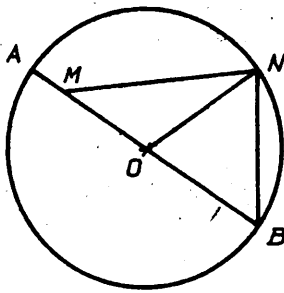


Fig. 261.

$\|ON\| = r$ și $\|OM\| < r$ (pentru că $M \in \text{int } C(O, r)$); $\Rightarrow \|ON\| - \|OM\| = r - \|OM\| = \|MA\|$; inegalitatea precedentă se mai scrie: $\|MA\| < \|MN\| < \|MB\|$ (pentru că $\|ON\| + \|OM\| = r + \|OM\| = \|OB\| + \|OM\| = \|MB\|$).

b) Dacă $M \in \text{ext } C(O, r)$ rezultă că în triunghiul MON putem scrie:

$$\begin{aligned} & \left| \|OM\| - \|ON\| \right| < \|MN\| < \|OM\| + \|ON\|; \text{ dar } \|OM\| > r \\ & \text{(pentru că } M \in \text{ext } C(O, r)); \left| \|OM\| - \|ON\| \right| = \\ & = \|OM\| - r = \|OM\| - \|OA\| = \|AM\|; \\ & \|OM\| + \|ON\| = \|OM\| + r = \|OM\| + \|OB\| = \|MB\|. \end{aligned}$$

Deci inegalitatea precedentă se mai scrie:
 $\|AM\| < \|MN\| < \|MB\|$.

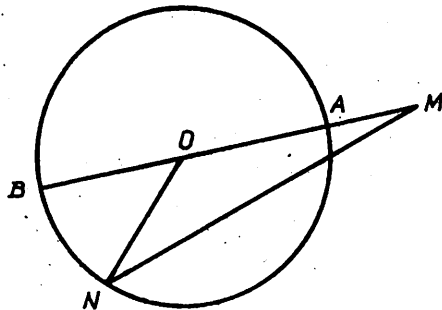


Fig. 262.

Problema 22. Fie $C(O, r)$ și $C(O', r')$ două cercuri tangente în A; o dreaptă h care conține pe A mai taie cercurile respectiv în B și B'. Să se demonstreze că dreptele OB și O'B' sunt paralele.

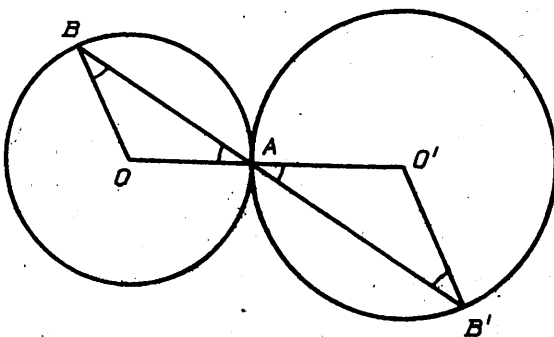


Fig. 263.

Soluție. a) Cazul când cele două cercuri sunt tangente exterior: triunghiurile AOB și AO'B' sunt isoscele, pentru că $\|OA\| = \|OB\| = r$ și $\|O'A\| = \|O'B'\| = r' \Rightarrow \widehat{OBA} \equiv \widehat{OAB}$ și $\widehat{O'AB'} \equiv \widehat{O'B'A}$; dar $\widehat{OAB} \equiv \widehat{O'AB'}$ (opuse la vîrf); $\Rightarrow \widehat{OBA} \equiv \widehat{O'B'A}$.

$\Rightarrow OB \parallel O'B'$ (unghiurile alterne interne fiind congruente, dreptele sînt paralele).

b) Cazul când cercurile sînt tangente interior: triunghiurile OAB și O'AB' sînt isoscele $\Rightarrow \widehat{A} \equiv \widehat{B}$ și $\widehat{A} \equiv \widehat{AB'O'} \Rightarrow \widehat{B} \equiv \widehat{AB'O'} \Rightarrow OB \parallel O'B'$ (unghiurile corespondente fiind congruente dreptele sînt paralele) v. fig. 264.

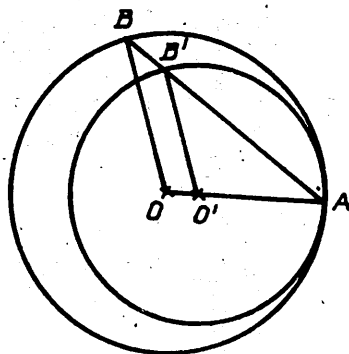


Fig. 264.

Problema 23. Fie C și C' două cercuri tangente în A , h tangenta comună la C și C' care conține pe A ; M fiind un punct al lui h diferit de A , cercul de centru M și de rază $|MA|$ taie pe C în A și B , iar pe C' în A și B' . Să se demonstreze că dreptele MB și MB' sînt respectiv tangente la C și la C' .

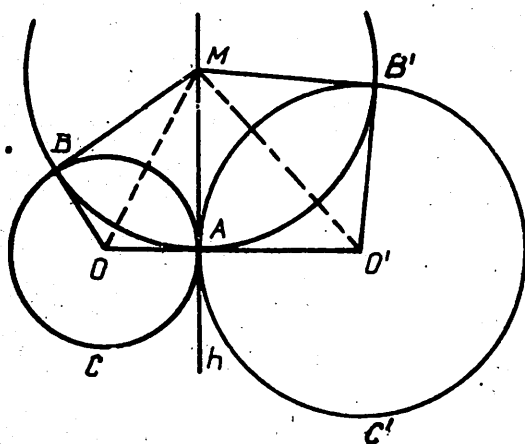


Fig. 265.

și MB' este tangentă la cercul C' .

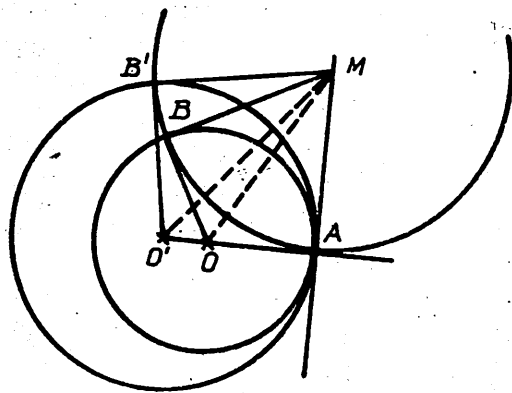


Fig. 266.

Soluție. a) Cazul cînd cercurile C și C' sînt tangente exterior în A .

$\triangle MOB \equiv \triangle MOA$ (cazul: L.L.L.): $|MO|$ latură comună, $|MB| \equiv |MA|$ (raze în cercul de centru M și rază $|MA|$)

$|OB| \equiv |OA|$ (raze în cercul C). $\Rightarrow \widehat{MBO} \equiv \widehat{MAO}$; dar $\widehat{MAO} \in 90^\circ$ (pentru că $MA \perp OA$, tangentă perpendiculară pe rază) $\Rightarrow \widehat{MBO} \in 90^\circ \Rightarrow MB \perp OB \Rightarrow MB$ tangentă la cercul C . Analog se arată că

b) Cazul cînd cercurile C și C' sînt tangente interior în A . Se arată ca și în cazul precedent că: $\triangle MOA \equiv \triangle MOB$ (cazul:

L.L.L.): $|OM|$ latură comună, $|MA| \equiv |MB|$ (raze în cercul de centru M și rază $|MA|$), $|OA| \equiv |OB|$ (raze în cercul C).

$\Rightarrow \widehat{MBO} \equiv \widehat{MAO}$, dar $\widehat{MAO} \in 90^\circ$ ($MA \perp OA$) $\Rightarrow \widehat{MBO} \in 90^\circ \Rightarrow MB \perp OB \Rightarrow MB$ tangentă la cercul C . La fel se arată că și MB' este tangentă la cercul C' .

Problema 24. Intr-un cerc se înscrie triunghiul isoscel ABC cu $|AB| \equiv |AC|$. Două trepte ce trec prin A intersectează latura $|BC|$ în M și N și cercul în M' și N' . Să se arate că patrulaterul $MM'N'N$ este inscribibil.

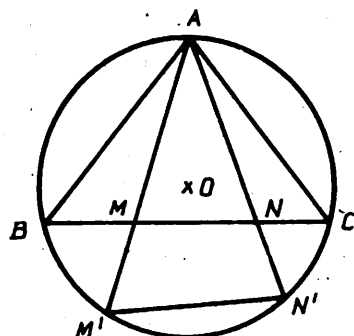


Fig. 267.

Soluție. $m(\widehat{M'MN}) = \frac{1}{2} [m(\widehat{AB}) + m(\widehat{M'C})]$ (fiind unghi cu vârful în interiorul cercului);
 $m(\widehat{M'N'N}) = \frac{1}{2} m(\widehat{AM'})$; dar $m(\widehat{AM'}) = m(\widehat{AB}) + m(\widehat{BM'}) = m(\widehat{AC}) + m(\widehat{BM'})$, (pentru că $|AB| \equiv |AC| \Rightarrow \widehat{AB} \equiv \widehat{AC}$); $m(\widehat{M'MN}) + m(\widehat{M'N'N}) =$
 $= \frac{1}{2} [m(\widehat{AB}) + m(\widehat{M'C}) + m(\widehat{AC}) + m(\widehat{BM'})] =$
 $= \frac{1}{2} [m(\widehat{AB}) + m(\widehat{AC}) + m(\widehat{M'C}) + m(\widehat{BM'})] = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$. Patrulaterul $MNN'M'$ fiind convex și având unghiurile opuse suplementare este inscribibil.

Problema 25. Se dă cercul cu centrul O și diametrul $|AB|$ care se prelungește cu $|BC| \equiv |OA|$ ($|AC| = 3 |OA|$). Perpendiculara în mijlocul lui $|AC|$ taie cercul în D și D' . Să se arate că CD este tangentă la cerc.

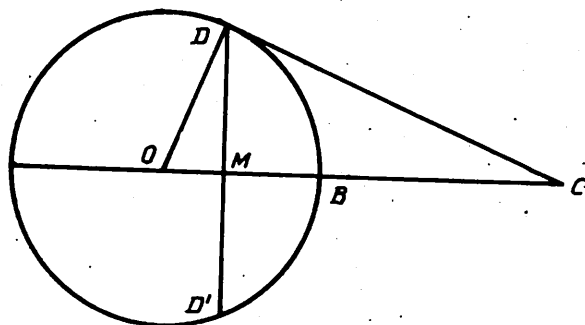


Fig. 268.

Soluție. Fie raza cercului r .
 $\|OD\| = r$, $\|OC\| = 2r$ (ipoteză) și
 $\|OM\| = \frac{r}{2}$ (pentru că $\|OM\| = \|AM\| - r = \frac{1}{2} \cdot 3r - r = \frac{1}{2}r$); $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \|OD\|^2 = r^2$, $\|OC\| \cdot \|OM\| = 2r \cdot \frac{r}{2} = r^2$; $\Rightarrow \|OD\|^2 = \|OC\| \cdot \|OM\|$; conform reciprocei teoremei catetei rezultă că triunghiul ODC este dreptunghic în D ; $\Rightarrow m(\widehat{ODC}) = 90^\circ$
 $\Rightarrow CD \perp OD$; cum $|OD|$ este rază, rezultă că CD este tangentă la cerc.

