Constantin Drăguşin
Octav Olteanu
Marinică Gavrilă

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Teorie şi aplicatii

Volumul I

MATRIX ROM
Bucureşti

Prof. dr. C. Drăguşin
Prof. dr. O. Olteanu
Conf. dr. M. Gavrilă

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Volumul 1

Teorie si aplicatii

MATRIX ROM
Bucureşti 2006

Prefaţă

Prezenta carte de Analiză Matematică reprezintă primul volum al unei serii de lucrări menite să acopere şi să completeze cunoştinţele de analixă matematică ce se predau în universităţile tehnice, la facultăţile de matematică-mecanică, de fizică, şi de profil economic, precum şi în clasele superioare de liceu.

Prin conţinut şi prin modul de prezentare, prezentul volum se adresează studenţilor, elevilor de liceu, cadrelor didactice din învăţământul superior şi mediu, inginerilor şi oricărui specialist interesat de analiza matematică şi aplicaţiile ei.

Cartea cuprinde noţiunile şi rezultatele teoretice de bază şi problemele aferente. Unele dintre acestea au scopul de a "fixa" şi aplica teoria respectivă, altele sunt mai complexe, au caracter general şi conduc la rândul lor la aplicaţii în domeniul matematicii actuale. Acesatea din urmă nu sunt alese întâmplător şi sunt însoţite de exemple concrete.

Cartea este structurată pe şase capitole, cuprinzând noţiuni de teoria mulţimilor şi a funcţiilor, topologie generală, spaţii metrice şi alte spaţii folosite în analiza funcţională, şiruri în spaţii metrice (inclusiv metoda aproximaţiilor succesive şi noţiuni legate de şiruri de funcţii), serii numerice, noţiuni legate de continuitatea funcţiilor, precum şi aplicaţii ale calculului diferenţial pentru funcţii de o variabilă reală.

Fiecare capitol conţine definiţiile şi rezultatele teoretice de bază, apoi este urmat de exerciţii şi aplicaţii corespunzătoare. Pentru unele exerciţii am dat rezolvări în extenso, iar pentru celelalte am dat indicaţii şi răspunsuri.

Am considerat util ca lucrarea să conţină şi probleme mai dificile necesare pregătirii studenţilor pentru concursurile profesionate şi cercurile ştiinţifice studenţeşti.

Capitolul şase, intitulat "Funcţii diferenţiabile de o variabilă reală", cuprinde între altele aplicaţii interesante ale inegalităţii mediilor la rezolvarea rapidă a unor ecuaţii algebrice, care altfel sunt greu de soluţionat. Paragraful 6.4, *intitulat "Rezolvarea unor ecuaţii funcţionale", cuprinde un caz particular elementar al unui principiu general de rezolvare constructivă a unor ecuaţii funcţionale şi operatoriale* (*"necunoscuta" este o funcţie strict descrescătoare sau un operator*)*. Sunt rezolvate, ca exemplu, ecuaţii funcţionale concrete. Acesta este un domeniu de cercetare foarte recent, care se leagă de noţiuni clasice de bază, cum este cea de analicitate şi de analiza funcţională. De aceea, aceste idei vor fi continuate în volumul* (*volumele*) *următoare.*

Sperăm ca cititorul acestei lucrări să profite atât de partea teoretică (*în care intervine în mare măsură interpretarea geometrică a noţiunilor şi rezultatelor respective*)*, cât şi de cea aplicativă, în care teoria se aplică folosind un calcul potrivit situaţiei particulare respective.*

Mulţumim anticipat cititorilor care ne vor adresa sugestii şi observaţii.

Autorii

TABLA DE MATERII

NOTAŢII şi ABREVIERI

$\forall$ - oricare ar fi;
$\exists$ - există;
$\nexists$ - nu există;
$\in$ - aparţine;
$\notin$ - nu aparţine;
$\wedge$ - şi;
$\vee$ - sau;
$\Rightarrow$ - implică;
$(\Rightarrow)$ - necesitatea;
$(\Leftarrow)$ - suficienţa;
$\Leftrightarrow$ - echivalenţa;
$\emptyset$ - muţimea vidă;
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, ..., n, ...\}$ - mulţimea numerelor naturale nenule;
$\mathbb{Z}$ - mulţimea numerelor întregi;
$\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$ - mulţimea numerelor întregi pozitive (nenegative) = mulţimea numerelor naturale;
$\mathbb{Z}_-$ - mulţirea numerelor întregi negative (nepozitive);
$\mathbb{Q}$ - mulţimea numerelor raţionale;
$\mathbb{R}$ - mulţimea numerelor reale;
$\mathbb{R}_+$ - mulţimea numerelor reale pozitive (nenegative);
$\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$;
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} := [-\infty, +\infty]$;
$\mathbb{C}$ - mulţimea numerelor complexe;
$\mathbb{R}^n$ - spaţiul vectorial (liniar) real n - dimensional;
$\mathbb{C}^n$ - spaţiul vectorial (liniar) complex n - dimensional;
$A \setminus B$ - diferenţa dintre mulţimea A şi mulţimea B;
$\complement A$ - complementara mulţimii A;
$\mathcal{P}(X)$ - mulţimea părţilor mulţimii X;
τ_X - topologia pe X;
$\mathcal{V}(x)$ - mulţimea vecinătăţilor punctului x;
$\overset{\circ}{A} = Int(A)$ - interiorul mulţimii A;
$\overline{A}$ - închiderea (aderenţa) mulţimii A;
$\partial A = Fr(A)$ - frontiera mulţimii A;
A' - mulţimea punctelor de acumulare ale mulţimii A;
$d(\cdot, \cdot)$ - distanţă (metrică);
$|| \cdot ||$ - normă;
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ - produs scalar (produs interior);
$B_r(x)$ - sfera (bila) deschisš de centru x şi de rază r;
$B_r[x]$ - sfera (bila) închisă de centru x şi de rază r;
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$;
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$;
$\mathcal{F}(X, Y) = \{f \,|\, f : X \to Y\}$ - mulţimea funcţiilor definite pe X cu valori în Y;

$f(A) = \{y \in Y \,|\, \exists x \in A \text{ a.î. } y = f(x)\} = \{f(x) \,|\, x \in A\}$ - imaginea prin funcţia f a mulţimii A;

$f^{-1}(B) = \{x \in X \,|\, \exists y \in B \subset Y \text{ a.î. } y = f(x)\} = \{x \in X \,|\, f(x) \in B\}$ - (preimaginea) imaginea reciprocă a lui B prin f;

$C^{\circ}(X, Y) = \{f \,|\, f : X \to Y$ - funcţie continuă$\}$;

$C^{n}(X, Y) = \{f \,|\, f : X \to Y$ - funcţie diferenţiabilă Fréchet de n ori şi cu derivata a n - a continuă$\}$;

$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ - spaţiul vectorial real al matricelor cu m linii şi n coloane;

$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ - spaţiul vectorial complex al matricelor cu m linii şi n coloane;

$\mathcal{M}_{n}(\mathbb{R})$ - spaţiul vectorial real al matricelor pătratice n linii şi n coloane;

$\mathcal{M}_{n}(\mathbb{C})$ - spaţiul vectorial complex al matricelor pătratice cu n linii şi n coloane;

$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă} \quad x < 0, \\ 0, & \text{dacă} \quad x = 0, \\ 1, & \text{dacă} \quad x > 0. \end{cases}$ - semnul lui x;

$|x| = \begin{cases} -x, & \text{dacă} \quad x < 0, \\ 0, & \text{dacă} \quad x = 0, \\ x, & \text{dacă} \quad x > 0. \end{cases}$ - modulul lui $x \in \mathbb{R}$;

$[x] = \begin{cases} \dots \\ -1, & \text{dacă} \quad x \in [-1, 0[, \\ 0, & \text{dacă} \quad x \in [0, 1[\\ 1, & \text{dacă} \quad x \in [1, 2[\\ \dots \end{cases}$ - partea întreagă a lui $x \in \mathbb{R}$;

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - modulul numărului complex $z = x + iy \in \mathbb{C}$;

$\overline{z} = x - iy$ - conjugatul numărului complex $z = x + iy \in \mathbb{C}$;

$Re(z) = x$ - partea reală a numărului compmex $z = x + iy \in \mathbb{C}$;

$Im(z) = y$ - partea imaginară a numărului complex $x = x + iy \in \mathbb{C}$;

$\theta \in [0, 2\pi[$ $(\theta \in [-\pi, \pi[)$ - argumentul numărului complex $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (soluţia unică a sistemului $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ în intervalul $[0, 2\pi[$ $([-\pi, \pi[)$;

$z = |z|\big(\cos\theta + i\sin\theta\big) = |z|e^{i\theta}$ - forma trigonometrică a numărului complex $z = x + iy \in \mathbb{C}$;

$e^{ix} := \cos x + i\sin x$;

$\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ - formulele lui Euler;

$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ - funcţiile hiperbolice;

$(2n - 1)!! := 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)$ - produsul numerelor impare până la $2n - 1$;

$(2n)!! := 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)$ - produsul numerelor pare până la $(2n)$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e;$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e;$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}\right) = e;$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.;$

$e = 2,7182818285...$ - numărul real e;

$\pi = 3,1415926536...$ - numărul real π;

$c = 0,577216...$ - constanta lui Euler.

Cap. 1. ELEMENTE DE TEORIA MULŢIMILOR

Mulţimi. Relaţii. Funcţii

Fie $\mathbf{I}$ o familie (mulţime) nevidă de indici. Pentru fiecare indice $i \in \mathbf{I}$ vom presupune dată o mulţime A_i.

Definiţia 1. *Mulţimea* $\{x/\exists i \in \mathbf{I}$ *a. î.* $x \in A_i\}$, *notată* $\bigcup_{i\in\mathbf{I}} A_i$, *se numeşte reuniunea tuturor mulţimilor* A_i, $i \in \mathbf{I}$.

Definiţia 2. *Mulţimea* $\{x/x \in A_i, \ \forall i \in \mathbf{I}\}$, *notată* $\bigcap_{i\in\mathbf{I}} A_i$, *se numeşte intersecţia tuturor mulţimilor* A_i, $i \in \mathbf{I}$.

Definiţia 3. *Familia de submulţimi* $\{A_i\}_{i\in\mathbf{I}}$ *se numeşte acoperire pentru mulţimea* A *dacă şi numai dacă* $A \subset \bigcup_{i\in\mathbf{I}} A_i$.

Definiţia 4. *Familia de submulţimi* $\{A_i\}_{i\in\mathbf{I}}$ *se numeşte partiţie a mulţimii* A *dacă şi numai dacă* $A = \bigcup_{i\in\mathbf{I}} A_i$ *şi* $A_i \cap A_j = \emptyset$, *pentru orice* $i \neq j$, $i, j \in \mathbf{I}$.

Definiţia 5. *Fie* X *şi* Y *două mulţimi nevide oarecare. Se numeşte produs cartezian al mulţimilor* X *şi* Y *mulţimea* $\{(x, y)/x \in X$ *şi* $y \in Y\}$ *şi se notează prin* $X \times Y$.
Dacă $(x_1, y_1) \in X \times Y$ *şi* $(x_2, y_2) \in X \times Y$, *vom spune că aceste perechi sunt egale şi notăm* $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ *dacă şi numai dacă* $x_1 = x_2$ *şi* $y_1 = y_2$.

Prin definiţie

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n := \{(x_1, x_2, ..., x_n)/x_i \in X_i, i = 1, ..., n\}.$$

Dacă $X_1 = X_2 = ... = X_n = X$, atunci convenim asupra notaţiei

$$X^n := X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n)/x_i \in X, i = 1, ..., n\}.$$

Definiţia 6. *Fie* X *şi* Y *două mulţimi nevide şi* $G \subset X \times Y$, $G \neq \emptyset$. *Tripletul* $\rho := (X, Y, G)$ *se numeşte relaţie.*
Dacă $(x, y) \in G$, *atunci notăm* $x\rho y$ *şi spunem că* x *este în relaţia* ρ *cu* y.

Definiţia 7. *Fie* $\rho = (X, Y, G)$ *o relaţie.*
Mulţimea $\{x \in X/\exists y \in Y$ *a.î.* $(x, y) \in G\}$ *se numeşte domeniul relaţiei* ρ *şi se notează prin* $D(\rho)$.
Mulţimea $\{y \in Y/\exists x \in X$ *a.î.* $(x, y) \in G\}$ *se numeşte codomeniul relaţiei* ρ *şi se notează prin* $Im(\rho)$.

Fie $\rho = (X, Y, G)$ o relaţie. Notăm $G^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X/(x, y) \in G\}$.

Definiţia 8. *Tripletul* (Y, X, G^{-1}) *se notează prin* ρ^{-1} *şi se numeşte inversa relaţiei* ρ.

Definiţia 9. *Fie* $\rho_1 = (X, Y, G_1)$, $\rho_2 = (Y, Z, G_2)$ *două relaţii astfel încât* $Im(\rho_1) \subset D(\rho_2)$. *Relaţia* $\rho = (X, Z, G)$ *unde*

$$G = \{(x, z) \in X \times Z / \exists y \in Y \text{ a.î. } (x, y) \in G_1 \wedge (y, z) \in G_2\}$$

se numeşte compusa relaţiilor ρ_2 *şi* ρ_1 *şi se notează* $\rho = \rho_2 \circ \rho_1$.

Definiţia 10. *Fie* X *o mulţime nevidă. Mulţimea* $\Delta_X := \{(x, x)/x \in X\}$ *se numeşte diagonala produsului cartezian* $X \times X$, *iar relaţia* $1_X := (X, X, \Delta_X)$ *se numeşte relaţia identitate pe* X.

Definiţia 11. *Fie* X *o mulţime nevidă şi* $\rho = (X, X, G)$ *o relaţie pe* X.

Relaţia ρ *se numeşte reflexivă dacă şi numai dacă* $\Delta_X \subset G$.

Relaţia ρ *se numeşte simetrică dacă şi numai dacă* $G^{-1} = G$.

Relaţia ρ *se numeşte antisimetrică dacă şi numai dacă* $G \cap G^{-1} = \Delta_X$.

Relaţia ρ *se numeşte tranzitivă dacă şi numai dacă* $(x, y) \in X$ *şi* $(y, z) \in G \Rightarrow (x, z) \in G$.

Relaţia ρ *se numeşte totală dacă şi numai dacă* $\forall x, y \in X$ *avem* $(x, y) \in G$ *sau* $(y.x) \in G$.

Definiţia 12. *Fie* X *o mulţime nevidă şi* $\rho = (X, X, G)$ *o relaţie pe* X. *Dacă* ρ *este reflexivă, simetrică şi tranzitivă, atunci* ρ *se numeşte relaţie de echivalenţă.*

Definiţia 13. *Fie* X *o mulţime nevidă,* $\rho = (X, X, G)$ *o relaţie de echivalenţă pe* X *şi* $x \in X$ *un punct arbitrar.*

Mulţimea $\{u \in X/(x, u) \in G\}$ *se numeşte clasa de echivalenţă a elementului* x *în raport cu* ρ *şi se notează prin* $\widehat{x}$.

Definiţia 14. *Mulţimea claselor de echivalenţă determinate de relaţia* $\rho = (X, X, G)$ *pe* X *se numeşte* **mulţime cât** *şi se notează prin* $X|_\rho$.

Definiţia 15. *Fie* X *o mulţime nevidă şi* $\rho = (X, X, G)$ *o relaţie pe* X. *Dacă relaţia* ρ *este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă, atunci* ρ *se numeşte relaţie de ordine pe* X.

Definiţia 16. *Fie* X *şi* $\rho = (X, X, G)$ *o relaţie de ordine pe* X. *Perechea* (X, ρ) *se numeşte mulţime ordonată.*

Definiţia 17. *Mulţimea ordonată* (X, ρ) *se numeşte total ordonată dacă şi numai dacă relaţia de ordine este totală.*

Definiţia 18. *Fie* (X, ρ) *o mulţime ordonată şi* $\emptyset \neq A \subset X$. *Un element* $\beta \in X$ *se numeţe* **majorant** *pentru mulţimea* A *dacă şi numai dacă* $x\rho\beta$, $\forall x \in A$. *În acest caz mulţimea* A *se numeşte* **majorată**.

Un element $\alpha \in X$ *se numeşte* **minorant** *pentru mulţimea* A *dacă şi numai dacă* $\alpha\rho x$, $\forall x \in A$. *În acest caz spunem că* A *este* **minorată**.

Definiţia 19. *Fie* (X, ρ) *o mulţime ordonată. O submulţime* $\emptyset \neq A \subset X$ *se numeşte mulţime* **mărginită** *dacă şi numai dacă este în acelaşi timp majorată şi minorată.*

Definiţia 20. *Fie (X, ρ) o mulţime ordonată şi $\emptyset \neq A \subset X$.*

Dacă α este un minorat pentru A şi $\alpha \in A$, atunci α se numeşte **cel mai mic element al mulţimii** *A şi-l vom nota* $\min A$.

Dacă β este un majorant pentru A şi $\beta \in A$, atunci β se numeşte **cel mai mare element al mulţimii** *A şi-l vom nota* $\max A$.

Definiţia 21. *Fie (X, ρ) o mulţime ordonată şi $\emptyset \neq A \subset X$.*

Dacă mulţimea A este majorată şi există cel mai mic majorant $M \in X$, atunci elementul M se numeşte **marginea superioară** *a mulţimii A şi se notează* $\sup A$ *sau* $\bigvee\limits_{x \in A} x$.

Dacă mulţimea A este minorată şi există cel mai mare minorant $m \in X$, atunci elementul m se numeşte **marginea inferioară** *a mulţimii A şi se notează* $\inf A$ *sau* $\bigwedge\limits_{x \in A} x$.

Definiţia 22. *O mulţime ordonată $(X.\rho)$ se numeşte* **relativ completă** (*sau* **complet ordonată**) *dacă şi numai dacă pentru orice $A \subset X$ minorată există* $\inf A$ *şi pentru orice $A \subset X$ majorată există* $\sup A$.

Definiţia 23. *Fie X şi Y două mulţimi nevide şi $\emptyset \neq G \subset X \times Y$. Relaţia $f = (X, Y, G)$ se numeşte funcţie (aplicaţie, operator) definită pe X şi cu valori în Y dacă şi numai dacă:*

i) $\mathcal{D}(f) = X$,

ii) pentru orice $x \in X$, din $(x, y) \in G$ şi $(x, y') \in G \Rightarrow y = y'$.

Elementul unic y cu proprietatea că $(x, y) \in G$ se numeşte valoarea funcţiei f în punctul x (sau imaginea lui x prin f) şi va fi notat prin $f(x)$.

Ţinând seama de această notaţie, mulţimea G se va scrie astfel:

$$G = \{(x, f(x))/x \in X\}$$

şi va fi numită **graficul funcţiei** f.

Dacă $f = (X, Y, G)$ este o funcţie, vom adopta notaţia $f : X \to Y$.

Definiţia 24. *Funcţiile $f : X \to Y$ şi $g : U \to V$ se numesc egale dacă şi numai dacă $X = U$, $Y = V$ şi $f(x) = g(x)$, $\forall x \in X = U$.*

Fie $f : X \to Y$ o funcţie şi $\emptyset \neq A \subset X$.

Definiţia 25. *Funcţia $g : A \to Y$, $g(x) := f(x)$, $\forall x \in A$ se numeşte restricţia funcţiei f la mulţimea A şi se notează prin $f|_A$.*

Definiţia 26. *Fie $f : X \to Y$ o funcţie, $A \subset X$ şi $B \subset Y$.*

Mulţimea $\{y \in Y/\exists x \in A$ a.î. $y = f(x)\}$, notată prin $f(A)$, se numeşte imaginea mulţimii A prin funcţia f.

Mulţimea $\{x \in X/\exists y \in B$ a. î. $y = f(x)\}$, notată prin $f^{-1}(B)$, se numeşte preimaginea mulţimii B prin funcţia f sau imaginea reciprocă a mulţimii B prin funcţia f.

Definiţia 27. *Fie* $X \neq \emptyset \neq Y$ *şi* $f : X \to Y$ *o funcţie. Între mulţimile de părţi* $\mathcal{P}(X($ *şi* $\mathcal{P}(Y)$ *definim funcţiile:*

$f_* : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y), \quad f_*(A) = f(A) = \{y \in Y / \exists x \in A$ *astfel încât* $y = f(x)\}$ $\big($*imaginea* (*directă*) *a mulţimii* A *prin funcţia* f.$\big)$

$f^* : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X), \quad f^*(B) = f^{-1}(B) = \{x \in X / \exists y \in B$ *astfel încât* $y = f(x)\}$ $\big($*preimaginea sau imaginea reciprocă a mulţimii* B *prin funcţia* f.$\big)$

Definiţia 28. *Funcţia* $f : X \to Y$ *se numeşte injectivă sau injecţie dacă şi numai dacă pentru orice* $x_1,\ x_2 \in X,\ \ x_1 \neq x_2$ *avem* $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definiţia 29. *Funcţia* $f : X \to Y$ *se numeşte surjectivš sau surjecţie dacă şi numai dacă* $Im(f) = Y$.

Definiţia 30. *Funcţia* $f : X \to Y$ *se numeşte bijectivă sau bijecţie dacă şi numai dacă este injectivă şi surjectivă.*

Definiţia 31. *Fie* $f : X \to Y$ *o funcţie. Funcţia* f *se numeşte inversabilă dacă şi numai dacă există o funcţie* $g : Y \to X$ *astfel încât:*

$$g \circ f = 1_X \ \text{ şi } \ f \circ g = 1_Y. \tag{$*$}$$

Definiţia 32. *Dacă funcţia* $f : X \to Y$ *este inversabilă, atunci funcţia unică* $g : Y \to X$ *care satisface relaţiile* $(*)$ *se numeşte inversa funcţiei* f *şi se notează prin* f^{-1}; $g = f^{-1}$.

Definiţia 33. *Fie* A *şi* B *două mulţimi oarecare. Ele se numesc echipotente*[1] (*echivalente sau că au aceeaşi putere*) *dacă şi numai dacă există o aplicaţie bijectivă* $f : A \to B$.

Definiţia 34. *Mulţimea* A *se numeşte numărabilă dacă şi numai dacă ea este echipotentă cu mulţimea numerelor naturale* $\mathbb{N}$.

O mulţime care este finită sau numărabilă se numeşte cel mult numărabilă.

Definiţia 35. *Fie* $(X, \rho), (Y, \rho_1)$ *două mulţimi ordonate şi* $f : X \to Y$. *Aplicaţia* f *se numeşte crescătoare dacă şi numai dacă*

$$\forall x, x' \in X \text{ cu } x\rho x' \Rightarrow f(x)\rho_1 f(x').$$

Aplicaţia f *se numeşte strict crescătoare dacă şi numai dacă*

$$\forall x, x \in X \text{ cu } x\rho x' \text{ şi } x \neq x' \Rightarrow f(x)\rho_1 f(x') \text{ şi } f(x) \neq f(x').$$

[1]Sergiu Vasilache *Elemente de teoria mulţimilor şi structuri algebrice, pag. 77*

EXERCIŢII

§1.1. Operaţii cu mulţimi

Fie A, B, C trei mulţimi oarecare. Să se arate că:

1°.1 $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C \ \wedge \ A \cap C \subset B \cap C.$

⌈**Soluţie:** Dacă $A \cup C = \emptyset$, incluziunea este adevărată. Presupunem că $A \cup C \neq \emptyset$. $x \in A \cup C \Rightarrow (x \in A \vee x \in C) \Rightarrow (x \in B \vee x \in C) \Rightarrow x \in B \cup C$. Deci $A \cup C \subset B \cup C$. Incluziunea următoare se demonstrează analog.⌋

1°.2 $A \cap B \subset A \subset A \cup B \ \wedge \ A \cap B \subset B \subset A \cup B.$

⌈**Soluţie:** Rezultă din definiţii.⌋

1°.3 $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset.$

⌈**Soluţie:** Presupunem că $A \subset B$. Din exerciţiul precedent, avem $B \subset A \cup B$. Fie $x \in A \cup B \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in B$. Deci $A \cup B \subset B$. Prin urmare $A \cup B = B$. Presupunem că $A \cup B = B$. Cum $A \subset A \cup B$, rezultă că $A \subset B$. Analog se demonstrează şi următoarele echivalenţe.⌋

1°.4 $A \subset B \ \wedge \ B \subset C \Rightarrow A \subset C.$

⌈**Soluţie:** Presupunem $A \neq \emptyset$. $x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C$. Deci $A \subset C$.⌋

1°.5 $A \subset B \ \wedge \ A \subset C \Rightarrow A \subset B \cap C.$

⌈**Soluţie:** Presupunem $A \neq \emptyset$. $x \in A \Rightarrow (x \in B \wedge x \in C) \Rightarrow x \in B \cap C$, adică $A \subset B \cap C$.⌋

1°.6 $A \subset C \ \wedge \ B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C.$

⌈**Soluţie:** Fie $x \in A \cup B \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in C$. Deci $A \cup B \subset C$.⌋

1°.7 $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B.$

⌈**Soluţie:** Presupunem că $A \setminus (A \setminus B) \neq \emptyset$. $x \in A \setminus (A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A \cap B$. Deci $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.⌋

1°.8 $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C.$

⌈**Soluţie:** Presupunem că $A \cap (B \setminus C) \neq \emptyset$. $x \in A \cap (B \setminus C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B \setminus C) \Leftrightarrow [x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C)] \Leftrightarrow [(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C] \Leftrightarrow (x \in A \cap B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \setminus C$, adică $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.⌋

1°.9 $A \cup B = A \cup (B \setminus A) = B \cup (A \setminus B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B).$

⌈**Soluţie:** $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow [x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin A)] \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B \setminus A) \Leftrightarrow x \in A \cup (B \setminus A)$. A doua egalitate rezultă din simetrie.⌋

1°.10 $A \cup (A \cap B) = A.$

⌈**Soluţie:** Sunt adevărate incluziunile $A \subset A \cup (A \cap B)$ şi $A \cap B \subset A \Rightarrow A \cup (A \cap B) \subset A$. Deci $A = A \cup (A \cap B)$.⌋

1°.11 $A \cap (A \cup B) = A.$

⌈**Soluţie:** Incluziunea $A \cap (A \cup B) \subset A$ este evidentă. Pe de altă parte $A \subset A$ şi $A \subset A \cup B \Rightarrow A \subset A \cap (A \cup B)$. Deci egalitatea.⌋

1°.12 $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B.$

⌈**Soluţie:** Sunt evidente incluziunile $A \cap B \subset A(B) \subset A \cup B$ şi ţinând seama de ipoteză, urmează $A \cap B = A\ (B)\ = A \cup B$. Deci $A = B$.⌋

Fie $X \neq \emptyset, A, B, C \in \mathcal{P}(X)$. Sunt adevărate afirmaţiile:

1°.13 $\complement(\complement A) = A$.

⌈**Soluţie:** $x \in A \Leftrightarrow x \notin \complement A \Leftrightarrow x \in \complement(\complement A)$. Prin urmare $A = \complement(\complement A)$.⌋

1°.14 $A \subset B \Leftrightarrow \complement A \supset \complement B$.

⌈**Soluţie:** $x \in \complement A \Leftrightarrow x \notin A \Rightarrow x \notin B \Leftrightarrow x \in \complement B$. Deci $\complement A \subset \complement B$.⌋

1°.15 $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \complement B \Leftrightarrow B \subset \complement A$.

⌈**Soluţie:** Fie $x \in A \overset{ip.}{\Rightarrow} x \notin B \Leftrightarrow x \in \complement B$. Deci $A \subset \complement B$.⌋

1°.16 $B \cup \complement A = X \quad \wedge \quad B \cap \complement A = \emptyset \Rightarrow A = B$.

⌈**Soluţie:** Avem: $A = A \cap X = A \cap (B \cup \complement A) = (A \cap B) \cup (A \cap \complement A) = A \cap B$ şi $A = A \cup \emptyset = A \cup (B \cap \complement A) = (A \cup B) \cap (A \cup \complement A) = A \cup B$. Deci $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$.⌋

1°.17 $\complement(A \cup B) = (\complement A) \cap (\complement B)$.

⌈**Soluţie:** $x \in \complement(A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow (x \in \complement A \wedge x \in \complement B) \Leftrightarrow x \in (\complement A) \cap (\complement B)$. Deci $\complement(A \cup B) = (\complement A) \cap (\complement B)$.⌋

1°.18 $\complement(A \cap B) = (\complement A) \cup (\complement B)$.

⌈**Soluţie:** $x \in \complement(A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A \vee x \notin B) \Leftrightarrow (x \in \complement A \vee x \in \complement B) \Leftrightarrow x \in (\complement A) \cup (\complement B)$. Deci $\complement(A \cap B) = (\complement A) \cup (\complement B)$.⌋

Fie $\mathbf{I} \neq \emptyset$ o familie de indici şi $A_i \in \mathcal{P}(X)$, $\forall i \in \mathbf{I}$. Atunci:

1°.19 $\bigcup\limits_{i \in \mathbf{J}} A_i \subset \bigcup\limits_{i \in \mathbf{I}} A_i$, $\forall \mathbf{J} \subset \mathbf{I}$.

⌈**Soluţie:** $x \in \bigcup\limits_{i \in J} A_i \Leftrightarrow (\exists i_0 \in J$ a. î. $x \in A_{i_0}) \overset{ip.}{\Rightarrow} (\exists i_0 \in I$ a. î. $x \in A_{i_0}) \Rightarrow x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$. Deci $\bigcup\limits_{i \in J} A_i \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.⌋

1°.20 $\bigcap\limits_{i \in \mathbf{I}} A_i \subset \bigcap\limits_{i \in \mathbf{J}} A_i$, $\forall \mathbf{J} \subset \mathbf{I}$.

⌈**Soluţie:** $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (x \in A_i, \forall i \in I) \overset{ip.}{\Rightarrow} (x \in A_i, \forall i \in J) \Rightarrow x \in \bigcap\limits_{i \in J} A_i$. Deci $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \subset \bigcap\limits_{i \in J} A_i$.⌋

1°.21 $\complement(\bigcup\limits_{i \in \mathbf{I}} A_i) = \bigcap\limits_{i \in \mathbf{I}} (\complement A_i)$.

⌈**Soluţie:** $x \in \complement\Big(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\Big) \Leftrightarrow x \notin \bigcup\limits_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (x \notin A_i, \forall i \in I) \Leftrightarrow (x \in \complement A_i, \forall i \in I) \Leftrightarrow x \in \bigcap\limits_{i \in I} \complement A_i$. Prin urmare $\complement\Big(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\Big) = \bigcap\limits_{i \in I} \complement A_i$.⌋

1°.22 $\complement(\bigcap\limits_{i \in \mathbf{I}} A_i) = \bigcup\limits_{i \in \mathbf{I}} (\complement A_i)$.

⌈**Soluţie:** $x \in \complement(\bigcap\limits_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow x \notin \bigcap\limits_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\exists i_0 \in I$ a. î. $x \notin A_{i_0}) \Leftrightarrow (\exists i_0 \in I$ a. î. $x \in \complement A_{i_0}) \Leftrightarrow x \in \bigcup\limits_{i \in I} \complement A_i$. Deci $\complement(\bigcap\limits_{i \in I} A_i) = \bigcup\limits_{i \in I} \complement A_i$.⌋

1°.23 Fie X şi Y două mulţimi. Atunci $X \times Y = \emptyset \Rightarrow (X = \emptyset$ sau $Y = \emptyset)$.

⌈**Soluţie:** $(\Rightarrow)$ Presupunem că $X \times Y = \emptyset$. Să admitem că $X \neq \emptyset$ şi $Y \neq \emptyset$. Fie $x \in X$ şi $y \in Y \Rightarrow (x, y) \in X \times Y$, ceea ce contrezice ipoteza. Deci $X = \emptyset$ şi $Y = \emptyset$. $(\Leftarrow)$ Presupunem că $X = \emptyset$

şi $Y = \emptyset$. Să admitem că $X \times Y \neq \emptyset$. $(x, y) \in X \times Y \Rightarrow (x \in X \wedge y \in Y)$, ceea ce contrazice ipoteza. Aşadar $X \times Y = \emptyset$.$\rfloor$

1°.24 Fie $X \neq \emptyset \neq Y$. Atunci $X \times Y = Y \times X \Leftrightarrow Y = X$.

$\lceil$**Soluţie:** $(\Rightarrow)$ Fie $x \in X$. Atunci $\exists y^\circ \in Y$ astfel încât $(x, y^\circ) \in X \times Y = Y \times X \Rightarrow x \in Y$. Deci $X \subset Y$. Analog se arată că $Y \subset X$. Prin urmare $X = Y$. $(\Leftarrow)$ Evidentă.$\rfloor$

1°.25 $X \subset X' \ \wedge \ Y \subset Y' \Rightarrow X \times Y \subset X' \times Y'$.

$\lceil$**Soluţie:** $(x, y) \in X \times Y \Rightarrow (x \in X \wedge y \in Y) \overset{ip.}{\Rightarrow} (x \in X' \wedge y \in Y') \Rightarrow (x, y) \in X' \times Y'$. Deci $X \times Y \subset X' \times Y'$.$\rfloor$

1°.26 $X \times Y \neq \emptyset \ \ \wedge \ \ X \times Y \subset X' \times Y' \Rightarrow (X \subset X' \ \wedge \ Y \subset Y')$.

$\lceil$**Soluţie:** Fie $x \in X \wedge y \in Y \Rightarrow (x, y) \in X \times Y \overset{ip.}{\Rightarrow} (x, y) \in X' \times Y' \Rightarrow (x \in X' \wedge y \in Y')$. Deci $X \subset X' \wedge Y \subset Y'$.$\rfloor$

Fie $X \neq \emptyset \neq Y$, $X' \neq \emptyset \neq Y'$. Sunt adevărate afirmaţiile:

1°.27 $(X \times Y) \cap (X' \times Y') = (X \cap X') \times (Y \cap Y')$.

$\lceil$**Soluţie:** $(x, y) \in (X \times Y) \cap (X' \times Y') \Leftrightarrow [(x, y) \in X \times Y \wedge (x, y) \in X' \times Y'] \Leftrightarrow (x \in X \wedge y \in Y) \wedge (x \in X' \wedge y \in Y') \Leftrightarrow (x \in X \cap X' \wedge y \in Y \cap Y') \Leftrightarrow (x, y) \in (X \cap X') \times (Y \cap Y')$. Aşadar $(X \times Y) \cap (X' \times Y') = (X \cap X') \times (Y \cap Y')$.$\rfloor$

1°.28 $(X \times Y) \cup (X' \times Y') \subset (X \cup X') \times (Y \cup Y')$.

$\lceil$**Soluţie:** $(x, y) \in (X \times Y) \cup (X' \times Y') \Rightarrow [(x, y) \in X \times Y \vee (x, y) \in X' \times Y'] \Rightarrow (x \in X \wedge y \in Y) \vee (x \in X' \wedge y \in Y') \Rightarrow (x \in X \cup X' \wedge y \in Y \cup Y') \Rightarrow (x, y) \in (X \cup X') \times (Y \cup Y')$. Deci $(X \times Y) \cup (X' \times Y') \subset (X \cup X') \times (Y \cup Y')$.$\rfloor$

1°.29 $X \times (Y \cup Y') = (X \times Y) \cup (X \times Y')$.

$\lceil$**Soluţie:** $(x, y) \in X \times (Y \cup Y') \Leftrightarrow (x \in X \wedge y \in Y \cup Y') \Leftrightarrow [x \in X \wedge (y \in Y \vee y \in Y')] \Leftrightarrow [(x \in X \wedge y \in Y) \vee (x \in X \wedge y \in Y')] \Leftrightarrow [(x, y) \in X \times Y \vee (x, y) \in X \times Y'] \Leftrightarrow (x, y) \in (X \times Y) \cup (X \times Y')$. Urmează că $X \times (Y \cup Y') = (X \times Y) \cup (X \times Y')$.$\rfloor$

1°.30 $X \times (Y \cap Y') = (X \times Y) \cap (X \times Y')$.

$\lceil$**Soluţie:** $(x, y) \in X \times (Y \cap Y') \Leftrightarrow (x \in X \wedge y \in Y \cap Y') \Leftrightarrow [x \in X \wedge (y \in Y \wedge y \in Y')] \Leftrightarrow [(x \in X \wedge y \in Y) \wedge (x \in X \wedge y \in Y')] \Leftrightarrow [(x, y) \in X \times Y \wedge (x, y) \in X \times Y'] \Leftrightarrow (x, y) \in (X \times Y) \cap (X \times Y')$. Aşadar $X \times (Y \cap Y') = (X \times Y) \cap (X \times Y')$.$\rfloor$

1°.31 $(X \setminus X') \times Y = (X \times Y) \setminus (X' \times Y)$.

$\lceil$**Soluţie:** $(x, y) \in (X \setminus X') \times Y \Leftrightarrow (x \in X \setminus X' \wedge y \in Y) \Leftrightarrow [(x \in X \wedge x \notin X') \wedge y \in Y] \Leftrightarrow [(x \in X \wedge y \in Y) \wedge (x \notin X \wedge y \in Y)] \Leftrightarrow [(x, y) \in X \times Y \wedge (x, y) \notin X' \times Y] \Leftrightarrow (x, y) \in (X \times Y) \setminus (X' \times Y)$. Deci egalitatea.$\rfloor$

1°.32 $X \times (Y \setminus Y') = (X \times Y) \setminus (X \times Y')$.

$\lceil$**Soluţie:** Se face acelaşi raţionamet ca la exerciţiul precedent.$\rfloor$

1°.33 $\left(\bigcap\limits_{i \in \mathbf{I}} X_i\right) \times \left(\bigcap\limits_{i \in \mathbf{I}} Y_i\right) = \bigcap\limits_{i \in \mathbf{I}} \left(X_i \times Y_i\right)$.

$\lceil$**Soluţie:** $(x, y) \in \left(\bigcap\limits_{i \in I} X_i\right) \times \left(\bigcap\limits_{i \in I} Y_i\right) \Leftrightarrow \left(x \in \bigcap\limits_{i \in I} X_i \wedge y \in \bigcap\limits_{i \in I} Y_i\right) \Leftrightarrow \left[x \in X_i \ \wedge \ y \in Y_i, \forall i \in I\right] \Leftrightarrow [(x, y) \in X_i \times Y_i, \ \forall i \in I] \Leftrightarrow (x, y) \in \bigcap\limits_{i \in I} X_i \times Y_i$.$\rfloor$

1°.34 $\left(\bigcup_{i\in\mathbf{I}} X_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in\mathbf{J}} Y_i\right) = \bigcup_{(i,j)\in\mathbf{I}\times\mathbf{J}} (X_i \times Y_j)$.

