Уравнения третьей и четвёртой степени, решаемые в радикалах.

Г. Кардано и Л. Феррари

М. Коваль 11а

Можно ли выразить корни полинома
$f(x)=a0xn+a1xn-1+\ldots+an$
с комплексными коэффициентами
$a0, a1,\ldots,an$
в виде «хороших» функций от этих коэффициентов?
Вспомним, что для корней квадратного уравнения существует общая формула вычисления корней:
$x2+ax+b=0 \quad \lambda1,2=-a\pm\sqrt{}a2-4b2$.
Эта формула включает в себя элементарные алгебраические операции $+,-,\times,\div$ и операцию извлечения квадратного корня. По аналогии можно сформулировать и общую задачу.
Задача. Найти выражения корней полинома степени $n>2$ в виде функций его коэффициентов; при этом функции должны представлять конечную комбинацию элементарных алгебраических операций и операций извлечения корней произвольных (целых) степеней.
Поставленная задача называется задачей о разрешимости уравнения в радикалах1).
Пример. Уравнение

$$xm-1=0$$

при

$$m=2n,n \quad N$$

разрешимо в радикалах.

Оказывается, что любое уравнение третьей или четвертой степени разрешимо в радикалах. Перед тем, как изложить способы их решения, сделаем два упрощения. Первое из них заключается в том, что уравнение f(x)=0 делится на старший коэффициент полинома f(x).

Полином называется нормализованным, если его старший коэффициент равен

1

. Операция деления полинома на его старший коэффициент называется нормализациейполинома. Очевидно, что нормализованный полином имеет те же корни (и в тех же кратностях), что и исходный. Для простоты обозначений, будем считать, что полином уже нормализован:

f(x)=xn+a1xn−1+ +an.

Второе упрощение заключается в замене переменной (подстановке):

x=y+α

. Ее результатом будет новый полином той же степени, что и исходный, относительно переменной y: F(y) f(y+α)

. Корни нового полинома связаны с корнями старого по формуле λj=Λj+α; так что, найдя корни одного полинома, легко установим и корни другого.

Подберем теперь параметр

α так, чтобы обратить в нуль коэффициент при yn−1 в полиноме F(y). Используя формулу бинома Ньютона, получаем f(x)=xn+a1xn-1+…+an=(y+ α)n+a1(y+ α)n-1+…+an

Понятно, что если положить

α=-a1/n, то коэффициент при yn-1 исчезнет. Для простоты обозначений будем считать, что полином уже предварительно подвергнут такому преобразованию:

f(x)=xn+a2xn-2+…+an.

Уравнение третьей степени: формула Кардано

Рассмотрим уравнение третьей степени:
x^3+px+q=0
Сделаем в этом уравнении замену переменной:
x=u+v, введя две неизвестные u и v; получим:
u3+v3+3uv(u+v)+p(u+v)+q
3=0.
Сгруппируем:
u3+v3+(3uv+p)(u+v)+q=0.
Подчиним теперь неизвестные u и v условию
3uv+p=0 uv=-p3.
Тогда предыдущее уравнение приведется к виду
u3+v3=−q.
Итак, для определения неизвестных величин u и v мы получили систему уравнений
u3+v3=−q.
uv=-p3.
Возведя последнее уравнение в куб, получим
u3v3=−p327.
Два полученных равенства, связывающие u3 и v3, позволяет утверждать, что эти величины являются решениями квадратного уравнения:
t2+qt−p327=0.
Выражение
Δ=q24+p327
называется дискриминантом кубического уравнения.

ЧЕТВЁРТАЯ СТЕПЕНЬ В РАДИКАЛАХ

Четвёртая степень для алгебраических уравнений является наивысшей, при которой существует аналитическое решение в радикалах в общем виде (то есть при любых значениях коэффициентов).
Так как функция является многочленом чётной степени, она имеет один и тот же предел при стремлении к плюс и к минус бесконечности. Если , то функция возрастает до плюс бесконечности с обеих сторон, а значит, имеет глобальный минимум. Аналогично, если , то функция убывает до минус бесконечности с обеих сторон, а значит, имеет глобальный максимум

ЛОДОВИКО ФЕРРАРИ

С 15 лет Луиджи Феррари был учеником у миланского математика Джероламо Кардано и быстро обнаружил выдающиеся способности. К этому времени Кардано уже был известен алгоритм решения кубических уравнений; Феррари сумел найти аналогичный способ для решения уравнений четвёртой степени. Оба алгоритма Кардано опубликовал в своей книге «Высокое искусство».
В 1540 г. восемнадцатилетний Феррари стал профессором Миланского университета, но в 1556 году вернулся в родную Болонью, где тоже стал профессором математики. Однако вскоре, не дожив до 44 лет, он скоропостижно скончался — согласно упорным слухам, отравленный то ли собственной