Problema 26. Fie A un punct fix, iar P un punct variabil al unui cerc. Să se afle locul geometric al punctului M de intersecție a bisectoarei unghiului $\widehat{POA}$ cu cercul circumscris triunghiului POA .

Soluție. Fie A fix și P variabil pe cercul $C(O, r)$. Triunghiul AOP este isoscel ($|OA| \equiv |OP| = \text{raze}$). Dacă $[OM$ este bisectoarea unghiului $\widehat{POA}$,

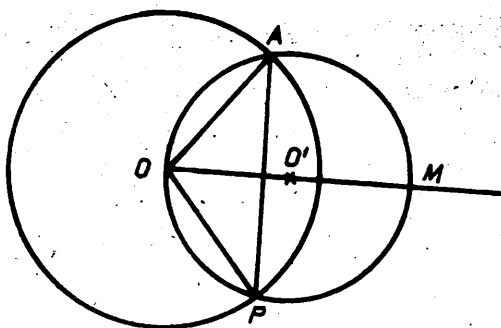


Fig. 269.

MA este tangentă la cercul $C(O, r)$ în punctul A. Dar A este fix, cercul $C(O, r)$ este fix, rezultă că și tangenta în A la cerc este o dreaptă fixă. Deci punctul M variabil se mișcă pe dreapta MA (tangenta în A la cerc), care este fixă. Notăm cu d această dreaptă. Deci orice punct al locului geometric aparține lui d .

Reciproc: să arătăm că orice punct al lui d aparține locului geometric: fie $M \in d$; să arătăm deci că există $P \in C(O, r)$ astfel ca cercul circumscris triunghiului OAP să treacă și prin M și M să aparțină bisectoarei unghiului $\widehat{POA}$. Cercul circumscris triunghiului OAM taie cercul $C(O, r)$ într-un punct P. Cum $OA \perp AM \Rightarrow OM$ diametru; $\Rightarrow \widehat{OPM} \in 90^\circ$ (înscris în semicerc). $\Delta OAM \equiv \Delta OPM$ (cazul: I.C.): OM latură comună, $OA \equiv OP$ (raze), $\widehat{OAM} \equiv \widehat{OPM}$ (unghiuri drepte). $\Rightarrow \widehat{AOM} \equiv \widehat{POM} \Rightarrow M$ aparține bisectoarei unghiului $\widehat{POA}$ și cum M se află și pe cercul circumscris triunghiului POA rezultă că M aparține locului geometric. Deci $(\forall) M \in d, \Rightarrow M$ aparține locului geometric.

Rezultă că locul geometric al punctului M este tangenta în A la cercul $C(O, r)$.

Problema 27. Trei cercuri congruente care au un punct comun H, se mai intersectează două câte două în punctele A, B, C. Să se demonstreze că cercul circumscris triunghiului ABC este congruent cu cercurile date (problema piesei de 5 lei a lui Tițeica).

Soluție. $|O_1A| \equiv |O_1H| \equiv |HO_2| \equiv |O_2A|$ (ca raze în cercuri congruente); rezultă că AO_1HO_2 este romb (1); la fel: O_1CO_3H și O_2HO_3B sînt romburile (2). Fie $\{D\} = AH \cap O_1O_2$, $\{E\} = CH \cap O_1O_3$, $\{F\} = HB \cap O_2O_3$. Din (1) și (2) $\Rightarrow |O_1D| \equiv |DO_2|$ și $|O_1E| \equiv |EO_3| \Rightarrow ED$ linie mijlocie în triunghiul

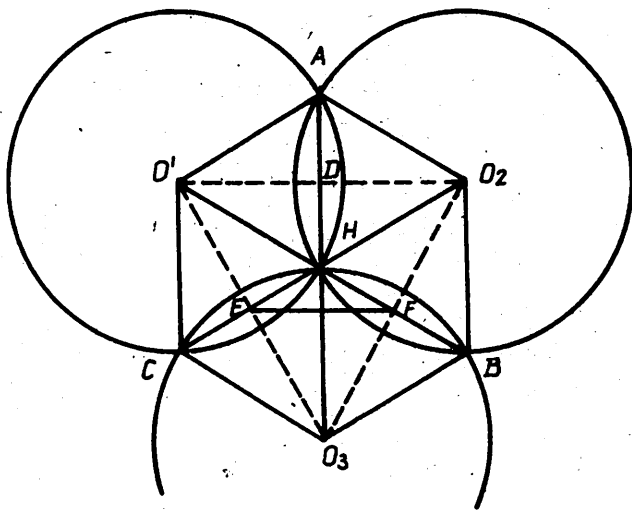


Fig. 270.

$O_1O_2O_3$; $\Rightarrow \|O_2O_3\| = 2 \|ED\|$. Tot
din (1) și (2) $\Rightarrow |AD| \equiv |DH|$ și
 $|CE| \equiv |EH|$; $\Rightarrow |ED|$ este linie
mijlocie și în triunghiul ACH ; $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \|AC\| = 2 \|ED\|$; $\Rightarrow \|AC\| =$
 $= \|O_2O_3\|$.

La fel se arată că $\|AB\| =$
 $= \|O_1O_3\| = 2 \|DF\|$ și $\|CB\| =$
 $= \|O_1O_2\| = 2 \|EF\|$. Rezultă că
 $\Delta ABC \equiv \Delta O_1O_2O_3$ (cazul: L.L.L.)
Din (1) $\Rightarrow HA \perp O_1O_2$ și $|O_1D| \equiv$
 $\equiv |DO_2|$; $\Rightarrow H$ aparține mediatoarei

segmentului $|O_1O_2|$. La fel, din (2) rezultă că H aparține și mediatoarelor seg-
mentelor $|O_1O_3|$ și $|O_2O_3|$, deci H este centrul cercului circumscris triunghi-
ului $O_1O_2O_3$. Raza acestui cerc este $\|HO_1\| = \|HO_2\| = \|HO_3\| = r$, unde r este
raza celor trei cercuri congruente. Rezultă că cercul circumscris triunghiului
 $O_1O_2O_3$ este congruent cu cercurile date inițial, avînd aceeași rază. Dar $\Delta ABC \equiv$
 $\equiv \Delta O_1O_2O_3$; rezultă că și cercurile circumscrise vor avea raze de lungimi ega-
le, deci tot r . Rezultă că și cercul circumscris triunghiului ABC are raza r ,
deci este congruent cu cele trei cercuri date în problemă.

Problema 28. Vîrfurile B și C ale triunghiului ABC sînt fixe și
 $m(\widehat{BAC})$ este constantă. Să se afle locul geometric al proiecției M a ortocen-
trului triunghiului ABC pe mediana $|AD|$.

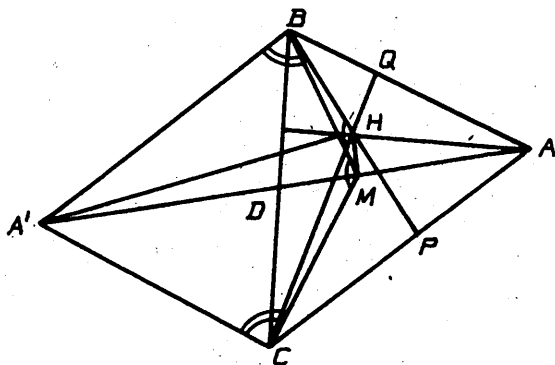


Fig. 271.

Soluție. Fie A' simetricul lui A
față de D . Din: $|BD| \equiv |DC|$ (ipoteză,
 $|AD|$ fiind mediană) și $|AD| \equiv |DA'|$
(construcție) $\Rightarrow ABA'C$ paralelogram.
Din $BP \perp AC$ ($|BP|$ fiind înălțime în tri-
unghiul ABC) și $AC \parallel BA'$ ($ABA'C$ fi-
ind paralelogram) $\Rightarrow BP \perp BA'$; la

fel: $QC \perp AB$ ($|QC|$ înălțime în triunghiul ABC) și $AB \parallel A'C \Rightarrow QC \perp A'C$; deci
 $m(\widehat{A'BH}) = m(\widehat{HCA'}) = 90^\circ$; $\Rightarrow m(\widehat{A'BH}) + m(\widehat{HCA'}) = 180^\circ \Rightarrow BHCA'$ inscripti-
bil, iar în cercul circumscris acestui patrulater $|A'H|$ este un diametru; cum

$HM \perp A'M \Rightarrow m(\widehat{A'MH}) = 90^\circ \Rightarrow M$ aparține și el cercului de diametru $|A'H|$; deci punctele B, M, H, C, A' aparțin toate aceluiași cerc. În acest cerc coarda $|BC|$ este fixă, iar $m(\widehat{BHC}) = \text{const.}$ pentru că $m(\widehat{BHC}) = m(\widehat{QHP})$, (opuse la vîrf), iar $QAPH$ inscriptibil ($m(\widehat{AQH}) + m(\widehat{APH}) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$); $\Rightarrow m(\widehat{QHP}) = 180^\circ - m(\widehat{BAC})$; dar $m(\widehat{BAC}) = \text{const.}$ (ipoteză) $\Rightarrow m(\widehat{QHP}) = \text{const.} \Rightarrow m(\widehat{BHC}) = \text{const.} = 180^\circ - m(\widehat{A})$. Dar și $m(\widehat{BMC}) = m(\widehat{BHC}) = 180^\circ - m(\widehat{A}) = \text{const.}$ (pentru că $\widehat{BMC}$ și $\widehat{BHC}$ sînt unghiuri înscrise în cerc, care au aceeași măsură: $\frac{1}{2} m(\widehat{BA'C})$). Rezultă că din punctul variabil M segmentul fix $|BC|$ se vede sub un unghi constant avînd măsura de $180^\circ - m(\widehat{A})$. Deci M aparține unui arc de cerc de capete B și C (se ia numai arcul deschis - fără capete), arc capabil de $[180^\circ - m(\widehat{A})]^\circ$. Dacă A se mișcă în semiplanul opus (l-am considerat întîl în unul din cele două semiplane limitate de dreapta BC), M va descrie un alt arc de cerc capabil de $[180^\circ - m(\widehat{A})]^\circ$ și tot de capete A și B , deci un arc simetric cu primul față de $|BC|$.

Rezultă că locul geometric al lui M este format din 2 arce de cerc capabile de $[180^\circ - m(\widehat{A})]^\circ$, de capete A și B , simetrice față de $|BC|$ și fără să conțină capetele A și B .

Problema 29. În patrulaterul inscriptibil $ABCD$ are loc relația:

$\|AB\| \cdot \|DC\| + \|AD\| \cdot \|BC\| = \|AC\| \cdot \|BD\|$ (Teorema lui Ptolemeu).

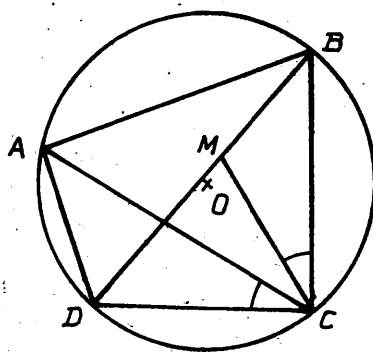


Fig. 272.