⌈**Soluţie:** $(x,y) \in \Big(\bigcup_{i\in I} X_i\Big) \times \Big(\bigcup_{j\in J} Y_j\Big) \Leftrightarrow (x \in \bigcup_{i\in I} X_i \ \wedge \ y \in \bigcup_{j\in J} Y_j) \Leftrightarrow [(\exists i_0 \in I$ a. î. $x \in X_{i_0}) \wedge (\exists j_0 \in J$ a. î. $y \in Y_{j_0})] \Leftrightarrow [\exists (i_0, j_0) \in I \times J$ a. î. $(x,y) \in X_{i_0} \times Y_{j_0}] \Leftrightarrow (x,y) \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} X_i \times Y_j$.⌋

§1.2. Relaţii. Funcţii

2°.1 Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $G_n = \{(z,w)/z, w \in \mathbb{C}, z = w^n\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Să se arate că $\rho = (\mathbb{C}, \mathbb{C}, G_n)$ este o relaţie, dar nu este o funcţie.

⌈**Soluţie:** Se observă că $G_n \neq \emptyset$, deoarece $(1,1) \in G_n$. Prin urmare $\rho = (\mathbb{C}, \mathbb{C}, G_n)$ este o relaţie. Fie $(z,w) \in G_n$, unde $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r > 0$. Considerăm $w' = r\big(\cos(\theta + 2\pi/n) + i\sin(\theta + 2\pi/n)\big) \in \mathbb{C}$. Avem $(w')^n = r^n\big(\cos(n\theta + 2\pi) + i\sin(n\theta + 2\pi)\big) = w^n = z$. Deci $(z,w) \in G_n$ şi $(z,w') \in G_n$, iar $w \neq w'$, de unde rezultă că ρ nu este funcţie.⌋

2°.2 Fie $G = \{(z,w)/z, w \in \mathbb{C}, z = e^w = e^u(\cos v + i\sin v), \ w = u + iv\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Să se arate că $\rho = (\mathbb{C}, \mathbb{C}, G)$ este o relaţie, dar nu este o funcţie.

⌈**Soluţie:** $G \neq \emptyset$, deoarece $(1,0) \in G$. Pentru $w = \ln(r) + i\theta \neq w' = \ln(r) + i(\theta + 2\pi) \in \mathbb{C}$, $r > 0$, avem $e^w = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \big(cos(\theta + 2\pi) + i\sin(\theta + 2\pi)\big) = e^{w'}$. Aşadar, $(z,w) \in G$ şi $(z,w') \in G$, iar $w \neq w'$.⌋

2°.3 Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $G_n = \{(z,w)/z, w \in \mathbb{C}, w = z^n\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Să se arate că $f = (\mathbb{C}, \mathbb{C}, G_n)$ este o funcţie. Să se precizeze dacă f este injectivă şi surjectivă.

⌈**Soluţie:** Să observăm că $\mathcal{D}(f) = \mathbb{C}$. Fie $z \in \mathbb{C}$. Din $(z,w), (z,w') \in G_n$ găsim $w = z^n = w'$. Deci $f = (\mathbb{C}, \mathbb{C}, G_n)$ este o funcţie. f este o surjecţie, deoarece fiind dat $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, luând $z_0 = \sqrt[n]{r}\big(\cos\dfrac{\theta}{n} + i\sin\dfrac{\theta}{n}\big)$, găsim $(z_0, w) \in G_n$. f nu este injectivă, deoarece pentru $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \neq z' = r\big(\cos(\theta + \dfrac{2\pi}{n}) + i\sin(\theta + \dfrac{2\pi}{n})\big), r > 0$, obţinem $f(z) = f(z')$.⌋

2°.4 Fie $G = \{(z,w)/z = x + iy, w \in \mathbb{C}, \ w = e^x(\cos y + i\sin y)\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Să se arate că $f = (\mathbb{C}, \mathbb{C}, G)$ este o funcţie. Să se precizeze dacă f este injectivă şi surjectivă.

⌈**Soluţie:** $G \neq \emptyset$, deoarece $(0,1) \in G$ şi $\mathcal{D}(f) = \mathbb{C}$. Din $(z,w) \in G$ şi $(z,w') \in G \Rightarrow w' = e^x(\cos y + i\sin y) = w, \ z = x + iy$. Funcţia f nu este injectivă şi nici surjectivă. Pentru $z = x + iy \neq z' = x + i(y + 2\pi)$ avem $f(z) = f(z')$ şi nu există $z \in \mathbb{C}, \ z = x + iy$ pentru care $f(z) = 0$.⌋

2°.5 Fie $f : X \to Y, \ g : Y \to Z$ funcţii bijective. Să se arate că funcţia $h = g \circ f : X \to Z$ este bijectivă şi $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : Z \to X$.

⌈**Soluţie:** Fie $x_1, x_2 \in X$ a. î. $h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \overset{ip.}{\Rightarrow} f(x_1) = f(x_2) \overset{ip.}{\Rightarrow} x_1 = x_2$, adică h este injectivă. Fie $z \in Z$. Ţinând seama că g este surjecţie $\Rightarrow (\exists y \in Y$ a. î. $g(y) = z$. Deoarece f este surjectivă, există $x \in X$ a. î. $y = f(x)$. Prin urmare $g(f(x)) = g(y) = z \ \Leftrightarrow \ h(x) = z$. Aşadar, h este bijectivă. Se verifică uşor egalităţile $(*)$ din definiţia 31 şi deci $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ este inversa funcţiei h.⌋

Fie $f : X \to Y, \ A_1, \ A_2, \ A_i \in \mathcal{P}(X), \ B_1, \ B_2, \ B_i \in \mathcal{P}(Y), \ \forall i \in \mathbf{I}$. Să se arate că:

2°.6 $A_1 \subset A_2 \ \Rightarrow \ f(A_1) \subset f(A_2)$.

⌈**Soluţie:** Fie $y \in f(A_1) \Rightarrow (\exists x \in A_1$ a. î. $y = f(x)) \overset{ip.}{\Rightarrow} (\exists x \in A_2$ a. î. $y = f(x)) \Leftrightarrow y \in f(A_2)$.⌋

2°.7 $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1)) \wedge \big(A_1 = f^{-1}(f(A_1)),\ \forall A_1 \subset X \Leftrightarrow f$ este funcţie injectivă$\big)$.

⌈**Soluţie:** Fie $x \in A_1$. Atunci $y = f(x) \in f(A_1) =: B \Rightarrow x \in f^{-1}(B) = f^{-1}(f(A_1))$, adică incluziunea. Incluziunea este strictă pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $A_1 = [0, \pi/2]$, deoarece $f^{-1}(f(A_1)) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$. Presupunem f injectivă. $x \in f^{-1}(f(A_1)) \Leftrightarrow [existsy \in f(A_1)$ astfel încât $y = f(x)] \Leftrightarrow x \in A_1$ (dacă ar mai exista $x' \in X, x' \neq x$ pentru care $y = f(x')$ se contrazice ipoteza).⌋

2°.8 $f\big(\bigcup\limits_{i\in\mathbf{I}} A_i\big) = \bigcup\limits_{i\in\mathbf{I}} f(A_i)$.

⌈**Soluţie:** $y \in f\Big(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\Big) \Leftrightarrow [\exists x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ a. î. $y = f(x)] \Leftrightarrow [\exists i_0 \in I$ a. î. $x \in A_{i_0} \wedge y = f(x)] \Leftrightarrow [\exists i_0 \in I$ a. î. $y \in f(A_{i_0})] \Leftrightarrow y \in \bigcup\limits_{i\in I} f(A_{i_0})$, de unde urmează egalitatea.⌋

2°.9 $f\big(\bigcap\limits_{i\in\mathbf{I}} A_i\big) \subset \bigcap\limits_{i\in\mathbf{I}} f(A_i) \quad \wedge \quad f\big(\bigcap\limits_{i\in\mathbf{I}} A_i\big) = \bigcap\limits_{i\in\mathbf{I}} f(A_i)$ dacă f este injectivă.

⌈**Soluţie:** $y \in f\Big(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\Big) \Leftrightarrow [\exists x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i$ a. î. $y = f(x)] \Leftrightarrow [\exists x \in A_i,\ \forall i \in I$ a. î. $y = f(x)] \Rightarrow [y \in f(A_i),\ \forall i \in I] \Leftrightarrow y \in \bigcap\limits_{i\in I} f(A_1)$, deci incluziunea. Dacă f este injectivă, atunci implicaţia devine echivalenţă.⌋

2°.10 $B_1 \subset B_2 \ \Rightarrow\ f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

⌈**Soluţie:** $x \in f^{-1}(B_1) \Leftrightarrow [\exists y \in B_1$ a. î. $y = f(x)] \overset{ip.}{\Rightarrow} [\exists y \in B_2$ a. î. $y = f(x)] \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_2)]$.⌋

2°.11 $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1 \quad \wedge \quad f(f^{-1}(B_1)) = B_1$ dacă f este surjectivă sau dacă $B_1 \subset f(X)$.

⌈**Soluţie:** Presupunem $f(f^{-1}(B_1)) \neq \emptyset$. Fie $y \in f(f^{-1}(B_1))$. Există $x \in f^{-1}(B_1)$ astfel încât $y = f(x)$, deci $y \in B_1$. Pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ şi $B_1 = [-1, 1]$ avem $f(f^{-1}(B_1)) = [0, 1]$, deci $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$. Presupunem f surjecţie şi $B_1 \subset f(X)$. Fie $y \in B_1$. Atunci $\exists x \in X$ astfel încât $y = f(x)$. Deci $x \in f^{-1}(B_1)$ şi $y = f(x)$, de unde urmează că $y \in f(f^{-1}(B_1))$, adică $B_1 \subset f(f^{-1}(B_1))$.⌋

2°.12 $f^{-1}\big(\bigcup\limits_{i\in\mathbf{I}} B_i\big) = \bigcup\limits_{i\in\mathbf{I}} f^{-1}(B_i)$.

⌈**Soluţie:** $x \in f^{-1}\Big(\bigcup\limits_{i\in I} B_i\Big) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcup\limits_{i\in I} B_i \Leftrightarrow \big(\exists i_0 \in I$ a. î. $f(x) \in B_{i_0}\big) \Leftrightarrow \big(\exists i_0 \in I$ a. î. $x \in f^{-1}(B_{i_0}\big) \Leftrightarrow x \in \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.⌋

2°.13 $f^{-1}\big(\bigcap\limits_{i\in\mathbf{I}} B_i\big) = \bigcap\limits_{i\in\mathbf{I}} f^{-1}(B_i)$.

⌈**Soluţie:** $x \in f^{-1}\Big(\bigcap\limits_{i\in I} B_i\Big) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap\limits_{i\in I} B_i \Leftrightarrow \big(f(x) \in B_i,\ \forall i \in I\big) \Leftrightarrow \big(x \in f^{-1}(B_i\ \forall i \in I\big) \Leftrightarrow x \in \bigcap\limits_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.⌋

2°.14 $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

⌈**Soluţie:** $x \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \setminus B_2 \Leftrightarrow [f(x) \in B_1$ şi $f(x) \notin B_2] \Leftrightarrow [x \in f^{-1}(B_1)$ şi $x \notin f^{-1}(B_2)] \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.⌋

2°.15 $f^{-1}(\complement B_2) = \complement(f^{-1}(B_2))$.

⌈**Soluţie:** În exerciţiul precedent luăm $B_1 = Y$ şi se ţine seama că $f^{-1}(Y) = X$.⌋

2°.16 $f(A_1 \cap f^{-1}(B_1)) = f(A_1) \cap B_1$.

⌈**Soluţie:** $y \in f(A_1 \cap f^{-1}(B_1)) \Leftrightarrow [\exists x \in A_1 \cap f^{-1}(B_1)$ a. î. $y = f(x)] \Leftrightarrow [\exists x, x \in A_1 \wedge x \in f^{-1}(B_1)$ a. î. $y = f(x)] \Leftrightarrow [y \in f(A_1) \wedge y \in B_1] \Leftrightarrow y \in f(A_1) \cap B_1$.⌋

2°.17 Dacă $g = f|_{A_1}$, atunci $g^{-1}(B_1) = A_1 \cap f^{-1}(B_1)$.

⌈**Soluţie:** $x \in g^{-1}(B_1) \Leftrightarrow [\exists y \in B_1$ a. î. $y = g(x) = f(x)] \Leftrightarrow [x \in A_1 \wedge x \in f^{-1}(B_1)] \Leftrightarrow x \in A_1 \cap f^{-1}(B_1)$.⌋

2°.18 Relaţia $f^{-1} = (Y, X, G^{-1})$ este funcţie $\Leftrightarrow$ $\left(f^{-1} \circ f = 1_X \ \wedge f \circ f^{-1} = 1_Y\right)$.

⌈**Soluţie:** ($\Rightarrow$) Notăm $f^{-1} \circ f = (X, X, H)$, $H = \{(x, x') \in X \times X / \exists y \in Y$ a. î. $(x, y) \in G \wedge (y, x') \in G^{-1}\}$ şi $f \circ f^{-1} = (Y, Y, H_1), H_1 = \{(y, y') \in Y \times Y / \exists x \in X$ a. î, $(y, x) \in G^{-1} \wedge (x, y') \in G.\}$ Atunci $(x, x') \in H \Leftrightarrow [\exists y \in Y$ a. î. $(x, y) \in G \wedge (y, x') \in G^{-1}] \Leftrightarrow [\exists y \in Y$ a. î. $(y, x) \in G^{-1} \wedge (y, x') \in G^{-1} \Leftrightarrow x = x'$. Deci $H = \Delta_X$, adică $f^{-1} \circ f = 1_X$. $(y, y') \in H_1 \Leftrightarrow [\exists x \in X$ a. î. $(y, x) \in G^{-1} \wedge (x, y') \in G] \Leftrightarrow [\exists x \in X$ a. î. $(x, y) \in G \wedge (x, y') \in G] \Leftrightarrow y = y'$. Deci $H_1 = Y$, adică $f \circ f^{-1} = 1_Y$.

($\Leftarrow$) Fie $y \in Y$. Avem $(y, y) \in \Delta_Y = H_1 \Leftrightarrow [\exists x \in X$ a. î. $(y, x) \in G^{-1} \wedge (x, y) \in G]$, adică $\mathcal{D}(f^{-1}) = Y$. Fie $x, x' \in X$ a. î. $(y, x) \in G^{-1} \wedge (y, x') \in G^{-1}$. Atunci $(x, y) \in G \wedge (y, x') \in G^{-1}$, deci $(x, y) \in H = \Delta_X \Leftrightarrow x = x'$. Adică f^{-1} este funcţie.⌋

2°.19 Fie $f : X \to Y$ o funcţie. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) f este injectivă;
(ii) $f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 = x_2$;
(iii) pentru orice $y \in Y$ există cel mult un element $x \in X$ astfel încât $y = f(x)$.

2°.20 Fie $f : X \to Y$ o funcţie. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) f este surjectivă;
(ii) $Y \subset Im(f)$;
(iii) pentru orice $y \in Y$ există cel puţin un element $x \in X$ astfel încât $y = f(x)$.

2°.21 Fie $f : X \to Y$ o funcţie. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) f este injectivă;
(ii) f_* este injectivă;
(iii) f^* este surjectivă.

⌈**Soluţie:** Vom demonstra echivalenţa afirmaţiilor în felul următor $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Fie $f_*(A_1) = f_*(A_2)$, adică $f(A_1) = f(A_2)$, pentru $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$. Vom arăta că $A_1 = A_2$ prin dublă incluziune. Dacă $a \in A_1$ atunci $f(a) \in f(A_1) = f(A_2)$. Aşadar, există $b \in A_2$ astfel încât $f(b) = f(a)$. Cum funcţia f este injectivă, rezultă că $a = b \in A_2$. Prin urmare $A_1 \subset A_2$.

Prin simetrie $A_2 \subset A_1$ şi deci $A_1 = A_2$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Trebuie să demonstrăm că pentru orice $A \in \mathcal{P}(X)$ există $B \in \mathcal{P}(Y)$ astfel încât să avem $A = f^*(B) = f^{-1}(B)$. Fie $A \in \mathcal{P}(X)$. Luăm $B = f(A)$ şi vom demonstra că $A = f^*(B)$. De asemenea, vom dovedi dubla incluziune.

Fie $a \in A$. Atunci $f(a) \in f(A) = B$ şi deci $a \in f^{-1}(B) = f^*(B)$. Aşadar $A \subset f^*(B)$.

Fie acum $a \in f^*(B) = f^{-1}(B)$. Atunci $f(a) \in B = f(A)$ şi deci există $b \in A$ astfel încât $f(b) = f(a)$, adică $f_*(\{a\}) = f_*(\{b\})$. Conform ipotezei (ii) rezultă $\{a\} = \{b\}$ şi deci $a = b \in A$. Aşadar $f^*(B) = f^{-1}(B) \subset A$, iar din dubla incluziune obţinem egalitatea $f^*(B) = f^{-1}(B) = A$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Fie $x_1, x_2 \in X$ cu $x_1 \neq x_2$. Cum f^* este injectivă, există $B \subset Y$ astfel încât $f^*(B) = \{x_1\}$. Rezultă că $f(x_1) \in B$ şi $f(x_2) \notin B$ şi deci $f(x_1) \neq f(x_2)$. Prin urmare funcţia f este injectivă.⌋

2°.22 Fie $f : X \to Y$ o funcţie. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) f este surjectivă;

(ii) f_* este surjectivă;

(iii) f^* este injectivă.

⌈**Soluţie:** Vom arăta echivalenţa celor trei afirmaţii în felul următor: $(i) \Leftrightarrow (ii)$ şi $(i) \Leftrightarrow (iii)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Va trebui să demonstrăm că pentru orice $B \in \mathcal{P}(Y)$, există $A \in \mathcal{P}(X)$ astfel încât $f_*(A) = B$. Într-adevăr, fie $B \subset Y$. Notăm $A = f^{-1}(B) \subset X$. Atunci $f_*(A) = f(A) = f\big(f^{-1}(B)\big) = B$ (pe baza exerciţiului **2°.11**)

$(ii) \Rightarrow (i)$ Fie $y \in Y$. Deoarece f_* este surjectivă, rezultă că $\exists \emptyset \neq A \in \mathcal{P}(X)$ astfel încât $f_*(A) = f(A) = \{y\}$. Deci $\exists x \in A \subset X$ astfel încât $f(x) = y$. Aşadar funcţia f este surjectivă.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Fie $B_1, B_2 \in \mathcal{P}(Y)$ astfel încât $f^*(B_1) = f^*(B_2)$ adică $f^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_2) \Rightarrow f\big(f^{-1}(B_1)\big) = f\big(f^{-1}(B_2)\big)$. Ţinând seama de ipoteză şi exerciţiul **2°.11** rezultă egalitatea $B_1 = B_2$, adică f^* este injectivă.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Vom arăta că dacă f nu este surjectivă, atunci f^* nu este injectivă (adică se face demonstraţia prin reducere la absurd). Presupunem că $\exists y \in Y$ astfel înât $y \notin f(X)$. Dacă notăm $B_1 = f(X)$ şi $B_2 = f(X) \cup \{y\}$, atunci $B_1 \neq B_2$ şi $f^*(B_1) = f^{-1}(B_1) = f^{-1}\big(f(X)\big) = X = f^{-1}(B_2) = f^*(B_2)$ şi deci f^* nu este injectivă, ceea ce contrazice ipoteza.⌋

2°.23 Fie $f : X \to Y$ o funcţie. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) f este injectivă;

(ii) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, pentru orice $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X)$;

(iii) $f\big(\complement A\big) \subset \complement f(A)$, pentru orice $A \in \mathcal{P}(X)$.

⌈**Soluţie:** Vom demonstra echivalenţa afirmaţiilor în felul următor $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ rezultă din exerciţiu **2°.9**.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Fie $A \in \mathcal{P}(X)$. Dacă luăm $A_1 = A$ şi $A_2 = \complement A$, din ipoteză obţinem că $f(A) \cap f(\complement A) = f(A \cap \complement A) = f(\emptyset) = \emptyset$. Aşdar $f(\complement A) \subset \complement f(A)$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Fie $x_1, x_2 \in X$ cu $x_1 \neq x_2$. Dacă se consideră $A = \{x_1\}$, din faptul că $f(\complement A) \subset \complement f(A)$ şi $x_2 \in \complement A$ rezultă că $f(x_2) \in \complement f(A) \;\Rightarrow\; f(x_2) \notin f(A) \;\Rightarrow\; f(x_2) \neq f(x_1)$.⌋

2°.24 Fie $f : X \to Y$ o funcţie. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) f este surjectivă;

(ii) $\complement f(A) \subset f(\complement A)$, pentru orice $A \in \mathcal{P}(X)$.

⌈**Soluţie:** $(i) \Rightarrow (ii)$ Fie $A \in \mathcal{P}(X)$. Pentru că $\complement f(A) \in \mathcal{P}(Y)$, iar din exerciţiul **2°.22** funcţia f_* este surjectivă, rezultă că există $A_1 \in \mathcal{P}(X)$ astfel încât $\complement f(A) = f(A_1)$. Vom arăta că $A_1 \subset \complement A$. Fie $x \in A_1 \Rightarrow f(x) \in f(A_1) = \complement f(A) \Rightarrow f(x) \notin f(A) \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in \complement A$. Aşadar $f(A_1) \subset f\big(\complement A\big) \Rightarrow \complement f(A) \subset f(\complement A)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Fie $y \in Y$. Să considerăm $A = X$. Dacă $y \notin f(A) = f(X)$, atunci $y \in \complement f(A)$ şi folosind ipoteza $y \in f\big(\complement A\big) = f\big(\complement X\big) = f(\emptyset) = \emptyset$, contradicţie. Prin urmare $y \in f(X)$ şi astfel funcţia f este surjectivă.⌋

2°.25 Fie $f : X \to Y$ o funcţie. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) f este injectivă;

(ii) dacă $g, h : Z \to X$ sunt două funcţii astfel încât $f \circ g = f \circ h$, atunci $g = h$.

⌈**Soluţie:** $(i) \Rightarrow (ii)$ Fie $z \in Z$ un element arbitrar. Din $f(g(z)) = (f \circ g)(z) = (f \circ h)(z) = f(h(z))$, ţinând seama de ipoteză, deducem că $g(z) = h(z)$. Deci $g = h$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Fie $x_1, x_2 \in X$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$. Dacă luăm $Z = \{z\}$ (spaţiu format dintr-un singur element) şi definim funcţiile $g, h : Z \to X$ prin egalităţile $g(z) = x_1$ şi $h(z) = x_2$, atunci $f \circ g = f \circ h$. Din ipoteză rezultă că $g = h$ şi deci $x_1 = x_2$, ceea ce arată că funcţia f este injectivă.⌋

2°.26 Fie $f : X \to Y$ o funcţie. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) f este surjectivă;

(ii) dacă $g, h : Y \to Z$ sunt două funcţii astfel încât $g \circ f = h \circ f$, atunci $g = h$.

⌈**Soluţie:** $(i) \Rightarrow (ii)$ Fie $y \in Y$ arbitrar. Deoarece funcţia f este surjectivă, există $x \in X$ astfel încât $f(x) = y$. Fie $g, h : Y \to Z$ astfel încât $g \circ f = h \circ f$. Atunci $g(y) = g\big(f(x)\big) = h\big(f(x)\big) = h(y)$ şi astfel $g = h$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Să presupunem, prin absurd, că funcţia f nu este surjectivă. Există atunci cel puţin un $y_0 \in Y$, astfel încât pentru orice $x \in X$ avem $f(x) \neq y_0$. Să considerăm $Z = \{0, 1\}$ şi definim funcţiile $g, h : Y \to Z$ prin relaţiile:

$$g(y) = 0,\ \forall y \in Y;$$
$$h(y) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } y \in Y \setminus \{y_0\}, \\ 1, \text{ dacă } y = y_0. \end{cases}$$

Deoarece $g(y_0) = 0$ şi $h(y_0) = 1$, rezultă că g şi h sunt diferite între ele. Dar $\big(g \circ f\big)(x) = \big(h \circ f\big)(x)$, pentru orice $x \in X$ şi deci $g \circ f = h \circ f$. Folosind ipoteza rezultă că $g = h$, ceea ce reprezintă contradicţia. Aşadar presupunerea făcută este falsă şi deci funcţia f este surjectivă.⌋

2°.27 Fie $f : X \to Y$ o funcţie. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) f este bijectivă;
(ii) f_* şi f^* sunt injective;
(iii) f_* şi f^* sunt surjective;
(iv) f_* este bijectivă;
(v) f^* este bijectivă;
(vi) $f\big(\complement A\big) = \complement f(A),\ \forall A \in \mathcal{P}(X)$;
(vii) f este inversabilă.

⌈**Soluţie:** Echivalenţa primelor şase afirmaţii rezultă din cele stabilite în problemele **2°.21** - **2°.26**. Rămâne doar să demonstrăm echivalenţa $(i) \Leftrightarrow (vii)$.

$(i) \Rightarrow (vii)$ Dacă funcţia f este bijectivă (din exerciţiile **2°.20** şi **2°.21**), rezultă că pentru orice $y \in Y$, există un element unic $x \in X$ astfel încât $f(x) = y$. Dacă definim $g : Y \to X$ astfel încât $g(y) = x$, unde $y = f(x)$, rezultă că $f \circ g = 1_Y$ şi $g \circ f = 1_X$ adică f este inversabilă.

$(vii) \Rightarrow (i)$ Fie $x_1, x_2 \in X$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$. Aplicând funcţia g (din definiţia inversabilităţii) obţinem că $g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big)$, adică $1_X(x_1) = 1_X(x_2)$, deci $x_1 = x_2$. Aşadar f este injectivă. Fie acum $y \in Y$, atunci $g(y) \in X$ şi $f\big(g(y)\big) = y$, adică funcţia f este surjectivă.⌋

Fie $f : X \to Y$ şi $g : Y \to Z$ două funcţii.

2°.28 Dacă f şi g sunt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă.

⌈**Soluţie:** Fie $x, x' \in X,\ x \neq x'$. Atunci $y = f(x) \neq f(x') = y' \Rightarrow g(f(x)) = g(y) \neq g(y') = g(f(x'))$.⌋

2°.29 Dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă.

⌈**Soluţie:** Fie $x, x' \in X$ a. î. $f(x) = f(x') \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = (g \circ f)(x') \Rightarrow x = x'$.⌋

2°.30 Dacă f şi g sunt surjective, atunci $g \circ f$ este surjectivă.

⌈**Soluţie:** Din ipoteză avem $f(X) = Y \wedge g(Y) = Z \Rightarrow (g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(Y) = Z$.⌋

2°.31 Dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci g este surjectivă.

⌈**Soluţie:** Fie $z \in Z$. Există $x \in X$ a. î. $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$. Notând $y = f(x) \in Y$, atunci $z = g(y)$, deci g este surjecţie.⌋

2°.32 Dacă f şi g sunt bijective, atunci $g \circ f$ este bijectivă.

⌈**Soluţie:** Rezultă din 2°.19 şi 2°.21.⌋

2°.33 Dacă $g \circ f$ este bijectivă, atunci f este injectivă şi g este surjectivă.

⌈**Soluţie:** Rezultă din 2°.20 şi 2°.22.⌋

2°.34 Fie X o mulţime finită şi $f : X \to X$. Să se arate că au loc echivalenţele următoare:

1) f este surjectivă $\Leftrightarrow f$ este injectivă.

2) f este injectivă $\Leftrightarrow f$ este bijectivă.

⌈**Soluţie:** 1) ($\Leftarrow$) Evident că $f(X) \subset X$. Cum însă X este finită, atunci $f(X) = X$. ($\Rightarrow$) Presupunem că $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Atunci $f(X) = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\} = X$. Dacă $\exists x_i, x_j \in X$, $i \neq j$ astfel încât $f(x_i) = f(x_j)$, atunci $f(X)$ va conţine $n-1$ elemente din X, ceea ce contrazice egalitatea $f(X) = X$. Deci f este injectivă. 2) rezultă din 1).⌋

2°.35 Fie X o mulţime finită şi $f, g : X \to X$. Dacă $f \circ g$ este bijectivă, atunci f şi g sunt bijective.

⌈**Soluţie:** Rezultă din exerciţiile 2°.24 şi 2°.25.⌋

2°.36 Fie $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$f(n) = \begin{cases} m, & \text{dacă} \quad n = 2m, \\ m, & \text{dacă} \quad n = 2m-1,\ m \in \mathbb{N}, \end{cases}$$
$$g(n) = \begin{cases} 4m, & \text{dacă} \quad n = 2m, \\ 2(2m-1), & \text{dacă} \quad n = 2m-1, m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Să se arate că $f \circ g = 1_{\mathbb{N}}$ şi $g \circ f \neq 1_{\mathbb{N}}$.

2°.37 Fie $(\mathbb{R}, \leq)$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dacă f este o funcţie strict crescătoare, atunci este injectivă. Afirmaţia reciprocă este adevărată? Să se dea un exemplu de funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijectivă care nu este nici crescătoare şi nici descrescătoare.

⌈**Soluţie:** $x \neq x' \Rightarrow (x < x'$ sau $x' < x) \Rightarrow (f(x) < f(x')$ sau $f(x') < f(x))$. Afirmaţia reciprocă nu este adevărat ; exemplu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{dacă} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ ⌋

2°.38 Fie $X \neq \emptyset$, $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Mulţimile A şi B se numesc echipotente dacă şi numai dacă există o bijecţie $f : A \to B$ şi vom scrie $A \sim B$. Să se arate că relaţia " $\sim$ " este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{P}(X)$.

2°.39 Fie $X \neq \emptyset$ şi $\mathcal{F}(X) := \{f / f : X \to X\}$. Pentru $f, g \in \mathcal{F}(X)$ scriem $f \sim g$ dacă şi numai dacă există $\varphi \in \mathcal{F}(X)$ bijectivă astfel încât să avem $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$. Să se arate că " $\sim$ " este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{F}(X)$.

⌈**Soluţie:** Relaţia este reflexivă ($f \sim f$, se ia $\varphi = 1_X$), simetrică ($f \sim g \Leftrightarrow f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi \Leftrightarrow \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = g \Leftrightarrow g \sim f$) şi tranzitivă $\big((f \sim g \Leftrightarrow f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)$ şi $(g \sim h \Leftrightarrow g = \psi^{-1} \circ h \circ \psi) \Rightarrow f = (\varphi^{-1} \circ \psi^{-1}) \circ h \circ (\psi \circ \varphi) \Rightarrow f \sim h$, deoarece $(\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}\big)$.⌋

2°.40 Fie $G \subset \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$, $G := \{\big((m, n), (m', n')\big) / m + n' = m' + n\}$. Să se arate că $\rho = (\mathbb{N}^2, \mathbb{N}^2, G)$ este o relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{N}^2$, iar $\mathbb{N}^2|_\rho = \mathbb{Z}$.

2°.41 Fie X şi Y mulţimi numărabile. Atunci mulţimile $X \cup Y$ şi $X \times Y$ sunt mulţimi numărabile.

⌈**Soluţie:** Din ipoteză $X = \{x_1, ..., x_n, ...\}$ şi $Y = \{y_1, ..., y_n, ...\}$. Funcţia $f : \mathbb{N} \to X \times Y$, $f(n) = \begin{cases} x_m, & \text{dacă} \quad n = 2m-1, \\ y_m, & \text{dacă} \quad n = 2m, \end{cases}$ $m \in \mathbb{N}$, este surjecţie, iar $X \times Y$ este o mulţime infinită. Funcţia $g : X \times Y \to \mathbb{N}$, $g(x_n, y_m) = 2^n 3^m$ este injectivă, iar $X \times Y$ este infinită, deci este num rabilă.⌋

2°.42 Să se arate că mulţimile $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_-$, $2\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} / n = 2m,\ m \in \mathbb{N}\}$, $2\mathbb{N} - 1 = \{n \in \mathbb{N} / n = 2m - 1,\ m \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}^2$ şi $\mathbb{Q}$ sunt numărabile.

2°.43 Fie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de mulţimi numărabile. Atunci mulţimea $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ este numărabilă.

⌈**Soluţie:** Din ipoteză, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : \mathbb{N} \to X_n$ este bijecţie. Aplicaţia $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $f(n,m) = \varphi_n(m)$ este o surjecţie. Cum $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ este infinită, rezultă că este numărabilă.⌋

2°.44 Să se arate că mulţimile $]0,1[$, $]a,b[$ $(a < b)$ şi $\mathbb{R}$ sunt echipotente, dar nu sunt numărabile.

⌈**Soluţie:** Funcţia $\varphi :]0,1[\to]a,b[$, $\varphi(t) = a + t(b-a)$ este o bijecţie. Deci mulţimile $]0,1[$ şi $]a,b[$ sunt echipotente. Analog, aplicaţia $\psi : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$, $\psi(x) = \operatorname{arctg} x$ este bijecţie. Deci $\mathbb{R}$ şi $]-\pi/2,\pi/2[$ sunt mulţimi echipotente.⌋

Definiţia 36. *Fie* $X \neq \emptyset$ *şi* $A \in \mathcal{P}(X)$. *Funcţia* $\chi_A : X \to \mathbb{R}$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \textit{dacă} \quad x \in A, \\ 0, & \textit{dacă} \quad x \notin A, \end{cases}$$

se numeşte **funcţia caracteristică a mulţimii** A.

Să se arate că:

2°.45 $\chi_\emptyset(\cdot) = 0(\cdot)$ $(\chi_\emptyset(x) = 0,\ \forall x \in X)$.

2°.46 $\chi_X(\cdot) = 1$ $(\chi_X(x) = 1,\ \forall x \in X)$.

2°.47 $\chi_{\complement A}(\cdot) = 1 - \chi_A(\cdot)$.

2°.48 $A \subset B \Rightarrow \chi_A(\cdot) \leq \chi_B(\cdot)$ şi $\big[A \subset B,\ A \neq B\big] \Leftrightarrow \chi_A(\cdot) < \chi_B(\cdot)$[2].

2°.49 $A = B \Leftrightarrow \chi_A(\cdot) = \chi_B(\cdot)$.

2°.50 $\chi_{A\cap B}(\cdot) = \chi_A(\cdot)\cdot\chi_B(\cdot)$.

2°.51 $\chi_{\bigcap\limits_{i\in\mathbf{I}} A_i}(\cdot) = \prod\limits_{i\in\mathbf{I}} \chi_{A_i}(\cdot)$.

2°.52 $\chi_{A\setminus B}(\cdot) = \chi_A(\cdot)\big(1 - \chi_B(\cdot)\big) = \chi_A(\cdot) - \chi_{A\cap B}(\cdot)$.

2°.53 $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A(\cdot)\cdot\chi_B(\cdot) = \chi_A(\cdot)$.

2°.54 $\chi_{A\cup B}(\cdot) = \chi_A(\cdot) + \chi_B(\cdot) - \chi_{A\cap B}(\cdot) = \chi_A(\cdot) + \chi_B(\cdot) - \chi_A(\cdot)\cdot\chi_B(\cdot)$.

⌈**Soluţie:** Fie $x \in X$.

Dacă $x \notin A \cup B$, atunci $\chi_A(x) = \chi_B(x) = \chi_{A\cap B}(x) = 0$ şi egalityatea din enunţ este evident adevărată.

Dacă $x \in A \cup B$ atunci deosebim trei cazuri: (i) $x \in A$ şi $x \in B$, (ii) $x \in A$ şi $x \notin B$, (iii) $x \notin A$ şi $x \in B$. În toate cazurile este verificată egalitatea din enunţ.⌋

2°.55 Dacă $A \cap B = \emptyset$ atunci $\chi_{A\cup B}(\cdot) = \chi_A(\cdot) + \chi_B(\cdot)$.

2°.56 $\chi_{A\cup B\cup C}(\cdot) = \chi_A(\cdot) + \chi_B(\cdot) + \chi_C(\cdot) - \chi_{A\cap B}(\cdot) - \chi_{A\cap C}(\cdot) - \chi_{B\cap C}(\cdot) + \chi_{A\cap B\cap C}(\cdot) = \chi_A(\cdot) + \chi_B(\cdot) + \chi_C(\cdot) - \chi_A(\cdot)\cdot\chi_B(\cdot) - \chi_A(\cdot)\cdot\chi_C(\cdot) - \chi_B(\cdot)\cdot\chi_C(\cdot) + \chi_A(\cdot)\cdot\chi_B(\cdot)\cdot\chi_B(\cdot)$.

⌈**Soluţie:** $\chi_{A\cup B\cup C}(\cdot) = \chi_{A\cup(B\cup C)}(\cdot) = \chi_A(\cdot) + \chi_{B\cup C}(\cdot) - \chi_A(\cdot)\cdot\chi_{B\cup C}(\cdot) = \chi_A(\cdot) + \chi_B(\cdot) + \chi_C(\cdot) - \chi_(B)\cdot\chi_C(\cdot) - \chi_A(\cdot)\cdot\big[\chi_B(\cdot) + \chi_C(\cdot) - \chi_B(\cdot)\cdot\chi_C(\cdot)\big] = \chi_A(\cdot) + \chi_B(\cdot) + \chi_C(\cdot) - \chi_A(\cdot)\cdot\chi_B(\cdot) - \chi_B(\cdot)\cdot\chi_C(\cdot) - \chi_C(\cdot)\cdot\chi_A(\cdot) + \chi_A(\cdot)\cdot\chi_B(\cdot)\cdot\chi_C(\cdot)$.⌋

---

[2] $\chi_A(\cdot) < \chi_B(\cdot) \Leftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x)$, $\forall x \in X$ şi $\exists x_0 \in X$ astfel încât $\chi_A(x_0) < \chi_B(x_0)$

2°.57 Dacă $A, B, C \subset X$ sunt disjuncte două câte două, atunci $\chi_{A\cup B\cup C}(\cdot) = \chi_A(\cdot) + \chi_B(\cdot) + \chi_C(\cdot)$

2°.58 Fie $A_1, \ldots, A_n \subset X$. Atunci

$$\chi_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}(\cdot) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(\cdot) - \sum_{1\le i<j\le n} \chi_{A_i}(\cdot)\cdot\chi_{A_j}(\cdot) +$$

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n} \chi_{A_i}(\cdot)\cdot\chi_{A_j}(\cdot)\cdot\chi_{A_k}(\cdot) - \ldots + (-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\chi_{A_k}(\cdot).$$

2°.59 Dacă $A_1, \ldots, A_n \subset X$ sunt disjuncte două câte două, atunci

$$\chi_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k}(\cdot) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}(\cdot).$$

⌈**I:** Rezolvarea acestui exerciţiu se face uşiør prin inducţie matematică.⌋

Folosind proprietăţile funcţiei caracteristice a unei mulţimi (exerciţiile 2°.45 − 2°.59) să se rezolve exerciţiile 1°.1 − 1°.22.

2°.50 Fie $X \neq \emptyset$. Notăm $2^X = \{\chi_A(\cdot)/A \in \mathcal{P}(X)\}$. Să se arate că $\mathcal{P}(X) \sim 2^X$. În particular $2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.

⌈**Soluţie:** Se arată că funcţia $f : \mathcal{P}(X) \to 2^X$, $f(A) = \chi_A(\cdot)$ bijecţie.⌋

2°.51 Fie $X \neq \emptyset$. Notăm $\mathcal{F}(X;\mathbb{R}) := \{f/f : X \to \mathbb{R}\}$. Pentru $f, g \in \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ punem

$$f \le g \;\Leftrightarrow\; (f(x) \le g(x),\ \forall x \in X).$$

Să se arate că mulţimea $(\mathcal{F}(X;\mathbb{R}); \le)$ este ordonată, dar nu este total ordonată.