Soluție. Fie $M \in |DB|$ astfel încît $\widehat{MCB} \equiv \widehat{DCA}$; $\triangle DCA \sim \triangle MCB$ pentru că: $\widehat{MCB} \equiv \widehat{DCA}$ (construcție) și $\widehat{DAC} \equiv \widehat{DBC}$ (au aceeași măsură: $\frac{1}{2} m(\widehat{DC})$). $\Rightarrow \frac{\|AD\|}{\|MB\|} = \frac{\|DC\|}{\|MC\|} = \frac{\|AC\|}{\|BC\|} \Rightarrow \|AD\| \cdot \|BC\| = \|MB\| \cdot \|AC\|$ (1).

$\triangle ABC \sim \triangle DMC$, pentru că: $\widehat{CAB} \equiv \widehat{MDC}$ (au aceeași măsură: $\frac{1}{2} m(\widehat{BC})$) și $\widehat{ACB} \equiv \widehat{DCM}$ ($\widehat{DCM} \equiv \widehat{DCA} + \widehat{ACM}$ și $\widehat{ACB} \equiv \widehat{ACM} + \widehat{MCB}$; cum $\widehat{DCA} \equiv \widehat{MCB}$ prin construcție $\Rightarrow \widehat{DCM} \equiv \widehat{ACB}$). $\Rightarrow \frac{\|BC\|}{\|MC\|} =$

$= \frac{\|AB\|}{\|MD\|} = \frac{\|AC\|}{\|DC\|} \Rightarrow \|AB\| \cdot \|CD\| = \|AC\| \cdot \|MD\|$ (2). Adunînd (1) și (2) $\Rightarrow \|AD\| \cdot \|BC\| + \|AB\| \cdot \|CD\| = \|BM\| \cdot \|AC\| + \|MD\| \cdot \|AC\| = \|AC\| (\|BM\| + \|MD\|) = \|AC\| \cdot \|BD\|$.

Deci: $\|AD\| \cdot \|BC\| + \|AB\| \cdot \|CD\| = \|AC\| \cdot \|BD\|$.

Problema 30. Se dau cercurile $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$. Fie CD o tangentă comună exterioară, C și D fiind punctele de tangență. Să se demonstreze că cercul de diametru $|CD|$ intersectează dreapta O_1O_2 dacă și numai dacă cercurile $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$ sînt exterioare.

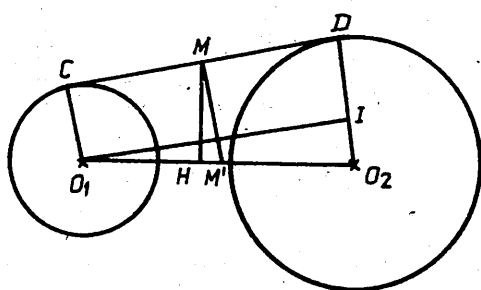


Fig. 273.

Soluție. Fie M centrul cercului de diametru $|CD|$ și $\|MH\|$ distanța de la M la O_1O_2 ($H \in O_1O_2$ și $MH \perp O_1O_2$); $O_1C \perp CD$ și $O_2D \perp CD \Rightarrow O_1C \parallel O_2D \Rightarrow CDO_2O_1$ este trapez; ducem MM' astfel ca $MM' \perp CD$; $\Rightarrow MM' \parallel CO_1 \parallel DO_2$ și cum $|CM| \equiv |MD| \Rightarrow |MM'|$ linie mijlocie în trapezul CDO_2O_1 .

Ducem $O_1I \perp DO_2$ ($I \in DO_2$). $\triangle O_1O_2I \sim \triangle MM'H$ pentru că: $\widehat{MHM'} \equiv \widehat{O_1IO_2}$ (unghiuri drepte) și $\widehat{HMM'} \equiv \widehat{IO_1O_2}$ (au laturi perpendiculare) $\Rightarrow \frac{\|MH\|}{\|O_1I\|} = \frac{\|MM'\|}{\|O_1O_2\|}$; dar $\|O_1I\| \equiv |CD|$ (pentru că $CDIO_1$ este dreptunghi) $\Rightarrow \frac{\|MH\|}{\|CD\|} = \frac{\|MM'\|}{\|O_1O_2\|}$. Notăm $\|MH\| = h$, $\|O_1O_2\| = d$ și știm că $\|MM'\| = \frac{\|CO_1\| + \|DO_2\|}{2} = \frac{R_1 + R_2}{2}$ (fiind linie mijlocie în trapezul CDO_2O_1). Deci $\frac{h}{\|CD\|} = \frac{R_1 + R_2}{2\|O_1O_2\|}$ (1).

a) Presupunem că cercurile date sînt exterioare și demonstrăm că cercul de diametru $|CD|$ intersectează dreapta O_1O_2 .

Cercurile fiind exterioare $\|O_1O_2\| > R_1 + R_2 \Rightarrow d > R_1 + R_2; \Rightarrow \frac{h}{\|CD\|} < \frac{R_1 + R_2}{2(R_1 + R_2)} \Rightarrow \frac{h}{\|CD\|} < \frac{1}{2} \Rightarrow h < \frac{\|CD\|}{2}$; această relație arată că dis-

tanța de la centrul cercului de diametru $|CD|$ la O_1O_2 este mai mică decît raza acestui cerc (deoarece $\frac{\|CD\|}{2}$ reprezintă $\frac{1}{2}$ din diametrul cercului, adică raza cercului). Rezultă că cercul de diametru $|CD|$ intersectează pe O_1O_2 .

b) Presupunem că dreapta O_1O_2 și cercul de diametru $|CD|$ se intersectează și arătăm că cercurile date: $C(O_1, r_1)$ și $C(O_2, r_2)$ sînt exterioare.

Dacă cercul de diametru $|CD|$ intersectează $O_1O_2 \Rightarrow h < \frac{\|CD\|}{2}$. Înlocuind în

$$(1) \Rightarrow : \frac{\frac{\|CD\|}{2}}{\|CD\|} > \frac{R_1 + R_2}{2\|O_1O_2\|} \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{R_1 + R_2}{2\|O_1O_2\|} \text{ sau: } \|O_1O_2\| > R_1 + R_2, \text{ ceea ce}$$

arată că cercurile sînt exterioare.

Problema 31. Se dau punctele $A(1 - a, 1 + a)$, $B(5 - a, 1 + 5a)$, $C(1 - 5a, 5 + a)$, $D(5 - 5a, 5 + 5a)$. Să se arate că segmentele $|AD|$ și $|BC|$ sînt congruente și să se explice geometric acest rezultat.

Soluție. $\|AD\|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (5 - 5a - 1 + a)^2 + (5 + 5a - 1 - a)^2 = 32(1 + a^2)$.
 $\|BC\|^2 = (1 - 5a - 5 + a)^2 + (5 + a - 1 - 5a)^2 = 32(1 + a^2)$; $\Rightarrow \|AD\| = \|BC\|$.
 Coeficienții unghiulari ai acestor drepte sînt: $m_{AD} = \frac{1 + a}{1 - a}$ și $m_{BC} = \frac{a - 1}{a + 1}$
 $\Rightarrow m_{AD} \cdot m_{BC} = -1$; $\Rightarrow AD \perp BC$;

$\|AB\|^2 = (1 - a - 5 + a)^2 + (1 + a - 1 - 5a)^2 = 16 + 16a^2 = 16(1 + a^2)$.
 $\|AC\|^2 = (1 - a - 1 + 5a)^2 + (1 + a - 5 - a)^2 = 16a^2 + 16 = 16(1 + a^2)$.
 $\|CD\|^2 = (1 - 5a - 5 + 5a)^2 + (5 + a - 5 - 5a)^2 = 16 + 16a^2 = 16(1 + a^2)$.
 $\|DB\|^2 = (5 - a - 5 + 5a)^2 + (1 + 5a - 5 - 5a)^2 = 16a^2 + 16 = 16(1 + a^2)$.
 $\Rightarrow |AB| \equiv |AC| \equiv |CD| \equiv |DB|$; deci $ABDC$ este pătrat avînd toate laturile congruente și diagonalele congruente și perpendiculare.

Problema 32. Să se scrie ecuațiile înălțimilor triunghiului determinat de dreptele $y = 2x$, $y = 10x$, $y = ax + b$; $a = 2$, $a = 10$, $b = 0$. Să se verifice că mediatoarele acestui triunghi sînt concurente.

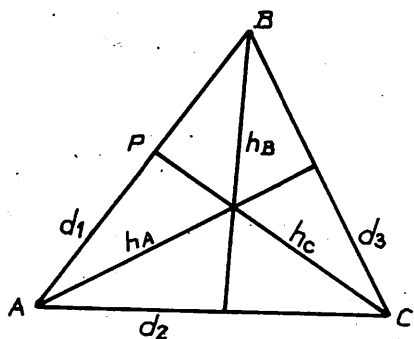


Fig. 274.

$$= ax + b; x = \frac{b}{10 - a} \text{ și } y = \frac{10b}{10 - a}.$$

$$\text{Deci } C\left(\frac{b}{10 - a}, \frac{10b}{10 - a}\right).$$

$h_C \perp d_1$ și trece prin C (am notat h_C înălțimea ce trece prin C). Coeficientul unghiular al dreptei d_1 este: $m_{d_1} = 2 \Rightarrow m_{h_C} = -\frac{1}{2}$. Ecuația unei drepte de pantă

Soluție. Fie $d_1 = AB$, $d_2 = AC$, $d_3 = BC$;
 $d_1 \cap d_2 = \{A\}$; A se află rezolvînd sistemul format de ecuațiile: $y = 2x$ și $y = 10x$; $\Rightarrow x = 0$ și $y = 0$; deci $A(0, 0)$; $d_1 \cap d_3 = \{B\}$; B se obține rezolvînd sistemul: $y = 2x$ și $y = ax + b$; $x = \frac{b}{2 - a}$ și $y = \frac{2b}{2 - a}$. Deci $B\left(\frac{b}{2 - a}, \frac{2b}{2 - a}\right)$; $d_2 \cap d_3 = \{C\}$; C se obține rezolvînd sistemul format de ecuațiile: $y = 10x$ și $y =$

dată și care trece printr-un punct dat este: $y - y_0 = m(x - x_0)$. Deci ecuația înălțimii h_C este: $(y - \frac{10b}{10-a}) = -\frac{1}{2}(x - \frac{b}{10-a})$; ea se poate aduce la forma: $x(10-a) + 2y(10-a) - 21b = 0$.

La fel se obțin și ecuațiile celorlalte înălțimi.

Ecuația înălțimii h_B (care trece prin B) este: $x(2-a) + 10y(2-a) - 21b = 0$.

Ecuația înălțimii h_A (care trece prin A) este: $x + ay = 0$.

Pentru a verifica dacă mediatoarele sînt concurente se determină coordonatele punctului de intersecție a două mediatoare și se verifică dacă este situat și pe a treia mediatoare.

Fie P mijlocul lui $|AB|$: $P(\frac{b}{2(2-a)}, \frac{b}{2-a})$; $m_{AB} = 2$; $m = -\frac{1}{2}$ (m fiind coeficientul unghiular al mediatoarei segmentului $|AB|$); ecuația mediatoarei va fi: $(y - \frac{b}{2-a}) = -\frac{1}{2}(x - \frac{b}{2(2-a)})$; sau: $2x(2-a) + 4y(2-a) - 5b = 0$.

Analog obținem ecuația mediatoarei segmentului $|AC|$:

$2x(10-a) + 20y(10-a) - 101b = 0$, iar ecuația mediatoarei segmentului $|BC|$ este: $x(2-a)(10-a) + ay(2-a)(10-a) - 19ab + 6a^2b - 6b = 0$.

Aflăm coordonatele punctului de intersecție a două dintre mediatoare:

rezolvăm deci sistemul format de ecuațiile:

$2x(2-a) + 4y(2-a) - 5b = 0$ și $2x(10-a) + 20y(10-a) - 101b = 0$.

Obținem: $x = \frac{b(19a+12)}{2(2-a)(10-a)}$ și $y = \frac{b(19-12a)}{2(2-a)(10-a)}$. Coordonatele x

și y obținute verifică ecuația celei de a treia mediatoare: $\frac{b(19a+12)}{2} +$

$+\frac{ab(19-12a)}{2} - 19ab + 6a^2b - 6b = \frac{1}{2}(19ab + 12b + 19ab - 12a^2b - 38ab + 12a^2b - 12b^2) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$.

Deci mediatoarele triunghiului sînt concurente.

Problema 33. Să se determine numerele reale $t \in (0, 6\pi)$ astfel ca $F(t) = M(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Soluție. $\operatorname{tg} t = -1$ și $t^* \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi) \Rightarrow t^* = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Dacă $t \in (0, 6\pi) \Rightarrow k = 0, 1, 2$; deci $t_0 = \frac{7\pi}{4} \in (0, 2\pi)$; $t_1 = \frac{7\pi}{4} + 2\pi =$

$= \frac{15\pi}{4} \in (2\pi, 4\pi)$; $t_2 = \frac{7\pi}{4} + 4\pi = \frac{23\pi}{4} \in (4\pi, 6\pi)$; deci $t \in \left\{ \frac{7\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}, \frac{23\pi}{4} \right\}$.

Problema 34. Să se determine numerele reale astfel ca:

a) $F(t) = M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; b) $F(t) = M\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; c) $F(t) = M\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; d) $F(t) = M\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Soluție. $F(t) = M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = M\left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}\right); t \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) $F(t) = M\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = M\left(\cos \frac{2\pi}{3}, \sin \frac{2\pi}{3}\right); t \in \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}\right\}$.

c) $F(t) = M\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = M\left(\cos \frac{4\pi}{3}, \sin \frac{4\pi}{3}\right); t \in \left\{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) $F(t) = M\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = M\left(\cos \frac{5\pi}{3}, \sin \frac{5\pi}{3}\right); t \in \left\{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Problema 35. Să se reprezinte grafic funcțiile:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4 \sin x$; b) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \sin x - |\sin x|$; c) $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i(x) = 2 \cos x - |\cos x|$; d) $j: \mathbb{R} - \left\{k\pi/k \in \mathbb{Z}\right\} \rightarrow \mathbb{R}, j(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$; e) $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, k(x) = \sin x + 2 \cos x$; f) $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, l(x) = \max(\sin x, \cos x)$.

Soluție. a) Funcția este periodică de perioadă $T = 2k\pi$, deci perioada principală este $T_1 = 2\pi$. Este deci suficient s-o reprezentăm grafic pe un interval de lungime 2π , fie el $[0, 2\pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
4 sin x	0	4	0	-4	0

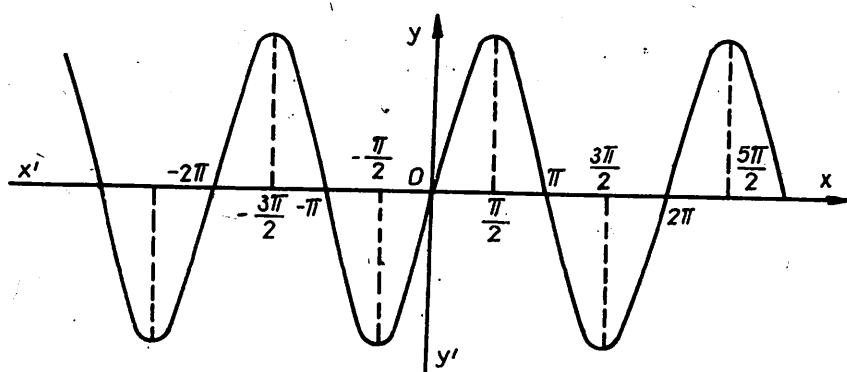


Fig. 275.

Valoarea maximă a funcției se obține pentru $\sin x = 1$, deci $x = \frac{\pi}{2}$; $f_{\max}(x) = 4$.

Valoarea minimă se obține pentru $\sin x = -1$, deci $x = \frac{3\pi}{2}$ și $f_{\min}(x) = -4$.

$$b) h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \sin x - |\sin x| = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in [0, \pi] \\ 2 \sin x & \text{dacă } x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}. \quad T = 2\pi.$$

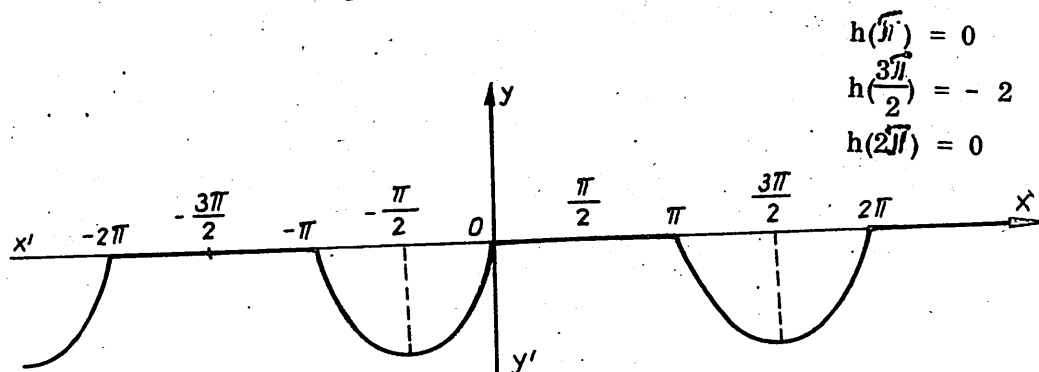


Fig. 276.

$$c) i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i(x) = 2 \cos x - |\cos x| = \begin{cases} 3 \cos x & \text{dacă } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \\ \cos x & \text{dacă } x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{cases}$$

$$T = 2\pi.$$

$$i(0) = 1, \quad i(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$i(\pi) = -3, \quad i(\frac{3\pi}{2}) = 0$$

$$i(2\pi) = 1.$$

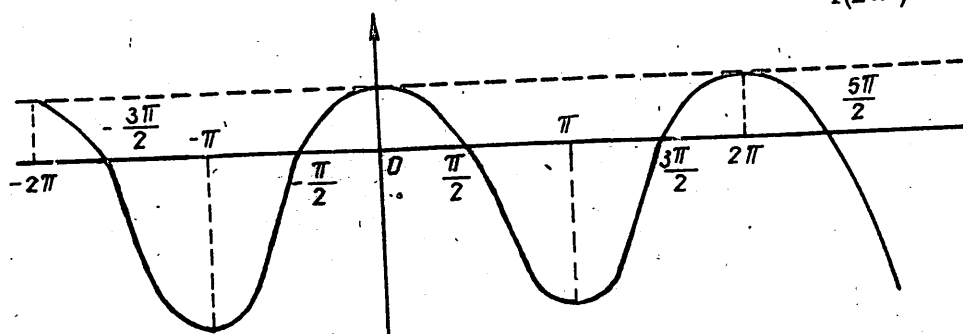


Fig. 277.

$$d) j: \mathbb{R} - \left\{ k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, j(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x} = \begin{cases} -1 & \text{dacă } x \in (\pi, 2\pi) \\ 1 & \text{dacă } x \in (0, \pi) \end{cases}; \quad T = 2\pi.$$

$$\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0,$$

$$x \neq \pi, \quad x \neq 2\pi.$$

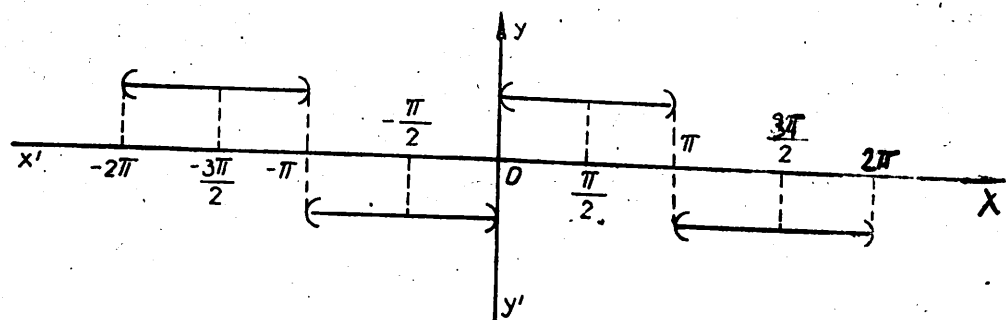


Fig. 278.

e) $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = \sin x + 2 \cos x$. Perioada principală a funcției este $T = 2\pi$. Pentru a găsi punctele $(x, \sin x + 2 \cos x)$ se adună ordonatele punctelor $(x, \sin x)$ și $(x, 2 \cos x)$ pentru fiecare valoare a lui x . Este suficient să reprezentăm grafic pe un interval cu lungimea de o perioadă.