⌈**Soluţie:** Să arătăm că relaţia de ordine nu este totală. Fie $A \subset X$, $\emptyset \neq A \neq X$. Funcţiile $f = \chi_A(\cdot)$ şi $g = \chi_{\complement A}(\cdot)$ nu se pot compara.⌋

Să se verifice dacă funcţiile de mai jos sunt inversabile:

2°.52 $f :]0, +\infty[\times[0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$;

⌈**Soluţie:** f este injectivă, deoarece $f(\rho,\theta) = f(\rho',\theta') \Leftrightarrow (\rho\cos\theta = \rho'\cos\theta'$ şi $\rho\sin\theta = \rho'\sin\theta') \Rightarrow (\rho = \rho'$ şi $\theta = \theta')$ şi este surjectivă întrucât pentru $(x,y)\{(0,0)\}$ definim $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta \in [0, 2\pi[$ soluţia unică a sistemului $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Avem $f(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = (x,y)$. Deci f este inversabilă.⌋

2°.53 $f :]0, +\infty[\times[0, 2\pi[\times\mathbb{R} \to (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \times \mathbb{R}$, $f(\rho,\theta,z) = \big(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z\big)$;

⌈**Soluţie:** Inversabilă.⌋

2°.54 $f :]0, +\infty[\times[0,\pi[\times[0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$,

$$f(\rho,\varphi,\theta) = \big(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi\big);$$

⌈**Soluţie:** Nu este injectivă $(f(\rho,0,\theta_1) = f(\rho,0,\theta_2),\ \theta_1 \neq \theta_2)$, dar este surjectivă.⌋

2°.55 $\quad f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ f(x_1,x_2,x_3)=\left(x_1,\frac{1}{2}(x_2^2-x_3^2),x_2x_3\right)$

⌈**Soluţie:** Nu este injectivă ($f(1,1,1)=f(1,-1,-1)$), dar este surjectivă.⌋

Folosind proprietăţile funcţiei caracteristice a unei mulţimi, să se rezolve exerciţiile $1°.1 - 1°.18$.

Soluţie ex. $1°.1$ $A\subset B\Leftrightarrow\chi_A\le\chi_B$. Deoarece $\chi_{A\cup C}=\chi_A+\chi_C-\chi_A\cdot\chi_C=\chi_c+\chi_A(1-\chi_C)$, iar $\chi_{B\cup C}=\chi_B+\chi_C-\chi_B\cdot\chi_c=\chi_C+\chi_B(1-\chi_C)$, din $\chi_A\le\chi_B\Rightarrow\chi_{A\cup B}\le\chi_{b\cup C}\Leftrightarrow A\cup C\subset B\cup C$.

Avem $\chi_{a\cap C}=\chi_a\cdot\chi_C$ şi $\chi_{B\cap C}=\chi_B\cdot\chi_C$. Ţinând seama de ipoteză, găsim $\chi_{A\cap C}\le\chi B\cap C\Leftrightarrow A\cap C\subset B\cap C$.

Soluţie ex. $1°.2$ $\chi_{A\cap B}=\chi_A\cdot\chi_B\le\chi_A\le\chi_A+\chi_B(1-\chi_A)=\chi_{A\cup B}\Leftrightarrow A\cap B\subset A\subset A\cup B$. Schimbând A cu B su obţine a doua relaţie.

Soluţie ex. $1°.3$ $A\subset B\Leftrightarrow\chi_A\le\chi_B\Leftrightarrow\chi_A=\chi_A\cdot\chi_B\Leftrightarrow A=A\cap B$.

$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}=\chi_B\Leftrightarrow A\cup B=B$.

$\chi_{A\setminus B}=\chi_A-\chi_A\cdot\chi_B=\chi_A-\chi_A=0\Leftrightarrow A\setminus B=\emptyset$.

Soluţie ex. $1°.4$ Din ipoteză $\chi_A\le\chi_B$ şi $\chi_B\le\chi_C\Rightarrow\chi_A\le\chi_C\Leftrightarrow A\subset C$.

Soluţie ex. $1°.5$ Avem $\chi_A\le\chi_B$ şi $\chi_A\le\chi_C\Rightarrow\chi_A\le\chi_B\cdot\chi_C=\chi_{B\cap C}\Leftrightarrow A\subset B\cap C$.

Soluţie ex. $1°.6$ Ipoteză: $A\subset C$ şi $B\subset C$. Fie $x\in A\cup B$. Dacă $x\in A$ şi $x\notin B\Rightarrow\chi_{A\cup B}(x)=1=\chi_C(x)$. Analog, dacă $x\in B$ şi $x\notin B\Rightarrow\chi_{A\cup B}(x)=1=\chi_C(x)$. Dacă $x\in A$ şi $\chi_B\Rightarrow\chi_{A\cup B}(x)=\chi_A(x)+\chi_B(x)-\chi_A(x)\cdot\chi_B(x)=1+1-1=1=\chi_C(x)\Rightarrow\chi_{A\cup B}\le\chi_C\Leftrightarrow A\cup B\subset C$.

Soluţie ex. $1°.7$ $\chi_{A\setminus(A\setminus B)}=\chi_A(1-\chi_{A\setminus B})=\chi_A\big(1-\chi_A(1-\chi_B)\big)=\chi_A-\chi_A^2+\chi_A^2\cdot\chi_B=\chi_A-\chi_A+\chi_A\cdot\chi_B=\chi_A\cdot\chi_B=\chi_{A\cap B}$.

Soluţie ex. $1°.8$ $\chi_{A\cap(B\setminus C)}=\chi_A\cdot\chi_{B\setminus C}=\chi_A\cdot\chi_B(1-\chi_C)$;

$\chi_{(A\cap B)\setminus C}=\chi_{A\cap B}(1-\chi_C)=\chi_A\cdot\chi_B(1-\chi_C)\Rightarrow A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$.

Soluţie ex. $1°.9$ Pentru mulţimea $A\cup B$ avem $\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B$;

$\chi_{A\cap(B\setminus A)}=\chi_A+\chi_B(1-\chi_A)+\chi_A\cdot\chi_B(1-\chi_A)=\chi_A+\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B+\chi_A\cdot\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B=\chi_A+\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B=\chi_{A\cup B}$;

$\chi_{B\cup(A\setminus B)}=\chi_B+\chi_{A\setminus B}-\chi_B\cdot\chi_{A\setminus B}=\chi_B+\chi_A-\chi_A\cdot\chi_B-\chi_B\cdot\chi_A(1-\chi_B(=\chi_B+\chi_A-\chi_A\cdot\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B+\chi_A\cdot\chi_B=\chi_A+\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B=\chi_{A\cup B}$;

Mulţimile $A\setminus B$, $B\setminus A$ şi $A\cap B$ sunt disjuncte două câte două şi deci

$\chi_{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup(A\cap B)}=\chi_{A\setminus B}+\chi_{B\setminus A}+\chi_{A\cap B}=\chi_A-\chi_A\cdot\chi_B+\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B+\chi_A\cdot\chi_B=\chi_A+\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B=\chi_{A\cup B}$.

Soluţie ex. $1°.10$ $\chi_{A\cup(A\cap B)}=\chi_A+\chi_{A\cap B}-\chi_A\cdot\chi_{A\cap B}=\chi_A+\chi_A\cdot\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B=\chi_A\Leftrightarrow A\cup(A\cap B)=A$.

Soluţie ex. $1°.11$ $\chi_{A\cap(A\cup B)}=\chi_A\cdot\chi_{A\cup B}=\chi_A(\chi_A+\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B)=\chi_A+\chi_A\cdot\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B=\chi_A\Leftrightarrow A\cup(A\cap B)=A$.

Soluţie ex. $1°.12$ $A\cap B=A\cup B\Leftrightarrow\chi_{A\cap B}=\chi_{A\cup B}\Leftrightarrow\chi_A\cdot\chi_B=\chi_A+\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B\Leftrightarrow\chi_A+\chi_B-2\chi_A\cdot\chi_B=0\Leftrightarrow(\chi_A-\chi_B)^2=0\Leftrightarrow\chi_A-\chi_B=0\Leftrightarrow\chi_A=\chi_B\Leftrightarrow A=B$.

Soluţie ex. $1°.13$ $\chi_{\complement(\complement A)}=1-\chi_{\complement A}=1-(1-\chi_A)=\chi_A\Leftrightarrow\complement(\complement A)=A$.

Soluţie ex. $1°.14$ $A\subset B\Leftrightarrow\chi_A\le\chi_B\Leftrightarrow 1-\chi_B\le 1-\chi_A\Leftrightarrow\chi_{\complement B}\le\chi_{\complement A}\Leftrightarrow\complement B\subset\complement A$.

Soluţie ex. $1°.15$ $A\cap B=\emptyset\Leftrightarrow\chi_A\cdot\chi_B=0\Leftrightarrow\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B$. Cum $\chi_{A\cup B}\le 1\Rightarrow\chi_A+\chi_B\le 1\Leftrightarrow\chi_A\le 1-\chi_B$ (sau $\chi_B\le 1-\chi_A$) $\Leftrightarrow A\subset\complement B$ (sau $B\subset\complement A$).

Reciproc, dacă $A\subset\complement B$, rezultă $\chi_A+\chi_B\le 1$ $(*)$. Dacă se admite, prin reducere la absurd, că $A\cap B\ne\emptyset$, atunci există $x^\circ\in A\cap B$ şi deci $\chi_A(x^\circ)=\chi_B(x^\circ)=1\Rightarrow\chi_A(x^\circ)+\chi_B(x^\circ)=2$, ceea ce contrazice relaţia $(*)$.

Soluţie ex. $1°.16$ $B\cup\complement A=X\Leftrightarrow\chi_A+\chi_{\complement B}-\chi_B\cdot\chi_{\complement A}=1\Leftrightarrow\chi_B+1-\chi_A-\chi_B(1-\chi_A)=1\Leftrightarrow\chi_A(1-\chi_B)=0\Leftrightarrow\chi_A\cdot\chi_{\complement B}\Leftrightarrow A\cap\complement B=\emptyset\Leftrightarrow A\subset B$. Dar $B\cap\complement A=\emptyset\Leftrightarrow B\subset A$. Din dubla incluziune rezultă $A=B$.

Soluţie ex. 1°.17 $\chi_{\complement(A\cup B)} = 1-\chi_{A\cup B)} = 1-\chi_A-\chi_B+\chi_A\cdot\chi_B = (1-\chi_A)(1-\chi_B) = \chi_{(\complement A)\cap(\complement B)} \Leftrightarrow \complement(A\cup B) = (\complement A)\cap(\complement B)$.

Soluţie ex. 1°.18 $\chi_{\complement(A\cap B)} = 1-\chi_{A\cap B} = 1-\chi_A\cdot\chi_B$;

$\chi_{(\complement A)\cup(\complement B)} = \chi_{\complement A}+\chi_{\complement B}-\chi_{\complement A}\cdot\chi_{\complement B} = 1-\chi_A+1-\chi_B-(1-\chi_A)(1-\chi_B) = 1-\chi_A\cdot\chi_B$. Prin urmare $\chi_{\complement(A\cap B)} = \chi_{(\complement A)\cup(\complement B)} \Leftrightarrow \complement(A\cap B) = (\complement A)\cup(\complement B)$.

Cap. 2. SPAŢII METRICE

Definiţia 1. *Fie $X \neq \emptyset$. Aplicaţia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ se numeşte distanţă sau metrică pe X dacă şi numai dacă satisface condiţiile:*
1°. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2°. $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x, y \in X$;
3°. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, $\forall x, y, z \in X$.
Perechea (X,d) se numeşte spaţiu metric.

Observaţia 1. *Din definiţie rezultă că dacă (X,d) este un spaţiu metric, atunci $d(x,y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$.*

Definiţia 2. *Fie $d_1, d_2 : X \to \mathbb{R}$ două distanţe pe X. Distanţele d_1 şi d_2 se numesc* **echivalente** *dacă şi numai dacă există $\lambda > 0 < \mu$ astfel încât*

$$\lambda \cdot d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \mu \cdot d_1(x,y),\ \forall x, y \in X.$$

Definiţia 3. *Fie (X,d) un spaţiu metric şi $\emptyset \neq A \subset X$. Aplicaţia*

$$d_A : A \times A \to \mathbb{R},\ \ d_A(x,y) = d(x,y),\ \ \forall x, y \in A$$

se numeşte metrica indusă de d pe A.
Spaţiul metric (A, d_A) se numeşte **subspaţiu metric** *al spaţiului metric (X,d).*

Definiţia 4. *Două spaţii metrice (X_1, d_1) şi (X_2, d_2) se numesc izometrice dacă şi numai dacă există o bijecţie $f : X_1 \to X_2$ astfel încât*

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x,y),\ \ \forall x, y \in X_1.$$

Aplicaţia f se numeşte izometrie.

Definiţia 5. *Fie $X \neq \emptyset$ şi $\mathbf{K}$ un corp comutativ. Se spune că pe X s-a definit o structură de spaţiu liniar (vectorial) peste corpul $\mathbf{K}$ dacă şi numai dacă s-au definit:*
- *o lege de compoziţie internă pe X, notată "+"*

$$X \times X \ni (x,y) \to x + y \in X$$

- *şi o lege de compoziţie externă, notată "$\cdot$"*

$$\mathbf{K} \times X \ni (\alpha, x) \to \alpha \cdot x \in X$$

care verifică următoarele axiome:
1° $(X,+)$ *este un grup comutativ (abelian);*
2° $1 \cdot x = x$, $\forall x \in X$ (1 *este elementul unitate din* $\mathbf{K}$);
3° $\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$, $\forall(\alpha, \beta \in \mathbf{K}, x \in X)$;
4° $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$, $\forall(\alpha \in \mathbf{K}, x, y \in X)$;
5° $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$, $\forall(\alpha, \beta \in \mathbf{K}, x \in X)$.
Ansamblul $(X, \mathbf{K}, +, \cdot)$ se numeşte spaţiu liniar (vectorial), iar X se va numi $\mathbf{K}$ - spaţiu liniar (vectorial).
Elementele lui X se numesc vectori, iar elementele lui $\mathbf{K}$ se numesc scalari.
Când $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ($\mathbf{K} = \mathbb{C}$) vom spune că X este un spaţiu vectorial real (complex).

Definiţia 6. *Fie* $(X, \mathbf{K}, +, \cdot)$ *un spaţiu liniar* (*vectorial*) *şi* $\emptyset \neq X_1 \subset X$. X_1 *se numeşte subspaţiu liniar* (*vectorial*) *dacă şi numai dacă :*
$(X_1, +)$ *este un subgrup al grupului* $(X, +)$*;*
$\forall \alpha \in \mathbf{K}$ *şi* $\forall x \in X_1 \Rightarrow \alpha \cdot x \in X_1$.

Observaţia 2. *Din definiţie rezultă că "*X_1 *este un subspaţiu liniar al lui* X*"* $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + y \in X_1, & \forall x, y \in X_1; \\ \alpha \cdot x \in X_1, & \forall \alpha \in \mathbf{K} \text{ şi } \forall x \in X_1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha x + \beta y \in X_1, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K}, \ \forall x, y \in X_1.$$

Definiţia 7. *Fie* X *un* $\mathbf{K}$ *-spaţiu liniar real sau complex. Aplicaţia* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *se numeşte normă dacă şi numai dacă sunt satisfăcute condiţiile:*
1° $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2° $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$;
3° $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbf{K}$ *şi* $\forall x \in X$.
Perechea $(X, \|\cdot\|)$ *se numeşte spaţiu normat sau spaţiu liniar normat.*

Observaţia 3. *Din definiţie rezultă că dacă* $(X, \|\cdot\|)$ *este un spaţiu normat, atunci* $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in X$.

Teorema 1. *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu normat. Aplicaţia* $d : X \times X \to \mathbb{R}$,

$$d(x, y) := \|x - y\|, \ \forall x, y \in X$$

este o metrică pe X.

Aceastyă metrică se numeşte *metrică indusă de normă.*

Observaţia 4. *Nu orice metrică pe un spaţiu liniar* (*vectorial*) *este indusă de o normă.*

De exemplu: $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = |\text{arctg}\, x - \text{arctg}\, y|$ este o distanţă pe $\mathbb{R}$ care nu este indusă de o normă. Dacă ar exista o normă pe $\mathbb{R}$ care să inducă pe d, atunci din egalitatea evidentă

$$\|(x + z) - (y + z)\| = \|x - y\|, \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

ar rezulta că $d(x+z, y+z) = d(x, y)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, adică $|\text{arctg}\,(x+z) - \text{arctg}\,(y+z)| = |\text{arctg}\, x - \text{arctg}\, y|$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ care evident nu este adevărată.

Teorema 2. *Fie* X *un* $\mathbf{K}$ *- spaţiu liniar* (*vectorial*) ($\mathbf{K} = \mathbb{R}$ *sau* $\mathbb{R}$). *Dacă* (X, d) *este un spaţiu metric şi metrica* d *este* **compatibilă** *cu operaţiile spaţiului vectorial* X *adică:*
(i) d *este* **invariantă la translaţii**

$$d(x + z, y + z) = d(x, y), \ \forall x, y, z \in X;$$

(ii) d *este supusă la condiţia de* **monogeneitate**

$$d(\lambda \cdot x, 0) = |\lambda| \cdot d(x, 0), \ \forall \lambda \in \mathbf{K} \text{ şi } \forall x \in X,$$

atunci aplicaţia $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$,

$$\|x\| = d(x, 0), \ \forall x \in X,$$

este o normă pe X.

În continuare considerăm $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ sau $\mathbf{K} = \mathbb{C}$.

Definiţia 8. *Fie X un spaţiu vectorial complex. Aplicaţia $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ care satisface condiţiile:*
1° $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in X$ *şi* $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2° $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, $\forall x, y \in X$;
3° $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\forall x, y, z \in X$;
4° $\langle \alpha \cdot x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ *şi* $\forall x, y \in X$
se numeşte produs scalar pe X.
Perechea $\left(X, \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ se numeşte spaţiu înzestrat cu produs scalar.

Observaţia 5. *În cazul unui spaţiu liniar real proprietatea 2° devine*
2°′ $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\forall x, y \in X$.

Definiţia 9. *Un spaţiu vectorial finit dimensional X_n real sau complex pe care s-a definit un produs scalar se numeşte spaţiu euclidian. În cazul spaţiului complex se foloseşte şi denumirea de spaţiu unitar.*

Teorema 3. (**Inegalitatea Schwarz-Cauchy-Buniakovski**)*: În orice spaţiu $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ înzestrat cu un produs scalar este adevărată inegalitatea:*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle},\ \forall x, y \in X,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă vectorii x şi y sunt liniar dependenţi.

Teorema 4. *Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu înzestrat cu un produs scalar. Funcţia $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$,*

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle},\ \forall x \in X$$

este o normă pe X (normă indusă de produsul scalar).
În acest caz, perechea $(X, ||\cdot||)$ se numeşte spaţiu prehilbertian.

În cazul unui spaţiu prehilbertian distanţa indusă de normă se numeşte **distanţă euclidiană.**

Teorema 5. (*i*) *Fie $(X, ||\cdot||)$ un spaţiu prehilbertian. Atunci*

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right)^1. \tag{$*$}$$

(*ii*) *Fie $(X, ||\cdot||)$ un spaţiu normat care verifică relaţia $(*)$. Atunci există un produs scalar, notat $\langle \cdot, \cdot \rangle$, astfel încât $(X, ||\cdot||)$ este un spaţiu prehilbertian şi anume:*

$$\left.\begin{array}{ll} \langle x, y \rangle = \dfrac{1}{4}\left(||x + y||^2 - ||x - y||^2\right), & \textit{pentru}\quad \mathbf{K} = \mathbb{R}, \\ \langle x, y \rangle = \dfrac{1}{4}\Big[||x + y||^2 - ||x - y||^2 + i\left(||x + iy||^2 - ||x - iy||^2\right)\Big], & \textit{pentru}\quad \mathbf{K} = \mathbb{C}. \end{array}\right\} \quad (**)$$

[1]Identitatea paralelogramului

Definiţia 10. *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu prehilbertian real şi* $x, y \in X \setminus \{0\}$. *Numărul real* $\theta \in [0, \pi]$ *definit de egalitatea*

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

se numeşte unghiul dintre vectorii x *şi* y.

Definiţia 11. *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu prehilbertian real.*

$1°$ *Vectorii* x *şi* y *se numesc ortogonali dacă şi numai dacă* $\langle x, y\rangle = 0$.

$2°$ *Submulţimea* $S \subset X$ *se numeşte ortogonală dacă şi numai dacă vectorii lui* S *sunt ortogonali doi câte doi.*

$3°$ *Submulţimea* $S \subset X$ *se numeşte ortonormată dacă şi numai dacă* S *este ortogonală şi fiecare vector din* S *are norma egală cu* 1.

Definiţia 12. *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu prehilbertian real. O mulţime* $S \subset X$ *se numeşte completă dacă şi numai dacă este ortogonală (ortonormată) şi nu este conţinută strict în nici o altă mulţime ortogonală (ortonormată).*

Definiţia 13. *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu prehilbertian real şi* $S \subset X$ *o mulţime a sa. Un vector* $x \in X$ *se numeşte ortogonal lui* S *dacă şi numai dacă* $\langle x, y\rangle = 0$, $\forall y \in S$.

Mulţimea tuturor vectorilor ortogonali lui S *se numeşte* S*-ortogonală şi se notează prin* $S^{\perp}$.

Dacă S *este un subspaţiu liniar (vectorial) al lui* X, *atunci* $S^{\perp}$ *se numeşte complementul ortogonal al lui* S.

Teorema 6. *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu prehilbertian real şi* $X_n \subset X$ *un subspaţiu* n*-dimensional al lui* X. *Atunci* $X = X_n \oplus X_n^{\perp}$. *Dacă* $x \in X$, *atunci* $\exists (x_1 \in X_n$ *şi* $x_2 \in X_n^{\perp})$ *astfel încât* $x = x_1 + x_2$ *şi* $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$. *În plus, scrierea* $x = x_1 + x_2$ *cu* $x_1 \in X_n$ *şi* $x_2 \in X_n^{\perp}$ *este unică.*

Definiţia 14. *Fie* $\emptyset \neq X$ *şi* $\tau \subset \mathcal{P}(X)$. *Familia* τ *de părţi ale lui* X *se numeşte topologie pe* X *dacă şi numai dacă satisface următoarele condiţii:*

$(T.1)$ $X, \emptyset \in \tau$;

$(T.2)$ $\forall D_1, ..., D_m \in \tau \Rightarrow \bigcap\limits_{k=1}^{n} D_k \in \tau$;

$(T.3)$ $\forall \{D_i\}_{i\in I},\ D_i \in \tau,\ \forall i \in I \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} D_i \in \tau$.

Perechea (X, τ) *se numeşte spaţiu topologic.*

Elementele familiei τ *se numesc mulţimi deschise.*

Definiţia 15. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric,* $x^{\circ} \in X$ *şi* $r > 0$. *Mulţimea*

$$B_r(x^{\circ}) := \{x \in X / d(x, x^{\circ}) < r\} \tag{1}$$

se numeşte sferă (bilă) deschisă de centru x° *şi de rază* r.

Definiţia 16. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric,* $x^{\circ} \in X$ *şi* $r \geq 0$. *Mulţimea*

$$B_r[x^{\circ}] := \{x \in X / d(x, x^{\circ}) \leq r\} \tag{2}$$

se numeşte sferă (bilă) închisă de centru x° *şi de rază* r.

Definiţia 17. *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $D \subset X$. Mulţimea D se numeşte "***deschisă***" dacă şi numai dacă satisface una dintre condiţiile:*
1° $D = \emptyset$;
2° *Dacă $D \neq \emptyset$, atunci pentru orice $x \in D$ există $r_x > 0$ astfel încât $B_{r_x}(x) \subset D$.*

Notăm

$$\tau_d := \{D \subset X / D \text{ este mulţime "deschisă"}\}. \tag{3}$$

Teorema 7. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Familia τ_d, definită de relaţia (3), satisface condiţiile $(T.1)$, $(T.2)$ şi $(T.3)$ din definiţia 14.*

Observaţia 6. *Dacă (X, d) este un spaţiu metric, atunci familia τ_d a mulţimilor "deschise" este o topologie pe X, numită* **topologia metrică** *şi deci (X, τ_d) este un spaţiu topologic.*

Definiţia 18. *Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi $F \subset X$. Mulţimea F se numeşte închisă dacă şi numai dacă $\complement F \in \tau$.*

Fie (X, d) un spaţiu metric şi τ_d topologia metrică. Notăm

$$\mathcal{F} := \{F \subset X / F \text{ este mulţime închisă}\}. \tag{4}$$

Teorema 8. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Atunci familia $\mathcal{F}$, a mulţimilor închise, satisface următoarele proprietăţi:*
$(F.1)$ $X, \emptyset \in \mathcal{F}$;
$(F.2)$ $\forall F_1, F_2, ..., F_m \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{m} F_k \in \mathcal{F}$;
$(F.3)$ $\forall \{F_i\}_{i \in I}$, $F_i \in \mathcal{F}, \forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$.

Definiţia 19. *Fie (X, d) un spaţiu metric, τ_d topologia metrică, $x^\circ \in X$ şi $V \subset X$. Mulţimea V se numeşte vecinătate a punctului x° dacă şi numai dacă există $D \in \tau_d$ astfel încât să avem:*

$$x^\circ \in D \text{ şi } D \subset V. \tag{5}$$

Observaţia 7. *Spaţiul X este vecinătate pentru fiecare punct al său deoarece $X \in \tau_d$ şi $X \subset X$.*

Fie (X, d) un spaţiu metric, $x \in X$. Notăm

$$\mathcal{V}(x) := \{V \subset X / V \text{ este vecinătate pentru } x\}. \tag{6}$$

Pe baza observaţiei de mai sus, rezultă că $\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$.

Teorema 9. *Fie (X, d) un spaţiu metric, τ_d topologia metrică şi $x \in X$. Mulţimea $\mathcal{V}(x)$ satisface următoarele proprietăţi:*
$(V.1)$ $V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in V$;
$(V.2)$ *dacă $V \in \mathcal{V}(x)$ şi dacă $V \subset V_1$, atunci $V_1 \in \mathcal{V}(x)$;*
$(V.3)$ *dacă $V_1, ..., V_m \in \mathcal{V}(x)$, atunci $\bigcap_{k=1}^{m} V_k \in \mathcal{V}(x)$;*
$(V.4)$ *dacă $V \in \mathcal{V}(x)$, atunci există $W \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $V \in \mathcal{V}(y)$, pentru orice $y \in W$.*

Se consideră (X, d) un spaţiu metric, τ_d topologia metrică pe X şi $A \subset X$.

Definiţia 20. *Elementul $x \in A$ se numeşte punct interior mulţimii A dacă şi numai dacă $A \in \mathcal{V}(x)$.*

Mulţimea punctelor interioare mulţimii A se numeşte interiorul mulţimii A şi se notează prin $\overset{\circ}{A}$ sau $\mathrm{Int}A$.

Definiţia 21. *Elementul $x \in X$ se numeşte punct aderent (limită al) mulţimii A dacă şi numai dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem*

$$V \cap A \neq \emptyset.$$

Mulţimea punctelor aderente mulţimii A se numeşte aderenţa sau închiderea mulţimii A şi se notează prin $\overline{A}$.

Definiţia 22. *Elementul $x \in X$ se numeşte punct exterior mulţimii A dacă şi numai dacă $x \in \overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$.*

Mulţimea punctelor exterioare mulţimii A se numeşte exteriorul mulţimii A şi se notează prin $ExtA$.

Definiţia 23. *Elementul $x \in X$ se numeşte punct frontieră al mulţimii A dacă şi numai dacă x nu este nici interior şi nici exterior mulţimii A.*

Mulţimea punctelor frontieră ale mulţimii A se numeşte frontiera mulţimii A şi se notează prin ∂A sau FrA.

Definiţia 24. *Elementul $x \in X$ se numeşte punct de acumulare al mulţimii A dacă şi numai dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$ avem:*

$$(V \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset.$$

Mulţimea punctelor de acumulare ale mulţimii A se numeşte mulţime derivată şi se notează prin A'.

Definiţia 25. *Elementul $x \in A$ se numeşte punct izolat al mulţimii A dacă şi numai dacă există $V_0 \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât să avem*

$$A \cap V_0 = \{x\}.$$

Mulţimea punctelor izolate ale mulţimii A se numeşte partea discretă a lui A şi se notează $\mathcal{D}(A)$.

Definiţia 26. *Fie (X, d) un spaţiu metric. Submulţimea $A \subset X$ se numeşte discretă dacă şi numai dacă orice punct al său este un punct izolat.*

Observaţia 8. *Condiţia necesară şi suficientă ca A să fie discretă este ca ea să nuşi conţină nici un punct de acumulare.*

Definiţia 27. *Fie $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Mulţimile A_1 şi A_2 se numesc separate dacă şi numai dacă există $D_1, D_2 \in \tau_d$ astfel încât să avem:*

$$A_1 \subset D_1,\ A_2 \subset D_2 \text{ şi } D_1 \cap D_2 = \emptyset.$$

Definiţia 28. *Mulţimea $A \subset X$ se numeşte neconexă dacă şi numai dacă există A_1, A_2 separate astfel încât*
$$A = A_1 \cup A_2.$$

Definiţia 29. *Mulţimea $A \subset X$ se numeşte conexă dacă şi numai dacă nu este neconexă.*

Definiţia 30. *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A \subset X$. Mulţimea A se zice mărginită dacă şi numai dacă există $x^\circ \in X$ şi $M > 0$ astfel încât*
$$A \subset B_M[x^\circ].$$

Definiţia 31. *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A \subset X$. Notăm*
$$\delta(A) := \sup\{d(x, y)/x, y \in A\}.$$

Numărul $\delta(A)$ se numeşte **diametrul mulţimii** *A.*

Observaţia 9. *Se arată că A este mărginită dacă şi numai dacă $\delta(A) < \infty$.*

Observaţia 10. *Dacă $(X, \|\cdot\|)$ este un spaţiu normat, atunci A este mărginită dacă şi numai dacă există $M > 0$ astfel încât*
$$\|x\| \leq M,\ \forall x \in A.$$

Definiţia 32. *Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ o mulţime mărginită. Elementul $\beta \in \mathbb{R}$ este numit* **majorant** *pentru A dacă şi numai dacă*
$$x \leq \beta,\ \forall x \in A.$$

Cel mai mic majorant al mulţimii A se numeşte **marginea superioară** *şi se notează prin* $\sup A$.

Elementul $\alpha \in \mathbb{R}$ este numit **minorant** *pentru A dacă şi numai dacă*
$$\alpha \leq x,\ \forall x \in A.$$

Cel mai mare minorant pentru A se numeşte **marginea inferioară** *şi se notează prin* $\inf A$.

Dacă $\sup A \in A$, *atunci acest element se numeşte* **elementul maximal** *al mulţimii A şi se notează prin* $\max A$.

Dacă $\inf A \in A$, *atunci acest element se numeşte* **elementul minimal** *al mulţimii A şi se notează prin* $\min A$.

Propoziţia 1. *Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ o mulţime mărginită. Elementele* $\inf A$ *şi* $\sup A$ *satisfac următoarele proprietăţi:*

1° $x \leq \sup A,\ \forall x \in A$;

2° $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A$ *astfel încât* $\sup A - \varepsilon < x_\varepsilon$;

3° $\inf A \leq x,\ \forall x \in A$;

4° $\forall \varepsilon > 0, \exists x'_\varepsilon \in A$ *astfel încât* $x'_\varepsilon < \inf A + \varepsilon$.

Definiţia 33. *(i) Dacă $A \subset \mathbb{R}$ nu este mărginită superior, atunci prin definiţie*

$$\sup A = +\infty.$$

(ii) Dacă $A \subset \mathbb{R}$ nu este mărginită inferior, atunci prin definiţie

$$\inf A = -\infty.$$

Definiţia 34. *Fie (Y, d) un spaţiu metric. Funcţia $f : X \to Y$ se numeşte mărginită dacă şi numai dacă mulţimea $f(X) \subset Y$ este mărginită.*

Definiţia 35. *Fie $f : X \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită.*
Marginea superioară a mulţimii $f(X) \subset \mathbb{R}$ se numeşte marginea superioară a funcţiei f pe mulţimea X şi se notează prin $\sup\limits_{x \in X} f(x)$;

$$\sup_{x \in X} f(x) := \sup f(X).$$

Marginea inferioară a mulţimii $f(X) \subset \mathbb{R}$ se numeşte marginea inferioară a funcţiei f pe mulţimea X şi se notează prin $\inf\limits_{x \in X} f(x)$;

$$\inf_{x \in X} f(x) := \inf f(X).$$

Definiţia 36. *Fie $(X, \mathbf{K}, +, \cdot)$ un spaţiu liniar real sau complex şi $x, y \in X$. Mulţimea*

$$[x, y] := \{u_t \in X / u_t = ty + (1-t)x,\ t \in [0,1]\}$$

se numeşte segment închis de extremităţi x şi y.
Mulţimea

$$]x, y[:= \{u_t \in X / u_t = ty + (1-t)x,\ t \in]0,1[\}$$

se numeşte segment deschis de extremităţi x şi y.

Definiţia 37. *Fie $(X, \mathbf{K}, +, \cdot)$ un spaţiu liniar real sau complex şi $\emptyset \neq A \subset X$. Mulţimea A se numeşte convexă dacă şi numai dacă pentru orice $x, y \in A$ avem $[x, y] \subset A$.*

Definiţia 38. *Fie $(X, \mathbf{K}, +, \cdot)$ un spaţiu liniar real sau complex şi $\emptyset \neq A \subset X$ o muţime convexă. Funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ se numeşte convexă $\big($concavă$\big)$ dacă şi numai dacă pentru orice $x, y \in A$ şi pentru orice $t \in [0,1]$ avem*

$$f\big(tx + (1-t)y\big) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$
$$\Big(f\big(tx + (1-t)y\big) \geq tf(x) + (1-t)f(y)\Big).$$

EXERCIŢII

§2.1. Spaţii metrice

Să se demonstreze inegalităţile:

1°.1 Fie $a, b \in \mathbb{R}_+$ şi $p, q > 1$ astfel încât $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Atunci

$$a\,b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{2.1}$$

⌈**R:** Funcţia $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{x^{-q}}{q}$, este derivabilă şi are minim global în $x = 1$, cu $f_{\min} = f(1) = 1$, adică $1 = f(1) \leq f(x)$, $\forall x \in]0, +\infty[$. Dacă luăm $x = a^{1/q} b^{-1/p}$ obţinem inegalitatea $1 \leq f(a^{1/q} b^{-1/p}) = \dfrac{1}{p} a^{p/q} b^{-1} + \dfrac{1}{q} a^{-1} b^{q/p}$ şi cum $p/q = p - 1$, $q/p = q - 1$ rezultă inegalitatea din enunţ.⌋

1°.2 Fie $a_i, b_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, ..., n$ şi $p, q > 1$ astfel încât $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Atunci:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_1^q \right)^{1/q} \text{ (\textit{inegalitatea lui Hölder}).} \tag{2.2}$$

⌈**R:** Presupunem că cel puţin unul dintre a_i şi respectiv b_i este diferit de zero. Fie $a = a_i \Big/ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p}$, $b = b_i \Big/ \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{1/q}$, $i = 1, ..., n$. Din ex. **2°.1** obţinem

$$a_i b_i \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{1/q} \leq a_i^p \Big/ p \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right) + b_i^q \Big/ q \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right), \ i = 1, ..., n.$$

Însumând după $i = 1, ..., n$ şi ţinând seama că $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, se obţine inegalitatea lui Hölder.⌋

1°.3 Fie $p, q > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p < \infty$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q < \infty$. Atunci

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{1/q}. \tag{2.3}$$

(Inegalitatea lui Hölder).

⌈**R:** Dacă $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p = 0$ sau $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q = 0$, rezultă că $a_k b_k = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi inegalitatea (1) este evidentă. Presupunem că $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p > 0$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q > 0$ şi înlocuim în inegalitatea $|ab| \leq \dfrac{|a|^p}{p} + \dfrac{|b|^q}{q}$ pe a şi b cu $\dfrac{|a_k|}{\left(\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p}}$ şi respectiv $\dfrac{|b_k|}{\left(\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{1/q}}$ obţinem

$\dfrac{|a_k b_k|}{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{1/q}} \le \dfrac{|a_k|^p}{p\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^p} + \dfrac{|b_k|^q}{q\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^q}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Însumând după n şi trecând la limită, deducem $\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k b_k|}{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{1/q}} \le \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^p}{p\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^p} + \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^q}{q\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^q} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, de unde rezultă relaţia (2.3).

În cazul $p = q = 2$ se obţine *inegalitatea lui Cauchy*:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \le \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{1/2}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{1/2}. \tag{2.4}$$

Observaţia 11. *Exerciţiul* $1^\circ.3$ *rezultă din* $1^\circ.2$ *prin trecere la limită, dacă folosim şi continuitatea funcţiei* $\varphi(u) = u^{1/p}$, $u > 0$, $p > 0$.

$1^\circ.4$ Fie $a_i, b_i \in \mathbb{R}_+$, $i = 1, ..., n$ şi $p \ge 1$. Atunci:

$$\left(\sum_{=1}^{n}(a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p} \quad (\textit{inegalitatea lui Minkowski}). \tag{2.5}$$

⌈**R:** Pentru $p = 1$ relaţia este evidentš (cu egal). Dacă $p > 1$, avem

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{p-1}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{p-1}a_i + \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^{p-1}b_i \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[(a_i+b_i)^{p-1}\right]^{p/(p-1)}\right)^{(p-1)/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}\left[(a_i+b_i)^{p-1}\right]^{p/(p-1)}\right)^{(p-1)/p} =$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{i=1}^{n}\left[(a_i + b_i)^{p-1}\right]^{p/(p-1)}\right)^{(p-1)/p},$$

adică relaţia cerută.⌋

$1^\circ.5$ Fie $p \ge 1$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^p < \infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^p < \infty$. Atunci

$$\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}. \tag{2.6}$$

(Inegalitatea lui Minkowski).

⌈**R:** Dacă $p = 1$ sau dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k + b_k|^p = 0$, inegalitatea este evidentă.

Presupunem $p > 1$. şi $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k + b_k|^p > 0$. Avem $|a_k + b_k|^p \le |a_k||a_k + b_k|^{p-1} + |b_k||a_k + b_k|^{p-1}$. Însumând după k de la 1 la k şi trecând la limită găsim:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|a_k + b_k|^p \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k||a_k + b_k|^{p-1}\right) + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(|b_k||a_k + b_k|^{p-1}\right).$$

Utilizând inegalitatea lui Hölder pentru termenii din membrul drept, obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p \le \left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|^p\right)\right)^{1/p}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q}+$$

$$+\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(|b_k|^p\right)\right)^{1/p}\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q}=$$

$$=\left[\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|^p\right)\right)^{1/p}+\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(|b_k|^p\right)\right)^{1/p}\right]\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q}.$$

Deoarece $(p-1)q = p$ şi $1-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}$, simplificând cu $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$ se obţine inegalitatea lui Minkowski.$\rfloor$

Să se arate că funcţiile de mai jos sunt metrice (distanţe):

1°.6 $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ d(x,y):=|x-y|$.

$\lceil$**R:** (i) $d(x,y)=|x-y|\ge 0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ şi $d(x,y)=0\Rightarrow |x-y|=0\Rightarrow x=y$; (ii) $d(x,y)=|x-y|=|y-x|=d(y,x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$; (iii) $d(x,z)=|x-z|\le|x-y|+|y-z|=d(x,y)+d(y,z),\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.$\rfloor$

1°.7 $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ d(x,y):=|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|$. Să se arate că:

(i) d este o metrică pe $\mathbb{R}$;

(ii) $d(n,x)=\left|\operatorname{arctg}\dfrac{n-x}{1+nx}\right|,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-\dfrac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}^*\}$;

(iii) $d(n+p,n)<\dfrac{1}{n},\ \forall n,p\in\mathbb{N}^*$.

$\lceil$**R:** 1° $d(x,y)=|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|=0\Leftrightarrow x=y$; 2° $d(x,y)=|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|=|\operatorname{arctg}y-\operatorname{arctg}x|=d(y,x)$; 3° $d(x,z)=|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}z|=|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y+\operatorname{arctg}y-\operatorname{arctg}z|\le|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|+|\operatorname{arctg}y-\operatorname{arctg}z|=d(x,y)+d(y,z)$. $\rfloor$

1°.8 $d':\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ d'(x,y):=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

$\lceil$**R:** Proprietăţile 1° şi 2° sunt evidente. Mai întâi să observăm că dacă $a,b,c\in\mathbb{R}_+$ satisfac condiţia $c\le a+b$, are loc relaţia

$$\frac{c}{1+c}\le\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}. \qquad (*)$$

Proprietatea 3° rezultă din inegalitatea $|x-z|\le|x-y|+|u-z|$ şi din inegalitatea precedentă.$\rfloor$

1°.9 $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ d(x,y):=\left|\dfrac{x}{1+|x|}-\dfrac{y}{1+|y|}\right|$.

$\lceil$**R:** 1° Funcţia $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \varphi(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$, este strict crescătoare, deci $d(x,y)=|\varphi(x)-\varphi(y)|=0\Rightarrow x=y$; 2° şi 3° sunt evidente.$\rfloor$

1°.10 $d:\left(]0,+\infty[\right)^2\to\mathbb{R},\ d(x,y)=|\ln x-\ln y|$.

$\lceil$**R:** Rezultă din proprietăţile modulului şi ale funcţiei $\ln$.$\rfloor$

1°.11 $d:[1,+\infty[\times[1,\infty[\to\mathbb{R},\ d(x,y)=\left|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right|$.

$\lceil$**R:** Rezultă din proprietăţile modulului.$\rfloor$

1°.12 $d_1:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R},\ d_1(z,w):=|x-u|+|y-v|,\ z=x+i\cdot y,\ w=u+i\cdot v\in\mathbb{C}$.

$\lceil$**R:** Proprietăţile 1° şi 2° sunt evidente, iar proprieritatea 3° este o consecinţă a modulului din $\mathbb{R}$.$\rfloor$

1°.13 $d_2:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R},\ d_2(z,w):=|z-w|=\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$, - metrica euclidiană);

⌈**R:** Proprietăţile 1° şi 2° sunt evidente, iar proprietatea 3° se bazează pe inegalitatea lui Cauchy: dacă $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+$, atunci $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$.⌋

1°.14 $d_p : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $d_p(z, w) := \Big(|x - u|^p + |y - v|^p\Big)^{1/p}$, $p > 1$;

⌈**R:** Proprietăţile 1° şi 2° sunt evidente, iar proprietatea 3° rezultă din inegalitatea lui Minkowski (ex.1°.3. ⌋

1°.15 $d_\infty : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $d_\infty(z, w) := \max\{|x - u|, |y - v|\}$;

⌈**R:** Proprietăţile 1° şi 2° sunt evidente, iar proprieritatea 3° este o consecinţă a modulului din $\mathbb{R}$ şi a funcţiei de maxim.⌋

1°.16 $d' : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $d'(z, w) := \dfrac{|x - u|}{1 + |x - u|} + \dfrac{|y - v|}{1 + |y - v|}$;

⌈**I:** Se foloseşte inegalitatea$(*)$.⌋

1°.17 Fie $X \neq \emptyset$ şi $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $d(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad x \neq y, \\ 0. & \text{dacă} \quad x = y. \end{cases}$

⌈**R:** 1° şi 2° sunt evidente.; 3° Există următoarele situaţii: $x \neq y \neq z \neq x \Rightarrow d(x, z) = 1 < d(x, y) + d(y, z) = 2$, $x = y \neq z \Rightarrow d(x, z) = 1 = d(x, y) + d(y, z) = 1$, $x \neq y = z \Rightarrow d(x, z) = 1 = d(x, y) + d(y, z) = 1$, $y \neq x = z \Rightarrow d(x, z) = 0 < d(x, y) + d(y, z) = 2$, $x = y = z \Rightarrow d(x, y) = 0 = d(x, y) + d(y, z) = 0$.⌋

1°.18 $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $d_1(x, y) := \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$, $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

⌈**R:** Rezultă din proprietăţile modulului.⌋

1°.19 $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $d_2(x, y) := \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$ - (metrica euclidiană)

1°.20 $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $d_p(x, y) := \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}$, $p > 1$.

⌈**R:** 3° rezultă din inegalitatea lui Minkowski.⌋

1°.21 $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $d_\infty(x, y) := \max\{|x_k - y_k|; k = 1, ..., n\}$.

⌈**R:** 3° $d_\infty(x, z) = \max\{|x_k - z_k|;\ k = 1, ..., n\} \le \max\{|x_k - y_k| + |y_k - z_k|;\ k = 1, ..., n\} \le \max\{|x_k - y_k|;\ k = 1, ..., n\} + \max\{|y_k - z_k|;\ k = 1, ..., n\} = d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z)$.⌋

1°.22 Metricele d_1, d_2, $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verifică inegalitatea

$$d_\infty(x, y) \le d_2(x, y) \le d_1(x, y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad (i)$$

şi

$$d_\infty(x, y) \le d_1(x, y) \le \sqrt{n} \cdot d_2(x, y) \le n \cdot d_\infty(x, y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad (ii)$$

adică d_1, d_2, d_∞ sunt metrice echivalente (vezi def. 2).

⌈**R:** Relaţiile (i) sunt evidente, deoarece $|x_k - y_k| \le \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$. În cazul relaţiilor (ii), pentru a dovedi inegalitatea din mijloc vom aplica inegalitatea Schwarz-Cauchy-Buniakovski vectorilor $a = (a_1, ..., a_n)$, $b = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}_+^n$ şi produsul scalar canonic pentru a obţine $a_1 + ... + a_n \le \sqrt{n}\sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2}$. ⌋

1°.23 $d' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $d'(x, y) := \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$.

⌈**R:** Pentru 3° folosim inegalitatea (∗) de la ex.1°.6. Cum $|x_k - z_k| \leq |x_k - y_k| + |y_k - z_k|$, $k = 1, ..., n$, rezultă că $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.⌋

1°.24 $d_1 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R},\ d_1(z,w) := \sum_{k=1}^{n} |z_k - w_k|,\ z = (z_1, ..., z_n), w = (w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^n$.

⌈**R:** Rezultă din proprietăţile modulului în $\mathbb{C}$.⌋

Fie $X = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că funcţiile următoare sunt distanţe:

1°.25 $d_1 : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ d_1(A,B) := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}|, \forall A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$

1°.26 $d_2 : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ d_2(A,B) := \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - b_{ij})^2}$.

1°.27 $d_\infty : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ d_\infty(A,B) := \max_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} |a_{ij} - b_{ij}|$.

1°.28 $d_p : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ d_p(A,B) := \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}|^p\right)^{1/p},\ p > 1$.

1°.29 $d' : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ d'(A,B) := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{|a_{ij} - b_{ij}|}{1 + |a_{ij} - b_{ij}|}$.

Să se arate că următoarele funcţii d sunt distanţe pe X.

1°.30 $X := (s) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} / x_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*\}$ - (mulţimea şirurilor de numere reale) şi $d : X \times X \to \mathbb{R}$,

$$d(x,y) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k - y_k|}{2^k\left(1 + |x_k - y_k|\right)},\ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in X.$$

⌈**R:** 1° Şirul de termen general $S_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k - y_k|}{2^k(1 + |x_k - y_k|)}$ este crescător. Dacă $S(x,y) = \lim_{n\to\infty} S_n(x,y)$, atunci $S(x,y) \geq S_n(x,y) \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. $d(x,y) = 0 \Rightarrow (S(x,y) = 0 \geq S_n(x,y) \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow (S_n(x,y) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow (|x_n - y_n| = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow (x_n = y_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow x = y$; 3° Ţinând seama de exerciţiul 2°.11, avem $S_n(x,z) \leq S_n(x,y) + S_n(y,z),\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi prin trecere la limită obţinem $S(x,z) \leq S(x,y) + S(y,z)$.⌋

1°.31 $X := (l_2) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} / x_n \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ există în $\mathbb{R}\}$ -(mulţimea şirurilor de numere reale de pătrat sumabil) şi $d : X \times X \to \mathbb{R},\ d(x,y) := \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\right)^{1/2},\ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in X$.

⌈**R:** 3° rezultă din inegalitatea lui Minkowski pentru $p = 2$.⌋

1°.32 $X := (m) = \{z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}^*} / z_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists M > 0$ a. î. $|z_n| \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\}$ -(mulţimea şirurilor de numere complexe mărginite) şi $d : X \times X \to \mathbb{R},\ d(z,w) := \sup\{|z_n - w_n|;\ n \in \mathbb{N}^*\},\ z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in X$.

⌈**R:** 3° asemănător ca la 2°, 21.⌋

1°.33 $X := M([a,b];\mathbb{R}) = \{f/f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcţie mărginită$\}$ şi $d : X \times X \to \mathbb{R},\ d(f,g) := \sup\{|f(x) - g(x)|;\ x \in [a,b]\},\ f,g \in X.$

⌈**R:** 1° $d(f,g) \geq |f(x) - g(x)| \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$; 3° $d(f,h) = \sup\{|f(x) - h(x)|;\ x \in [a,b]\} \leq \sup\{|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|;\ x \in [a,b]\} \leq \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in [a,b]\} + \sup\{|g(x) - h(x)|;\ x \in [a,b]\} = d(f,g) + d(g,h)$.⌋

1°.34 $X := C^\circ([a,b];\mathbb{R}) = \{f/f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcţie continuă$\}$ şi $d : X \times X \to \mathbb{R},\ d(f,g) := \max\{|f(x) - g(x)|;\ x \in [a,b]\},\ f,g \in X.$

⌈**R:** Asemănător cu ex. 2°.33.⌋

1°.35 $X := C^1([a,b];\mathbb{R}) = \{f/f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f$ şi f' funcţii continue$\}$ şi $d : X \times X \to \mathbb{R},\ d(f,g) := \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| + \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x) - g'(x)|,\ f,g \in X.$

⌈**R:** Asemănător cu ex. 2°.33.⌋

Fie (X,d) un spaţiu metric. Să se arate că funcţiile de mai jos sunt metrice (distanţe):

1°.36 $d_1 : X \times X \to \mathbb{R},\ d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)},\ \forall x,y \in X.$

⌈**R:** Se ţine seama de inegalitatea de la ex. 1°.8 $\geq$.⌋

1°.37 $d_2 : X \times X \to \mathbb{R},\ d_2(x,y) = \ln\big(1 + d(x,y)\big).$

⌈**R:** 3° rezultă din relaţia $1 + d(x,z) \leq 1 + d(x,y) + d(y,z) \leq (1 + d(x,y))(1 + d(y,z))$.⌋

1°.38 Fie (X,d) un spaţiu metric. Să se arate că sunt adevărate relaţiile:

(i) $\quad d(x_1,x_n) \leq \sum\limits_{k=1}^{n-1} d(x_k,x_{k+1}),\ \ \forall x_1,x_2,...x_n \in X,\ n \geq 3;$

(ii) $\quad |d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z),\ \ \forall x,y,z \in X;$

(iii) $\quad |d(x_1,x_2) - d(x_3,x_4)| \leq d(x_1,x_3) + d(x_2,x_4),\ \ \forall x_1,x_2,x_3,x_4 \in X.$

1°.39 $d_3 : X \times X \to \mathbb{R},\ d_3(x,y) = d^\alpha(x,y),\ \alpha \in]0,1[.$

⌈**R:** Se va folosi inegalitatea $(u+v)^\alpha \leq u^\alpha + v^\alpha,\ u,v \in \mathbb{R}_+,\ \alpha \in]0,1[$.⌋

Fie $(X_k,d_k),\ k = 1,...,n$ spaţii metrice şi $X = X_1 \times ... \times X_n$. Să se arate că funcţiile de mai jos sunt metrice (distanţe) pe X:

1°.40 $d : X \times X \to \mathbb{R},\ d(x,y) := \sum\limits_{k=1}^{n} d_k(x_k,y_k),\ x = (x_1,...,x_n), y = (y_1,...,y_n) \in X;$

⌈**R:** Analog cu 1°.18.⌋

1°.41 $d_\infty : X \times X \to \mathbb{R},\ d_\infty(x,y) := \max\{d_k(x_k,y_k);\ k = 1,...,n\};$

⌈**R:** Analog cu 1°.21.⌋

1°.42 $d_p : X \times X \to \mathbb{R},\ d_p(x,y) := \left(\sum\limits_{k=1}^{n} d_k^p(x_k,y_k)\right)^{1/p},\ p > 1;$

⌈**R:** Analog cu 1°.20.⌋

1°.43 $d' : X \times X \to \mathbb{R},\ d'(x,y) := \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{d_k(x_k,y_k)}{1 + d_k(x_k,y_k)}.$

⌈**R:** Analog cu 1°.23.⌋

1°.44 Să se arate că următoarele spaţii metrice sunt izometrice:

1) $(\mathbb{R}^2,d_1)$ şi $(\mathbb{C},d_1)$; 2) $(\mathbb{R}^2,d_2)$ şi $(\mathbb{C},d_2)$; 3) $(\mathbb{R}^2,d_p)$ şi $(\mathbb{C},d_p)$;

4) $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ şi $(\mathbb{C}, d_\infty)$; 5) $(\mathbb{R}^2, d')$ şi $(\mathbb{C}, d')$; 6) $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), d_1)$ şi $(\mathbb{R}^{mn}, d_1)$;
7) $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), d_2)$ şi $(\mathbb{R}^{mn}, d_2)$; 8) $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), d_p)$ şi $(\mathbb{R}^{mn}, d_p)$;
9) $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), d_\infty)$ şi $(\mathbb{R}^{mn}, d_\infty)$; 10) $(\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), d')$ şi $(\mathbb{R}^{mn}, d')$;

⌈**R:** Izometria dintre spaţiile $\mathbb{R}^2$ şi $\mathbb{C}$ este aplicaţia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$, $f((x,y)) = x+iy = z$, iar izometria dintre spaţiile $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ şi $\mathbb{R}^{mn}$ este aplicaţia $f:\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^{mn}$

$$f(A) = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}, ..., a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}),\ \forall A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}.\rfloor$$

Să se calculeze distanţa în $X = (s)$ (vezi ex. $1°.30$) dintre şirurile:

1°.45 $x = (x_n = 1)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $y = \left(y_n = \dfrac{1+(-1)^{n-1}}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$;

⌈**R:** $d(x,y) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1+(-1)^k}{2^k\left(3+(-1)^k\right)} = \lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{1}{2^{2k+1}} = \dfrac{1}{6}.\rfloor$

1°.46 $x = (x_n = 1+(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $y = \left(y_n = 1-(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

⌈**R:** Deoarece $\dfrac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|} = \begin{cases} 2/3, & \text{dacă} \quad n = 4m \vee n = 4m+1,\\ 0, & \text{dacă} \quad n = 4m+2 \vee n = 4m+3,\end{cases}$ avem $d(x,y) = 16/15.\rfloor$

1°.47 Calculaţi distanţa în $X = (l_2)$ (vezi ex. $1°31$) dintre şirurile $x = \left(x_n = \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $y = \left(y_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

⌈**R:** $d(x,y) = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(k+1)^2}\right)^{1/2} = \left(\dfrac{\pi^2}{6}-1\right)^{1/2}.\rfloor$

Să se calculeze distanţa în $X = (m)$ (vezi ex. $1°.32$) dintre şirurile:

1°.48 $x = \left(x_n = \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $y = \left(y_n = \dfrac{1+(-1)^{n-1}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$;

⌈**R:** $d(x,y) = \sup\{\dfrac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\} = 1.\rfloor$

1°.49 $x = \left(x_n = \dfrac{\cos(n\pi)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $y = \left(y_n = \dfrac{n+1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

⌈**R:** $d(x,y) = \sup\left\{\dfrac{4m-1}{4m-3},\ \dfrac{1}{4m-2},\ 1,\ \dfrac{1}{4m};\ m\in\mathbb{N}^*\right\} = 3.\rfloor$

Să se calculeze distanţa în $X = M([0,1];\mathbb{R})$ (vezi ex. $1°.32$) dintre funcţiile:

1°.50 $f(x) = x, g(x) = e^x - 1$;

⌈**R:** $d(f,g) = e-2.\rfloor$

1°.51 $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x\in[0,1/2],\\ 1, & \text{dacă} \quad x\in]1/2,1],\end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă} \quad x\in[0,1/2],\\ x, & \text{dacă} \quad x\in]1/2,1],\end{cases}$.

⌈**R:** $d(f,g) = 1/2.\rfloor$

Să se calculeze distanţa în $C°([a,b];\mathbb{R})$ (vezi ex. $1°.34$) dacă:

1°.52 $f(x) = x\cdot e^{-x}$, $g(x) = 0$, $x\in[0,2]$; ⌈**R:** $d(f,g) = 1/e.\rfloor$

1°.53 $f(x) = \sin(2x)$, $g(x) = \sin(x)$, $x\in[0,\pi/2]$; ⌈**R:** $d(f,g) = 1.\rfloor$

1°.54 $f(x) = x$, $g(x) = \ln(x)$, $x\in[e^{-1}, e]$; ⌈**R:** $d(f,g) = e-1.\rfloor$

1°.55 $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $x\in[0,1]$; ⌈**R:** $d(f,g) = 4/27.\rfloor$

1°.56 $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$, $g(x) = 0$, $x\in[0,\pi]$, $n\in\mathbb{N}^*$; ⌈**R:** $d(f,g) = 1/n^2.\rfloor$

1°.57 $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2x)}{n}$, $g(x) = 0$, $x \in [0, 2\pi], n \in \mathbb{N}^*$. $\lceil$**R:** $d(f, g) = 1/n.\rfloor$

Să se calculeze distanţa în $X = C^1([a, b]; \mathbb{R})$ (vezi ex. 1°.35) dacă:

1°.58 $f(x) = x$, $g(x) = \ln(x)$, $x \in [e^{-1}, e]$; $\lceil$**R:** $d(f, g) = 2(e - 1).\rfloor$
1°.59 $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $x \in [0, 1]$; $\lceil$**R:** $d(f, g) = 31/27.\rfloor$
1°.60 $f(x) = \sin \dfrac{x}{n}$, $g(x) = 0$, $x \in [0, \pi]$; $\lceil$**R:** $d(f, g) = 1 + \pi.\rfloor$
1°.61 $f(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^2 + 1}$, $g(x) = 0$, $x \in [0, 2\pi]$. $\lceil$**R:** $d(f, g) = \dfrac{1 + n}{1 + n^2}.\rfloor$

§2.2. Spaţii liniare (vectoriale). Subspaţii

2°.1 Fie **K** un corp comutativ. Corpul **K** este un **K**-spaţiu liniar (vectorial)?

$\lceil$**R:** Corpul comutativ $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ asigură o structură de grup abelian (comutativ) faţă de operaţia " $+$ " iar înmulţirea din **K** satisface proprietăţile înmulţirii cu scalari.$\rfloor$

2°.2 Fie $(\mathbb{Z}, +)$ grupul numerelor întregi. Să se arate că în $\mathbb{Z}$ nu se poate defini o structură de $\mathbb{Q}$ -spaţiu vectorial şi nici de $\mathbb{R}$ - spaţiu vectorial.

$\lceil$**R:** Deoarece $x = 1 \in \mathbb{Z}$ şi $\alpha = 1/2 \in \mathbb{Q}$, totuşi $\alpha \cdot x \notin \mathbb{Z}$. Prin urmare $\mathbb{Z}$ nu poate fi un $\mathbb{Q}$ - spaţiu liniar. Cum $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, cu atât mai mult $\mathbb{Z}$ nu poate fi un $\mathbb{R}$ - spaţiu liniar.$\rfloor$

Să se arate că:

2°.3 $\mathbb{Q}$ este un $\mathbb{Q}$ - spaţiu vectorial. **2°.4** $\mathbb{R}$ este un $\mathbb{Q}$ - spaţiu vectorial.
2°.5 $\mathbb{R}$ este un $\mathbb{R}$ - spaţiu vectorial. **2°.6** $\mathbb{C}$ este un $\mathbb{Q}$ - spaţiu vectorial.
2°.7 $\mathbb{C}$ este un $\mathbb{R}$ - spaţiu vectorial. **2°.8** $\mathbb{C}$ este un $\mathbb{C}$ - spaţiu vectorial.

2°.9 Mulţimea polinoamelor cu coeficienţi reali $\mathbb{R}[X]$ poate să formeze un $\mathbb{R}$ - spaţiu liniar (vectorial)?

$\lceil$**R:** Prin $\mathbb{R}[X]$ se notează mulţimea tuturor polinoamelor cu coeficienţi reali, adică $\mathbb{R}[X] = \{p/p = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} a_k X^k,\ \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+} \subset \mathbb{R}$, cu proprietatea că numai un număr finit de termeni sunt diferiţi de zero[2]$\}$. Suma a două polinoame $p = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} a_k X^k$ şi $q = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} b_k X^k$ este polinomul $p + q := \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (a_k + b_k) X^k$, iar $(\mathbb{R}[X], +)$ este o structură de grup abelian. Polinomul nul, notat 0, are toţi coeficienţii $a_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$. Înmulţirea dintre un scalar real şi un polinom este tot un polinom, $\alpha p := \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (\alpha a_k) X^k$, iar $\mathbb{R} \times \mathbb{R}[X] \ni (\alpha, p) \to \alpha \cdot p \in \mathbb{R}[X]$ satisface axiomele înmulţirii cu scalari. Deci răspunsul este afirmativ.$\rfloor$

2°.10 Fie $X \neq \emptyset$ şi Y un **K** - spaţiu liniar (vectorial). Pe mulţimea $\mathcal{F}(X; Y) = \{f/f : X \to Y\}$ se definesc operaţiile:

- ■ adunarea funcţiilor $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, $\forall f, g \in \mathcal{F}(X; Y)$ şi $\forall x \in X$;
- ■ înmulţirea cu scalari $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$, $\forall \alpha \in \mathbf{K}$ şi $\forall f \in \mathcal{F}(X : Y)$.

Să se arate că $\mathcal{F}(X; Y)$ este un **K** - spaţiu liniar.

$\lceil$**R:** Verificarea axiomelor este uşor de făcut şi se lasă ca exerciţiu pentru cititor. Menţionăm că funcţia nulă $f = 0(\cdot)$ satisface condiţia $0(x) = 0_Y$, $\forall x \in X.\rfloor$

2°.11 Fie $\mathcal{O} = \{f/f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ (mulţimea funcţiilor original) care satisfac condiţiile;

(i) $f(x) = 0$, $\forall x < 0$;

(ii) f este continuă cu excepţia unui număr finit de puncte de discontinuitate de speţa întâi în orice interval finit;

(iii) $\exists s_0 \geq 0$ şi $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq M \cdot e^{s_0 x}$, $\forall x > 0$.

[2]mulţime de suport finit

Să se arate că $\mathcal{O}$ este un $\mathbb{R}$ - spaţiu liniar.

⌈**R:** Operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari se definesc ca la exerciţiul precedent. Să arătăm că ele saunt bine definite. Dacă $f, g \in \mathcal{O}$, atunci există $s_1 \geq 0$, $M_1 > 0$ şi respectiv $s_2 \geq 0$, $M_2 > 0$, astfel încât $|f(x)| \leq M_1 e^{s_1 x}$ şi respectiv $|g(x)| \leq M_2 e^{s_2 x} \Rightarrow |(f+g)(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq (M_1+M_2)e^{sx}$, $\forall x > 0$, unde $s = \max\{s_1, s_2\} \Rightarrow f + g \in \mathcal{O}$. Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci $|\alpha \cdot f(x)| \leq \big(|\alpha| M\big) e^{s_1 x} \Rightarrow (\alpha \cdot f) \in \mathcal{O}$.⌋

2°.12 Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{K}$ un corp comutativ şi $\mathbf{K}^n = \{x = (\alpha_1, ..., \alpha_n)/\alpha_i \in \mathbf{K},\ i = 1, ..., n\}$. Se definesc operaţiile:

$x + y := (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n)$, $\quad x = (\alpha_1, ..., \alpha_n), y = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbf{K}^n$;

$\lambda x := (\lambda\alpha_1, ..., \lambda\alpha_n)$, $\quad \lambda \in \mathbf{K}$ şi $x = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbf{K}^n$.

(i) Să se arate că ansamblul $(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}, +, \cdot)$ este un spaţiu liniar (vectorial).

(ii) Să se arate că

$$X_i = \{x = (\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) \in \mathbf{K}^n\}$$

este un subspaţiu liniar (vectorial) al lui $\mathbf{K}^n$, $i = 1, ..., n$.

(iii) Să se arate că

$$X^\circ = \{x = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbf{K}^n/\alpha_1 + ... + \alpha_n = 1\}$$

(1 este unitatea corpului $\mathbf{K}$) nu formează subspaţiu liniar (vectorial) al lui $\mathbf{K}^n$.

⌈**R:** (i) $(\mathbf{K}^n, +)$ este un grup comutativ, deoarece $\mathbf{K}$ este un corp comutativ. Legea de compoziţie externă (1 este elementul unitate din $\mathbf{K}$) verifică axiomele spaţiului vectorial. (ii) $x + y = (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_{i-1} + \beta_{i-1}, 0, \alpha_{i+1} + \beta_{i+1}, ..., \alpha_n + \beta_n) \in X_i$ şi $\lambda x = (\lambda\alpha_1, ..., \lambda\alpha_{i-1}, 0, \lambda\alpha_{i+1}, ..., \lambda\alpha_n) \in X_i$, deci X_i este un subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial $(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}, +, \cdot)$, $i = 1, ..., n$. (iii) Deoarece mulţimea X° nu conţine vectorul nul, rezultă că nu poate fi subspaţiu vectorial al lui $(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}, +, \cdot)$.⌋

Să se precizeze care dintre mulţimile de mai jos sunt subspaţii liniare ale $\mathbb{R}$ - spaţiului liniar $\mathbb{R}^2$ sau $\mathbb{R}^3$. În caz afirmativ, să se precizeze şi dimensiunea subspaţiului liniar respectiv.

2°.13 $\mathcal{X} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2/x = (x_1, x_2)$ se găseşte pe o dreaptă ce trece prin originea lui $\mathbb{R}^2\}$. ⌈**R:** Da; dim$\mathcal{X}$=1.⌋

2°.14 $\mathcal{X} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2/x = (x_1, x_2)$ se găseşte pe o dreaptă care nu trece prin originea lui $\mathbb{R}^2\}$. ⌈**R:** Nu.⌋

2°.15 $\mathcal{X} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3/x = (x_1, x_2, x_3)$ se găseşte pe o dreaptă ce trece prin originea lui $\mathbb{R}^3\}$. ⌈**R:** Da; dim$\mathcal{X}$=1.⌋

2°.16 $\mathcal{X} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3/x = (x_1, x_2, x_3)$ se găseşte pe o dreaptă care nu trece prin originea lui $\mathbb{R}^3\}$. ⌈**R:** Nu.⌋

2°.17 $\mathcal{X} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3/x = (x_1, x_2, x_3)$ se află într-un plan care trece prin originea lui $\mathbb{R}^2\}$. ⌈**R:** Da; dim$\mathcal{X}$=2.⌋

2°.18 $\mathcal{X} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3/x = (x_1, x_2, x_3)$ se află într-un plan care nu trece prin originea lui $\mathbb{R}^2\}$. ⌈**R:** Nu.⌋

2°.19 Fie $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ sau $\mathbf{K} = \mathbb{C}$. Notăm

$$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K}) := \{A = \big(a_{ij}\big)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}/a_{ij} \in \mathbf{K},\ i = 1, ..., m \text{ şi } j = 1, ..., n\}$$

mulţimea matricelor cu elemente din $\mathbf{K}$.

Se definesc următoarele operaţii:

■ adunarea $A+B := \big(a_{ij}+b_{ij}\big)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}, B=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$,
■ înmulţirea cu scalari $\alpha A = (\alpha a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, $\forall \alpha \in \mathbf{K}$ şi $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$.
Să se arate că $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ este un $\mathbf{K}$ - spaţiu liniar.

2°.20 Fie $(s)=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}/x_n\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}^*\}$ - mulţimea şirurilor de numere reale. Se definesc următoarele operaţii între şirurile de numere reale:
■ adunarea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}+(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} := (x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in(s)$,
■ înmulţirea cu scalari $\alpha(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} := (\alpha x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ şi $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in(s)$.
Să se arate că (s) devine un $\mathbb{R}$ - spaţiu liniar.

Să se precizeze care dintre mulţimile de mai jos sunt subspaţii liniare ale $\mathbb{R}$ - spaţiului liniar (s). În caz afirmativ, să se precizeze şi dimensiunea subspaţiului liniar respectiv.
Fie $p\in\mathbb{N}^*$. $a_0,a_1,...,a_n\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}^*$.

2°.21 $\mathcal{X}=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(s)/a_0x_{n+p}+a_1x_{n+p-1}+...+a_px_n=0,\ \forall n\in\mathbb{N}\}$.
⌈**R:** Da; dim$\mathcal{X}=p$.⌋

2°.22 $\mathcal{X}=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(s)/a_0x_{n+p}+a_1x_{n+p-1}+...+a_px_n=b,\ \forall n\in\mathbb{N}\}$.
⌈**R:** Nu.⌋

Să se precizeze care dintre mulţimile de mai jos sunt subspaţii ale $\mathbb{R}$ - spaţiului liniar (vectorial) $\mathcal{F}([a,b];\mathbb{R})$:

2°.23 $\mathcal{M}([a,b];\mathbb{R})$ - mulţimea funcţiilor mărginite. ⌈**R:** Da.⌋
2°.24 $\mathcal{F}([a,b];\mathbb{R}_+)$ - mulţimea funcţiilor pozitive (nenegative). ⌈**R:** Nu.⌋
2°.25 $\mathcal{F}_c([a,b];\mathbb{R})$ - mulţimea funcţiilor crescătoare. ⌈**R:** Nu.⌋
2°.26 $\mathcal{F}_m([a,b];\mathbb{R})$ - mulţimea funcţiilor monotone.
⌈**R:** Nu; $f(x)=x$, $g(x)=-x^2$, $x\ge 0$, sunt monotone, iar $(f+g)(x)=x(1-x)$, $x\ge0$, nu este monotonă.⌋
2°.27 $\mathcal{F}_0([a,b];\mathbb{R})$ - mulţimea funcţiilor cu proprietatea $f(a)=0$. ⌈**R:** Da.⌋
2°.28 $\mathcal{F}_1([a,b];\mathbb{R})$ - mulţimea funcţiilor cu proprietatea $f(a)=1$. ⌈**R:** Nu.⌋
2°.29 $\mathcal{F}_\infty([a,b];\mathbb{R})$ - mulţimea funcţiilor cu proprietatea $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$. ⌈**R:** Nu.⌋
2°.30 $C^\circ([a,b];\mathbb{R})$ - mulţimea funcţiilor continue. ⌈**R:** Da.⌋
2°.31 $\mathcal{D}(\mathbf{I};\mathbb{R})$ - mulţimea funcţiilor derivabile pe $\mathbf{I}$. ⌈**R:** Da.⌋
2°.32 $C^1([a,b];\mathbb{R})$ - mulţimea funcţiilor derivabile cu derivata continuă. ⌈**R:** Da.⌋
2°.33 $C^n([a,b];\mathbb{R})$ - mulţimea funcţiilor care au derivate continue până la ordinul $n>1$. ⌈**R:** Da.⌋
2°.34 $\mathcal{X}=\{y\in C^n(\mathbf{I};\mathbb{R})/a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1y'+a_0=0\}$.
⌈**R:** Da; dim$\mathcal{X}=n$.⌋
2°.35 $\mathcal{X}=\{y\in C^n(\mathbf{I};\mathbb{R})/a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1y'+a_0=b\}$.
⌈**R:** Nu.⌋
2°.36 $C^\infty(\mathbf{I};\mathbb{R})$ - mulţimea funcţiilor indefinit derivabile pe $\mathbf{I}$. ⌈**R:** Da.⌋
2°.37 $\mathcal{L}([a,b];\mathbb{R})$ - mulţimea funcţiilor lipschitziene. ⌈**R:** Da.⌋
2°.38 $\mathcal{I}([a,b];\mathbb{R})$ - mulţimea funcţiilor integrabile Riemann. ⌈**R:** Da.⌋

Să se precizere dacă următoarele submulţimi ale lui (s) sunt subspaţii liniare:

2°.39 $(m)=(l_\infty)=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}/x_n\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sup\{|x_n|;\,n\in\mathbb{N}^*\}\}$ - mulţimea şirurilor mărginite. ⌈**R:** Da.⌋
2°.40 $(c_0)=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in(c)/\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\}$. ⌈**R:** Da.⌋
2°.41 (c) - mulţimea şirurilor convergente. ⌈**R:** Da.⌋

2°.42 (s_m) - mulţimea şirurilor monotone.

⌈**R:** Nu; şirurile $(x_n = 9n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(y_n = -n^3)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt monotone în timp ce suma lor $\big(n(9-n^2)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu este şir monoton.⌋

2°.43 (s_f) - mulţimea şirurilor fundamentale. ⌈**R:** Da.⌋

2°.44 (s_{sm}) - mulţimea şirurilor strict monotone. ⌈**R:** Nu.⌋

2°.45 $(l_p) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in (s)/ \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^p < \infty\}$. $1 \le p < \infty$.

⌈**R:** Da. **I:** Se definesc operaţiile: $x + y := (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $\lambda x := (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Mai întâi să arătăm că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ şi orice $p \ge 1$ are loc inegalitatea

$$|a+b|^p \le 2^p(|a|^p + |b|^p). \qquad (**)$$

Din inegalitatea $|a+b| \le |a|+|b| \le 2\max\{|a|,|b|\} \Rightarrow |a+b|^p \le 2^p\big(\max\{|a|,|b|\}\big)^p = 2^p\max\{|a|^p,|b|^p\} \le 2^p\big(|a|^p + |b|^p\big)$.

Fie $x, y \in (l_p)$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$.

Folosind relaţia $(**)$ avem $|x_k+y_k|^p \le 2^p\big(|x_k|^p+|y_k|^p\big)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, deci $\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p \le 2^p\sum\limits_{k=1}^{n}\big(|x_k|^p + |y_k|^p\big) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p \le \lim\limits_{n\to\infty}2^p\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^p + \lim\limits_{n\to\infty}2^p\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k|^p < \infty \Rightarrow x+y \in (l_p)$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|\lambda x_k|^p = |\lambda|^p\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^p < \infty \Rightarrow \lambda x \in (l_p)$.⌋

2°.46 $l_0 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (s)/\exists n_x \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n = 0, \forall n > n_x\}$ - mulţimea şirurilor de numere reale de suport finit.

⌈**R:** Da. *Observaţie* Are loc echivalenţa $\mathbb{R}[X] \approx l_0$.⌋

2°.47 $vb = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (s)/ \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k - x_{k+1}| < \infty\}$ - mulţimea şirurilor de numere reale cu variaţie mărginită.