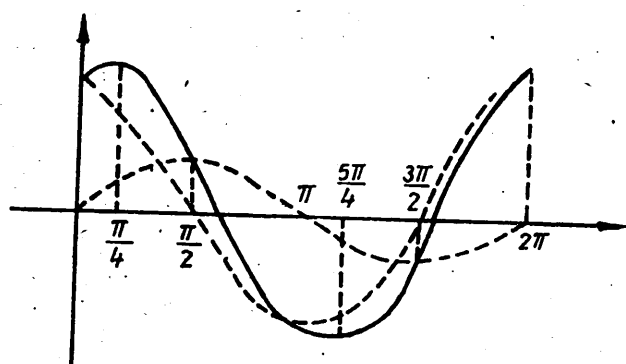


Fig. 279.

$$k(0) = 2; k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; k\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}; k(\pi) = -2; k\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}; k\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1; k(2\pi) = 2.$$

Valoarea maximă a funcției se obține pentru $x = \frac{\pi}{4}$; $k_{\max}(x) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; valoarea minimă se obține pentru $x = \frac{5\pi}{4}$ și $k_{\min}(x) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

$$f) l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, l(x) = \max(\sin x, \cos x) = \begin{cases} \cos x & \text{dacă } x \in (0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{4}, 2\pi) \\ \sin x & \text{dacă } x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \end{cases}$$

$$T = 2\pi$$

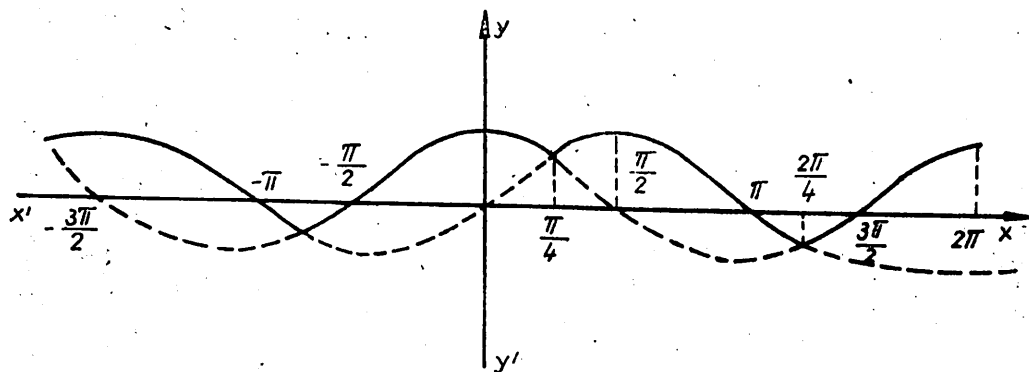


Fig. 280.

Pentru a determina intervalele am calculat:

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin x - \sin \frac{\pi}{4} \cos x \right) =$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \geq 0, \text{ dac\u0103 } \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \in [0, \pi]; x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right].$$

Deci pentru $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right]$, $\sin x - \cos x \geq 0, \Rightarrow \sin x \geq \cos x; \Rightarrow 1(x) =$

$$= \sin x.$$

Pentru cel\u0103lalt caz, analog.

Problema 36. Dac\u0103 $\operatorname{tg} x = \frac{2}{5}$, s\u0103 se calculeze: $\sin 2x$, $\cos 4x$,

$$\frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

Solu\u021bie. $\operatorname{tg} x = \frac{2}{5}; \sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{29}{25}} = \frac{20}{29}.$

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2 \cdot \frac{400}{841} = \frac{41}{841};$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 -$$

$$- 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{400}{841} = \frac{541}{841};$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 -$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{400}{841} = \frac{641}{841};$$

Deci: $\frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{541}{841} \cdot \frac{841}{641} = \frac{541}{641}.$

Problema 37. S\u0103 se verifice identit\u0103\u021bile:

a) $\cos a + 3 \sin a = 2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - a \right);$ b) $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) \operatorname{ctg} (a + b) \doteq 1;$

c) $\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{ctg}^2 a = 2 \frac{3 + \cos 4a}{1 - \cos 4a};$ d) $\frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} \cdot \frac{\cos a}{1 + \cos a} =$

$$\frac{\cos \frac{a}{2}}{1 + \cos \frac{a}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{a}{4}}{1 + \cos \frac{a}{4}} = \operatorname{tg} \frac{a}{8}.$$

Solu\u021bie. a) $2 \cos \left(\frac{\pi}{3} - a \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos a + \sin \frac{\pi}{3} \sin a \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \cos a +$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a \right) = \cos a + \sqrt{3} \sin a.$$

b) $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) \operatorname{ctg} (a + b) = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} (a + b)} =$

$$= \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) \frac{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \operatorname{tg}^2 a + \operatorname{ctg}^2 a &= \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} = \frac{\sin^4 a + \cos^4 a}{\sin^2 a \cos^2 a} = \frac{(\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 2 \sin^2 a \cos^2 a}{\sin^2 a \cos^2 a} \\ &= \frac{2 \sin^2 a \cos^2 a}{\sin^2 a \cos^2 a} = \frac{4}{\sin^2 2a} - 2 = \frac{4 - 2 \sin^2 2a}{\sin^2 2a}. \text{ Inlocuim } \sin 2a = \\ &= \frac{1 - \cos 4a}{2} \text{ și obținem: } \frac{4 - 2 \frac{1 - \cos 4a}{2}}{\frac{1 - \cos 4a}{2}} = \frac{2(3 + \cos 4a)}{1 - \cos 4a}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} \cdot \frac{\cos a}{1 + \cos a} \cdot \frac{\cos \frac{a}{2}}{1 + \cos \frac{a}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{a}{4}}{1 + \cos \frac{a}{4}} &= \frac{2 \sin a \cos a}{2 \cos^2 a} \cdot \frac{\cos a}{2 \cos^2 \frac{a}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{a}{2}}{2 \cos^2 \frac{a}{4}} \cdot \frac{\cos \frac{a}{4}}{2 \cos^2 \frac{a}{8}} \\ &= \frac{\sin a}{8 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{4} \cos^2 \frac{a}{8}} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{8 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{4} \cos^2 \frac{a}{8}} \\ &= \frac{\sin \frac{a}{2}}{4 \cos \frac{a}{4} \cos^2 \frac{a}{8}} = \frac{2 \sin \frac{a}{4} \cos \frac{a}{4}}{4 \cos \frac{a}{4} \cos^2 \frac{a}{8}} = \frac{\sin \frac{a}{4}}{2 \cos^2 \frac{a}{8}} = \frac{2 \sin \frac{a}{8} \cos \frac{a}{8}}{2 \cos^2 \frac{a}{8}} = \frac{\sin \frac{a}{8}}{\cos \frac{a}{8}} = \operatorname{tg} \frac{a}{8}. \end{aligned}$$

Problema 38. Să se transforme în produs:

a) $\cos(a + b + c) + \cos(a + b - c) + \cos(a + c - b) + \cos(b + c - a)$; b) $1 + \cos a + \cos 2a$; c) $1 + \cos a + \sin a$; d) $1 - \sin a - \cos 2a$.

Soluție. a) $\cos(a + b + c) + \cos(a + b - c) + \cos(a + c - b) + \cos(b + c - a) = 2 \cos(a + b) \cos c + 2 \cos c \cos(a - b) = 2 \cos c [\cos(a + b) + \cos(a - b)] = 2 \cos c (\cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b) = 2 \cos c \cdot 2 \cos a \cos b = 4 \cos a \cos b \cos c$.

b) $1 + \cos a + \cos 2a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} + \cos a = 2 \cos \frac{a}{2} (\cos \frac{a}{2} + \frac{1}{2}) = 2 \cos \frac{a}{2} (\cos \frac{a}{2} + \cos \frac{\pi}{3}) = 2 \cos \frac{a}{2} \cdot 2 \cos \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{3} \right) \right] \cos \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \right] = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{6} \right)$.

Deci: $1 + \cos a + \cos 2a = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{6} \right)$.

c) $1 + \cos a + \sin a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} + 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = 2 \cos \frac{a}{2} (\cos \frac{a}{2} + \sin \frac{a}{2}) = 2 \cos \frac{a}{2} \left[\cos \frac{a}{2} + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2} \right) \right] = 2 \cos \frac{a}{2} \cdot 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos \left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 4 \cos \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \cos \frac{a}{2} \cos \left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$.

Deci: $1 + \cos a + \sin a = 2\sqrt{2} \cos \frac{a}{2} \cos \left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$.

$$d) 1 - \sin a - \cos 2a = 2 \sin^2 a - \sin a = \sin a(2 \sin a - 1) = 2 \sin a(\sin a - \frac{1}{2}) = 2 \sin a(\sin a - \sin \frac{\pi}{6}) = 2 \sin a \cdot 2 \sin(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{12}) \cos(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{12}).$$

$$\text{Deci: } 1 - \sin a - \cos 2a = 4 \sin a \sin(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{12}) \cos(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{12}).$$

Problema 39. Să se calculeze numerele:

$$a) \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}; b) \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{7\pi}{12} + \sin^2 \frac{9\pi}{12} + \sin^2 \frac{11\pi}{12}; c) \cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} + \cos^4 \frac{9\pi}{8} + \cos^4 \frac{11\pi}{8}; d) \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{12}.$$

$$\text{Soluție. } a) \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} + \frac{1 - \cos \frac{3\pi}{4}}{2} + \frac{1 - \cos \frac{5\pi}{4}}{2} + \frac{1 - \cos \frac{7\pi}{4}}{2} = \frac{1}{2} (1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2.$$

$$b) \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{7\pi}{12} + \sin^2 \frac{9\pi}{12} + \sin^2 \frac{11\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} + \frac{1 - \cos \frac{\pi}{2}}{2} + \frac{1 - \cos \frac{5\pi}{6}}{2} + \frac{1 - \cos \frac{7\pi}{6}}{2} + \frac{1 - \cos \frac{3\pi}{2}}{2} + \frac{1 - \cos \frac{11\pi}{6}}{2} = \frac{1}{2} (1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 3.$$

$$c) \cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \left(\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos \frac{3\pi}{4}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos \frac{5\pi}{4}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos \frac{7\pi}{4}}{2} \right)^2 = \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4} \right)^2 + \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{4} \right)^2 + \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{4} \right)^2 + \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{1}{16} (4 + 4\sqrt{2} + 2 + 4 - 4\sqrt{2} + 2 + 4 - 4\sqrt{2} + 2 + 4 + 4\sqrt{2} + 2) = \frac{3}{2}.$$

$$d) \text{Aplicăm formula: } \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}.$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{1 + \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{4 - 3} = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}.$$

Problema 40. Să se rezolve ecuațiile:

- a) $\sin 2x = \cos^2 x$; b) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos 2x$; c) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}$;
d) $\cos(x + \frac{\pi}{6}) \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$; e) $4 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \cos x - 3 \sin x - 1 = 0$.