⌈**R:** Da. **I:** Fie $x, y \in vb$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|(x_k+y_k) - (x_{k+1}+y_{k+1})| \le \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k - x_{k+1}| + \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k - y_{k+1}| < \infty$ şi $\forall\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|(\lambda x_k) - (\lambda x_{k+1})| = |\lambda|\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k - x_{k+1}| < \infty$.⌋

Fie $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) := M_{n,n}(\mathbf{K})$. Să se precizeze care dintre următoarele submulţimi ale lui $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sunt subspaţii liniare:

2°.48 Mulţimea matricelor cu prima linie nulă. ⌈**R:** Da.⌋

2°.49 Mulţimea matricelor diagonale. ⌈**R:** Da.⌋

2°.50 Mulţimea matricelor superior (inferior) triunghiulare. ⌈**R:** Da.⌋

2°.51 Mulţimea matricelor simetrice. ⌈**R:** Da.⌋

2°.52 Mulţimea matricelor antisimetrice. ⌈**R:** Da.⌋

2°.53 Mulţimea matricelor inversabile. ⌈**R:** Nu.⌋

Să se precizeze care dintre submulţimile de mai jos sunt subspaţii liniare (vectoriale) ale $\mathbb{R}$ - spaţiului liniar (vectorial) $\mathbb{R}[X]$ - mulţimea polinoamelor în nedeterminata X cu coeficienţi reali:

2°.54 $\{p \in \mathbb{R}[X]/\text{grad}(p) = n\}$. ⌈**R:** Nu.⌋

2°.55 $\mathbb{R}_n[X] = \{p \in \mathbb{R}[X]/\text{grad}(p) \le n\}$. ⌈**R:** Da.⌋

2°.56 $\{p \in \mathbb{R}[X]/\text{grad}(p) > n\}$. ⌈**R:** Nu.⌋

2°.57 $\{p \in \mathbb{R}[X]/p(-x) = p(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$. ⌈**R:** Da.⌋

2°.58 $\{p \in \mathbb{R}[X] / p(-x) = -p(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$. ⌈**R:** Da.⌋

§2.3. Spaţii normate

Să se stabilească dacă funcţiile de mai jos sunt norme:

3°.1 $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+,\ \|x\|_1 := \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|,\ x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$

⌈**R:** 1° $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| = 0 \Rightarrow x_k = 0, k = 1, ...n$. 2° Evidentă. 3° $\|x+y\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \le \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k| + \sum\limits_{k=1}^{n} |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1$.⌋

3°.2 $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+,\ \|x\|_p := \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p},\ p > 1.$

⌈**R:** Pentru 3° se foloseşte inegalitatea lui Minkowski.⌋

3°.3 $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+,\ \|x\|_\infty := \max\{|x_k|;\ i = 1, ..., n\}.$

⌈**R:** $\|x+y\|_\infty = \max\{|x_k + y_k|;\ k = 1, ..., n\} \le \max\{|x_k| + |y_k|;\ k = 1, ..., n\} \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.⌋

3°.4 $\varphi(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+,\ \varphi(x) := \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{|x_k|}{1 + |x_k|}.$

⌈**R:** φ nu este normă deoarece $\varphi(\alpha x) \ne |\alpha| \varphi(x)$.⌋

3°.5 $X = C^\circ([a,b];\mathbb{R}) = \{f / f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcţie continuă$\}$, $\|\cdot\|_{\sup} : X \to \mathbb{R}_+,$

$$\|f\|_{\sup} = \sup\{|f(x)|;\ x \in [a,b]\}.$$

⌈**R:** 1° $\|f\|_{\sup} = 0 \Rightarrow (|f(x)| = 0,\ \forall x \in [a,b]) \Rightarrow f = 0(\cdot)$; 2°$\|\alpha f\|_{\sup} = \sup\{|\alpha f(x)|;\ x \in [a,b]\} = \sup\{|\alpha||f(x)|;\ x \in [a,b]\} = |\alpha| \cdot \sup\{|f(x)|;\ x \in [a,b]\} = |\alpha| \cdot \|f\|_{\sup}$; 3° $\|f+g\|_{\sup} = \sup\{|f(x) + g(x)|;\ x \in [a,b]\} \le \sup\{|f(x)| + |g(x)|\ \ x \in [a,b]\} \le \|f\|_{\sup} + \|g\|_{\sup}$.⌋

3°.6 $X = C^\circ([a,b];\mathbb{R}) = \{f / f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcţie continuă$\}$ şi $\|\cdot\|_2 : X \to \mathbb{R}_+,$

$$\|f\|_2 := \left(\int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

⌈**R:** 1° $\|f\|_2 = 0 \Rightarrow \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0$. Dacă $f \ne 0(\cdot)$, atunci $\exists x^\circ \in [a,b]$ astfel încât $f(x^\circ) \ne 0 \Rightarrow f^2(x^\circ) > 0$. Cum $f^2 \in C^\circ([a,b];\mathbb{R}) \Rightarrow \exists a \le \alpha < \beta \le b$ astfel încât $x^\circ \in [\alpha, \beta]$ şi $f^2(x) > 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$. Din teorema de medie avem $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \ge \int_\alpha^\beta f^2(x)\mathrm{d}x = f^2(\xi)(\beta - \alpha) > 0$, ceea ce contrazice ipoteza. Deci $f = 0(\cdot)$; 2° $\|\alpha f\|_2 = \left(\int_a^b (\alpha f)^2(x)\mathrm{d}x \right)^{1/2} = |\alpha| \cdot \|f\|_2$; 3° $\|f+g\|_2^2 = \int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)^2 \mathrm{d}x \le \big(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2\big)^2$ (s-a folosit inegalitatea lui Schwarz $\left| \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \right| \le \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \right)^{1/2}$, $\forall f, g \in C^\circ([a,b],\mathbb{R})$).⌋

3°.7 Fie $X = C^\circ([a,b];\mathbb{R}) = \{f/f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - funcţie continuă$\}$ cu structura de spaţiu liniar real.

1) Dacă $p, q > 1$ cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, atunci

$$\int_a^b |f(x) \cdot g(x)| \mathrm{d}x \le \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} \forall f, g \in \mathcal{X} \tag{2.7}$$

(inegalitatea lui Hölder).

2) Funcţia $\|\cdot\|_p : X \to \mathbb{R}$,

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}, \, p \ge 1, \tag{2.8}$$

este o normă pe X.

⌈**R:** 1) Dacă $\left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} = 0$ sau dacă $\left(\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} = 0$, atunci $f = 0(\cdot)$ sau $g = 0(\cdot)$. Într-adevăr, dacă admitem că $f \ne 0(\cdot)$, atunci există $x^\circ \in [a,b]$ astfel încât $f(x^\circ) \ne 0 \Rightarrow |f(x^\circ)|^p \not> 0$. Cumn $|f|^p$ este funcţie continuă, atunci $\exists[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ astfel încât $\alpha < \beta$, $x^\circ \in [\alpha,\beta]$ şi $|f(x)|^p > 0$, $\forall x \in [\alpha,\beta] \Rightarrow \int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x \ge \int_\alpha^\beta |f(x)|^p \mathrm{d}x = |f(\xi)|^p(\beta - \alpha) > 0$ ceea ce contrazice ipoteza $\left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} = 0$. Deci $f = 0(\cdot) \Rightarrow f \cdot g = 0(\cdot)$, iar relaţia $(***)$ devine egalitate.

Dacă $\left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} > 0$ şi $\left(\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} > 0$, înlocuim în relaţia (2.1) pe a cu $\dfrac{|f|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}}$ şi pe b cu $\dfrac{|g|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q p \mathrm{d}x\right)^{1/q}}$. Obţinem:

$$\frac{|fg|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q}} \le \frac{|f|^p}{p\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x} + \frac{|g|^q}{q\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x}.$$

Integrând avem

$$\frac{\int_a^b |f(x)g(x)| \mathrm{d}x}{\left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q}} \le \frac{\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x}{p\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x} + \frac{\int_a^b |g(x(|^q \mathrm{d}x}{q\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

şi deci

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \mathrm{d}x \le \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q}.$$

2) Proprietăţile 1° şi 2° sunt evidente. Să dovedim inegalitatea

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

Dacă $p=1$ sau dacă $\int_a^b |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}x = 0$ relaţia este verificată. Presupunem $p>1$ şi $\int_a^b |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}x > 0$. Avem inegalitatea

$$|f+g|^p \le |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}.$$

Dacă q este conjugatul lui p, aplicând inegalitatea lui Hölder, obţinem:

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} \mathrm{d}x + \int_a^b |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} \mathrm{d}x \le$$

$$\le \|f\|_p \cdot \||f+g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p \cdot \||f+g|^{p-1}\|_q.$$

Dar $\||f+g|^{p-1}\|_q = \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} \mathrm{d}x\right)^{1/q} = \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/q}$.

Aşadar, avem inegalitatea

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}x \le \Big(\|f\|_p + \|g\|_p\Big) \cdot \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

de unde urmează

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1-1/q} = \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} = \|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p,$$

adică relaţia cerută (*Inegalitatea lui Minkowski*).⌋

Să se arate că spaţiile liniare reale de mai jos sunt spaţii normate:

3°.8 $X=(l_1)=\{x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}/x\in(s),\ \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|<\infty\}$. Funcţia $\|\cdot\|_1:(l_1)\to\mathbb{R}$, $\|x\|_1 := \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|$ este o normă.

⌈**R:** Analog ca la ex. 3°.1.⌋

3°.9 $X=(l_p)=\{x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}/x\in(s),\ \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^p<\infty\}$. Funcţia $\|\cdot\|_p:(l_p)\to\mathbb{R}$, $\|x\|_p := \left(\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}$ este o normă.

⌈**R:** Se foloseşte inegalitatea lui Minkowski.⌋

3°.10 $X=(l_\infty)=\{x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}/x\in(s), \sup\{|x_n|;\,n\in\mathbb{N}^*\}<\infty\}$. Funcţia $\|\cdot\|_\infty:(l_\infty)\to\mathbb{R}$, $\|x\|_\infty := \sup\{|x_n|;\,n\in\mathbb{N}^*\}$ este o normă.

⌈**R:** Se arată ca la ex.3°.3.⌋

3°.11 $X=(l_0)=\{x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}/x\in(s),\ \exists n_x\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $x_n=0,\ \forall n>n_x\}$. Funcţia $\|\cdot\|_\infty:(l_0)\to\mathbb{R}$, $\|x\|_\infty := \max\{|x_n|;\,n\in\mathbb{N}^*\}$ este o normă.

⌈**R:** Se arată ca la ex.3°.3.⌋

Fie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \{A/A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n},\ a_{ij}\in\mathbb{R},\ \forall i,j=1,...,n\}$ cu structura obişnuită de spaţiu liniar real (vezi ex. 2°.13) şi $\|\cdot\|_k : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+,\ k=1,...,6$. Să se arate că aceste funcţii sunt norme.

3°.12 $\|\cdot\|_1 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+,\ \|A\|_1 := \sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Ax^T\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax^T\|$;

⌈**R:** Inegalitatea $\|A\|_1 \ge \sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax^T\|$ este evidentă. Pentru inegalitatea contrară, dacă $0 < \|x\| \le 1 \Rightarrow \|Ax^T\|_1 = \|A\Big(\dfrac{x^T}{\|x\|}\Big)\|\cdot\|x\| \le \|A\Big(\dfrac{x^T}{\|x\|}\Big)\| \le \sup\limits_{\|y\|=1}\|A\cdot y^T\|$, (deoarece $\|\dfrac{x^T}{\|x\|}\| = 1) \Rightarrow \|A\|_1 \le \sup\limits_{\|x\|=1}\|A\cdot x^T\|$.⌋

3°.13 $\|\cdot\|_2 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+,\ \|A\|_2 := \sum\limits_{i,j=1}^n |a_{ij}|$;

⌈**R:** Verificarea axiomelor normei rezultă din proprietăţile modulului.⌋

3°.14 $\|\cdot\|_3 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+,\ \|A\|_3 := \Big(\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}^2\Big)^{1/2} = \big(\mathrm{tr}(A^TA)\big)^{1/2}$, unde $\mathrm{tr}(A) := \sum\limits_{i=1}^n a_{ii}$ este numită urma matricei A;

⌈**R:** Dacă $B = A\cdot A^T$, atunci $b_{ij} = \sum\limits_{k=1}^n a_{ik}a_{jk} \Rightarrow \mathrm{tr}(B) = \sum\limits_{i=1}^n b_{ii} = \sum\limits_{i,k=1}^n a_{ik}^2$.⌋

3°.15 $\|\cdot\|_4 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+,\ \|A\|_4 := \max\{\sum\limits_{j=1}^n |a_{ij}|;\ i=1,...,n\}$;

3°.16 $\|\cdot\|_5 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+,\ \|A\|_5 := \max\{\sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|;\ j=1,...,n\}$;

3°.17 $\|\cdot\|_6 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+,\ \|A\|_6 := \max\{|a_{ij}|;\ i,j=1,...,n\}$.

3°.18 Să se arate că normele $\|\cdot\|_k, k=1,...,5$ verifică relaţia

$$\|A^n\|_k \le \big(\|A\|_k\big)^n,\ n\in\mathbb{N}^*.$$

⌈**R:** $\|A^2\|_1 = \max\{\|A(Ax^T)\|;\ \|x\|\le 1\} \le \max\{\|A\|_1\cdot\|A\cdot x^T\|;\ \|x\|\le 1\} \le \max\{\|A\|_1^2\cdot\|x\|;\ \|x\|\le 1\} = \|A\|_1^2$, etc.⌋

3°.19 Să se calculeze $\|A\|_k,\ k=1,...,6$, dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

⌈**R:** $\|A\|_1 = 4$, dacă se consideră $\|x\|_1$; $\|A\|_1 = \sqrt{10}$, dacă se foloseşte $\|x\|_2$; $\|A\|_1 = 3$, dacă se foloseşte $\|x\|_\infty$; $\|A\|_2 = 6$; $\|A\|_3 = \sqrt{14}$; $\|A\|_4 = 3$; $\|A\|_5 = 4$; $\|A\|_6 = 3$.⌋

3°.20 Fie $X = \mathcal{P}_n([-1,1];\mathbb{R})$ - spaţiul liniar real al funcţiilor polinomiale de grad cel mult n. Să se arate că funcţia $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$,

$$\|p\| := \max_{0\le k\le n}\Big[\max_{x\in[-1,1]}|p^{(k)}(x)|\Big],$$

este o normă pe X (prin $p^{(k)}(\cdot)$ s-a notat derivata de ordinul k a funcţiei polinomiale).

Să se calculeze $\|p\|$, dacă $p(x) = x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 1 \in \mathcal{P}_5([-1,1];\mathbb{R})$.

⌈**R:** 1° $\|p\| = 0 \Rightarrow p^{(k)}(x) = 0,\ \forall x\in[-1,1]$ şi $\forall k = 0,...,n. \Rightarrow p = 0(\cdot)$. 2° Evidentă; 3° $\|p+q\| = \max\limits_{0\le k\le n}\big[\max\limits_{x\in[-1,1]}|p^{(k)}(x)+q^{(k)}(x)|\big] \le \max\limits_{0\le k\le n}\big[\max\limits_{x\in[-1,1]}|p^{(k)}(x)| + \max\limits_{x\in[-1,1]}|q^{(k)}(x)|\big] \le \|p\|+\|q\|$. $\|p\| = 216$.⌋

3°.21 Fie X şi Y două $\mathbf{K}$ - spaţii liniare, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spaţiu normat şi $f : X \to Y$ o aplicaţie liniară şi injectivă. Atunci funcţia $\|\cdot\|_f : X \to \mathbb{R}$,

$$\|x\|_f := \|f(x)\|_Y,$$

este normă în X. Este necesar ca f să fie injectivă?

$\lceil$**R:** Dacă f nu este injectivă, nu se mai verifică prima axiomă.$\rfloor$

3°.22 Fie $X = (c) = \{z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}/z_n \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şir convergent$\}$ - mulţimea şirurilor de numere complexe cu structura de spaţiu liniar complex.

1) Să se arate că funcţia $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$,

$$\|z\|_\infty = \sup\{|z_n|;\ n \in \mathbb{N}^*\},$$

este o normă pe X.

2) Să se calculeze $\|z\|_\infty$, dacă $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ z_n = i^n\Big(\sin\dfrac{\pi}{n+1} + \ldots + \sin\dfrac{\pi}{2n}\Big),\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\lceil$**R:** 2) $|z_{n+1}| - |z_n| = -\sin\dfrac{\pi}{n+1} + \sin\dfrac{\pi}{2n+1} + \sin\dfrac{\pi}{2n+2} = -2\sin\dfrac{\pi}{2n+2}\cos\dfrac{\pi}{2n+2} + \sin\dfrac{\pi}{2n+1} + \sin\dfrac{\pi}{2n+2} > 2\sin\dfrac{\pi}{2n+2} - 2\sin\dfrac{\pi}{2n+2}\cos\dfrac{\pi}{2n+2} = 2\sin\dfrac{\pi}{2n+2}\big(1 - \cos\dfrac{\pi}{2n+2}\big) > 0$. Şirul $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este crescător şi $\|z\|_\infty = \lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = \pi\ln 2$.$\rfloor$

3°.23 Fie $(X_k, \|\cdot\|_k), k = 1, ..., n$, n - spaţii normate peste acelaşi corp $\mathbf{K}$. Pe mulţimea $X = X_1 \times ... \times X_n$ se defineşte structura de $\mathbf{K}$ - spaţiu liniar astfel:

$$\begin{aligned} x + y &:= (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n), \\ \alpha x &:= (\alpha x_1, ..., \alpha x_n), \end{aligned}$$

$\forall\alpha \in \mathbf{K},\ \forall x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in X$.

Să se arate că aplicaţiile:

$$\begin{aligned} &\|\cdot\|_p : X \to \mathbb{R}, \quad \|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_k^p\right)^{1/p},\ p \geq 1, \\ &\|\cdot\|_\infty : X \to \mathbb{R}, \quad \|x\|_\infty := \max\{\|x_k\|_k;\ k = 1, ..., n\} \end{aligned}$$

sunt norme pe X.

3°.24 Fie $B = \{0, 1\}$ cu structura de corp, adunarea modulo 2, notată " $\oplus$ " şi înmulţirea modulo 2, notată " $\cdot$ ".

Notăm $B^n = B \times ... \times B$ - n termeni.

Mulţimea B^n este înzestrată cu structura de spaţiu liniar peste corpul B:

$$\begin{aligned} x \oplus y &:= (x_1 \oplus y_1, ..., x_n \oplus y_n), \\ \alpha \cdot x &:= (\alpha \cdot x_1, ..., \alpha \cdot x_n), \end{aligned} \quad \forall x, y \in B^n \text{ şi } \forall\alpha \in B.$$

1) Să se arate că funcţia $\|\cdot\| : B^n \to \mathbb{R}$,

$$\|x\| := \sum_{k=1}^n x_k \ \text{(numărul elementelor egale cu 1)},$$

este o normă pe B^n.

2) Să se demonstreze că funcţia $d : B^n \times B^n \to \mathbb{R}$,

$$d(x,y) := \|x \oplus y\|,$$

este o metrică pe B^n (numită *distanţa Hamming*).

3) Să se calculeze distanţa Hamming dintre $x = (1,0,1,0,1,0)$ şi $y = (0,1,1,0,0,1) \in B^6$.

⌈**R:** $d(x,y) = 4$.⌋

3°.25 Fie $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ (cu norma euclidiană). Pentru $A \subset \mathbb{R}^n$ şi $B \subset \mathbb{R}^n$ închise şi nevide, notăm:

$d^*(x,A) := \inf\{\|x-y\|_2;\ y \in A\},\ \forall x \in B$,

$d^*(B,A) := \sup\{d^*(x,A);\ x \in B\}$,

$d(A,B) := \max\{d^*(A,B),\ d^*(B,A)\}$.

Să se arate că $d : \mathcal{F}_\emptyset \times \mathcal{F}_\emptyset \to \mathbb{R}$ este o metrică (*metrica Pompeiu-Hausdorff*), unde $\mathcal{F}_\emptyset$ este familia mulţimilor închise şi nevide din $\mathbb{R}^n$.

⌈**R:** $d^*(A,B) \le d(A,B)$ şi $d^*(B,A) \le d(A,B)$, $\forall A,B \in \mathcal{F}_\emptyset$. Fie $A,B,C \in \mathcal{F}_\emptyset$ şi $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$. Fie $d_1(x,y) = \|x-y\|_2$. Avem $d_1(x,z) \le d_1(x,y) + d_1(y,z)$, de unde $d^*(x,C) \le d_1(x,y) + d^*(y,C)$, $\forall x \in A$, $y \in B$ şi $d^*(z,A) \le d_1(z,y) + d^*(y,A)$, $\forall y \in B$, $z \in C$. Dar $d^*(y,C) \le d^*(B,C)$ şi $d^*(y,A) \le d^*(B,A)$. Deci $d^*(x,C) \le d_1(x,y) + d^*(B,C)$, $\forall x \in A$, $y \in B$ şi $d^*(z,A) \le d_1(z,y) + d^*(B,A)$, $\forall y \in B$, $z \in C \Rightarrow (d^*(x,C) \le d^*(x,B) + d^*(B,C), \forall x \in A$ şi $d^*(z,A) \le d^*(z,B) + d^*(B,A), \forall z \in C) \Rightarrow (d^*(A,C) \le d^*(A,B) + d^*(B,C)$, şi $d^*(C,A) \le d^*(C,B) + d^*(B,A))$. Din primele două inegalităţi găsim că $d^*(A,C) \le d(A,B) + d(B,C)$ şi $d^*(C,A) \le d(C,B) + d(B,A) \Rightarrow d(A,C) \le d(A,B) + d(B,C)$.⌋

§2.4. Produse scalare. Spaţii prehilbertiene. Spaţii euclidiene

Să se precizeze care dintre aplicaţiile de mai jos sunt produse scalare:

4°.1 $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi(x,y) = x_2y_1,\ x = (x_1,x_2),\ y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$;

⌈**R:** Nu, deoarece $\varphi(x,y) \ne \varphi(y,x)$.⌋

4°.2 $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 10x_2y_2$;

⌈**R:** Nu.⌋

4°.3 $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1$;

⌈**R:** Nu, deoarece $\varphi(x,x) = x_1x_2 + x_2x_1 = 0$ nu asigură $x_1 = x_2 = 0$.⌋

4°.4 $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$;

⌈**R:** Da.⌋

4°.5 $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi(x,y) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$;

⌈**R:** Nu, $\varphi(x,x) = (2x_1 + x_2)^2 - 2x_1^2 = 0 \Rightarrow x_2 = -(2+\sqrt{2})x_1$ sau $x_2 = -(2-\sqrt{2})x_1 \not\Rightarrow x_1 = x_2 = 0$.⌋

4°.6 $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi(x,y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$;

⌈**R:** Nu; $\varphi(x,y) \ne \varphi(y,x)$.⌋

4°.7 $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi(x,y) = x_1y_1 + x_2^2 + y_2^2 + x_2y_2$;

⌈**R:** Nu.⌋

4°.8 $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \varphi(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2,\ x = (x_1,x_2,x_3),\ y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$;

⌈**R:** Nu; pentru $x = (0,0,1)$ avem $\varphi(x,x) = 0$.⌋

4°.9 $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \varphi(x,y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 5x_3y_3 - x_1y_3 + x_2y_3;$

⌈**R:** Nu; $\varphi(x,y) \neq \varphi(y,x)$.⌋

4°.10 $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \varphi(x,y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_3;$

⌈**R:** Nu; $\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow 2x_1 = -x_2 = -x_3 \not\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$.⌋

4°.11 $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \varphi(x,y) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2;$

⌈**R:** Nu; $\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x_2 = 0$ sau $x_1 = -x_3$.⌋

4°.12 $\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$

$$\langle x,y \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

$\forall x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ y = (y_1,...,y_n) \in \mathbb{R}^n.$

⌈**R:** Da. Acest produs scalar induce norma $\|\cdot\|_2$ din $\mathbb{R}^n$.⌋

4°.13 $\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$

$$\langle x,y \rangle := \sum_{k=1}^{n} a_k x_k y_k,$$

unde $\forall x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ y = (y_1,...,y_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $a_k \in \mathbb{R}_+^*,\ k = 1,...,n.$

⌈**R:** Da.⌋

4°.14 Norma $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este indusă de un produs scalar dacă şi numai dacă $p = 2$.

⌈**R:** Din exemplul 2°.35 rezultă că norma $\|\cdot\|_2$ este indusă de un produs scalar. Reciproc, dacă norma $\|\cdot\|_p$ este indusă de un produs scalar, atunci vreeifică relaţia paralelorgramului (teorema 5):

$$\|x+\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 3\big(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2\big).$$

Dacă $1 \leq p < \infty$, pentru $x = (1,0,0,...,0)$ şi $y = (0,1,0,...,n)$ din $\mathbb{R}^n$ obţinem: $\|x+y\|_p^2 = 4^{1/p}$, $\|x-y\|_p^2 = 4^{1/p}$, $\|x\|_p^2 = 1 = \|y\|_p^2$, iar relaţia paralelogramului devine $4^{1/p} + 4^{1/p} = 4 \Rightarrow p = 2$.⌋

4°.15 $\varphi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \varphi(z,w) = 2z_1\overline{w}_1 + 3z_2\overline{w}_2,\ z = (z_1,z_2),\ w = (w_1,w_2) \in \mathbb{C}^2;$

⌈**R:** Da.⌋

4°.16 $\varphi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \varphi(z,w) = z_1w_1 + z_2w_2;$

⌈**R:** Nu; $\varphi(z,w) \neq \overline{\varphi(w,z)}$.⌋

4°.17 $\varphi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \varphi(z,w) = iz_1\overline{w}_2 + iz_2\overline{w}_1;$

⌈**R:** Nu; $\varphi(z,w) \neq \overline{\varphi(w,z)}$.⌋

4°.18 $\varphi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \varphi(z,w) = (3+i)z_1\overline{w}_2 + (3-i)z_2\overline{w}_1;$

⌈**R:** Nu; $\varphi(z,z) = (3+i)z_1\overline{z}_2 + (3-i)\overline{z}_1z_2 = 0$ care nu implică numai $z = (0,0)$ (de exemplu $\varphi((1,0),(1,0)) = \varphi((0,i),(0,i)) = 0$.⌋

4°.19 $\varphi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \varphi(z,w) = 3z_1\overline{w}_1 + 4z_2\overline{w}_2;$

⌈**R:** Da.⌋

4°.20 $\varphi : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C},\ \varphi(z,w) = 3z_1\overline{w}_1 + 4z_2\overline{w}_2,\ z = (z_1,z_2,z_3),\ w = (w_1,w_2,w_3) \in \mathbb{C}^3;$

⌈**R:** Nu; analog cu 4°.8.⌋

4°.21 $\varphi : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C},\ \varphi(z,w) = z_1\overline{w}_1 + (1-i)z_1\overline{w}_2 + (1+i)z_2\overline{w}_1 + 3z_2\overline{w}_2 + iz_2\overline{w}_3 - iz_3\overline{w}_2 + 3z_3\overline{w}_3;$

⌈**R:** Da.⌋

4°.22 $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ \ \varphi(A,B) = \mathrm{tr}(A \cdot B)$, unde $\mathrm{tr}(A) := a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$ - numită urma matricei A;

⌈**R:** Nu; $\varphi(A,A)=0 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ji}\Big)=0$, egalitatea ce nu implică $a_{ij}=0$. De exemplu, dacă $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avem $A^2=O$ şi deci $\varphi(A,A)=0$ în timp ce $A\neq O$.⌋

4°.23 $\varphi:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R},\ \varphi(A,B)=\mathrm{tr}(A\cdot B^T)$;

⌈**R:** Da.⌋

4°.24 $\varphi:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R},\ \varphi(A,B)=\mathrm{tr}(A)\cdot\mathrm{tr}(B)$;

⌈**R:** Nu; $\varphi(A,A)=0 \Rightarrow \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}\Big)^2=0 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}=0 \not\Rightarrow a_{ii}=0,\ i=1,...,n.$⌋

4°.25 $\varphi:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R},\ \varphi(A,B)=\det(A\cdot B)$;

⌈**R:** Nu; $\varphi(A+B,C)=\det(AC+BC)\neq\det(AC)+\det(BC)$. De exemplu, dacă $B=A$ şi $C=I_n$, avem $\det(2A)=2^n\det A\neq 2\det A$.⌋

4°.26 $\varphi:\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to\mathbb{C},\ \varphi(A,B)=\mathrm{tr}(A\cdot B^T)$;

⌈**R:** Nu; $\varphi(A,B)\neq\overline{\varphi(B,A)}$.⌋

4°.27 $\varphi:\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to\mathbb{C},\ \varphi(A,B)=\mathrm{tr}(A\cdot \overline{B}^T)$;

⌈**R:** Da.⌋

4°.28 $\varphi:\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\to\mathbb{C},\ \varphi(A,B)=\mathrm{tr}(\overline{A}\cdot B^T)$;

⌈**R:** Nu; $\varphi(A,B)\neq\overline{\varphi(B,A)}$.⌋

4°.29 Fie $\mathcal{I}([a,b];\mathbb{R})=\{f/f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă Riemann-Darboux$\}$ cu structura de spaţiu liniar (vectorial) real. Funcţia $\varphi:\mathcal{I}([a,b];\mathbb{R})\times\mathcal{I}([a,b];\mathbb{R})\to\mathbb{R}$,

$$\varphi(f,g):=\int\limits_{[a,b]} f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

este un produs scalar pe $\mathcal{I}([a,b];\mathbb{R})$?

⌈**R:** Nu; funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R},\ f(a)=1$ şi $f(x)=0$ dacă $x\in\,]a,b]$ este integrabilă şi $\varphi(f,f)=0$, deşi $f\equiv 0(\cdot)$.⌋

4°.30 $\mathcal{X}=C^\circ([0,1];\mathbb{R})=\{f/f$ - funcţie continuă pe $[0,1]\}$. Să se arate că funcţia $\langle\cdot,\cdot\rangle: X\times X\to\mathbb{R}$,

$$\langle f,g\rangle=\int\limits_0^1 f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x,$$

este un produs scalar pe X şi $||\cdot||_p: X\to\mathbb{R}$, $p\geq 1$, este indusă de un produs scalar dacă şi numai dacă $p=2$..

⌈**R:** Faptul că $\langle\cdot,\cdot\rangle$ este un produs scalar rezultă din exerciţiul precedent. Norma asociată acestui produs scalar este $||\cdot||_2$. Aşadar pentru $p=2$, norma $||\cdot||_2$ este indusă de un produs scalar. Reciproc, dacă $||\cdot||_p$, $p>1$, este indusă de un produs scalar, atunci din teorema 5, aceasta satisface relaţia paralelogramului

$$||f+g||_p^2+||f-g||_p^2=2||f||_p^2+2||g||_p^2.$$

Considerând funcţiile particulare $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ şi $g(x)=1-x$ obţinem $f(x)+g(x)=1$ şi $f(x)-g(x)=2x-1$. Calculând normele acestor funcţii obţinem $||f+g||_p=1,\ ||f-g||_p=\Big(\int\limits_0^1|2x-1|^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p}=\Big(\int\limits_0^{1/2}(1-2x)^p\mathrm{d}x+\int\limits_{1/2}^{1}(2x-1)^p\mathrm{d}x\Big)^{1/p}=\Big(\frac{1}{p+1}\Big)^{1/p}$, $||f||_p=\Big(\frac{1}{p+1}\Big)^{1/p}=||g||_p$. Din relaţia paralelogramului obţinem $(p+1)^{2/p}=3\Rightarrow p=2$.⌋

4°.31 Fie $C^\circ([a,b];\mathbb{R}) = \{f/f : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcţie continuă$\}$. Să se arate că funcţia $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho : C^\circ([a,b];\mathbb{R}) \times C^\circ([a,b];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\langle f, g \rangle_\rho := \int\limits_{[a,b]} \rho(x) f(x) g(x) \mathrm{d}x,$$

unde $\rho(\cdot) : C^\circ([a,b];\mathbb{R}_+^*)$, este un produs scalar.

⌈**R:** 1° Din $\langle f, f \rangle_\rho = 0$, ţinând seama de proprietăţile funcţiilor continue, rezultă $f = 0(\cdot)$. Proprietăţile integralei Riemann-Darboux asigură verificarea celorlalte axiome ale produsului scalar.⌋

4°.32 Fie $C^\circ([a,b];\mathbb{C}) = \{f/f : [a,b] \to \mathbb{C}$ funcţie continuă$\}$. Să se arate că funcţia $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho : C^\circ([a,b];\mathbb{C}) \times C^\circ([a,b];\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$,

$$\langle f, g \rangle_\rho := \int\limits_{[a,b]} \rho(x) f(x) \overline{g(x)} \mathrm{d}x,$$

unde $\rho(\cdot) : C^\circ([a,b];\mathbb{R}_+^*)$, este un produs scalar.

⌈**R:** 1° Din $\langle f, f \rangle_\rho = 0$, rezultă $|f(x)| = 0,\ \forall x \in [a,b]$.⌋

4°.33 Fie $X = \{f/f \in C^1([0,1];\mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$ cu structura de spaţiu vectorial real. Să se arate că funcţia

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}, \quad \langle f, g \rangle := \int\limits_0^1 f'(x) g'(x) \mathrm{d}x,$$

este un produs scalar pe X.

⌈**R:** 1° Din $\langle f, f \rangle = 0$, rezultă $f'(x) = 0,\ \forall x \in [0,1]$, care împreună cu condiţia $f(0) = 0 \Rightarrow f = 0(\cdot)$.⌋

4°.34 $\mathcal{X} = C^n([0,1];\mathbb{R}) = \{f/f$ - funcţie derivabilă de n - ori pe $[0,1]$ cu derivata $f^{(n)}$ continuă$\}$. Să se arate că funcţia $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$,

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^1 f^{(k)}(x) \cdot g^{(k)}(x) \mathrm{d}x,$$

este un produs scalar pe X.

⌈**R:** Da.⌋

4°.35 Fie $X = \{f/f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, a.î. $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \int\limits_0^\lambda e^{-x} f^2(x) \mathrm{d}x$ există în $\mathbb{R}\}$.

1) Să se arate că $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \int\limits_0^\lambda e^{-x} |f(x) g(x)| \mathrm{d}x,\ \forall f, g \in X$, există în $\mathbb{R}$.

2) Să se demonstreze că aplicaţia $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$, $\langle f, g \rangle := \lim\limits_{\lambda \to \infty} \int\limits_0^\lambda e^{-x} f(x) g(x) \mathrm{d}x$,

este un produs scalar pe X.

3) Fie $f, g_n \in X,\ f(x) = e^{-x^2-x},\ g_n(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$. Folosind egalităţile

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda x^n e^{-x^2}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2m-1)}{2^{m+1}}, & \text{dacă} \quad n = 2m, \\ \dfrac{(m-1)!}{2}, & \text{dacă} \quad n = 2m-1,\ m \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

şi

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda x^{2n}e^{-x}\mathrm{d}x = (2n)!,$$

să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n$, unde θ_n este unghiul dintre f şi g_n.

⌈**R:** 1) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda e^{-x}|f(x)g(x)|\mathrm{d}x \le \dfrac{1}{2}\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda e^{-x}\left[f^2(x)+g^2(x)\right]\mathrm{d}x$. 3) $\cos\theta_n = \dfrac{\langle f, g_n\rangle}{\sqrt{\langle f,f\rangle}\sqrt{\langle g_n,g_n\rangle}}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n = \dfrac{\pi}{2}$.⌋

4°.36 Fie $X = C^\circ([0,2\pi];\mathbb{R})$ spaţiul liniar (vectorial) al funcţiilor continue înzestrat cu produsul scalar

$$\langle f, g\rangle := \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

1) Fie mulţimea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, $f_0(x) = 1$, $f_{2k-1}(x) = \cos(kx), f_{2k} = \sin(kx)$, $k \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că mulţimea în cauză este independentă şi ortogonală. Să se ortonormalizeze.

2) Notăm X_{2n+1} subspaţiul de dimensiune $2n+1$ generat de

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f_0,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}f_1,\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}f_{2n}$$

(*subspaţiul liniar* (*vectorial*) *al polinoamelor trigonometrice* de ordin $\le 2n$). Să se expliciteze proiecţia lui $f \in X$ pe subspaţiul X_{2n+1}. Aplicaţie: $f(x) = x$.

⌈**R:** 1) $\langle f_n, f_m\rangle = \begin{cases} 2\pi, & \text{dacă} \quad n = m = 0, \\ \pi, & \text{dacă} \quad n = m \ge 1, \\ 0, & \text{dacă} \quad n \ne m \end{cases}$ 2) $f = \sum\limits_{k=0}^{2n}\alpha_k f_k,\ \alpha_k = \langle f, f_k\rangle$.⌋

4°.37 Fie $C^1([a,b];\mathbb{R}) = \{f/f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabilă şi cu derivata continuă$\}$ cu structura de spaţiu liniar (vectorial) real. Se consideră funcţia $\langle\cdot,\cdot\rangle : C^1([a,b];\mathbb{R}) \times C^1([a,b];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b \left[f(x)g(x) + f'(x)g'(x)\right]\mathrm{d}x,\ \forall f, g \in C^1([a,b];\mathbb{R}).$$

1) Să se arate că $\langle\cdot,\cdot\rangle$ este un produs scalar şi funcţia $||\cdot|| : C^1([a,b];\mathbb{R})$,

$$||f|| := \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\int_a^b \left[f^2(x) + f'^2(x)\right]\mathrm{d}x\right)^{1/2},$$

este o normă pe $C^1([a,b];\mathbb{R})$.

2) Să se calculeze distanţa dintre funcţiile $f_n(x) = \cos(nx)$ şi $g_m(x) = \sin(mx)$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [-\pi, \pi]$, iar $d(f, g) := \|f - g\|$.

$\lceil$**R:** 2) $d(f_n, g_m) = \|f_n - g_m\| = \left[\pi(2 + n^2 + m^2)\right]^{1/2}$.$\rfloor$

4°.38 Fie $X = (l_2)$ cu structura de spaţiu liniar (vectorial) real.

1) Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k y_k|$ există în $\mathbb{R}$, $\forall x, y \in X$.

2) Să se demonstreze că aplicţia $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle := \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in X$, este un produs scalar pe X.

3) Să se calculeze $\langle x, y \rangle$, dacă $x = \left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $y = \left(\dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Apoi să se determine $\|x - y\|$ ştiind că $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

$\lceil$**R:** 1) Rezultă din: $|x_k y_k| \le \dfrac{1}{2}(x_k^2 + y_k^2)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$ există în $\mathbb{R}$. 3) $\langle x, y \rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n(n+1)}$ $= 1$. $\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2(n+1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{2}{n(n+1)}\right) = \dfrac{\pi^2 - 9}{3}$.$\rfloor$

4°.39 Fie $\mathcal{P}([-1, 1]; \mathbb{R}) = \{p / p : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ funcţie polinomială$\}$.

1) Să se demonstreze că $\mathcal{P}([-1, 1]; \mathbb{R})$ este un spaţiu prehilbertian în raport cu produsul scalar

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^{1} p(x) q(x) \mathrm{d}x.$$

2) Să se scrie primele 5 polinoame ortogonale obţinute din sistemul de funcţii $1, x, \ldots, x^n, \ldots$ prin procedeul de ortogonalizare *Gram-Schmidt* (aceste funcţii se numesc *polinoame Legendre*).

$\lceil$**R:** 2) $q_0(x) = 1$, $q_1(x) = x$, $q_2(x) = x^2 - \dfrac{1}{3}$, $q_3(x) = x^3 - \dfrac{3}{5}x$, $q_4(x) = x^4 - \dfrac{6}{7}x^2 + \dfrac{3}{35}$, $q_5(x) = x^5 - \dfrac{10}{9}x^3 + \dfrac{5}{21}x$. Prin inducţie, se poate dovedi că $q_n(x) = \dfrac{n!}{(2n)!} \cdot \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x^2 - 1)^n\right]$.$\rfloor$

4°.40 Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică pozitiv-definită.

1) Să se arate că aplicaţia $\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\langle x, y \rangle_A := x \cdot A \cdot y^T = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

este un produs scalar (interior) pe $\mathbb{R}^n$.

În particular, dacă $A = I_n$ (matricea unitate) se obţine produsul scalar canonic din $\mathbb{R}^n$.

2) Funcţia $\|\cdot\|_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\|x\|_A := \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j\right)^{1/2},$$

este o normă pe $\mathbb{R}^n$.

3) Pentru $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $x = (1, -1), y = (2, 2)$ să se calculeze $\langle x, y\rangle_A$, $||x||_A$, $||y||_A$.

4) Să se arate că $a_{ij}^2 \le a_{ii} \cdot a_{jj}$, $\forall i, j = 1, ..., n$.

⌈**R:** 3) $\langle x, y\rangle_A = 2$, $||x||_A = 3$, $||y||_A = 2\sqrt{7}$. 4) Din inegalitatea Schwarz-Cauchy-Buniakovski, obţinem:

$$\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j\Big)^2 \le \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j\Big)\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}y_iy_j\Big),\ \forall x = (x_1, ..., x_n),\ y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

inegalitate care este adevărată şi pentru $x = e_i$, $y = e_j$, adică $a_{ij}^2 \le a_{ii} \cdot a_{jj}$, $\forall i, j = 1, ..., n$.⌋

4°.41 Fie $(X, ||\cdot||)$ un spaţiu prehilbertian real.

a) Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $x \perp y$;

(ii) $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$;

(iii) $||x|| \le ||x + \alpha y||$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;

(iv) $||x + y|| = ||x - y||$.

b) Să se interpreteze geometric (în $\mathbb{R}^2$ sau $\mathbb{R}^3$) echivalenţele de la punctul a).

⌈**Soluţie:** $(i) \Leftrightarrow (ii)$ $||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp y$. Această echivalenţă reprezintă teorema lui Pitagora.

$(i) \Leftrightarrow (iii)$ Avem $||x+\alpha y||^2 = ||x||^2 + 2\alpha\langle x, y\rangle + \alpha^2||y||^2$. Dacă $x \perp y \Rightarrow ||x+\alpha y||^2 = ||x||^2 + \alpha^2||y||^2 \ge ||x||^2 \Rightarrow ||x + \alpha y|| \Rightarrow ||x||$. Reciproc, $||x|| \le ||x + \alpha y|| \Rightarrow 2\alpha\langle x, y\rangle + \alpha^2||y||^2 \ge 0 \Leftrightarrow |\langle x, y\rangle| \ge \dfrac{\alpha}{2}||y||^2$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp y$. Perpendiculara este mai scurtă decât orice oblică.

$(i) \Leftrightarrow (iv)$ Deoarece $||x + y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2$ şi $||x - y||^2 = ||x||^2 - 2\langle x, y\rangle + ||y||^2$, atunci $||x + y||^2 = ||x - y||^2 \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp y$. Diagonalele unui paralelogram sunt egale dacă şi numai dacă el este un dreptunghi.⌋

4°.42 Fie $(X, ||\cdot||)$ un spaţiu prehilbertian complex. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $x \perp y$;

(ii) $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \ \wedge\ ||x + iy||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$

(iii) $||x|| \le ||x + \alpha y||$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$;

(iv) $||x + y|| = ||x - y|| \ \wedge\ ||x + iy|| = ||x - iy||$.

⌈**Soluţie:** $(i) \Rightarrow (ii)$ Din ipoteză, avem $\langle x, y\rangle = 0 \ \wedge\ \langle y, x\rangle = 0$. Dar

$$\begin{aligned} &||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = ||x||^2 + ||y||^2 + 2Re\langle x, y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2;\\ &||x + iy||^2 = ||x||^2 + |i|^2||y||^2 + i\big(\langle y, x\rangle - \langle x, y\rangle\big) = ||x||^2 + ||y||^2 - 2iIm\langle x, y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2. \end{aligned} \quad (*)$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Din egalităţile precedente, rezultă $Re\langle x, y\rangle = 0 \ \wedge\ Im\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow x \perp y$.

$(i) \Rightarrow (iii)$ Avem $||x + \alpha y||^2 = ||x||^2 + |\alpha|^2||y||^2 + \alpha\langle y, x\rangle + \overline{\alpha}\langle x, y\rangle = ||x||^2 + |\alpha|^2||y||^2 \ge ||x||^2, \forall \alpha \in \mathbb{C}$ (s-a ţinut sema de ipoteză).

$(iii) \Rightarrow (i)$ Pentru $\alpha \in \mathbb{R}$, relaţia $||x+\alpha y|| \ge ||x|| \Rightarrow 2Re\langle x, y\rangle = 0$ (vezi raţionamentul de la exemplul precedent).

Pentru $\alpha = i\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ relaţia $||x + \alpha y|| \ge ||x|| \Rightarrow Im\langle x, y\rangle = 0$. Aşadar, din $Re\langle x, y\rangle = 0 \ \wedge\ Im\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow x \perp y$.

$(i) \Rightarrow (iv)$ Din

$$\begin{aligned} ||x + y||^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle,\\ ||x - y||^2 &= \langle x - y, x - y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2 - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle,\\ ||x + iy||^2 &= \langle x + iy, x + iy\rangle = ||x||^2 + ||y||^2 + i\big(\langle y, x\rangle - \langle x, y\rangle\big),\\ ||x - iy||^2 &= \langle x - iyu, x - iy\rangle = ||x||^2 + ||y||^2 - i\big(\langle y, x\rangle - \langle x, y\rangle\big), \end{aligned} \quad (**)$$

ţinând seama de ipoteză relaţiile (iv).

$(iv) \Rightarrow (i)$ Din relaţiile $(**)$, rezultă $Re\langle x,y\rangle = 0 \,\wedge\, Im\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow x \perp y.\rfloor$

§2.5. Mulţimi deschise. Mulţimi închise

Fie (X,d) un spaţiu metric, τ_d - topologia metrică, $\mathcal{F}$ - familia mulţimilor închise.

5°.1 Să se arate că:

1) $B_r(x) \subset B_r[x]$, $\forall x \in X$ şi $\forall r > 0$;
2) $B_{r_1}(x) \subset B_{r_2}(x)$, $\forall x \in X$ şi $0 < r_1 \leq r_2$;
3) $B_{r_1}[x] \subset B_{r_2}[x]$, $\forall x \in X$ şi $0 < r_1 \leq r_2$;
4) $B_r(x) \in \tau_d$, $\forall x \in X$ şi $\forall r > 0$;
5) $Br[x] \in \mathcal{F}$, $\forall x \in X$ şi $\forall r \geq 0$;

$\lceil$**R:** $1), 2)$ şi $3)$ rezultă direct din definiţii. 4) Fie $x^\circ \in X$ şi $r > 0$. Pentru $x \in B_r(x^\circ)$ avem $d(x,x^\circ) < r$. Punem $r_x := r - d(x,x^\circ)$ şi fie $y \in B_{r_x}(x)$. Atunci $d(y,x^\circ) \leq d(y,x) + d(x,x^\circ) < r_x + d(x,x^\circ) = r$ şi deci $B_{r_x}(x) \subset B_r(x^\circ)$. 5) Fie $x^\circ \in X$ şi $r \geq 0$. Pentru $x \in \complement B_r[x^\circ]$ avem $d(x,x^\circ) > r$. Notăm $r_x := d(x,x^\circ) - r$. Evident că $r_x > 0$. Fie $y \in B_{r_x}(x)$. Avem $d(y,x^\circ) \geq d(x,x^\circ) - d(y,x) > d(x,x^\circ) - r_x = r$, adică $y \in \complement B_r[x^\circ]$ sau $B_{r_x}(x) \subset \complement B_r[x^\circ]$. Aşadar, $B_r[x^\circ]$ este închisă.$\rfloor$

Fie spaţiul metric $(\mathbb{R}, d)$, $d(x,y) = |x-y|$.

5°.2 Să se arate că dacă $D_n = \left]1 - \dfrac{1}{n}, 2 + \dfrac{1}{n}\right[$ şi $F_n = \left[1 + \dfrac{1}{n}, 3 - \dfrac{1}{n}\right]$, atunci:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} D_n = [1,2] \;\text{ şi }\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n =]1,3[.$$

$\lceil$**R:** Deoarece $[1,2] \subset D_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $[1,2] \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} D_n$. Fie $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} D_n$. Să presupunem că $x \notin [1,2]$. Din ipoteză $x \in D_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $x < 1$, atunci $1 - \dfrac{1}{n} < x < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ceea ce nu se poate. Analog, dacă $x > 2$, atunci $2 < x < 2 + \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce, de asemenea nu se poate. Aşadar, are loc incluziunea $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} D_n. \subset [1,2]$. Deoarece $F_n \subset]1,3[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, obţinem $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \subset]1,3[$. Fie $x \in]1,3[$. Există $n_x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x \in F_{n_x} = \left[1 + \dfrac{1}{n_x}, 3 - \dfrac{1}{n_x}\right]$. Deci $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$, adică incluziunea $]1,3[\subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} F_n.\rfloor$

5°.3 Să se arate că dacă $D_\varepsilon =]a - \varepsilon, b + \varepsilon[$ şi $F_\varepsilon = [a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, atunci:

$$\bigcap_{\varepsilon>0} D_\varepsilon = [a,b] \;\text{ şi }\; \bigcup_{\varepsilon>0} F_\varepsilon =]a,b[.$$

Rezultă că o intersecţie arbitrară de mulţimi deschise nu este deschisă întotdeauna.

$\lceil$**R:** Se observă că $[a,b] \subset D_\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow [a,b] \subset \bigcap\limits_{\varepsilon>0} D_\varepsilon$. Fie $x \in \bigcap\limits_{\varepsilon>0} D_\varepsilon \Rightarrow x \in D_\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$. Presupunem că $x \notin [a,b]$. Dacă $x < a$, atunci $x < (x+a)/2$, ceea ce contrazice faptul că $x \in D_\varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$ (se ia $\varepsilon_0 = (a-x)/2$). Analog, rezultă că dacă $x > b$ se ajunge la contradicţie. Să observăm că $F_\varepsilon = [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset]a,b[$, $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \bigcup\limits_{\varepsilon>0} F_\varepsilon \subset]a,b[$. Fie $x \in]a,b[$. Există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât $x \in [a+\varepsilon_0, b-\varepsilon_0] \Rightarrow x \in \bigcup\limits_{\varepsilon>0} F_\varepsilon \supset]a,b[$. Din dubla incluziune rezultă egalitatea.$\rfloor$

Fie spaţiul metric $(\mathbb{R}^2, d_p)$, $d_p(x,y) := \Big(|x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p\Big)^{1/p}$, $p \geq 1$.

5°.4 Dacă $D_n = B_{1+1/n}((0,0))$ şi $F_n = B_{2-1/n}[(0,0)]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} D_n = B_1[(0,0)] \text{ şi } \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} F_n = B_2\big((0,0)\big).$$

⌈**R:** Evident că $B_1[(0,0)] \subset D_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $B_1[(0,0)] \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} D_n$. Fie $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} D_n$. Dacă $x \notin B_1[(0,0)] = B_1[O]$, atunci $d(x,O) > 1$ şi $d(x,O) < 1 + 1/n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce nu se poate. Deci $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} D_n \Rightarrow x \in B_1[(0,0)]$. Din dubla incluziune rezultă egalitatea. Să observăm că $F_n \subset B_2((0,0)) = B_2(O)$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} F_n \subset B_2(O)$. Fie $x \in B_2(O)$. Atunci $\exists n_x > 0$ astfel încât $d(x,O) \leq 2 - 1/n_x$. Prin urmare $x \in F_{n_x}$ de unde urmează că $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$, adică incluziunea $B_2(O) \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$. Din dubla incluziune rezultă egalitatea din enunţ.⌋

5°.5 Dacă $D_\varepsilon = B_{1+\varepsilon}\big((0,0)\big)$ şi $F_\varepsilon = B_{1-\varepsilon}[(0,0)]$, $\forall \varepsilon > 0$, atunci

$$\bigcap_{\varepsilon>0} D_{\varepsilon>0} = B_1[(0,0)] \text{ şi } \bigcup_{\varepsilon>0} F_\varepsilon = B_1\big((0,0)\big).$$

⌈**R:** Evident $B_1[(0,0)] \subset D_\varepsilon$ şi $F_\varepsilon \subset B_1((0,0))$, $\forall \varepsilon > 0$. Incluziunea inversă se dovedeşte printr-un raţionament ca la exemplul precedent.⌋

§2.6. Interior. Închidere. Exterior. Frontieră

Fie (X,d) un spaţiu metric, τ_d topologia metrică, $\mathcal{F}$ familia submulţimilor închise din X şi $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Să se arate că:

6°.1 Dacă $A \subset B$ atunci $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$;

⌈**R:** Dacă $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, incluziunea este adevărată. Fie $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ şi $x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x)$. Cum $A \subset B$, atunci $B \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in \overset{\circ}{B}$. Deci $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.⌋

6°.2 $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overline{A \cup B}}$;

⌈**R:** Fie $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \neq \emptyset$ şi $x \in \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$. Atunci $x \in \overset{\circ}{A}$ sau $x \in \overset{\circ}{B} \Rightarrow (A \in \mathcal{V}(x)$ sau $B \in \mathcal{V}(x)) \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A \cup B}$. Dacă $A = [a,b]$, $B = [b,c]$, cu $a < b < c$, avem $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} =]a,c[\setminus\{b\}$ şi $\overset{\circ}{A \cup B} =]a,c[$, deci, în general, incluziunea demonstrată este strictă.⌋

6°.3 $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{A \cap B}$;

⌈**R:** $x \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{A}$ şi $x \in \overset{\circ}{B} \Leftrightarrow A, B \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow A \cap B \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{A \cap B}$.⌋

6°.4 $\overset{\circ}{A} = \bigcup\limits_{\substack{D\subset A\\ D\in\tau}} D$, deci $\overset{\circ}{A}$ este cea mai *mare* mulţime deschisă conţinută în A.

⌈**R:** Fie $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ şi $x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow (\exists D \in \tau$ astfel încât $x \in D, D \subset A) \Rightarrow x \in \bigcup\limits_{\substack{D\subset A\\ D\in\tau}} D$. Fie $x \in \bigcup\limits_{\substack{D\subset A\\ D\in\tau}} D \Rightarrow (\exists D_x \in \tau, D_x \subset A$ astfel încât $x \in D_x) \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{A}$.⌋

6°.5 $A \in \tau \Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$;

⌈**R:** (⇒) Să demonstrăm că $A \subset \overset{\circ}{A}$ (incluziunea $\overset{\circ}{A} \subset A$ fiind totdeauna adevărată). Fie $x \in A$. Cum $A \subset A$ şi $A \in \tau$, rezultă că $A \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A}$. (⇐) Deoarece $A = \overset{\circ}{A} = \bigcup\limits_{\substack{D \subset A \\ D \in \tau}} D$ obţinem $A \in \tau$.⌋

6°.6 $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$;

⌈**R:** $x \in \overline{A} \Leftrightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \neq \emptyset) \overset{ip.}{\Longrightarrow} (\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap B \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{B}$. Deci $\overline{A} \subset \overline{B}$.⌋

6°.7 $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{(A \cup B)}$;

⌈**R:** $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap (A \cup B) = (V \cap A) \cup (V \cap B)) \neq \emptyset \Leftrightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$ sau $V \cap B \neq \emptyset) \Leftrightarrow (x \in \overline{A}$ sau $x \in \overline{B}) \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Deci $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.⌋

6°.8 $\overline{A} \cap \overline{B} \supset \overline{(A \cap B)}$;

⌈**R:** Incluziunea este adevărată dacă $\overline{A \cap B} = \emptyset$. Fie $\overline{A \cap B} \neq \emptyset$ şi $x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap (A \cap B) \neq \emptyset) \Leftrightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(x),\ (V \cap A) \cap (V \cap B) \neq \emptyset) \Rightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset$ şi $V \cap B \neq \emptyset) \Rightarrow (x \in \overline{A}$ şi $x \in \overline{B}) \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Dacă $A =]a, b[$, $B =]b, c[$, cu $a < b < c$, avem $\overline{A \cap B} = \emptyset$ şi $\overline{A} \cap \overline{B} = \{b\}$.⌋

6°.9 $\overline{A} = \bigcap\limits_{\substack{F \supset A \\ F \in \mathcal{F}}} F$, deci $\overline{A}$ este cea mai *mică* mulţime închisă ce conţine pe A.

⌈**R:** Fie $\overline{A} \neq \emptyset$ şi $x \in \overline{A}$. Dacă admitem că $x \notin \bigcap\limits_{\substack{A \subset F \\ F \in \mathcal{F}}} F$, atunci $(\exists F_x \in \mathcal{F}$ astfel încât $x \notin F_x$ cu $A \subset F_x) \Rightarrow (x \in \complement F_x \subset \complement A$ cu $\complement F_x \in \tau) \Rightarrow \complement A \in \mathcal{V}(x)$. Cum $A \cap \complement A = \emptyset$ şi $\complement A \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \notin \overline{A}$ - contradicţie. Fie $x \in \bigcap\limits_{\substack{A \subset F \\ F \in \mathcal{F}}} F$. Dacă admitem că $x \notin \overline{A}$, atunci $(\exists V_0 \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $A \cap V_0 = \emptyset) \Rightarrow (\exists V_0 \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $V_0 \subset \complement A) \Rightarrow x \in \overset{\circ}{\complement A} \in \tau \Rightarrow x \notin F_0 := \complement(\overset{\circ}{\complement A}) \in \mathcal{F}$. Cum $A \subset \complement(\overset{\circ}{\complement A}) = F_0$, rezultă că $x \notin \bigcap\limits_{\substack{A \subset F \\ F \in \mathcal{F}}} F$ - contradicţie.⌋

6°.10 $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A = \overline{A}$;

⌈**R:** (⇒) Din ipoteză $A \in \mathcal{F}$ şi $A \subset \overline{A}$. Avem $\overline{A} = \bigcap\limits_{\substack{A \subset F \\ F \in \mathcal{F}}} F = A \cap \Bigg(\bigcap\limits_{\substack{A \subset F \\ F \neq A \\ F \in \mathcal{F}}} F \Bigg) \subset A$, deci $A = \overline{A}$. (⇐) Din $A = \overline{A} \Rightarrow \complement A = \complement\overline{A} = \complement\Bigg(\bigcap\limits_{\substack{A \subset A \\ F \in \mathcal{F}}} F \Bigg) = \bigcup\limits_{\substack{A \subset F \\ F \in \mathcal{F}}} \complement F \in \tau \Rightarrow A \in \mathcal{F}$.⌋

6°.11 $x \notin \overline{A} \Leftrightarrow x \in ExtA$;

⌈**R:** Fie $x \in X$ astfel încât $x \notin \overline{A} \Leftrightarrow (\exists V_0 \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $A \cap V_0 = \emptyset) \Leftrightarrow (\exists V_0 \in \mathcal{V}(x)$ astfelii
ncât $V_0 \subset \complement A) \Leftrightarrow (\complement A \in \mathcal{V}(x)) \Leftrightarrow x \in ExtA = \overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$.⌋

6°.12 $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \partial A \subset A$;

⌈**R:** (⇒) Presupunem că $\partial A \neq \emptyset$ şi fie $x \in \partial A \Rightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset$ şi $V \cap \complement A \neq \emptyset) \Rightarrow x \in \overline{A} = A$. (⇐) Fie $x \in \overline{A} \Leftrightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(x), A \cap V \neq \emptyset)$. Presupunem că $x \notin A$. Atunci $x \in \complement A \Rightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap \complement A \neq \emptyset) \Rightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \neq \emptyset$ şi $V \cap \complement A \neq \emptyset) \Rightarrow x \in \partial A \Rightarrow x \in A$ - contradicţie. Deci $\overline{A} \subset A$ şi cum $A \subset \overline{A}$, rezultă că $A = \overline{A}$, adică $A \in \mathcal{F}$.⌋

6°.13 $A \in \tau \Leftrightarrow \partial A \cap A = \emptyset$;

⌈**R:** (⇒) Fie $x \in A \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x)$. Din $A \cap \complement A = \emptyset \Rightarrow x \notin \partial A \Rightarrow A \cap \partial A = \emptyset$. (⇐) Fie $A \neq \emptyset$ şi $x \in A \Rightarrow x \notin \partial A \Rightarrow (\exists V_0 \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $V_0 \cap \complement A = \emptyset) \Rightarrow (\exists V_0 \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $V_0 \subset A) \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow A \subset \overset{\circ}{A}$. Cum $\overset{\circ}{A} \subset A$, rezultă că $A = \overset{\circ}{A} \in \tau$.⌋

6°.14 $A \cup \partial A = \overline{A}$;

⌈**R:** $\partial A = \overline{A} \cap \overline{\complement A} \Rightarrow \partial A \subset \overline{A}$ şi cum $A \subset \overline{A}$, rezultă $A \cup \partial A \subset \overline{A}$. Pentru a demonstra incluziunea inversă să presupunem că $x \in \overline{A}$ dar $x \notin A \cup \partial A \Rightarrow (x \notin A$ şi $x \notin \partial A) \Rightarrow [x \notin A$ şi $(\exists V_0 \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât sau $A \cap V_0 = \emptyset$ sau $V_0 \cap \complement A = \emptyset)] \Rightarrow (x \in \complement A$ şi $\exists V_0 \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $A \cap V_0 = \emptyset) \Rightarrow \complement A \in \mathcal{V}(x)$. Deoarece $A \cap \complement A = \emptyset$ şi $\complement A \in \mathcal{V}(x)$, se contrazice faptul că $x \in \overline{A}$.$\rfloor$

6°.15 $\complement\overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$;

$\lceil$**R:** Fie $\complement\overline{A} \neq \emptyset$ şi $x \in \complement\overline{A} \Leftrightarrow x \notin \overline{A} \Leftrightarrow (ex.6°.11) x \in \operatorname{Ext} A = \overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$.$\rfloor$

6°.16 $\complement \overset{\circ}{A} = \overline{\complement A}$;

$\lceil$**R:** Presupunem $\complement\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$; $x \in \complement\overset{\circ}{A} \Leftrightarrow x \notin \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap \complement A \neq \emptyset) \ \Leftrightarrow x \in \overline{\complement A}$.$\rfloor$

6°.17 $A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A' \subset A$;

$\lceil$**R:** ($\Rightarrow$) Fie $x \in A' \Leftrightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset) \Rightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \neq \emptyset) \Rightarrow x \in \overline{A} \Rightarrow x \in A$. Deci $A' \subset A$. ($\Leftarrow$) Presupunem că există $x \in \overline{A}$ astfel încât $x \notin A \Rightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \neq \emptyset$ şi $x \notin A) \Rightarrow (\forall V \in \mathcal{V}(x),\ V \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset) \Rightarrow x \in A' \subset A$ - contradicţie. Deci $\overline{A} \subset A$. Cum $A \subset \overline{A}$, rezultă că $A = \overline{A} \ \Leftrightarrow A \in \mathcal{F}$.$\rfloor$

6°.18 $G \in \tau \ \wedge \ F \in \mathcal{F} \ \Rightarrow \ G \setminus F \in \tau$:

$\lceil$**R:** $G \in \tau \ \wedge \ F \in \mathcal{F} \ \Leftrightarrow G \in \tau \ \wedge \ \complement F \in \tau \ \Leftrightarrow G \setminus F = G \cap \complement F \in \tau$.$\rfloor$

6°.19 $\partial\overline{A} \subset \partial A$;

$\lceil$**R:** $x \in \partial\overline{A} \Rightarrow [\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap \overline{A} \neq \emptyset \ \wedge V \cap \complement\overline{A} \neq \emptyset] \Rightarrow [\forall V \in \mathcal{V}(x),\ \exists y_V \in V \cap \overline{A}$ a.î. $V \in \mathcal{V}(y_V) \ \wedge \ V \cap \complement\overline{A} \neq \emptyset] \Rightarrow [\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset \ \wedge V \cap \complement A \neq \emptyset] \Rightarrow x \in \partial A$ (s-a folosit incluziunea $\complement\overline{A} \subset \complement A$). În exemplul următor incluziunea este strictă: $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $\overline{A} = [0,1]$, $\partial\overline{A} = \{0,1\}$, iar $\partial A = [0,1]$ (deoarece dacă $x \in A$, atunci $\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset \ \wedge \ V \cap \complement_{[0,1]} A \neq \emptyset$ şi respectiv, dacă $x \in \complement_{[0,1]} A$, atunci $\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset)$.$\rfloor$

6°.20 $\partial \overset{\circ}{A} \subset \partial A$;

$\lceil$**R:** $x \in \partial \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap \overset{\circ}{A} \neq \emptyset \wedge V \cap \complement \overset{\circ}{A} \neq \emptyset] \Rightarrow [\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset \wedge V \cap \complement \overset{\circ}{A} \neq \emptyset] \Rightarrow [\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset \ \wedge \ V \cap \complement \overset{\circ}{A} \neq \emptyset] \Rightarrow x \in \partial A$ (s-a făcut un raţionament ca la exemplul precedent), deci $\partial \overset{\circ}{A} \subset \partial A$. Iată un exemplu în care incluziunea este strictă: $A = \mathbb{N}^*, \partial A = \mathbb{N}^*, \overset{\circ}{A} = \emptyset, \partial \overset{\circ}{A} = \emptyset$.$\rfloor$

6°.21 $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$;

$\lceil$**R:** $x \in \partial(A \cup B) \Leftrightarrow [\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap (A \cup B) \neq \emptyset \wedge V \cap \complement(A \cup B) \neq \emptyset] \Rightarrow [\forall V \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow (V \cap A) \cup (V \cap B) \neq \emptyset \wedge (V \cap \complement A) \cap (V \cap \complement B) \neq \emptyset] \Rightarrow [\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \big(V \cap A \neq \emptyset \wedge V \cap \complement A \neq \emptyset\big) \vee (V \cap B \neq \emptyset \wedge V \cap \complement B \neq \emptyset)] \Rightarrow [x \in \partial A \vee x \in \partial B] \Leftrightarrow x \in \partial A \cup \partial B$. În exemplul care urmează incluziunea este strictă: $A = [0,2]$, $B = [1,3]$, $A \cup B = [0,3]$, $\partial A = \{0,2\}$, $\partial B = \{1,3\}$, $\partial(A \cup B) = \{0,3\}$, iar $\partial A \cup \partial B = \{0,1,2,3\}$.$\rfloor$

6°.22 $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset \ \Rightarrow \ \partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$;

$\lceil$**R:** Trebuie să demonstrăm numai incluziunea $\partial A \cup \partial B \subset \partial(A \cup B)$. Fie $x \in \partial A x \notin \partial B$. Dacă se ţine seama de ipoteză, atunci $\exists r_0 > 0$ astfel încât $\forall 0 < r \leq r_0 \Rightarrow \big(B_r(x) \cap A \neq \emptyset \ \wedge \ B_r(x) \cap \complement A \neq \emptyset, B_r(x) \cap B = \emptyset\big) \Rightarrow \big(B_r(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset \ \wedge \ B_r(x) \cap (\complement A \cap \complement B) \neq \emptyset$, deoarece $B_r(x) \subset \complement B\big) \Rightarrow \big(B_r(x) \cap (A \cup B) \wedge B_r(x) \cap \complement(A \cup B) \neq \emptyset\big) \Rightarrow x \in \partial(A \cup B)$. Analog, $x \in \partial B \Rightarrow x \in \partial(A \cup B)$. Deci $x \in \partial A \cup \partial B \Rightarrow x \in \partial(A \cup B)$, adică $\partial A \cup \partial B \subset \partial(A \cup B)$. Prin urmare $\partial A \cup \partial B = \partial(A \cup B)$.$\rfloor$

6°.23 $\big(A \cup B\big)' = A' \cup B'$;

$\lceil$**R:** $x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow [\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap (A \cup B) \setminus \{x\} \neq \emptyset] \Leftrightarrow [\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow [(V \cap A) \cup (V \cap B)] \setminus \{x\} \neq \emptyset] \Leftrightarrow [\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow (V \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset \vee (V \cap B) \setminus \{x\} \neq \emptyset] \Leftrightarrow [x \in A' \vee x \in B'] \Leftrightarrow x \in A' \cup B'$.$\rfloor$

6°.24 $\overline{A}' = A'$.

$\lceil$**R:** Este suficient să dovedim numai incluziunea $\overline{A}' \subset A'$, deoarece $A' \subset \overline{A}'$ este adevărată. Fie $x \in \overline{A}' \Rightarrow [\forall D \in \mathcal{V}(x), D \in \tau \Rightarrow (D \cap A') \setminus \{x\} \neq \emptyset] \Rightarrow [\forall D \in \mathcal{V}(x), D \in \tau, \exists y_D \in D \cap A', y_D \neq x$, iar $D \in \mathcal{V}(y_D)] \Rightarrow [\forall D \in \mathcal{V}(x), D \in \tau, (D \cap A) \setminus \{y_D\} \neq \emptyset]$ $(*)$. Să admitem că $x \notin A'$. Atunci $\exists V_0 \in \mathcal{V}(x)$

astfel încât sau $V_0 \cap A = \emptyset$ sau $V_0 \cap A = \{x\}] \Rightarrow [\exists V_0 \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $\forall D \in \tau, D \subset V_0 \Rightarrow D \cap A = \emptyset$ sau $D \cap A = \{x\}]$ ceea ce contrazice relaţia $(*)$ de mai sus. Aşadar, $x \in \overline{A}' \Rightarrow x \in A'$, adică $\overline{A}' \subset A'$.$\rfloor$

6°.25 Fie (X, d), $X = \{(x, 0)/x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x^2+y^2 = 1\}$, $d((x, y), (x_1, y_1)) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$. Să se arate că

$$\overline{B_1\big((0,0)\big)} \neq B_1[(0,0)].$$

$\lceil$**R:** Avem $D_1((0,0)) = \{(x,0)/|x| < 1\} \Rightarrow \overline{B}_1((0,0)) = \{(x,0)/|x| \leq 1\}$, iar $B_1[(0,0)] = \{(x,0)/|x| \leq 1\} \cup \{(x,y)/x^2+y^2 = 1\}$.$\rfloor$

6°.26 Fie $A_n = \Big[1 - \dfrac{1}{n}, 2 + \dfrac{1}{n}\Big[\subset \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = [1, 2]$.

$\lceil$**R:** Evident că $[1,2] \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$. Fie $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \Rightarrow [x \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}^*] \Rightarrow \Big[1 - \dfrac{1}{n} \leq x < 2 + \dfrac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*\Big] \Rightarrow x \in [1,2]$, adică $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \subset [1,2]$.$\rfloor$

6°.27 Fie $B_n = \Big[\dfrac{1}{n}, 3 - \dfrac{1}{n}\Big[\subset \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{R}$. Să se arate că $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} B_n =]0, 3[$.

$\lceil$**R:** $\Big[\dfrac{1}{n}, 3 - \dfrac{1}{n}\Big[\subset]0,3[, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \subset]0,3[$. Fie $x \in]0,3[\Leftrightarrow [0 < x < 3] \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x \in \Big[\dfrac{1}{n}, 3 - \dfrac{1}{n}\Big[\Rightarrow x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$. Deci $]0,3[\subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.$\rfloor$

6°.28 Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi $X_1 \subset X$. Notăm

$$\tau_1 = \{D_1/D_1 = D \cap X_1,\ \forall D \in \tau\}.$$

Să se arate că τ_1 este o topologie pe X_1 şi (X_1, τ_1) este un spaţiu topologic.

$\lceil$**R:** Verificăm condiţiile $(T.1)$, $(T.2)$ şi $(T.3)$ din definiţia 14: $(T.1)$ $\emptyset = \emptyset \cap X1, \emptyset \in \tau \Rightarrow \emptyset \in \tau_1$, $X_1 = X \cap X_1, X \in \tau \Rightarrow X_1 \in \tau_1$. $(T.2)$: Fie $D'_1, ..., D'_n \in \tau_1 \Rightarrow [\exists D_1, ..., D_n \in \tau$ astfel încât $D'_i = D_i \cap X_1, i = 1, ..., n] \Rightarrow [D'_1 \cap ... \cap D'_n = (D_1 \cap X_1) \cap ... \cap (D_n \cap X_1) = (D_1 \cap ... \cap D_n) \cap X_1 \in \tau_1$. $(T.3)$: Fie $\{D'_i\}_{i\in I}$, $D'_i \in \tau_1, \forall i \in I \Rightarrow [\exists D_i \in \tau$ astfel încât $D'_i = D_i \cap X_1, \forall i \in I$. Avem $\bigcup\limits_{i\in I} D'_i = \bigcup\limits_{i\in I}(D_i \cap X_1) = (\bigcup\limits_{i\in I} D_i) \cap X_1 \in \tau_1$.$\rfloor$

6°.29 Fie (X_1, τ_1) şi (X_2, τ_2) două spaţii topologice şi $X = X_1 \times X_2$. Notăm:

$$\mathcal{G} = \{G \subset X_1 \times X_2/G = D_1 \times D_2,\ D_1 \in \tau_1,\ D_2 \in \tau_2\},$$

$$\tau = \{D \subset X_1 \times X_2/D = \bigcup_{i\in I} G_i,\ G_i \in \mathcal{G},\ \forall i \in I\}.$$

Să se arate că τ este o topologie pe X, iar (X, τ) este spaţiu topologic.

$\lceil$**R:** Vom proceda ca la exemplul precedent. $(T.1) : \emptyset = \emptyset \times D_2 \in \mathcal{G} \subset \tau, \forall D_2 \in \tau_2$; $X = X_1 \times X_2 \in \mathcal{G}$, deoarece $X_1 \in \tau_1 \ \wedge \ X_2 \in \tau_2$. $(T.2)$: Fie $D_1, ..., D_m \in \tau \Rightarrow [D_k = \bigcup\limits_{i_k\in I_k} G^k_{i_k} = \bigcup\limits_{i_k\in I_k} (D^k_{1i_k} \times D^k_{2i_k}), k = 1, ..., m] \Rightarrow [D_1 \cap ... \cap D_m = (\bigcup\limits_{i_1\in I_1} (D^1_{1i_1} \times D^1_{2i_1}) \cap \ldots \cap \bigcup\limits_{i_m\in I_m} (D^m_{1i_m} \times D^m_{2i_m})) = \bigcup\limits_{i_1\in I_1} \ldots \bigcup\limits_{i_m\in I_m} \Big(\bigcap\limits_{k=1}^{m} D^k_{1i_k}\Big) \times \Big(\bigcap\limits_{k=1}^{m} D^k_{2i_k}\Big) \in \tau]$. $(T.3)$: Fie $\{D_i\}_{i\in I}$, $D_i \in \tau$, $\forall i \in I$. Atunci $D_i = \bigcup\limits_{j\in I_i} G_j = \bigcup\limits_{j\in I_i} (D_{1j} \times D_{2j}) \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} D_i = \bigcup\limits_{i\in I} \Big(\bigcup\limits_{j\in I_i} (D_{1j} \times D_{2j})\Big) \in \tau$.$\rfloor$

Fie $(\mathbb{R}, d)$, $d(x, y) = |x - y|$. Să se arate că:

6°.30 $\overset{\circ}{\mathbb{N}^*} = \overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$;

⌈**R:** Deoarece $\overset{\circ}{\mathbb{N}^*} \subset \overset{\circ}{\mathbb{Z}} \subset \overset{\circ}{\mathbb{Q}}$ este suficient să demonstrăm că $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$. Fie $x \in \mathbb{Q}$. Deoarece $\forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V \cap \complement\mathbb{Q} \neq \emptyset$, rezultă că nu există nici o vecinătate a lui x care să fie conţinută în $\mathbb{Q}$. Deci $x \notin \overset{\circ}{\mathbb{Q}}$. Prin urmare $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$.⌋

6°.31 $\overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^*$, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ şi $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

⌈**R:** Evident că $\mathbb{N}^* \subset \overline{\mathbb{N}^*}$. Fie $x \in \overline{\mathbb{N}^*}$. Dacă admitem că $x \notin \mathbb{N}^*$, atunci $V =][x], [x] + 1[\in \mathcal{V}(x)$ şi $V \cap \mathbb{N}^* = \emptyset$ şi se contrazice ipoteza. Deci $x \in \overline{\mathbb{N}^*} \Rightarrow x \in \mathbb{N}^*$. Acelaşi raţionament se face pentru a demonstra egalitatea $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.⌋

6°.32 Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi $D \in \tau$. Să se arate că $D \in \mathcal{V}(x)$, $\forall x \in D$.

⌈**R:** Fie $x \in D$. Deoarece $D \in \tau$ şi $D \subset D$, rezultă $D \in \mathcal{V}(x)$.⌋

§2.7. Mulţimi conexe. Mulţimi convexe. Mulţimi mărginite. Funcţii convexe. Funcţii mărginite

Să se precizeze dacă mulţimile de mai jos sunt conexe, convexe, mărginite, compacte:

7°.1 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$.

⌈**R:** Deoarece $A \subset B_3[(0,0)]$, rezultă A mărginită. A este închisă, deoarece $\complement A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 9\}$ sunt mulţimi deschise, deci A este compactă. A este conexă. Nu este convexă, întrucât $(1, 0)$ şi $(-1, 0) \in A$, iar punctul $\frac{1}{2}[(1,0) + (-1,0)] = (0,0) \notin A$. *Mulţimea A este o coroană circulară închisă.*⌋

7°.2 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \cdot y > 0\}$.

⌈**R:** A este nemărginită (conţine semidreapta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x, x > 0\}$. Nu este nici conexă ($A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0 < y\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0 > y\}$ - *reuniunea cadranelor deschise 1 şi 3.*) şi nici convexă (punctele $(1, 1)$ şi $(-1, -1) \in A$ în timp ce punctul $\frac{1}{2}[(1,1) + (-1,-1)] = (0,0) \notin A$).⌋

7°.3 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [1, 2] \cup [3, 4],\ y \in [0, 1] \cup [2, 5]\}$.

⌈**R:** A este mărginită şi închisă. Este neconexă. Nu este convexă.⌋

7°.4 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq x^2 - 5x + 6\}$.

⌈**R:** A este nemărginită, închisă, neconexă şi nu este convexă.⌋

7°.5 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \frac{1}{2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$.

⌈**R:** A este compactă, conexă, dar nu este convexă.⌋

7°.6 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 < z^2\}$.

⌈**R:** $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z > \sqrt{x^2 + y^2}\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z < -\sqrt{x^2 + y^2}\}$ este nemărginită (conţine semidreapta $\{(0, 0, z) / z > 0\}$), deschisă, neconexă şi neconvexă ⌋

7°.7 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z > x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

⌈**R:** A este nemărginită, conexă şi convexă.⌋

7°.8 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z \geq x^2 + y^2, x + y + z \leq 1\}$.

⌈**R:** A este compactă, conexă şi convexă.⌋

7°.9 $A = \{z \in \mathbb{C} / 2 \leq |z - 1| \leq 3\}$.

⌈**R:** A este compactă, conexă şi nu este convexă.⌋

7°.10 $A = \{z \in \mathbb{C} / 0 \leq \arg z \leq \pi/4\}$.

⌈**R:** A este închisă, nemărginită, conexă şi convexă.⌋

7°.11 $A = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leq 1\}.$

⌈**R:** A este compactă (închisă şi mărginită), conexă şi convexă.⌋

7°.12 $A = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \ i = 1, ..., m\}.$

⌈**R:** Mulţimea A este o intersecţie de semispaţii închise. Deci este convexă şi închisă.⌋

7°.13 Să se arate că $\mathbb{Q}$ este densă[3] în $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

⌈**R:** Deoarece $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, atunci $\overline{\mathbb{Q}} \subset \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$. Incluziunea $\mathbb{Q} \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$ este evidentă (din definiţie). Fie acum $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ şi $V \in \mathcal{V}(x)$. Deoarece $V \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, rezultă că $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. Deci $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.⌋

7°.14 Să se arate că $\mathbb{Q}^2$ este densă în $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ ($\|\cdot\|_2$ este norma euclidiană).