Soluție. a) $\sin 2x = \cos^2 x \Rightarrow 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \sin x - \cos x) = 0$; $\cos x = 0 \Rightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$; sau $\cos x = 2 \sin x \Rightarrow 2 \operatorname{tg} x = 1$ (am împărțit cu $\sin x$ care este diferit de zero, căci în caz contrar am avea și $\cos x = 0$, ceea ce nu este posibil pentru același x); $\Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$; $\Rightarrow x \in \{\arctan \frac{1}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$. Deci $x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\arctan \frac{1}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

b) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos 2x$; $\Rightarrow \cos x - \sin x - \sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0 \Rightarrow (\cos x - \sin x) \cdot (1 - \sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \sin x) = 0$; $\cos x - \sin x = 0$ este ecuație omogenă $\Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x \in \{\arctan 1 + k\pi / k \in \mathbb{Z}\} = \{\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$; ecuația $\sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{4} - x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $-x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ și $-x = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} - 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; deci mulțimea soluțiilor ecuației este:

$$x \in \{\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{7\pi}{12} - 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{12} - 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}.$$

c) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1}$; condiția de existență $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ și $\operatorname{tg} x \neq -1 \Rightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Folosim formula: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ și obținem: $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}{\frac{\sin x}{\cos x} + 1}$;

$$= \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \Rightarrow \sin x(\sin x + \cos x) = (1 + \cos x)(\sin x - \cos x).$$

$$\sin^2 x + \sin x \cos x - \sin x - \sin x \cos x + \cos x + \cos^2 x = 0 \Rightarrow \sin^2 x - \sin x + \cos x + \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x - \sin x + 1 = 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x -$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{4} \sin x - \sin \frac{\pi}{4} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi$$
, $k \in \mathbb{Z}$; pentru k par, $k = 2n$,

$$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$
, $n \in \mathbb{Z}$; pentru k impar, $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$, $x = (2n +$

$$+ 1)\pi$$
, $n \in \mathbb{Z}$. Dar $x \notin \{(2n + 1)\pi / n \in \mathbb{Z}\}$, de asemenea $x \in \{\frac{\pi}{2} + 2n\pi / n \in \mathbb{Z}\}$

(din condițiile de existență impuse). Deci ecuația nu are soluții.

d) $\cos(x + \frac{\pi}{6}) \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$. Transformăm produsul în sumă:

$$\frac{1}{2} (\cos 2x + \cos \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x =$$

$$= \pm \arccos \frac{1}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

e) $4 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \cos x - 3 \sin x - 1 = 0$; condiții: $\frac{x}{2} \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Înlocuim $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$ și $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \Rightarrow 4 \cdot \frac{1 + \cos x}{\sin x} - \cos x - 3 \sin x -$

$$- 1 = 0 \Rightarrow 4(1 + \cos x) - \sin x \cos x - 3 \sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow 4(1 + \cos x) -$$

$$- \sin x (1 + \cos x) - 3(1 - \cos^2 x) = 0 \Rightarrow (1 + \cos x) [4 - \sin x - 3(1 - \cos x)] = 0 \Rightarrow (1 + \cos x)(3 \cos x - \sin x + 1) = 0;$$

$$1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}; 3 \cos x - \sin x + 1 = 0 \text{ notînd } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

($\operatorname{tg} \frac{x}{2} \neq 0$, datorită condițiilor puse la început) și înlocuind $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ și

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ obținem: } 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} + 1 = 0 \Rightarrow 3(1-t^2) - 2t + 1 +$$

$$+ t^2 = 0 \Rightarrow -2t^2 - 2t + 4 = 0 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \text{ cu rădăcinile: } t_1 = 1 \text{ și}$$

$$t_2 = -2; \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -2 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ și } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -2 \Rightarrow \frac{x}{2} = \arccos(-2) +$$

$$+ k\pi, k \in \mathbb{Z}. \text{ Deci } x \in \left\{ (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ 2 \arccos(-2) + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Problema 41. Să se discute și să se rezolve ecuațiile:

a) $\cos 2x + (2m - 1) \sin x + m - 1 = 0$; b) $m \cos x - (m + 1) \sin x - m = 0$;

c) $3m \sin 2x + (m - 1) \cos 2x - 1 = 0$.

Soluție. a) $\cos 2x + (2m - 1) \sin x + m - 1 = 0; \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x +$

$$+ (2m - 1) \sin x + m - 1 = 0 \Rightarrow -2 \sin^2 x + (2m - 1) \sin x + m = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x - (2m - 1) \sin x - m = 0; \text{ notăm } \sin x = y \Rightarrow 2y^2 - (2m -$$

$$- 1)y - m = 0; \Delta = (2m - 1)^2 + 8m = 4m^2 + 4m + 1 = (2m + 1)^2; \text{ deci}$$

$$y_{1,2} = \frac{2m - 1 \pm (2m + 1)}{4} \Rightarrow y_1 = m \text{ și } y_2 = -\frac{1}{2}.$$

Ecuația $\sin x = m$ are soluții numai pentru $|m| \leq 1$; în acest caz:

$$x \in \left\{ (-1)^k \arcsin m + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}. \text{ Dacă } |m| > 1 \text{ ecuația nu are soluții.}$$

Ecuația $\sin x = -\frac{1}{2}$ admite soluții, deoarece $-\frac{1}{2} \in [-1, 1]$; mulțimea

$$\text{soluțiilor ei este: } \left\{ (-1)^k \arcsin(-\frac{1}{2}) + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Deci: dacă $|m| \leq 1 \Rightarrow x \in \left\{ (-1)^k \arcsin m + k\pi/k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi/k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Dacă $|m| > 1 \Rightarrow x \in \left\{ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi/k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) $m \cos x - (m+1) \sin x - m = 0$. Este o ecuație liniară în $\sin x$ și $\cos x$.

Folosim formulele: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$;

$$m \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} - (m+1) \frac{2t}{1+t^2} - m = 0 \Rightarrow m(1-t^2) - (m+1) \cdot 2t - m(1+t^2) = 0$$

$$m - m t^2 - 2 m t - 2 t - m - m t^2 = 0 \Rightarrow -2 m t^2 - 2 m t - 2 t = 0; m t^2 + m t + t = 0 \Rightarrow t(m t + m + 1) = 0; \Rightarrow t = 0 \text{ sau } m t + m + 1 = 0. \text{ Dacă } t = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = \arcsin 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\text{Dacă } m t + m + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-m-1}{m} \text{ cu } m \neq 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{-m-1}{m} \Rightarrow \frac{x}{2} = \arcsin \frac{-m-1}{m} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \left\{ 2 \arcsin \frac{-m-1}{m} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z} \right\}, m \neq 0.$$

Dacă $m = 0$ ecuația inițială devine: $\sin x = 0 \quad x \in \{k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$.

Deoarece $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ este nedefinită pentru $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, verificăm dacă $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ sînt soluții ale ecuației inițiale: $m \cos(\pi + 2k\pi) -$

$-(m+1) \sin(\pi + 2k\pi) - m = -m - m = -2m \neq 0$ pentru $m \neq 0$. Deci nu verifică ecuația dacă $m \neq 0$.

Rezultă că: dacă $m \neq 0 \quad x \in \left\{ 2k\pi/k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ 2 \arcsin \frac{-m-1}{m} + 2k\pi/k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Dacă $m = 0 \Rightarrow x \in \{k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$.

c) $3m \sin 2x + (m-1) \cos 2x - 1 = 0$. Înlocuim $\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ și

$$\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \Rightarrow 3m \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + (m-1) \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - 1 = 0 \Rightarrow 6m \operatorname{tg} x + (m-1)(1 - \operatorname{tg}^2 x) - (1 + \operatorname{tg}^2 x) = 0 \Rightarrow 6m \operatorname{tg} x + m - m \operatorname{tg}^2 x - 1 + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 0 \Rightarrow m \operatorname{tg}^2 x - 6m \operatorname{tg} x + 2 - m = 0; \Delta = 36m^2 - 4m(2-m) = 40m^2 - 8m. \text{ Ecuația are soluții dacă } 40m^2 - 8m \geq 0 \text{ deci dacă}$$

$$m \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{5}, \infty \right); (m \neq 0).$$

$$\text{Pentru } \Delta \geq 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{3m \pm \sqrt{40m^2 - 8m}}{m}, \text{ deci } x \in \left\{ \arcsin \frac{3m + \sqrt{40m^2 - 8m}}{m} + k\pi/k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \arcsin \frac{3m - \sqrt{40m^2 - 8m}}{m} + k\pi/k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dacă $m = 0$ ecuația devine: $-\cos 2x - 1 = 0 \Rightarrow \cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}; x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$
 $\operatorname{tg} x$ nu este definită pentru $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Verificând dacă $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ este soluție obținem $3m \sin(\pi + 2k\pi) + (m-1)\cos(\pi + 2k\pi) - 1 = -m + 1 - 1 = -m$.

Deci pentru $m = 0$ ecuația are soluțiile $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Pentru $m \neq 0$ ele nu sînt soluții ale ecuației.

Problema 42. După ce se aduc la forma $a \cos 2x + b \sin 2x + c = 0$, să se rezolve și să se discute, atunci cînd este cazul, ecuațiile:

a) $\cos^2 x + 3 \sin x \cos x + 1 = 0$; b) $2\sqrt{3} \sin^2 x + 8 \sin x \cos x - 2\sqrt{3} \cos^2 x - 5 = 0$; c) $\cos^2 x + 4 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x - 2 = 0$; d) $\cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x = m$; e) $4 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = m$.

Soluție. a) $\cos^2 x + 3 \sin x \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{3}{2} \sin 2x + 1 = 0$;
 $1 + \cos 2x + 3 \sin 2x + 2 = 0 \Rightarrow \cos 2x + 3 \sin 2x + 3 = 0$
 $= 0 \Rightarrow \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 3 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 3 = 0 \Rightarrow 1 - \operatorname{tg}^2 x + 6 \operatorname{tg} x + 3 + 3 \operatorname{tg}^2 x = 0$
 $= 0 \Rightarrow 2 \operatorname{tg}^2 x + 6 \operatorname{tg} x + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 2 = 0; \Rightarrow \operatorname{tg} x = -2 \Rightarrow x \in \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg}(-2) + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\};$

și $\operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x \in \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg}(-1) + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Verificăm dacă $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ este soluție ($x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, reprezintă valorile pentru care $\operatorname{tg} x$ nu este definită).

$\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) + 3 \sin \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) + 1 = \frac{3}{2} \sin(\pi + 2k\pi) + 1 = 1 \neq 0$,
 deci $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ nu sînt soluții.

Deci: $x \in \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg}(-2) + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) $2\sqrt{3} \sin^2 x + 8 \sin x \cos x - 2\sqrt{3} \cos^2 x - 5 = 0 \Rightarrow 2\sqrt{3} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) + 4 \sin 2x - 2\sqrt{3} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) - 5 = 0$
 $\Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3} \cos 2x + 4 \sin 2x - \sqrt{3} - \sqrt{3} \cos 2x - 5 = 0; 2\sqrt{3} \cos 2x - 4 \sin 2x + 5 = 0; \Rightarrow 2\sqrt{3}$

$\cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - 4 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 5 = 0$.