⌈**R:** Incluziunea $\overline{\mathbb{Q}^2} \subset \mathbb{R}^2$ este evidenttă. Pentru incluziunea $\mathbb{R}^2 \subset \overline{\mathbb{Q}^2}$, fie $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ şi $V \in \mathcal{V}(x)$. Atunci există $r > 0$ astfel încât $V \supset]x_1 - r, x_1 + r[\times]x_2 - r, x_2 + r[$. Conform ex. 7°.13, $\exists (r_1, r_2) \in \big(]x_1 - r, x_1 + r[\times]x_2 - r, x_2 + r[\big) \cap \mathbb{Q}^2$. Rezultă $(r_1, r_2) \in \mathbb{Q}^2 \cap V \Rightarrow V \cap \mathbb{Q}^2 \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in \overline{\mathbb{Q}^2}$. Cum $x = (x_1, x_2)$ a fost ales arbitrar în $\mathbb{R}^2$, rezultă $\mathbb{R}^2 \subset \overline{\mathbb{Q}^2}$, deci $\mathbb{R}^2 = \overline{\mathbb{Q}^2}$.⌋

7°.15 Să se arate că $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ şi $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ sunt spaţii separabile[4].

⌈**R:** $\mathbb{Q}$ este mulţime numărabilă şi $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Deci $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ este separabil. Analog, $\mathbb{Q}^2$ este mulţime numărabilă şi $\overline{\mathbb{Q}^2} = \mathbb{R}^2$. Deci $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ este separabil.⌋

7°.16 Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat. Să se arate că norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ este o funcţie convexă.

⌈**R:** Fie $x_1, x_2 \in X$ şi $\alpha \in [0, 1]$. Avem $\|\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2\| \leq \|\alpha x_1\| + \|(1 - \alpha)x_2\| = \alpha\|x_1\| + (1 - \alpha)\|x_2\|$.⌋

7°.17 Fie X un $\mathbb{R}$ - spaţiu liniar. Funcţia $p : X \to \mathbb{R}$ se numeşte subliniară dacă şi numai dacă sunt satisfăcute relaţiile:

1° $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \ \forall x, y \in X$ (subaditivitatea);

2° $p(\lambda x) = \lambda p(x), \ \forall \lambda > 0$ şi $\forall x \in X$ (pozitiv-omogenitatea).

Să se arate că orice funcţie $p(\cdot)$ subliniară este convexă.

⌈**R:** Fie $x_1, x_2 \in X$ şi $\alpha \in]0, 1[$. Avem $p(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq p(\alpha x_1) + p((1 - \alpha)x_2) = \alpha p(x_1) + (1 - \alpha)p(x_2)$. Pentru $\alpha = 0$ sau $\alpha = 1$ are loc egalitzatea.⌋

7°.18 Fie X un $\mathbb{R}$ - spaţiu liniar. Funcţia $p : X \to \mathbb{R}$ se numeşte seminormă dacă şi numai dacă sunt satisfăcute relaţiile:

1° $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \ \forall x, y \in X$ (subaditivitatea);

2° $p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ şi $\forall x \in X$.

Să se arate că orice seminormă $p(\cdot)$ este o aplicaţie convexă.

⌈**R:** Fie $x_1, x_2 \in X$ şi $\alpha \in [0, 1[$. Avem $p(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq p(\alpha x_1) + p((1 - \alpha)x_2) = \alpha p(x_1) + (1 - \alpha)p(x_2)$ sau: orice seminoră este funcţie subliniară şi se aplică exercţiul precedent.⌋

7°.19 Fie X un spaţiu liniar real sau complex şi $f : X \to \mathbb{R}$ o aplicaţie liniară. Să se arate că $p : X \to \mathbb{R}$,

$$p(x) = |f(x)|, \ \forall x \in X,$$

este o (seminormă) funcţie convexă.

---

[3] **Definiţie**: Fie (X, d) un spaţiu metric, $A, B \subset X$ astfel încât $A \subset B$. Spunem că mulţimea A este densă în B dacă $B \subset \overline{A}$.

[4] **Definiţie**: Un spaţiu metric (X, d) este numit separabil dacă şi numai dacă există $A \subset X$ numărabilă astfel încât $\overline{A} = X$.

⌈**R:** Fie $x_1, x_2 \in X$ şi $\alpha \in]0,1[$. Avem $p(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) = |f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)| = |\alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)| \leq \alpha|f(x_1)| + (1-\alpha)|f(x_2)| = \alpha p(x_1) + (1-\alpha)p(x_2)$.⌋

7°.20 Fie $f : \mathbf{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\mathbf{I}$ interval) de două ori derivabilă pe $\mathbf{I}$. Să se arate că dacă $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{I}$, atunci f este convexă.

Folosind acest rezultat, să se demonstreze inegalităţile:

1) $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n \leq \dfrac{x^n + y^n}{2}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$ şi $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2) $\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{x}{x+y}\ln x + \dfrac{y}{x+y}\ln y$, $\forall x, y \in]0, \infty[$.

⌈**R:** Din ipoteză rezultă că $f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in I$. Fie $t \in [0,1]$, $x_1, x_2 \in I$. Avem $f(x_1) \geq f(tx_1 + (1-t)x_2) + f'(tx_1 + (1-t)x_2)(1-t)(x_1 - x_2)$ şi $f(x_2) \geq f(tx_1 + (1-t)x_2) + f'(tx_1 + (1-t)x_2)t(x_2 - x_1)$. Înmulţim prima inegalitate cu t şi cea de a doua cu $1-t$ şi adunăm membru cu membru. Rezultă $tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \geq f(tx_1 + (1-t)x_2)$. 1) Funcţia $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, este convexă. Atunci pentru $t = \dfrac{1}{2}$ şi $x, y \in \mathbb{R}_+$, găsim $f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) \leq \dfrac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big) \Leftrightarrow \Big(\dfrac{x+y}{2}\Big)^n \leq \dfrac{1}{2}\big(x^n + y^n\big)$. 2) Funcţia $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \ln x$, este convexă ($f''(x) = \dfrac{1}{x}$). Pentru $x, y \in \mathbb{R}$ şi $t = \dfrac{1}{2}$, găsim $f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) \leq \dfrac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big) \Leftrightarrow \dfrac{x+y}{2}\ln\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) \leq \dfrac{1}{2}\Big[x\ln x + y\ln y\Big] \Leftrightarrow \ln\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) \leq \dfrac{x}{x+y}\ln x + \dfrac{y}{x+y}\ln y\Big]$.⌋

7°.21 Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică semipozitiv definită şi $p \in \mathbb{R}^n$ un vector constant. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = xAx^T + < p, x >$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, este convexă.

⌈**R:** Fie $x, y \in \mathbb{R}^n$ şi $\alpha \in [0,1]$. Avem $f(\alpha x + (1-\alpha)y) = [\alpha x + (1-\alpha)y] \cdot A \cdot [\alpha x + (1-\alpha)y]^T + \langle p, \alpha x + (1-\alpha)y\rangle = \alpha^2 \cdot x \cdot A \cdot x^T + (1-\alpha)^2 \cdot y \cdot A \cdot y^T + \alpha(1-\alpha)\big[x \cdot A \cdot y^T + y \cdot A \cdot x^T\big] + \alpha\langle p, x\rangle + (1-\alpha)\langle p, y\rangle$. Deoarece $x \cdot A \cdot y^T \leq \sqrt{x \cdot A \cdot x^T}\sqrt{y \cdot A \cdot y^T} \leq \dfrac{1}{2}\Big(x \cdot A \cdot x^T + y \cdot A \cdot y^T\Big)$ şi $y \cdot A \cdot x^T \leq \sqrt{x \cdot A \cdot x^T}\sqrt{y \cdot A \cdot y^T} \leq \dfrac{1}{2}\Big(x \cdot A \cdot x^T + y \cdot A \cdot y^T\Big)$, atunci $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha[x \cdot A \cdot x^T + \langle p, x\rangle] + (1-\alpha)[y \cdot A \cdot y^T + \langle p, y\rangle] = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$.⌋

Să se stabilească dacă funcţiile de mai jos sunt mărginite.

7°.21 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

⌈**R:** Deoarece $2|x||y| \leq x^2 + y^2$, rezultă că $|f(x,y)| \leq 1$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, ceea ce înseamnă că funcţia f este mărginită.⌋

7°.22 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

⌈**R:** Funcţia f este nemărginită în vecinătatea punctului $(0,0)$. Astfel, pentru şirul $\Big(\dfrac{1}{n}, 0\Big)_{n \in \mathbb{N}^*}$, avem $f\Big(\dfrac{1}{n}, 0\Big) = n \to \infty$ când $n \to \infty$.⌋

7°.23 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0); \end{cases}$

⌈**R:** Funcţia f este nemărginită în vecinătatea punctului $(0,0)$. Astfel, pentru şirul $\Big(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\Big)_{n \in \mathbb{N}^*}$, avem $f\Big(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\Big)=\dfrac{n^2}{4}\to\infty$ când $n\to\infty$.⌋

7°.24 $\quad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\;\; f(x,y)=\dfrac{x+y}{1+x^2+y^2};$

⌈**R:** Funcţia f este mărginită. Deoarece $1+x^2+y^2\geq 1+x^2\geq 2|x|$ şi respectiv $1+x^2+y^2\geq 1+y^2\geq 2|y|$, obţinem $|f(x,y)|\leq \dfrac{|x|}{1+x^2+y^2}+\dfrac{|y|}{1+x^2+y^2}\leq \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1,\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$.⌋

7°.25 $\quad f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\;\; f(x)=\left(\dfrac{1-e^x}{1+e^x},\,\operatorname{arctg}x,\,\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}\right);$

⌈**R:** Funcţie mărginită. **I:** Deoarece $\|(u,v,w)\|=\sqrt{u^2+v^2+w^2}\leq |u|+|v|+|w|$, rezultă că $\|f(x)\|\leq \left|\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right|+|\operatorname{arctg}x|+|\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}|\leq 1+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}=1+\pi,\ \forall x\in\mathbb{R}$.⌋

7°.26 $\quad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\;\; f(x,y)=\big(f_1(x,y),\,f_2(x,y)\big),$

$$f_1(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2, & \text{dacă}\quad (x,y)\in B_1[(0,0)],\\ 1+\dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{dacă}\quad (x,y)\notin B_1[(0,0)],\end{cases}\qquad f_2(x,y)=\frac{x^2+y^2-xy}{3+x^2+2y^2}.$$

⌈**R:** Funcţie mărginită. **I:** Pentru $(x,y)\in B_1[(0,0)]\Rightarrow 0\leq f_1(x,y)\leq 1$, iar pentru $(x,y)\notin B_1[(0,0)]\Rightarrow 1\leq f_1(x,y)<2$. Funcţia $f_2(x,y)$ satisface inegalităţile $0\leq f_2(x,y)\leq \dfrac{x^2+y^2}{3+x^2+2y^2}+\dfrac{|xy|}{3+x^2+2y^2}\leq 2,\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$. Prin urmare $\|f(x,y)\|\leq |f_1(x,y)|+|f_2(x,y)|\leq 2+2=4,\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$.⌋

Cap. 3. ŞIRURI ÎN SPAŢII METRICE

Fie (X, d) un spaţiu metric.

Definiţia 1. *Se numeşte şir de puncte din* X *orice funcţie* $s : \mathbb{N}^* \to X$.
Elementul $s(n) = x_n \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *se numeşte termenul general al şirului.*
Şirul $s : \mathbb{N}^* \to X$ *se notează prin* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. *Mulţimea* $s(\mathbb{N}^*) \subset X$ *se notează prin* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Definiţia 2. *Şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *din spaţiul metric* (X, d) *se numeşte mărginit dacă şi numai dacă mulţimea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este mărginită.*

Observaţia 1. *Dacă* $(X, \|\cdot\|)$ *este un spaţiu normat, afirmaţia "şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este mărginit" este echivalentă cu afirmaţia "*$\exists M > 0$ *a.î.* $\|x_n\| \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$*".*

Definiţia 3. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir din spaţiul metric* (X, d). *Elementul* $x^\circ \in X$ *se numeşte punct limită pentru şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *dacă şi numai dacă orice vecinătate a lui* x° *conţine o infinitate de termeni ai şirului.*

Definiţia 4. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir din spaţiul metric* (X, d). *Elementul* $x^\circ \in X$ *se numeşte limita şirului* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *dacă şi numai dacă pentru orice vecinătate* $V \in \mathcal{V}(x^\circ)$ *există* $n_V \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât*

$$x_n \in V, \forall n \ge n_V.$$

În acest caz şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *se numeşte convergent către* x° *şi se notează*

$$x^\circ = \lim_{n\to\infty} x_n \ \text{ sau } \ x_n \to x^\circ.$$

Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *se numeşte convergent dacă şi numai dacă* $\exists x^\circ \in X$ *astfel încât* $x_n \to x^\circ$.

Propoziţia 1. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir din spaţiul metric* (X, d). *Dacă şirul este convergent, atunci limita sa este unică.*

Teorema 1. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir din spaţiul metric* (X, d) *şi* $x^\circ \in X$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
1° $x^\circ = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$;
2° $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $n \in \mathbb{N}^*$ *cu* $n \ge n(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x^\circ) < \varepsilon$.

Propoziţia 2. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *două şiruri din spaţiul metric* (X, d). *Dacă* $x_n \to x^\circ$ *şi* $y_n \to y^\circ$, *atunci şirul* $\big(d(x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este convergent către* $d(x^\circ, y^\circ)$.

Definiţia 5. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir din spaţiul metric* (X, d) *şi* $(n_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ *un şir din* $\mathbb{N}^*$ *strict crescător. Şirul* $(y_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ *din* X, *unde* $y_m = x_{n_m}$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, *se numeşte subşir al şirului* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Propoziţia 3. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir convergent din spaţiul metric* (X, d). *Atunci pentru orice subşir* $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ *al şirului* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sunt adevărate afirmaţiile:*
1° $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ *este convergent;*
2° $\lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Propoziţia 4. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir din spaţiul metric* (X,d). *Elementul* $x^\circ \in X$ *este punct limită pentru şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *dacă şi numai dacă există un subşir* $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ *al şirului* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *astfel încât* $x^\circ = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n_m}$.

Propoziţia 5. *Dacă şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *din spaţiul metric* (X,d) *este convergent, atunci el este mărginit.*

Teorema 2. *Fie* $(X,\|\cdot\|)$ *un* $\mathbf{K}$ *- spaţiu normat,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(y_n)_{n\mathbb{N}^*}$ *două şiruri din* X *şi* $\alpha,\beta \in \mathbf{K}$. *Dacă* $x_n \to x^\circ$ *şi* $y_n \to y^\circ$, *atunci şirul* $(\alpha x_n + \beta y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} := \alpha(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} + \beta(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este convergent şi*

$$\lim_{n\to\infty}\big(\alpha x_n + \beta y_n\big) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n + \beta \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Teorema 3. *Fie* $(X,\|\cdot\|)$ *un spaţiu normat şi* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir din* X.
1° *Dacă* $x_n \to x^\circ$, *atunci* $\|x_n\| \to \|x^\circ\|$.
2° *Dacă* $\|x_n\| \to 0$, *atunci* $x_n \to 0_X$.
3° *Dacă* $x_n \to x^\circ \neq 0_X$, *atunci există* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \neq 0_X$.
4° $x_n \to x^\circ \Leftrightarrow x_n - x^\circ \to 0_X \Leftrightarrow \|x_n - x^\circ\| \to 0$.

Propoziţia 6. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir din spaţiul metric* (X,d), $x^\circ \in X$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un işr de numere reale pozitive, convergent către zero. Presupunem că există* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x^\circ) \leq \alpha_n$. *Atunci* $x_n \to x^\circ$.

Definiţia 6. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir din spaţiul metric* (X,d). *Şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *se numeşte fundamental (Cauchy) dacă şi numai dacă* $\forall\varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ *a.î.* $\forall n \geq n(\varepsilon)$ *şi* $\forall p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$.

Teorema 4. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este un şir convergent din spaţiul metric* (X,d), *atunci şirul* $(x_n)_{n\mathbb{N}^*}$ *este fundamental.*

Observaţia 2. *Reciproca, în general, nu este adevărată.*

Teorema 5. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este un şir fundamental, atunci şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este mărginit.*

Observaţia 3. *Reciproca, în general, nu este adevărată.*

Teorema 6. *Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este un şir fundamental şi dacă există un subşir* $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ *convergent, atunci şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este convergent.*

Definiţia 7. *Spaţiul metric* (X,d) *se numeşte complet dacă şi numai dacă orice şir fundamental din* X *este convergent.*

Spaţiul normat $(X,\|\cdot\|)$ *se numeşte spaţiu Banach dacă şi numai dacă este spaţiu complet în raport cu metrica indusă de normă.*

Spaţiul prehilbertian $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *se numeşte spaţiu Hilbert dacă şi numai dacă este complet în raport cu metrica indusă de produsul scalar.*

Şiruri în $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

În continuare vom considera şiruri din $\mathbb{R}$.

Propoziţia 7. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n \to x^\circ$. Presupunem că $\exists a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a \le x_n \le b$, $\forall n \ge n_0$. Atunci $x^\circ \in [a, b]$.*

Propoziţia 8. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n \to x^\circ$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $y_n \to y^\circ$. Presupunem că $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n \ge n_0 \Rightarrow x_n \le y_n$. Atunci $x^\circ \le y^\circ$.*

Teorema 7. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir din $\mathbb{R}$.*
1° *Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este crescător şi majorat, atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent către marginea sa superioară.*
2° *Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător şi minorat, atunci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent către marginea sa inferioară.*

Teorema 8. (**Lema lui Cesàro**) *Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir de numere reale mărginit, atunci $\exists (x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ convergent.*

Teorema 9. (**Criteriul lui Cauchy**)*: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir din $\mathbb{R}$. Următoarele afirmaţi sunt echivalente:*
1° $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este convergent.*
2° $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este fundamental.*

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir de numere reale mărginit. Mulţimile $A_n = \{x_k;\, k \ge n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, sunt mărginite. Atunci:
1) Şirul $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\underline{x}_n = \inf A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este crescător şi mărginit superior;
2) Şirul $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\overline{x}_n = \sup A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este descrescător şi mărginit inferior;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{x}_n = \underline{x}$ se numeşte limita inferioară a şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi se notează $\underline{x} = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{x}_n = \overline{x}$ se numeşte limita superioară a şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi se notează $\overline{x} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$;
5) Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu este mărginit superior, prin definiţie $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$;
6) Dacă şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu este mărginit inferior, prin definiţie $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Teorema 10. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir mărginit din $\mathbb{R}$. Atunci:*
1° $\underline{x} = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n =$ *cel mai mic punct limită;*
2° $\overline{x} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n =$ *cel mai mare punct limită.*

Teorema 11. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir mărginit din $\mathbb{R}$. Atunci $\underline{x} = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\overline{x} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ au următoarele proprietăţt:*
1) $\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ *a.î.* $\forall n \ge n(\varepsilon) \Rightarrow \underline{x} - \varepsilon < x_n$;
2) $\forall \varepsilon > 0$ *şi* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists m(\varepsilon, n)$ *a.î.* $x_{m(\varepsilon,n)} < \underline{x} + \varepsilon$;
3) $\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ *a.î.* $\forall n \ge n(\varepsilon) \Rightarrow \overline{x} + \varepsilon > x_n$;
4) $\forall \varepsilon > 0$ *şi* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists m(\varepsilon, n) \in \mathbb{N}^*$ *a.î.* $x_m(\varepsilon, n) > \overline{x} - \varepsilon$. .

Teorema 12. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir mărginit din* $\mathbb{R}$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1° *Şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este convergent;*

2° $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

Propoziţia 9. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *două şiruri din* $\mathbb{R}$ *care verifică următoarele condiţii:*

1) $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n \le ... \le y_n \le ... \le y_2 \le y_1$;

2) $\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$.

Atunci şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sunt convergente şi au aceeaşi limită, adică* $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Propoziţia 10. (**Lema lui O. Stolz**) : *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir oarecare şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir strict monoton şi nemărginit. Dacă există*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n},\ \text{în } \overline{\mathbb{R}}$$

atunci există $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ *şi are loc egalitatea*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

Observaţia 4. *Afirmaţia reciproca, în general, nu este adevărată.*

Propoziţia 11. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir din* $\mathbb{R}$ *astfel încât* $x_n \to x^\circ$. *Atunci şirul* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,
$y_n = \frac{1}{n}\big(x_1 + x_2 + ... + x_n\big)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *este convergent şi* $y_n \to x^\circ$.

Propoziţia 12. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Dacă există*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n},\ \text{în } [0,+\infty] \subset \overline{\mathbb{R}},$$

atunci există $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$ *şi are loc egalitatea* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

Observaţia 5. *Afirmaţia reciproca, în general, nu este adevărată.*

Propoziţia 13. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Presupunem că există*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda.$$

1) *Dacă* $\lambda < 1$, *atunci* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

2) *Dacă* $\lambda > 1$, *atunci* $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Şiruri în $(\mathbb{C}, |\cdot|)$

Teorema 13. *Fie* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z^\circ = x^\circ + iy^\circ$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
1° $z_n \to z^\circ$ (*în* $\mathbb{C}$);
2° $x_n \to x^\circ$ *şi* $y_n \to y^\circ$ (*în* $\mathbb{R}$).

Teorema 14. *Fie* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
1° $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este şir fundamental în* $\mathbb{C}$;
2° $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *şi* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sunt şiruri fundamentale în* $\mathbb{R}$.

Teorema 15. (**Criteriul lui Cauchy**) *Fie* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $z_n \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
1° $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este şir convergent;*
2° $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este şir fundamental.*

Şiruri în $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$

Teorema 16. *Fie* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x^n = (x_1^n, ..., x_m^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x^\circ = (x_1^\circ, ..., x_m^\circ) \in \mathbb{R}^m$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
1° $x^n \to x^\circ$ (*în* $\mathbb{R}^m$);
2° $x_k^n \to x_k^\circ$ (*în* $\mathbb{R}$), $\forall k = 1, ..., m$.

Teorema 17. *Fie* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n = (x_1^n, ..., x_m^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
1° $(x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este şir fundamental în* $\mathbb{R}^m$;
2° $(x_k^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este şir fundamental în* $\mathbb{R}$, $\forall k = 1, ..., m$.

Teorema 18. (**Criteriul lui Cauchy**)*: Fie* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x^n \in \mathbb{R}^m$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
1° $(x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este şir convergent;*
2° $(x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este şir fundamental.*

Şiruri de funcţii

Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ şi $\mathcal{F}(A;\mathbb{R})$ spaţiul liniar real al funcţiilor definite pe A cu valori în $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}(A;\mathbb{R}) = \{f / f : A \to \mathbb{R}\}.$$

Definiţia 8. *Se numeşte şir de funcţii din* $\mathcal{F}(A;\mathbb{R})$ *orice aplicaţie* $s : \mathbb{N}^* \to \mathcal{F}(A;\mathbb{R})$. *Această aplicaţie se notează prin* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sau* $(f_n)_{n\geq 1}$ *sau* $(f_1, f_2, ..., f_n, ...)$.

Definiţia 9. *Fie* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir de funcţii din* $\mathcal{F}(A;\mathbb{R})$. *Elementul* $x^\circ \in A$ *se numeşte punct de convergenţă pentru şirul în cauză dacă şi numai dacă şirul numeric* $(f_n(x^\circ))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este convergent.*

Notăm prin A_c mulţimea punctelor de convergenţă pentru şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Funcţia $f : A_c \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

se numeşte limita şirului de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pe mulţimea A_c.

Definiţia 10. *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir de funcţii din $\mathcal{F}(A;\mathbb{R})$ şi $f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R})$. Şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ se numeţte simplu (punctual) convergent către f dacă şi numai dacă*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),\ \forall x \in A.$$

Notăm $f_n \xrightarrow{s} f$.

Propoziţia 14. *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir de funcţii din $\mathcal{F}(A;\mathbb{R})$ şi $f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R})$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $f_n \xrightarrow{s} f$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ *şi* $\forall x \in A$, $\exists n(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $\forall n \geq n(\varepsilon, x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir de funcţii din $\mathcal{F}(A;\mathbb{R})$.

Definiţia 11. *Şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ se numeşte simplu (punctual) convergent pe A dacă şi numai dacă există $f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R})$ astfel încât $f_n \xrightarrow{s} f$.*

Definiţia 12. *Şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ din $\mathcal{F}(A;\mathbb{R})$ se numeşte convergent uniform pe A către $f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R})$ dacă şi numai dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon)$ şi $\forall x \in A \Rightarrow$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

Notăm $f_n \xrightarrow{u} f$.

Definiţia 13. *Şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ din $\mathcal{F}(A;\mathbb{R})$ se numeşte convergent uniform pe A dacă şi numai dacă există $f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R})$ astfel încât $f_n \xrightarrow{u} f$.*

Observaţia 6. *Dacă $f_n \xrightarrow{u} f$ atunci $f_n \xrightarrow{s} f$.*

Observaţia 7. *Dacă $f_n \xrightarrow{s} f$ şi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniform pe A, atunci $f_n \xrightarrow{u} f$.*

Observaţia 8. *Din definiţia 12, rezultă că "şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu converge uniform către f pe A ($f_n \overset{u.}{\not\to} f$) dacă şi numai există $\varepsilon_0 > 0$ cu proprietatea că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists k_n \geq n$ şi $x_n \in A$ astfel încât să avem $|f_{k_n}(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$".*

Teorema 19. (**Criteriul lui Cauchy**) *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir din $\mathcal{F}(A;\mathbb{R})$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *converge uniform pe* A;

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $\forall n \geq n(\varepsilon)$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$ *şi* $\forall x \in A \Rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Teorema 20. *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir din $\mathcal{F}(A;\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R})$ şi $\varphi_n \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R}_+)$ cu proprietatea că $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \geq n_0$ şi $\forall x \in A \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varphi_n(x)$. Dacă $\varphi_n \xrightarrow{u} 0$, atunci $f_n \xrightarrow{u} f$.*

Teorema 21. *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir de funcţii din $C^\circ(A;\mathbb{R})$. Dacă $f_n \xrightarrow{u} f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R})$, atunci $f \in C^\circ(A;\mathbb{R})$.*

Teorema 22. (**Teorema lui Dini**) *Fie* $A \subset \mathbb{R}$ *o mulţime compactă şi* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir din* $C^\circ(A;\mathbb{R})$ *astfel încât* $f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \forall n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $\forall x \in A$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), f \in C^\circ(A;\mathbb{R})$. *Atunci* $f_n \overset{u}{\to} f$ *pe* A.

Teorema 23. *Fie* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir din* $\mathcal{M}(A;\mathbb{R})$ (*mulţimea funcţiilor mărginite pe* A). *Dacă* $f_n \overset{u}{\to} f \in \mathcal{F}(A;\mathbb{R})$, *atunci* $f \in \mathcal{M}(A;\mathbb{R})$.

Teorema 24. *Fie* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir din* $\mathcal{I}([a,b];\mathbb{R})$. *Dacă* $f_n \overset{u}{\to} f \in \mathcal{M}([a,b];\mathbb{R})$, *atunci:*

1° $f \in \mathcal{I}([a,b];\mathbb{R})$;

2° $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} f_n(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x \ \left(= \int\limits_{[a,b]} \big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\big)\mathrm{d}x \right).$

Teorema 25. *Fie* $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ *un interval,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir din* $\mathcal{D}(\mathbf{I};\mathbb{R})$ (*mulţimea funcţiilor derivabile pe* $\mathbf{I}$). *Dacă*

1° $f_n \overset{u}{\to} f \in \mathcal{F}(\mathbf{I};\mathbb{R})$;

2° $f_n' \overset{u}{\to} g \in \mathcal{F}(\mathbf{I};\mathbb{R})$,

atunci

i) $f \in \mathcal{D}(\mathbf{I};\mathbb{R})$;

ii) $f' = g$.

Teorema 26. *Fie* $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ *un interval mărginit,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir din* $\mathcal{D}(\mathbf{I};\mathbb{R})$. *Dacă*

1° $\exists x^\circ \in \mathbf{I}$ *astfel încât* $(f_n(x^\circ))_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este convergent;*

2° $f_n' \overset{u}{\to} g \in \mathcal{F}(\mathbf{I};\mathbb{R})$,

atunci

i) $\exists f \in \mathcal{D}(\mathbf{I};\mathbb{R})$ *astfel încât* $f_n \overset{u}{\to} f$;

ii) $f' = g$.

Teorema 27. *Fie* $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ *un interval. Dacă* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este un şir de funcţii care admit primitive pe* $\mathbf{I}$ *şi* $g_n \overset{u}{\to} g$ *pe* $\mathbf{I}$, *atunci* g *admite primitive pe* $\mathbf{I}$.

Puncte fixe. Principiul contracţiei

Definiţia 14. *Fie* $f : X \to X$ *o funcţie şi* $x^\circ \in X$. *Elementul* x° *se numeşte punct fix pentru funcţia* f *dacă şi numai dacă*

$$f(x^\circ) = x^\circ.$$

Definiţia 15. *Fie* (X,d) *un spaţiu metric şi* $f : X \to X$ *o funcţie. Funcţia* f *se numeşte contracţie dacă şi numai dacă există* $\lambda \in [0,1[$ *astfel încât*

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x,y),\ \forall x,y \in X.$$

Teorema 28. (**Principiul contracţiei Picard-Banach**) *Fie* (X,d) *un spaţiu metric complet şi* $f : X \to X$ *o contracţie. Atunci* f *are un singur punct fix.*

Observaţia 9. *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet,* $f : X \to X$ *o contracţie şi* $x_1 \in X$ *un punct arbitrar. Dacă* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este şirul de aproximaţii succesive* $(x_{n+1} = f(x_n),\ \forall n \in \mathbb{N}^*)$, *iar* $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, *atunci*

$$d\big(\bar{x}, x_{n+1}\big) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}.d(x_1, x_2).$$

Dacă ε_0 *este eroarea cu care trebuie aproximată limita* $\bar{x}$ *de către şirul de aproximaţii succesive, atunci primul pas de la care se realizează această eroare se determină din condiţia*

$$n_0 = \min\Big\{\frac{\lambda^n}{1-\lambda}.d(x_1, x_2) < \varepsilon_0\Big\}.$$

Mulţimi compacte

Fie (X,d) un spaţiu metric şi $A \subset X$.

Definiţia 16. *Mulţimea* A *se numeşte compactă prin şiruri (secvenţial compactă) dacă şi numai dacă din orice şir de puncte din* A *se poate extrage un subşir convergent.*

Teorema 29. *Dacă mulţimea* A *este compactă prin şiruri (secvenţial compactă), atunci* A *este închisă şi mărginită.*

Propoziţia 15. *Fie* $A \subset X$ *compactă prin şiruri şi* $A_1 \subset A$, A_1*-închisă. Atunci* A_1 *este compactă prin şiruri.*

Teorema 30. (**Bolzano-Weierstrass**) *Fie* $A \subset \mathbb{R}^n$ *(sau* $A \subset \mathbb{C}^n$*). Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) *A este secvenţial compactă;*
(ii) *A este închisă şi mărginită.*

Definiţia 17. *Mulţimea* $A \subset X$ *se numeşte compactă (prin acoperire) dacă şi numai dacă din orice acoperire a mulţimii* A *cu mulţimi deschise se poate extrage o subacoperire finită.*

Teorema 31. *Fie* $A \subset X$ *o mulţime compactă. Atunci* A *este închisă.*

Teorema 32. *Fie* $A \subset X$ *o mulţime compactă şi* $B \subset A$ *o mulţime închisă. Atunci* B *este compactă.*

Teorema 33. *Fie* $A \subset X$ *o mulţime compactă. Atunci orice şir din* A *are cel puţin un punct limită.*

Teorema 34. *Fie* $A \subset X$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) *A este mulţime compactă (prin acoperire);*
(ii) *A este mulţime compactă prin şiruri (secvenţial compactă).*

EXERCIŢII

§3.1. Şiruri în $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

Să se găsească termenul general pentru şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ care verifică relaţia de recurenţă:

1°.1 $x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 = a$, $x_1 = b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** Relaţia dată se poate scrie astfel: $x_{k+1} - x_k = x_k - x_{k-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Scriind relaţiile pentru $k = 1, ..., n$ şi adunând egalităţile membru cu membru, găsim $x_{n+1} - x_1 = n(x_1 - x_0)$ sau $x_{n+1} = b + n(b-a)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.2 $(n+1)x_{n+1} = (n+2)x_n - x_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_0 = a$, $x_1 = b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** Avem $(k+1)(x_{k+1} - x_k) = (x_k - x_{k-1})$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Găsim succesiv: $x_2 - x_1 = \frac{1}{2}(x_1 - x_0) = \frac{1}{2}(b-a)$, $x_3 - x_2 = \frac{1}{3}(x_2 - x_1) = \frac{1}{3!}(b-a)$, ..., $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1}(x_n - x_{n-1}) = ... = \frac{1}{(n+1)!}(b-a)$. Adunăm aceste relaţii termen cu termen şi obţinem $x_{n+1} = b + \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{(n+1)!}\right)(b-a)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.⌋

Să se precizeze dacă şirurile, care au termenul general exprimat mai jos, sunt mărginite:

1°.3 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Deoarece $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, rezultă $1 = x_1 < x_n < 2 - \frac{1}{n} < 2$, $\forall n \geq 2$.⌋

1°.4 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(k-1)\alpha$, $\alpha \in]0, 2\pi[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Avem $x_n = \dfrac{\cos\frac{(n-1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall \alpha \in]0, 2\pi[$, deci $|x_n| \leq \dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.5 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(k-1)\alpha$, $\alpha \in]0, 2\pi[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $x_n = \dfrac{\sin\frac{(n-1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall \alpha \in]0, 2\pi[$, deci $|x_n| \leq \dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.6 $x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos k\alpha$, $\alpha \in]-\pi, \pi[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Se observă că $(-1)^k \cos(k\alpha) = \cos k(\pi + \alpha)$. Se foloseşte ex. 1°.4.⌋

1°.7 $x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^n \sin k\alpha$, $\alpha \in]-\pi, \pi[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Are loc egalitatea $(-1)^k \sin(k\alpha) = \sin k(\pi + \alpha)$. Se foloseşte apoi ex. 1°.5.⌋

1°.8 $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Se observă că $1 < x_n \leq \sqrt[n]{1 + 2^n} < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.9 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. ⌈**R:** Se observă că $2 < x_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.10 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. ⌈**R:** $2 < x_n \leq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.11 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Din inegalitatea $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, rezultă că $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < x_n < 1+\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{3}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.12 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este nemărginit superioar. **I:** Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei $\varphi(x) = \ln x$ pe intervalul $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{N}^*$, obţinem: $\exists c_k \in]k, k+1[$ astfel încât $\ln(k+1) - \ln k = \frac{1}{c_k}$. Deoarece $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{c_k} < \frac{1}{k}$, atunci $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} < \sum\limits_{k=1}^{n} \left[\ln(k+1) - \ln k\right] < \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = x_n \Rightarrow x_n > \ln(n+1)$. Cum şirul $\left(\ln(n+1)\right)_{\{n\in\mathbb{N}^*}$ este nemărginit, rezultă că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este nemărginit.⌋

1°.13 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. ⌈**R:** $0 < x_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.14 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. ⌈**R:** $\frac{1}{2} \leq x_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.15 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

⌈**R:** Ţinând seama că $\sqrt{k} < k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, rezultă $x_n > \ln(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.16 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha < 1$ fixat, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Pentru $\alpha < 1 \Rightarrow k^\alpha < k$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Deci $x_n > \ln(n+1)$.⌋

1°.17 $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ⌈**R:** $2 < x_n < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.18 $x_n = n^{(-1)^n} + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $x_{2m} = 2m+1$, deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este nemărginit superior.⌋

1°.19 $x_n = (-1)^n n \sin\frac{n\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

⌈**R:** Deoarece $|x_{2m+1}| = 2m+1$, rezultă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sir nemărginit.⌋

1°.20 $x_n = \sqrt{1+\sqrt{2+...+\sqrt{n}}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Evident că $x_n \geq 1$. Din inegalitatea $\sqrt{\alpha} < \frac{1}{2}(1+\alpha)$, $\forall \alpha > 0$, şi $\alpha \neq 1$, obţinem $x_n < \frac{1}{2}(1+1+\sqrt{2+...+\sqrt{n}} < ... < \frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+...+\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} < \frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+...+\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{n+1}{2^n} < 3$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k} = 2$.⌋

1°.21 $x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n-\text{radicali}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. ⌈**R:** $1 < x_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.22 $x_n = \underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+...+\sqrt{a}}}}_{n-\text{radicali}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a > 0$.

⌈**R:** $\sqrt{a} < x_n < 1+\sqrt{a}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Într-adevăr, $x_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}} > \sqrt{a} = x_1$. Dacă admitem că

$x_n > x_{n-1}$, atunci $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} > \sqrt{a + x_{n-1}} = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci $x_n > x_1 = \sqrt{a} \Rightarrow \dfrac{1}{x_n} < \dfrac{1}{\sqrt{a}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Avem $x_n^2 = a + x_{n-1} < a + x_n \Rightarrow x_n < 1 + \dfrac{a}{x_n} < 1 + \dfrac{a}{\sqrt{a}} = 1 + \sqrt{a}$.⌋

Să se studieze monotonia şirurilor, care au termenul general de mai jos:

1°.23 $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{5^k + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $x_{n+1} > x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător.⌋

1°.24 $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k + k}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. ⌈**R:** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şir strict crescător.⌋

1°.25 $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ⌈**R:** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şir strict crescător.⌋

1°.26 $x_n = \dfrac{1}{2 + (-1)^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Deoarece $x_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad n = 2m - 1, \\ \frac{1}{3} & \text{dacă} \quad 2 = 2m, \end{cases}$ rezultă că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu este monoton.⌋

1°.27 $x_n = \dfrac{1}{3^n + (-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Deoarece $3^{n+1} + (-1)^{n+1} > 3^n + (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ rezultă că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător.⌋

1°.28 $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. ⌈**R:** Strict crescător.⌋

1°.29 $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. ⌈**R:** Strict descrescător.⌋

1°.30 $x_n = \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{n}}}}_{n-\text{radicali}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. ⌈**R:** Strict crescător.⌋

1°.31 $x_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + ... + \sqrt{a}}}}_{n-\text{radicali}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a > 0$. ⌈**R:** Strict crescător.⌋

1°.32 $x_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{3}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. ⌈**R:** Avem $x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.33 $x_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{1}{n+1}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < x_n$, $\forall n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.34 $x_n = \dfrac{n! e^n}{n^{n+p}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p > 0$.

⌈**R:** $x_{n+1} = x_n \cdot e \cdot \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+p}$. Deoarece[1)] $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+\alpha} < e < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$, cu $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{\ln 2} - 1$, atunci pentru $p \in]0, \dfrac{1}{\ln 2} - 1[$, avem $x_{n+1} \geq x_n$, iar pentru $p \leq \dfrac{1}{2}$ găsim $x_{n+1} \leq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
I: Considerăm funcţia $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x+1) - \ln x} - x$. Funcţia f este continuă, $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) =$

[1)] C. Udrişte, *Analiză matematică*, Partea I, I.P.B., 1972, pag. 1-16, Problema 4.