$2\sqrt{3} (1 - \operatorname{tg}^2 x) - 8 \operatorname{tg} x + 5(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - 8 \operatorname{tg} x + 5 + 5 \operatorname{tg}^2 x = 0; (5 - 2\sqrt{3}) \operatorname{tg}^2 x - 8 \operatorname{tg} x + 5 + 2\sqrt{3} = 0$. Rezolvînd obținem:

$\operatorname{tg} x = 2 + \sqrt{3}$ și $\operatorname{tg} x = \frac{14 + 3\sqrt{3}}{13}$. Deci: $x \in \left\{ \arctg(2 + \sqrt{3}) + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup$
 $\left\{ \arctg \frac{14 + 3\sqrt{3}}{13} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$. Verificăm dacă $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (valori

pentru care $\operatorname{tg} x$ nu este definită) sînt soluții ale ecuației: $2\sqrt{3} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) +$
 $+ 8 \sin \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) - 2\sqrt{3} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) - 5 = 2\sqrt{3} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) -$
 $- 5 = \sqrt{3} [1 - \cos(\pi + 2k\pi)] - 5 = 2\sqrt{3} - 5 \neq 0$, deci $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ nu
 sînt soluții ale ecuației.

$$\begin{aligned} \text{c) } \cos^2 x + 4 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x - 2 &= 0 \Rightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} + 2 \sin 2x - \\ &- (1 - \cos 2x) - 2 = 0; 1 + \cos 2x + 4 \sin 2x - 2 + 2 \cos 2x - 4 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3 \cos 2x + 4 \sin 2x - 5 = 0 \Rightarrow 3 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 4 \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - 5 = \\ &= 0; \Rightarrow 3 - 3 \operatorname{tg}^2 x + 8 \operatorname{tg} x - 5 - 5 \operatorname{tg}^2 x = 0 \Rightarrow -8 \operatorname{tg}^2 x + 8 \operatorname{tg} x - 2 = \\ &= 0 \Rightarrow 4 \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 = 0 \Rightarrow (2 \operatorname{tg} x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}; \Rightarrow \\ &x \in \left\{ \arctg \frac{1}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

Verificăm dacă $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sînt soluții: $\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) + 4 \sin \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) \cdot$
 $\cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) - 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) - 2 = -2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) - 2 = -[1 -$
 $- \cos(\pi + 2k\pi)] - 2 = -2 - 2 = -4 \neq 0$, deci nu sînt soluții.

$$\begin{aligned} \text{d) } \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x &= m \Rightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} + \sin 2x - \frac{1 - \cos 2x}{2} = \\ &= m \Rightarrow 1 + \cos 2x + 2 \sin 2x - 1 + \cos 2x = 2m \Rightarrow \cos 2x + \sin 2x = \\ &= m; \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = m \Rightarrow 1 - \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - m - m \operatorname{tg}^2 x = 0 \\ &\quad (1 + m) \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + m - 1 = 0. \end{aligned}$$

Notăm $\operatorname{tg} x = y$ obținem: $(1 + m) y^2 - 2y + m - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(1 + m)(m - 1) = 8 - 4m^2$.

Ecuația are soluții dacă $\Delta \geq 0 \Rightarrow m \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] - \{1\}$; în acest caz $y_{1,2} =$
 $= \frac{1 \pm \sqrt{2 - m^2}}{1 + m}$; rezultă că: $\operatorname{tg} x = \frac{1 \pm \sqrt{2 - m^2}}{1 + m} \Rightarrow x \in \left\{ \arctg \frac{1 - \sqrt{2 - m^2}}{1 + m} + \right.$

$$\left. + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \arctg \frac{1 + \sqrt{2 - m^2}}{1 + m} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}, (m \neq -1).$$

Verificăm dacă $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ este soluție:

$$\begin{aligned} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) + 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) &= m; \Rightarrow \\ &- \frac{1 - \cos(\pi + 2k\pi)}{2} = m; \text{ obținem identitate dacă } m = -1, \text{ deci în acest caz} \\ &x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ sînt soluții; pentru } m \neq -1 \text{ nu sînt soluții.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } 4 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \sin^2 x &= m; \Rightarrow 4 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} - \\
 - \sqrt{3} \sin 2x + 2 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} &= m \Rightarrow 2 + 2 \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x + 1 - \\
 - \cos 2x &= m \Rightarrow \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x + 3 = m \Rightarrow \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = \\
 = m - 3 \Rightarrow \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x &= \frac{m-3}{2}; \cos \frac{\pi}{3} \cos 2x - \sin \frac{\pi}{3} \sin 2x = \\
 = \frac{m-3}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) &= \frac{m-3}{2}; \text{ pentru ca această ecuație să aibă soluții tre-} \\
 \text{buie ca } -1 \leq \frac{m-3}{2} \leq 1 \Rightarrow m \in (-\infty, 5] \cap [1, \infty) &= [1, 5]. \text{ Deci ecuația are} \\
 \text{soluții numai dacă } m \in [1, 5]; \text{ în acest caz: } \frac{\pi}{3} + 2x &= \pm \arccos \frac{m-3}{2} + 2k\pi, \\
 k \in \mathbb{Z}; \Rightarrow x \in \left\{ \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{m-3}{2} + k\pi - \frac{\pi}{6} / k \in \mathbb{Z} \right\}.
 \end{aligned}$$

Problema 43. Să se rezolve ecuațiile: a) $4 \sin t \cos t - 2(\sin t + \cos t) + 1 = 0$; b) $25 \sin t \cos t - 35(\sin t + \cos t) + 37 = 0$; c) $\sin^3 t + \cos^3 t = \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\sin^3 t + \cos^3 t + \sin t \cos t = \frac{5}{16}$.

Soluție. a) Notăm $\sin t + \cos t = x \Rightarrow 2 \sin t \cos t = (\sin t + \cos t)^2 - (\sin^2 t + \cos^2 t) \Rightarrow \sin t \cos t = \frac{x^2 - 1}{2}$. Ecuația devine: $2(x^2 - 1) - 2x + 1 = 0$ sau: $2x^2 - 2x - 1 = 0$ care are rădăcinile: $x_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ și $x_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

Avem acum de rezolvat sistemele: $\sin t + \cos t = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$, $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

și $\sin t + \cos t = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$, $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$; obținem soluțiile: $\cos t = \frac{1}{2}$,

$\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin t = \frac{1}{2}$ pentru primul sistem și: $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos t = \frac{1}{2}$, și $\sin t = \frac{1}{2}$, $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pentru al doilea sistem.

Dacă $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\cos t = \frac{1}{2} \Rightarrow t$ este în cadranul al patrulea și rezultă că $t \in \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Dacă $\sin t = \frac{1}{2}$ și $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t$ este în cadranul al doilea $t \in \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Dacă $\sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și $\cos t = \frac{1}{2} \Rightarrow t$ este în cadranul întâi $t \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Dacă $\sin t = \frac{1}{2}$ și $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t$ este în cadranul întâi $\Rightarrow t \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Deci $t \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) $25 \sin t \cos t - 35(\sin t + \cos t) + 37 = 0$. Notăm $\sin t + \cos t = x$

$$\sin t \cos t = \frac{x^2 - 1}{2}; \text{ ecuația devine: } 25 \cdot \frac{x^2 - 1}{2} - 35x + 37 = 0 \Rightarrow 25(x^2 -$$

$$- 1) - 70x + 74 = 0 \Rightarrow 25x^2 - 70x + 49 = 0 \Rightarrow (5x - 7)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 =$$

$= \frac{7}{5}$. Avem acum de rezolvat sistemul: $\sin t + \cos t = \frac{7}{5}$, $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$; obținem soluțiile $\cos t = \frac{3}{5}$, $\sin t = \frac{4}{5}$ și $\cos t = \frac{4}{5}$, $\sin t = \frac{3}{5}$. În ambele cazuri t

este în cadranul întâi $\Rightarrow t \in \left\{ \arcsin \frac{4}{5} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \arcsin \frac{3}{5} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\text{c) } \sin^3 t + \cos^3 t = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Notăm } \sin t + \cos t = x \Rightarrow \sin^3 t + \cos^3 t = (\sin t + \cos t)^3 - 3 \sin t \cos t (\sin t + \cos t) = x^3 - 3 \cdot \frac{x^2 - 1}{2} x = \frac{2x^3 - 3x(x^2 - 1)}{2} =$$

$$= \frac{-x^3 + 3x}{2} \Rightarrow \frac{-x^3 + 3x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x^3 - 3x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x^3 - x^2\sqrt{2} - x - 2x + x^2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x^2(x - \sqrt{2}) - (x - \sqrt{2}) + x\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow (x - \sqrt{2})(x^2 + x\sqrt{2} - 1) = 0, \text{ care are rădăcinile: } x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

$x_3 = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$. Obținem deci ecuațiile similare în $\sin x$ și $\cos x$:

$$\sin t + \cos t = \sqrt{2}; \sin t + \cos t = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}; \sin t + \cos t = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

$$1) \sin t + \cos t = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t = 1 \Rightarrow \sin \frac{\pi}{4} \cos t + \sin t \cos \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \sin(t + \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$2) \sin t + \cos t = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}; \sin(t + \frac{\pi}{4}) = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow t + \frac{\pi}{4} = (-1)^k \arcsin \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \left\{ (-1)^k \arcsin \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} + k\pi - \frac{\pi}{4} / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$3) \sin t + \cos t = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \Rightarrow \sin(t + \frac{\pi}{4}) = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \notin [-1, 1], \text{ deci ecuația nu are soluții.}$$

$$\text{Deci } t \in \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ (-1)^k \arcsin \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} + k\pi - \frac{\pi}{4} / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

d) Notăm $\sin t + \cos t = x$; $(\sin t + \cos t)(\sin^2 t - \sin t \cos t + \cos^2 t) + \sin t \cos t = \frac{5}{16}$; $x(1 - \frac{x^2 - 1}{2}) + \frac{x^2 - 1}{2} = \frac{5}{16}$; se obține ecuația:

$$8x^3 - 8x^2 - 24x + 13 = 0 \Rightarrow (2x - 1)(8x^2 - 4x - 26) = 0 \text{ cu rădăcinile: } x_1 = \frac{1}{2}, x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{53}}{4}. \text{ Deci avem ecuațiile:}$$

$$\sin t + \cos t = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin(t + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow t + \frac{\pi}{4} = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}; t \in \left\{ (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + k\pi - \frac{\pi}{4} / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ecuatiile: $\sin t + \cos t = \frac{1 \pm \sqrt{53}}{4}$ devin prin înmulțire cu $\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin(t + \frac{\pi}{4}) = \frac{1 \pm \sqrt{53}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \notin [-1, 1]$; deci aceste ecuații sînt imposibile. Rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației este: $t \in \left\{ (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + k\pi - \frac{\pi}{4} / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Problema 44. Se dau punctele $M(\frac{a\sqrt{3}-a}{2}, \frac{3a-a\sqrt{3}}{2})$ și $N(\frac{a-a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{a\sqrt{3}-a}{\sqrt{2}})$. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului OMN, unde O este originea axelor de coordonate.

Soluție. $\|ON\|^2 = \left(\frac{a-a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}-a}{\sqrt{2}}\right)^2$
 $\|ON\|^2 = \frac{a^2 - 2a^2\sqrt{3} + 3a^2 + 3a^2 + a^2 - 2a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{8a^2 - 4a^2\sqrt{3}}{2} = 4a^2 - 2a^2\sqrt{3} = 2a^2(2 - \sqrt{3})$
 $\|OM\|^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a-a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2 + a^2 - 2a^2\sqrt{3} + 9a^2 + 3a^2 - 6a^2\sqrt{3}}{4}$
 $= \frac{16a^2 - 8a^2\sqrt{3}}{4} = 4a^2 - 2a^2\sqrt{3} = 2a^2(2 - \sqrt{3})$; $\Rightarrow \|OM\| = \|ON\|$, deci triunghiul OMN este isoscel. Coeficientul unghiular al lui OM este $m_{OM} = \frac{y}{x}$

(unde x și y sînt coordonatele lui M);

$m_{OM} = \frac{\frac{3a-a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}-a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{a(\sqrt{3}-1)} = \sqrt{3}$; $\Rightarrow$ unghiul format de OM cu direcția pozitivă a axei xx' este de $\frac{\pi}{3}$. Coeficientul unghiular al dreptei ON este $m_{ON} = \frac{y}{x}$ (unde x și y sînt coordonatele lui N);

$m_{ON} = \frac{\frac{a\sqrt{3}-a}{\sqrt{2}}}{\frac{a-a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{a(1-\sqrt{3})} = -1$; $\Rightarrow$ unghiul format de ON cu direcția pozitivă a axei xx' este $\frac{3\pi}{4}$; unghiul între ON și OM este: $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$; $\Rightarrow m(\widehat{MON}) = \frac{5\pi}{12}$; triunghiul MON fiind isoscel ($|OM| \equiv |ON|$) $\Rightarrow m(\widehat{OMN}) = m(\widehat{NMO}) = (\pi - \frac{5\pi}{12}) : 2 = \frac{7\pi}{24}$; Deci $m(\widehat{OMN}) = m(\widehat{NMO}) = \frac{7\pi}{24}$.

Problema 45. Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului determinat de dreptele de ecuații: $2x - y + 3 = 0$, $5x + y - 2 = 0$, $y = 1$.

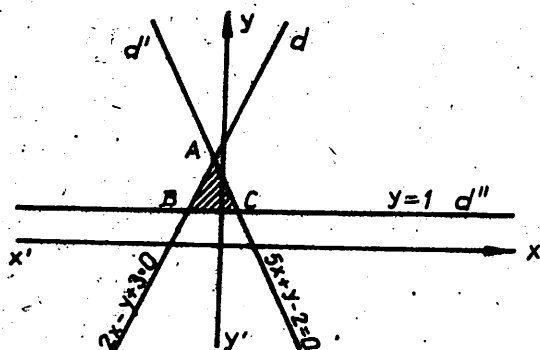


Fig. 281.

Soluție. Fie d dreapta de ecuație $2x - y + 3 = 0$, d' dreapta de ecuație: $5x + y - 2 = 0$ și d'' dreapta de ecuație $y = 1$. Fie $\{A\} = d \cap d'$, $\{B\} = d \cap d''$, $\{C\} = d' \cap d''$. Coeficientul unghiular al dreptei d este $m_d = 2$, iar al dreptei d' este $m_{d'} = -5$; dreapta $d'' \parallel xx'$, deci $m_{d''} = 0$.

Se observă că triunghiul ABC , format de dreptele respective, are unghiurile: $m(\widehat{ABC}) = \arctg 2$; $m(\widehat{ACB}) = \pi - \arctg(-5)$ și $m(\widehat{BAC}) = \pi - [\arctg 2 + \pi - \arctg(-5)]$. Deci $m(\widehat{BAC}) = \arctg(-5) - \arctg 2$.

Problema 46. Fie P punctul de intersecție al dreptelor d' și d'' de ecuații $x + 4y - 5 = 0$ și $2x + 5y - 7 = 0$. Dacă $M \in d'$ și $N \in d''$ sînt două puncte de abscise mai mari decît abscisa lui P , să se calculeze numărul $t = \mu(\widehat{MPN})$.

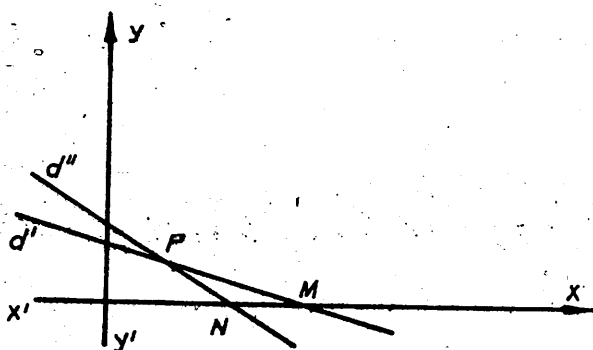


Fig. 282.

Soluție. Coordonatele lui P se obțin rezolvînd sistemul: $x + 4y - 5 = 0$, $2x + 5y - 7 = 0$; $\Rightarrow x = 1$ și $y = 1$, deci $P(1, 1)$. Punctele M și N avînd abscisele mai mari ca abscisa lui P , pot fi luate chiar punctele de intersecție ale dreptelor d' și d'' cu axa xx' , deci $M(5, 0)$ și $N(\frac{7}{2}, 0)$; $m_{d'} = -\frac{1}{4}$; deci

$$\begin{aligned} m(\widehat{PMN}) &= \pi - \arctg(-\frac{1}{4}); m_{d''} = -\frac{2}{5}; m(\widehat{PNM}) = \arctg(-\frac{2}{5}); m(\widehat{NPM}) = \\ &= \pi - [\arctg(-\frac{2}{5}) + \pi - \arctg(-\frac{1}{4})] = \arctg(-\frac{1}{4}) - \arctg(-\frac{2}{5}) = \arctg \frac{2}{5} - \\ &- \arctg \frac{1}{4} = t. \\ \operatorname{tg} t &= \operatorname{tg}(\arctg \frac{2}{5} - \arctg \frac{1}{4}) = \frac{\operatorname{tg}(\arctg \frac{2}{5}) - \operatorname{tg}(\arctg \frac{1}{4})}{1 + \operatorname{tg}(\arctg \frac{2}{5}) \operatorname{tg}(\arctg \frac{1}{4})} = \\ &= \frac{\frac{2}{5} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{8-5}{20}}{\frac{22}{20}} = \frac{3}{22}; \operatorname{tg} t = \frac{3}{22} \Rightarrow t = \arctg \frac{3}{22}. \end{aligned}$$

OBSERVATII

1) Unele probleme (mai simple) nu au fost însoțite de desene, rămânând la alegerea cititorului să-și reprezinte singur suportul intuitiv, în scris sau mintal.

2) În rezolvarea unor probleme, când din desen se poate observa cu claritate unde se află litera ce denumește punctul de intersecție a două drepte, nu s-a mai precizat acest lucru și în cuvinte.

3) În cazul problemelor de geometrie pe o dreaptă, notînd cu $|AB|$ un segment deschis sau cu $[AB]$ un segment închis, fără a preciza ordinea punctelor A și B pe dreaptă, am considerat: $x_A < x_B$.

4) Nu am pus condiții de existență pentru funcțiile care apar în identitățile trigonometrice, considerîndu-le definite pe mulțimi pe care au sens.

5) Justificarea unor afirmații prin trimiteri la unele teoreme sau la unele probleme rezolvate anterior se face prin indicarea capitolului, paragrafului și paginii din manual care le conține, întrucît lucrarea de față nu conține părți teoretice.

6) La problema 44, de la problemele recapitulative (pag.168, manual) am pus $N(\frac{a - a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{a\sqrt{3} - a}{\sqrt{2}})$, în loc de $N(\frac{a - a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3} - a}{2})$, cum este în manual, pentru a fi valabilă indicația din manual (am considerat deci, că există o greșală de tipar). Dacă admitem că textul din manual este corect, atunci $\|OM\| \neq \|ON\|$. În acest caz, cunoscînd coordonatele punctelor O, N, M se calculează $\|ON\|$, $\|OM\|$, $\|MN\|$ și apoi aplicînd teorema lui Pitagora generalizată se deduc măsurile unghiurilor triunghiului.

7) În enunțul problemei 17, cap. 1, pag. 21, considerăm necesară precizarea că ne referim la semiplanele închise limitate de suporturile laturilor unui poligon convex P care conțin vîrfurile nesituate pe laturile respective.

SUMAR

	Pag.
Prefață.....	3

CAPITOLUL I

INCIDENTA, ORDONARE, CONGRUENTA

Axiomele de incidență ale geometriei în plan	
Problemele de la pag.7.....	5
Distanța și axioma riglei	
Problemele de la pag.9.....	6
Segmente, semidrepte și unghiuri	
Problemele de la pag.10	8
Axioma de separare a planului	
Problemele de la pag.14.....	13
Mulțimi convexe	
Problemele de la pag.17.....	17
Axiomele unghiului	
Problemele de la pag. 24.....	25
Proprietăți de congruență	
Problemele de la pag. 25.....	27
Congruența triunghiurilor	
Problemele de la pag. 31	33
Inegalități geometrice	
Problemele de la pag. 36	39
Alte cazuri ^o de congruență ale triunghiurilor	
Problemele de la pag. 40	47

	Pag.
Distanța de la un punct la o dreaptă	
Problemele de la pag. 42	48
Mediatoare. Bisectoare. Locuri geometrice.	
Problemele de la pag. 45	52
Drepte neconcurente	
Problemele de la pag. 47	54
Exerciții recapitulative,	
Problemele de la pag. 47	55
CAPITOLUL II	
PARALELISM, ASEMĂNARE	
Axioma paralelelor	
Problemele de la pag. 52	63
Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi	
Problemele de la pag. 53	68
Linia mijlocie	
Problemele de la pag. 55	75
Concurența unor drepte în triunghi	
Problemele de la pag. 58	78
Paralele echidistante	
Problemele de la pag. 59	81
Teorema lui Thales	
Problemele de la pag. 64	82
Teorema bisectoarei	
Problemele de la pag. 65	84
Asemănarea triunghiurilor	
Problemele de la pag. 66	87
Relații metrice	
Problemele de la pag. 71	93
Exerciții recapitulative, pag. 75	97

Pag.

CAPITOLUL III CERCUL

Definiții. Poziția unei drepte față de un cerc	
Problemele de la pag. 79.....	108
Coarde. Arce. Unghiuri la centru	
Problemele de la pag. 84.....	115
Unghi înscris	
Problemele de la pag. 89.....	122
Poligoane înscrise și circumscrise	
Problemele de la pag. 92.....	134
Poziția relativă a două cercuri	
Problemele de la pag. 98.....	149
Lungimea cercului	
Problemele de la pag. 101.....	160
Exerciții recapitulative, pag. 101.....	162

CAPITOLUL IV ELEMENTE DE GEOMETRIE ANALITICĂ

Coordonate în plan	
Problemele de la pag. 104.....	170
Ecuția dreptei	
Problemele de la pag. 109.....	174
Coeficientul unghiular al dreptei	
Problemele de la pag. 111.....	175
Funcțiile sin și cos definite pe intervalul $[0, \pi]$	
Problemele de la pag. 114.....	179
Unghiul unei drepte cu axa absciselor	
Problemele de la pag. 119.....	181

CAPITOLUL V FUNCTII TRIGONOMETRICE

Funcția de acoperire universală a cercului unitate	
Problemele de la pag. 125.....	183
Funcțiile trigonometrice sin și cos	
Problemele de la pag. 128.....	185
Formule pentru $\cos(a + b)$, $\sin(a - b)$, $\sin(a + b)$ și formule deduse din acestea	
Problemele de la pag. 129.....	188
Funcțiile tg și ctg	
Exercițiile de la pag. 134	194
Transformarea sumelor în produse	
Exercițiile de la pag. 136	196
Graficele funcțiilor sin, cos și tg	
Exercițiile de la pag. 140	198
Idențități condiționate	
Exercițiile de la pag. 143	200

CAPITOLUL VI ECUAȚII TRIGONOMETRICE

Funcțiile arcsin, arccos, arctg	
Exercițiile de la pag. 150	203
Ecuații trigonometrice fundamentale	
Exercițiile de la pag. 156	207
Ecuații trigonometrice care se rezolvă cu ajutorul unor ecuații din algebră	
Exercițiile de la pag. 157	208
Ecuații de forma: $a \cos t + b \sin t + c = 0$	
Exercițiile de la pag. 161	210
Probleme recapitulative, pag. 164	214
Observații	252