0, $\lim\limits_{x\to\infty} = \dfrac{1}{2}$ şi $f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)[\ln^2(x+1) - \ln^2 x]} - 1 = \dfrac{\operatorname{sh}^u}{u^2} - 1 > 0$, unde $e^2 u = 1 + \dfrac{1}{x}$. Deci funcţia f este strict crescătoare. Notăm $\alpha_0 = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f(n)$ şi $\beta_0 = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} f(n)$. Deoarece şirul $(f(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător, avem $\alpha_0 = f(1) = \dfrac{1}{\ln 2} - 1$ şi $\beta_0 = \lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \dfrac{1}{2}$. Dacă $\alpha < \alpha_0$, atunci $\alpha < f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Rightarrow \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+\alpha} < e < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$.⌋

Să se găseasc punctele limită pentru şirurile de termen general:

1°.35 $x_n = \dfrac{1 + 2(-1)^n}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. ⌈**R:** $\left\{-\dfrac{1}{3}, 1\right\}$.⌋

1°.36 $x_n = \dfrac{(-1)^n + n\cos(n\pi/4)}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. ⌈**R:** $\left\{-1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right\}$.⌋

1°.37 $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. ⌈**R:** $\{1, 2\}$.⌋

1°.38 $x_n = 1 + (-1)^n \sqrt[n]{\alpha}$, $\alpha > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. ⌈**R:** $\{0, 2\}$.⌋

1°.39 $x_n = 1 + (-1)^n \sqrt[n]{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. ⌈**R:** $\{0, 2\}$.⌋

1°.40 $x_n = \left(-\dfrac{n}{n+1}\right)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. ⌈**R:** $\{-\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e}\}$.⌋

1°.41 $x_m = \sin\dfrac{n\pi}{6}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. ⌈**R:** $\left\{-1, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1\right\}$.⌋

1°.42 $x_n = \dfrac{1 - n^{(-1)^n}}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. ⌈**R:** $1/2$.⌋

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ două şiruri de numere reale. Atunci:

1°.43 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \le \varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \le \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

⌈**R:** Considerăm mulţimile $A_n = \{x_k;\ k \ge n\}$, $B_n = \{y_k;\ k \ge n\}, C_n = \{x_k + y_k;\ k \ge n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Notăm $\underline{x}_n = \inf(A_n)$, $\underline{y}_n = \inf(B_n), \underline{u}_n = \inf(C_n)$, $\overline{x}_n = \sup(A_n)$, $\overline{x}_n = \sup(B_n)$, $\overline{u}_n = \sup(C_n)$. Avem $\underline{x}_n + \underline{y}_n \le x_k + y_k$, $\forall k \ge n \Rightarrow \underline{x}_n + \underline{y}_n \le \underline{u}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \le \varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n)$, iar $x_k + y_k \le x_k + \overline{y}_n$, $\forall k \ge n \Rightarrow \underline{u}_n \le \underline{x}_n + \overline{y}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \le \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.⌋

1°.44 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

⌈**R:** Folosim notaţiile precedente: $\underline{x}_n + y_k \le x_k + y_k$, $\forall k \ge n \Rightarrow \underline{x}_n + \overline{y}_n \le \overline{u}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n)$. Pe de altă parte, avem $x_k + y_k \le \overline{x}_n + \overline{y}_n$, $\forall k \ge n \Rightarrow \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.⌋

Fie $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir convergent şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir mărginit din $\mathbb{R}$. Atunci:

1°.45 $\varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

⌈**R:** Deoarece şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent, avem $\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Relaţia din ex.1°.43 devine egalitatea din enunţ.⌋

1°.46 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

⌈**R:** În ex.1°.44 schimbăm rolul lui x_n cu y_n şi ţinând seama de egalitatea de mai sus, obţinem relaţia cerută.⌋

Să se calculeze limitele de mai jos:

1°.47 $\underline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{2}$. $\lceil$**R:** $\frac{1}{2}$.$\rfloor$

1°.48 $\underline{\lim}_{n\to\infty} \left[1+n^{(-1)^n}\right]$. $\lceil$**R:** 1.$\rfloor$

1°.49 $\underline{\lim}_{n\to\infty} \left[2+(-1)^n+\sin(n\pi/2)\right]$. $\lceil$**R:** 0.$\rfloor$

1°.50 $\underline{\lim}_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{n}+(-1)^n\cos(n\pi/2)\right]$. $\lceil$**R:** -1.$\rfloor$

1°.51 $\overline{\lim}_{n\to\infty} \left[1-n^{(-1)^n}\right]$. $\lceil$**R:** 1.$\rfloor$

1°.52 $\overline{\lim}_{n\to\infty} \left[1-\sin(n\pi/3)\right]$. $\lceil$**R:** $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.$\rfloor$

Să se studieze convergenţa şirurilor care au termenul general exprimat mai jos:

1°.53 $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$, $n\in\mathbb{N}^*$, unde $a_1,...,a_n,...$ formează o progresie aritmetică.

$\lceil$**R:** $\dfrac{1}{a_k a_{k+1}} = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{a_k}-\dfrac{1}{a_k+r}\right), k=1,...n,\ \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow x_n = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_n+r}\right) = \dfrac{n}{a_1(a_1+nr)}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.$\rfloor$

1°.54 $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!}$, $n\in\mathbb{N}^*$. $\lceil$**R:** $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = 1-\frac{1}{n}$.$\rfloor$

1°.55 $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $n\in\mathbb{N}^*$. $\lceil$**R:** $x_n > \ln(n+1) \to \infty$ (vezi 1°.12)$\rfloor$

1°.56 $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha<1$ - fixat. $\lceil$**R:** $x_n > \ln(n+1) \to \infty$ (vezi 1°.12).$\rfloor$

1°.57 $x_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$.

$\lceil$**R:** $x_n = \dfrac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{(n!)^2} = \dfrac{n+1}{2n} \to \dfrac{1}{2}$.$\rfloor$

1°.58 $x_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^3-1}{k^3+1}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$.

$\lceil$**R:** $x_n = \dfrac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)\prod_{k=2}^{n}(k^2+k+1)}{\prod_{k=2}^{n}(k+1)\prod_{k=2}^{n}(k^2-k+1)} = \dfrac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)} \to \dfrac{2}{3}$.$\rfloor$

1°.59 $x_n = \dfrac{n!}{(1+1^2)(1+2^2)\cdot\ldots\cdot(1+n^2)}$, $n\in\mathbb{N}^*$. $\lceil$**R:** $x_n < \frac{1}{n!} \to 0$.$\rfloor$

1°.60 $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

$\lceil$**R:** $x_{n+1}-x_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Şirul este descrescător, iar $x_n>0$, deci este convergent.$\rfloor$

1°.61 $x_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \dfrac{1}{n+1} < 1$, $\forall n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Şirul este convergent.⌋

1°.62 $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$, $x_0 = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Deoarece $\sqrt{2} = 2\cos\dfrac{\pi}{2^2}$, rezultă $x_n = 2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}} \to 2$.⌋

1°.63 $x_n = 2^{n-1}\sin\dfrac{\theta}{2^n}$, $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $x_n = 0$, dacă $\theta = 0$. Dacă $\theta \neq 0 \Rightarrow x_n = \dfrac{\theta}{2}\cdot\dfrac{\sin(\theta/2^n)}{\theta/2^n} \to \dfrac{\theta}{2}$.⌋

1°.64 $x_n = 2^{n-1}\mathrm{tg}\,\dfrac{\theta}{2^n}$, $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, $n \in \mathbb{N}^*$. ⌈**R:** $x_n \to \dfrac{\theta}{2}$.⌋

1°.65 $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} + 2\cos(n\pi)}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $|x_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n} + 2(-1)^n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n} - 2}$, $\forall n \geq 5$, $n \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.66 $x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + \dfrac{4}{x_{n-1}}\right)$, $x_0 = a > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $x_n \to 2$. **I:** Să observăm mai întâi că $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să arătăm că $x_{n+1}^2 \geq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Într-adevăr $x_{n+1}^2 - 4 = \dfrac{1}{4}\left(x_n^2 + \dfrac{16}{x_n^2} + 8\right) - 4 = \dfrac{1}{4}\left(x_n - \dfrac{4}{x_n}\right)^2 \geq 0$. Deci $x_{n+1} \geq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Pe de altă parte $x_{n+1} - x_n = \dfrac{4 - x_n^2}{2x_n} \leq 0$, $\forall n \geq 2$. Aşadar şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent. Fie $x^\circ = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem $x^\circ = \dfrac{x^{\circ 2} + 4}{2x^\circ} \Rightarrow x^\circ = 2$.⌋

Să se calculeze următoarele limite:

1°.67 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$. ⌈**R:** 0.⌋

1°.68 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$. ⌈**R:** 0.⌋

1°.69 $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n$, $|\lambda| < 1$. ⌈**R:** 0.⌋

1°.70 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n}$, $a > 1$. ⌈**R:** 0.⌋

1°.71 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$, $a \in \mathbb{R}$. ⌈**R:** 0.⌋

1°.72 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1 + a^n}$, $a > 0$. ⌈**R:** 0, dacă $0 < a < 1$; 1/2, dacă $a = 1$; 1, dacă $a > 1$.⌋

1°.73 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{1 + a^{2n}}$, $a > 0$. ⌈**R:** 0, dacă $a \neq 1$; 1/2, dacă $a = 1$.⌋

1°.74 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$, $a > 0$. ⌈**R:** -1, dacă $0 < a < 1$; 0, dacă $a = 1$; 1, dacă $a > 1$.⌋

1°.75 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdot\ldots\cdot(1+a^n)}$, $a > 0$. ⌈**R:** 0, $\forall a > 0$.⌋

1°.76 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(a^{1/n} - 1\right)$, $a > 0$, $a \neq 1$. ⌈**R:** $\ln a$.⌋

1°.77 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + a^n\right)^{1/n}$, $a > 0$. ⌈**R:** 1, dacă $0<a\leq 1$; a, dacă $a>1$.⌋

1°.78 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(a^{1/n} + a^{-1/n} - 2\right)$, $a > 0$.

⌈**R:** $\ln^2 a$. **I:** $x_n = n^2(a^{1/n} + a^{-1/n} - 2) = a^{-1/n}\left[n(a^{1/n} - 1)\right]^2$.⌋

1°.79 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$, $a > 0 < b$. ⌈**R:** $\sqrt{ab}$.⌋

1°.80 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}\right)$, $a > 0$. ⌈**R:** $\ln a$.⌋

1°.81 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a_1}+...+\sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^n$, $a_k>0$, $k=1,...,m$. $\lceil$**R:** $\sqrt[m]{a_1a_2...a_m}$.$\rfloor$

1°.82 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot...\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\right)$. $\lceil$**R:** 0. **I:** $x_n=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot...\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.$\rfloor$

1°.83 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{2n+1}$. $\lceil$**R:** 0. **I:** $|x_n|=\left|\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{2n+1}\right|\leq\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{2n+1}\to 0$.$\rfloor$

1°.84 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}$, $|a|<1>|b|$. $\lceil$**R:** $\dfrac{1-b}{1-a}$.$\rfloor$

1°.85 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^\alpha}$, $\alpha>0$. $\lceil$**R:** 0.$\rfloor$

1°.86 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$. $\lceil$**R:** Nu există.$\rfloor$

1°.87 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{n\pi}{4}$. $\lceil$**R:** Nu există.$\rfloor$

1°.88 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$.

$\lceil$**R:** Nu există. **I:** Intervalul $\mathbf{I}_k=]2k\pi-\pi/4,2k\pi+\pi/4[$ are lungimea $\pi/2>1$, deci există $n_k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n_k\in\mathbf{I}_k\Rightarrow-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sin n_k<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$. Intervalul $\mathbf{J}_k=]2k\pi+\pi/4,2k\pi+3\pi/4[$ are lungimea $\pi/2>1$, deci există $n'_k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n'_k\in\mathbf{J}_k\Rightarrow\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\sin n'_k\leq 1$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$.$\rfloor$

1°.89 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n$. $\lceil$**R:** Nu există.$\rfloor$

1°.90 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{\pi}{2^n}$. $\lceil$**R:** 1.$\rfloor$

1°.91 $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi n^2}{4(1+n^2)}\right)$. $\lceil$**R:** 1.$\rfloor$

1°.92 $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{1+n(-1)^n}{1+n^2}$. $\lceil$**R:** 0.$\rfloor$

1°.93 $\lim\limits_{n\to\infty}\arcsin\dfrac{1+n^2(-1)^n}{n(n+2)}$. $\lceil$**R:** Nu există .$\rfloor$

1°.94 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left|\sum\limits_{k=1}^{n}k(-1)^k\right|$. $\lceil$**R:** $\frac{1}{2}$.$\rfloor$

1°.95 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$. $\lceil$**R:** $\frac{1}{3}$.$\rfloor$

1°.96 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)^2$. $\lceil$**R:** $\frac{4}{3}$.$\rfloor$

1°.97 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{2^k}$. $\lceil$**R:** 3.$\rfloor$

1°.98 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. $\lceil$**R:** $+\infty$ (vezi ex. 1°.12).$\rfloor$

1°.99 $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot a^n$, $|a|<1$. $\lceil$**R:** 0.$\rfloor$

1°.100 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{n^k}C_n^k$. $\lceil$**R:** $1-e^{-1}$. **I:** $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=1-\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k\dfrac{(-1)^{k-1}}{n^k}$.$\rfloor$

1°.101 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

⌈**R:** $\frac{1}{4}$. **I:** $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$, $\forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$.⌋

1°.102 $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\frac{\alpha}{2^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. ⌈**R:** α.⌋

1°.103 $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} \cos\frac{\alpha}{2^k}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** 1, dacă $\alpha = 0$ şi $\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$, dacă $\alpha \neq 0$. **I:** $\sin 2\alpha = 2^{n+1}\sin\frac{\alpha}{2^n}\cos\frac{\alpha}{2^n}\ldots\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$.⌋

1°.104 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{\sqrt{4k^2-1}}$. ⌈**R:** 1. **I:** $x_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.⌋

1°.105 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$. ⌈**R:** $-\ln 2$. **I:** $x_n = \ln\left(\frac{n+1}{2n}\right)$.⌋

1°.106 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

⌈**R:** Notăm $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ conţine subşirurile:
$(x_{2m-1})_{m\in\mathbb{N}^*}$ care este descrescător şi mărginit inferior de x_2 şi
$(x_{2m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ care este crescător şi mărginit superior de x_1.
În plus, avem inegalitatea $x_{2m} < x_{2m+1}$

Prin urmare, există limitele: $l_1 = \lim\limits_{m\to\infty} x_{2m}$ şi $l_2 = \lim\limits_{m\to\infty} x_{2m-1}$ şi $l_1 \leq l_2$. Deoarece $x_{2m+1} = x_{2m} + \frac{1}{2m+1}$, atunci $l_1 = l_2$. În concluzie, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent şi limita sa este $l = l_1 = l_2$. Pentru a calcula limita l să observăm că x_{2m}[2] $= \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{m+m} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{m}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{m}{m}}\right) \to \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln 2$. ⌋

1°.107 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(2k+1)}$.

⌈**R:** Avem $k(k+1)(2k+1) > k(k+1) \Rightarrow \frac{1}{k(k+1)(2k+1)} < \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Pe de altă parte, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este crescător. Deci el este convergent. Să observăm acum că $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{4}{2k+1}\right) = -1 + \frac{1}{n+1} + 4\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right) = 3 + \frac{1}{n+1} - 4\left[1 - \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right)\right] = 3 + \frac{1}{n+1} - 4\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}\right) \to 3 - 4\ln 2$.

Observaţie Putem scrie $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{4}{2k(k+1)(2k+2)} = 2\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k+1)} - 2\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = 2\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}\right) - 2\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right)$. ⌋

1°.108 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2+2^2} + \ldots + \frac{1}{1^2+2^2+\ldots+n^2}\right)$.

⌈**R:** Se observă că $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{6}{k(k+1)(2k+1)}$. Deci $x_n \to 6(3 - 4\ln 2)$.⌋

---
[2] Egalitatea lui Catalan

1°.109 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{k^2+k+1}$.

⌈**R:** $\frac{\pi}{4}$. **I:** $\operatorname{arctg}\frac{1}{k^2+k+1}=\operatorname{arctg}\frac{1}{k}-\operatorname{arctg}\frac{1}{k+1}=\operatorname{arctg}(k+1)-\operatorname{arctg}k$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$.⌋

1°.110 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\dfrac{2}{k^2}$.

⌈**R:** $\frac{3\pi}{4}$. **I:** $\operatorname{arctg}\frac{2}{k^2}=\operatorname{arctg}\frac{1}{k-1}-\operatorname{arctg}\frac{1}{k+1}=\operatorname{arctg}(k+1)-\operatorname{arctg}(k-1)$, $\forall k\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, $\Rightarrow$ $x_n=\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n}-\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ şi se ţine seama că $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\pi/2$.⌋

1°.111 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\dfrac{k\pi}{n}}$.

⌈**R:** $\frac{1}{2}$. **I:** În egalitatea $1+x+x^2+...+x^{n-1}=\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(x-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ făcând $x=1$, găsim $n=2^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$.⌋

1°.112 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_n^0+C_n^2+C_n^4+...}$. ⌈**R:** 2. **I:** Se ştie că: $C_n^0+C_n^2+C_n^4+...=2^{n-1}$.⌋

1°.113 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_n^1+C_n^4+C_n^7+...}$.

⌈**R:** 2. **I:** Avem: $C_n^1+C_n^4+C_n^7+...=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$.⌋

1°.114 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\cdot\ln\left(\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$. ⌈**R:** $-\frac{\pi^2}{2}$.⌋

1°.115 $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{n}\right)\right)$. ⌈**R:** 2π.⌋

1°.116 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot2+2\cdot3+...+n(n+1)}{n^3}$. ⌈**R:** $\frac{1}{3}$.⌋

1°.117 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(a+\dfrac{k}{n}\right)^2$, $a\in\mathbb{R}$. ⌈**R:** $a^2+a+\frac{1}{3}$.⌋

1°.118 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n+1}\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right)$. ⌈**R:** $\frac{1}{2}$. **I:** Vezi ex.1°.57.⌋

1°.119 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=2}^{n+1}\left(\dfrac{k^3-1}{k^3+1}\right)$. ⌈**R:** $\frac{2}{3}$. **I:** Vezi ex.1°.58.⌋

1°.120 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2+\sqrt{n}\cos(n\pi)}$. ⌈**R:** 0. **I:** Vezi ex.1°.65.⌋

1°.121 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{n\ln n}$. ⌈**R:** 0.⌋

1°.122 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^{1+\alpha}}{n-\ln(n+1)}$, $\alpha>0$. ⌈**R:** 0.⌋

1°.123 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\ln n}{n}\right)^n$. ⌈**R:** 0.⌋

1°.124 $\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\sin\frac{1}{n}\right)^n$. ⌈**R:** 1.⌋

1°.125 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n+k)^{3/2}}$. ⌈**R:** 0.⌋

1°.126 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$. ⌈**R:** 1.⌋

1°.127 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}$. ⌈**R:** 0.⌋

1°.128 $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

⌈**R:** $\sqrt{e}$. **I:** Se ştie că $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$. Fie $1>\varepsilon>0$. Există $V_\varepsilon\in\mathcal{V}(0)$ astfel încât $x\in V_\varepsilon\Rightarrow 1-\varepsilon<\frac{\ln(1+x)}{x}<1+\varepsilon\Rightarrow\exists n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n\geq n(\varepsilon)\Rightarrow\frac{k}{n^2}\in V_\varepsilon$, $\forall k=1,...,n\Rightarrow(1-\varepsilon)\frac{k}{n^2}<\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)<(1+\varepsilon)\frac{k}{n^2}$, $k=1,...,n$. Însumând după $k=1,...,n$, găsim $(1-\varepsilon)\frac{n(n+1)}{2n^2}<\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)<(1+\varepsilon)\frac{n(n+1)}{2n^2}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$.⌋

1°.129 $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^3}\right)$.

⌈**R:** $\sqrt[3]{e}$. **I:** Se procedează ca la exerciţiul precedent şi rezultă $(1-\varepsilon)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}<\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^3}\right)<(1+\varepsilon)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^3}\right)=\frac{1}{3}$.⌋

1°.130 $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{(n+k)^2}\right)$.

⌈**R:** 1. **I:** $\frac{(1-\varepsilon)n}{(2n)^2}<\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{(n+k)^2}\right)<\frac{(1+\varepsilon)n}{(n+1)^2}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{(n+k)^2}\right)=0$.⌋

1°.131 $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)$.

⌈**R:** e. **I:** $\frac{(1-\varepsilon)n}{\sqrt{n^2+n}}<\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)<\frac{(1+\varepsilon)n}{\sqrt{n^2+1}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)=1$.⌋

1°.132 $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^2(n+k)}}\right)$.

⌈**R:** 1. **I:** $\frac{(1-\varepsilon)n}{\sqrt{2n^3}}<\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^2(n+k)}}\right)<\frac{(1+\varepsilon)n}{\sqrt{n^2(n+1)}}$.⌋

1°.133 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k}$, $k \in \mathbb{N}^*$ - fixat. $\lceil$**R:** 1. **I:** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{n^k} = 1.\rfloor$

1°.134 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$. $\lceil$**R:** 0. **I:** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 0.\rfloor$

1°.135 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. $\lceil$**R:** $e^{-1}.\rfloor$

1°.136 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n}$. $\lceil$**R:** $1.\rfloor$

1°.137 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln(n!)}$.

$\lceil$**R:** 1. **I:** $1 < \ln(n!) < n^2$, $\forall n \geq 3 \Rightarrow 1 < \sqrt[n]{\ln(n!)} < \sqrt[n]{n^2} \to 1.\rfloor$

1°.138 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)}$. $\lceil$**R:** $4e^{-1}.\rfloor$

1°.139 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(a+1)(a+2)\cdot\ldots\cdot(a+n)}{n!}}$, $a > -1$. $\lceil$**R:** $1.\rfloor$

1°.140 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{\prod\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi}{k+1}}$. $\lceil$**R:** $0.\rfloor$

1°.141 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} \sin\frac{(2k-1)\pi}{4n}}$.

$\lceil$**R:** $\frac{1}{2}$. **I:** Ecuaţia $x^{2n}+1=0$ are rădăcinile $x_k = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$, $k = 0, 1, ..., 2n-1$. Deci $x^{2n}+1 = \prod\limits_{k=1}^{2n-1}(x-x_k)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Pentru $x = 1$, găsim $2 = \prod\limits_{k=0}^{2n-1}|1-x_k| = \prod\limits_{k=0}^{n-1}|1-x_k|^2$, deoarece rădăcinile x_k şi x_{2n-1-k}, $k = 0, ...n-1$, sunt complex conjugate. Deci $2 = \prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(2\sin\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right)^2.\rfloor$

1°.142 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n! \cdot 2^{-\frac{n(n+1)}{2}}}$. $\lceil$**R:** $0.\rfloor$

1°.143 $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \sqrt[n]{\frac{3^n}{(2n)!}}$. $\lceil$**R:** $0.\rfloor$

1°.144 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^3}{(3n)!}}$. $\lceil$**R:** $\frac{1}{27}.\rfloor$

1°.145 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}a^n}$, $a > 0$. $\lceil$**R:** $\frac{a}{4}.\rfloor$

1°.146 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}\right)$[3].

$\lceil$**R:** e^{-1}. **I:** Ex.1°.134 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\frac{n+1}{n} = 1 \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n = e^{e\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}\right)}$.

Pe de altă parte $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{(n!)^{(n+1)/n}}\right)^{\frac{n}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\right)^{\frac{n}{n+1}} = e \Rightarrow$

[3] *Şirul lui Traian Lalescu*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=e^{-1}.\rfloor$$

1°.147 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{3}\right)^n.$

$\lceil$**R:** 0. **I:** Ţinând seama de ex.1°.32, găsim $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{e}{3}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=0.\rfloor$

1°.148 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}.$ $\lceil$**R:** 0. **I:** Vezi ex.1°.33.$\rfloor$

1°.149 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{n^n}.$ $\lceil$**R:** $+\infty$. **I:** $x_{n+1}>2x_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.\rfloor$

1°.150 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^n}{(2n)!}.$ $\lceil$**R:** 0. **I:** $\displaystyle x_{n+1}=x_n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{1}{2n+1}.\rfloor$

1°.151 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot e^n}{n^{n+p}}.$

$\lceil$**R:** Din formula lui **Stirling**: $\displaystyle n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{o(1)}{n^2}\right)$, obţinem $\displaystyle x_n=\frac{n!e^n}{n^{n+p}}=$

$$\sqrt{2\pi}n^{\frac{1}{2}-p}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{o(1)}{n^2}\right)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}+\infty, & \text{dacă } p<\frac{1}{2},\\ \sqrt{2\pi} & \text{dacă } p=\frac{1}{2},\\ 0, & \text{dacă } p>\frac{1}{2}.\end{cases}\rfloor$$

1°.152 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(a+1)(2a+1)\cdot\ldots\cdot(na+1)},\ a>0.$

$\lceil$**R:** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{e}{a}$. Dacă $a>e$, atunci $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$. Dacă $a<e$, atunci $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$. Dacă $a=e$, atunci $\displaystyle x_n=\frac{n^n}{e^n\left(1+\frac{1}{e}\right)\left(2+\frac{1}{e}\right)\ldots\left(n+\frac{1}{e}\right)}<\frac{n^n}{e^nn!}=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{o(1)}{n^2}\right)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=0.\rfloor$

1°.153 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right).$

$\lceil$**R:** $\frac{1}{4}$. **I:** Deoarece $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}$, atunci pentru $\forall\varepsilon\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$, $\exists n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\displaystyle n\geq n(\varepsilon)\Rightarrow\frac{(1-2\varepsilon)k}{2n^2}<\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1<\frac{(1+2\varepsilon)k}{2n^2}$, $\forall k=1,...,n$. Însumăm membru cu membru şi găsim $\displaystyle\frac{(1-2\varepsilon)n(n+1)}{4n^2}<x_n<\frac{(1+2\varepsilon)n(n+1)}{4n^2}$, $\forall n\geq n(\varepsilon)\Rightarrow\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{4}.\rfloor$

1°.154 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1\right).$

$\lceil$**R:** $\frac{1}{9}$. **I:** Deoarece $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\frac{1}{3}$, atunci pentru $\forall\varepsilon\in\left]0,\frac{1}{3}\right[$, $\exists n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\displaystyle\forall n\geq n(\varepsilon)\Rightarrow\frac{(1-3\varepsilon)k^2}{3n^3}<\sqrt[3]{1+\frac{k^2}{n^3}}-1<\frac{(1+3\varepsilon)k^2}{3n^3}$, $\forall k=1,...,n$. Însumăm membru cu membru şi obţinem: $\displaystyle\frac{(1-3\varepsilon)n(n+1)(2n+1)}{18n^3}<x_n<\frac{(1+3\varepsilon)n(n+1)(2n+1)}{18n^3}$, $\forall n\geq n(\varepsilon)\Rightarrow\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{9}.\rfloor$

1°.155 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}},\ a\in\mathbb{R}.$

$\lceil$**R:** $e^{-a^2/6}$. **I:** Din relaţia $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=-\frac{1}{2}$, pentru $\forall\varepsilon>0$, $\exists n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n\geq n(\varepsilon)\Rightarrow$ $\displaystyle\frac{(-1-2\varepsilon)k^2a^2}{2n^3}<\ln\left(\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}\right)<\frac{(-1+2\varepsilon)k^2a^2}{2n^3}$, $\forall k=1,...,n\Rightarrow\displaystyle\frac{(-1-2\varepsilon)n(n+1)(2n+1)a^2}{12n^3}$

$< \ln\prod_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}\right) < \frac{(-1+2\varepsilon)n(n+1)(2n+1)a^2}{12n^3} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}\right) = -\frac{a^2}{6}.\rfloor$

1°.156 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n^2}$. $\lceil$**R:** $\frac{\pi}{2}$. **I:** Se va folosi limita $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.\rfloor$

1°.157 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{(2k-1)a}{n^2}$, $a\in\mathbb{R}$. $\lceil$**R:** $a.\rfloor$

1°.158 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}}$.

$\lceil$**R:** π. **I:** Din $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow \forall 1>\varepsilon>0,\ \exists n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$ a.î. $\forall n\geq n(\varepsilon)$ avem $\frac{(1-\varepsilon)n\pi}{\sqrt{n(n+1)}} < \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+k}} < \frac{(1+\varepsilon)n\pi}{\sqrt{n^2+1}}.\rfloor$

1°.159 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{\pi}{n+k}$.

$\lceil$**R:** 0. **I:** Avem $0<\sin^2\frac{\pi}{n+k}<\frac{\pi^2}{(n+k)^2}$, $\forall k=1,...,n$ şi $\forall n\in\mathbb{N}^*.\rfloor$

1°.160 $\lim_{n\to\infty}\left(n-\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi}{n+k}\right)$. $\lceil$**R:** 0.$\rfloor$

1°.161 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

$\lceil$**R:** 1. **I:** Din $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \Rightarrow \forall 1>\varepsilon>0,\ \exists n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$ a.î. $\forall n\geq n(\varepsilon)$ avem $\frac{(1-\varepsilon)n}{\sqrt{n(n+1)}} < \sum_{k=1}^{n}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} < \frac{(1+\varepsilon)n}{\sqrt{n^2+1}}.\rfloor$

1°.162 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{tg}\frac{k^2}{n^3}$. $\lceil$**R:** $\frac{1}{3}$. **I:** Se foloseşte limita $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1.\rfloor$

1°.163 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{k^2}{n^3}$. $\lceil$**R:** $\frac{1}{3}$. **I:** Se foloseşte limita $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1.\rfloor$

1°.164 $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\sqrt{k}}{n^{3/2}}\right)$.

$\lceil$**R:** $e^{2/3}$. **I:** Fie $\varepsilon>0,\exists n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n\geq n(\varepsilon)\Rightarrow \frac{(1-\varepsilon)}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} < \ln(x_n) < \frac{(1+\varepsilon)}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$ şi în plus $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}}=\frac{2}{3}.\rfloor$

1°.165 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a^k\cos(k\varphi)$, $|a|<1$, $\varphi\in\mathbb{R}$. $\lceil$**R:** $\frac{1-a\cos\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}.\rfloor$

1°.166 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a^k\sin(k\varphi)$, $|a|<1$, $\varphi\in\mathbb{R}$. $\lceil$**R:** $\frac{a\sin\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}.\rfloor$

1°.167 $\lim_{n\to\infty}n\cdot\left[e-\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]$. $\lceil$**R:** $\frac{e}{2}$. **I:** $\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}=\frac{e}{2}.\rfloor$

1°.168 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left[\pi n^2\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\right]$.

⌈**R:** 0. **I:** Avem $\cos\left[\pi n^2\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\right]=\cos n\pi\left[-1+1+n\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\right]=(-1)^n\cos n\pi\Big[1+n\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\Big]$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}\pi x\left[1+x\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right]=\dfrac{\pi}{2}$.⌋

1°.169 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\cdot\sin\dfrac{1}{n}\right]^n$. ⌈**R:** 1.⌋

1°.170 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. ⌈**R:** 0.⌋

1°.171 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\ln(k+1)}$. ⌈**R:** 0 ⌋

1°.172 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. ⌈**R:** 1.⌋

1°.173 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$. ⌈**R:** 2.⌋

1°.174 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[k]{k}$. ⌈**R:** 0.⌋

1°.175 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{p+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}k^p,\ p\in\mathbb{N}^*$ fixat. ⌈**R:** $\dfrac{1}{p+1}$.⌋

1°.176 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^p}\sum\limits_{k=1}^{n}k^p-\dfrac{n}{p+1}\right),\ p\in\mathbb{N}^*$ fixat. ⌈**R:** $\dfrac{1}{2}$.⌋

1°.177 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{p+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)^p,\ p\in\mathbb{N}^*$ fixat. ⌈**R:** $\dfrac{2^p}{p+1}$.⌋

1°.178 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{k},\quad \alpha\in\,]-\pi/2,\pi/2[$. ⌈**R:** 0.⌋

1°.179 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}$. ⌈**R:** 1.⌋

1°.180 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{\pi}{n+k}$. ⌈**R:** 1.⌋

1°.181 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}$. ⌈**R:** $\dfrac{2}{\pi}$.

I: Notăm $x_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}$. Avem $x_n=\dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{k}{n}\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\dfrac{\pi}{4n}+$ $+\dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k}{n}\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\dfrac{\pi}{4n}\to 1\cdot\int\limits_0^1\cos\dfrac{\pi x}{2}\mathrm{d}x+0\cdot\int\limits_0^1\sin\dfrac{\pi x}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}$.⌋

1°.182 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right),\ a<b$. ⌈**R:** $\cos a-\cos b$.⌋

1°.183 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right),\ a<b$. ⌈**R:** $\sin b-\sin a$.⌋

1°.184 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{\alpha\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)}$, $a<b$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$. ⌈**R:** $\dfrac{1}{\alpha}(e^{\alpha b}-e^{\alpha a})$.⌋

1°.185 Fie şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde $x_n=\displaystyle\int_{1/(n+1)}^{1/n}\operatorname{arctg}(nx)\mathrm{d}x$, $y_n=\displaystyle\int_{1/(n+1)}^{1/n}\arcsin(nx)\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}^*$.

1) Să se calculeze x_n şi y_n.

2) Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$.

⌈**R:** 1) $x_n=\dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{\pi}{2}-\ln 2\right)-\dfrac{1}{n+1}\operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{1}{2n}\ln\left(1+\dfrac{n^2}{(n+1)^2}\right)$, $y_n=\dfrac{\pi}{2n}-\dfrac{1}{n+1}\operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{1}{n}\sqrt{1-\dfrac{n^2}{(n+1)^2}}$. 2) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}\ln 2$.⌋

Să se găsească $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, dacă:

1°.186 $x_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}^*$. .

⌈**R:** 0. **I:** $x_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(2m-1)!!\pi}{2^{m+1}m!}, & \text{dacă } n=2m,\\ \dfrac{2^{m-1}(m-1)!}{(2m-1)!!}, & \text{dacă } n=2m-1.\end{cases}$ Avem $\sin^{2m}x\le\sin^{2m-1}x\le\sin^{2m-2}x\Rightarrow x_{2m}\le x_{2m-1}\le x_{2m-2}$ şi $\lim\limits_{m\to\infty}x_{2m}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.⌋

1°.187 $x_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1\left(\arcsin x\right)^n\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}^*$.

⌈**R:** 0. **I:** $0<x_n\le\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^n\Rightarrow x_n\to 0$.⌋

1°.188 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$, $a>0$, $x_1>0$.

⌈**R:** Din condiţia $x_1>0$, rezultă că $x_2>0$ şi prin inducţie obţinem $x_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Să arătam că $x_{n+1}^2\ge a$. Avem $x_{n+1}^2-a=\dfrac{1}{4}\left(x_n-\dfrac{a}{x_n}\right)^2\ge 0$. Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător deoarece $x_{n+1}-x_n=\dfrac{a-x_n^2}{2x_n}\le 0$, $\forall n\ge 2$. Aşadar, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent. Fie $x^\circ=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem $x^\circ=\dfrac{1}{2}\left(x^\circ-\dfrac{a}{x^\circ}\right)\Rightarrow x^\circ=\sqrt{a}$.⌋

1°.189 $x_n=(n+2)x_{n-1}-(n+1)x_{n-2}$, $n>2$, $n\in\mathbb{N}^*$, $x_1=a$, $x_2=b$.

⌈**I:** Din relaţia de recurenţă, găsim $x_k-x_{k-1}=(k+1)(x_{k-1}-x_{k-2})$, $\forall n\ge 3$. Scriind relaţia respectivă pentru $k=3,...,n$ şi adunând membru cu membru, găsim $x_n=b+[4+4\cdot 5+...+4\cdot 5\cdot...\cdot(n+1)](b-a)$.⌋

1°.190 $qx_{n+2}-(q-1)x_{n-1}-x_n=0$, $n\in\mathbb{N}^*$, $q\neq 0$, $x_1=a$, $x_2=b$.

⌈**I:** Relaţia de recurenţă devine $q(x_{k+2}-x_{k+1}=-(x_{k+1}-x_k)$, $\forall k\ge 1,\Rightarrow x_{k+2}-x_{k+1}=$

$-\frac{1}{q}(x_{k+1}-x_k)$, $\forall k \geq 1$. Scriind relaţia de recurenţă pentru $k=1,...,n$ şi adunând membru cu membru, găsim $x_{n+2}=b+\left[-\frac{1}{q}+\left(-\frac{1}{q}\right)^2+...+\left(-\frac{1}{q}\right)^n\right](b-a)=\begin{cases} b+n(b-a), & \text{dacă} \quad q=-1, \\ b-\dfrac{1-\left(-\frac{1}{q}\right)^n}{q+1}, & \text{dacă} \quad q\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}. \end{cases}$ ⌋

1°.191 $(n+1)^2 x_{n+1} - n^2 x_n = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1 = a$.

⌈**R:** 1. **I:** Relaţia de recurenţă o scriem sub forma $(k+1)^2 x_{k+1} - k^2 x_k = (k+1)^2 - k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$. Dăm lui k valorile $1,...,n$ şi adunăm relaţiile obţinute membru cu membru. Găsim $(n+1)^2 x_{n+1} - a = (n+1)^2 - 1$.⌋

1°.192 $(n+1)^3 x_{n+1} - n^3 x_n = n+1$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1 = a$.

⌈**R:** 0. **I:** Din relaţia de recurenţă, procedând ca la exerciţiul precedent, găsim $(n+1)^3 x_{n+1} - a = -1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.⌋

1°.193 $x_{n+1} = \frac{x_n}{3-2x_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1 = a \neq 1 + \frac{1}{3^{n-1}-1}$, $\forall n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad a=1, \\ 0, & \text{dacă} \quad a\neq 1. \end{cases}$

I: Se demonstrează, prin inducţie, că $x_n = \frac{a}{3^{n-1}-(3^{n-1}-1)a}$.⌋

1°.194 $x_{n+1} = \frac{2x_n - 1}{x_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1 = a \neq 1 - \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, .

⌈**R:** 1. **I:** Se demonstrează, prin inducţie, că $x_n = \frac{n(a-1)+1}{n(a-1)-a+2}$.⌋

1°.195 $x_{n+1} = \sqrt[p]{a\sqrt[q]{ax_n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p,q \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $x_1 = \alpha > 0 < a$.

⌈**R:** $a^{\frac{q+1}{pq-1}}$. I: Se demonstrează, prin inducţie, că $x_{n+1} = a^{\frac{q+1}{pq-1}\left(1-\frac{1}{(pq)^n}\right)} \cdot x_1^{\frac{1}{(pq)^n}}$.⌋

1°.196 $x_{n+1} = \frac{4}{5x_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1 = a \neq 0$.

⌈**R:** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} a, & \text{dacă} \quad a=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \\ \nexists, & \text{dacă} \quad a\neq\pm\frac{2}{\sqrt{5}}. \end{cases}$ **I:** Se demonstrează, prin inducţie, că $x_{2n+1} = x_1 = a$ şi $x_{2n+2} = x_2 = \frac{4}{5a}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.197 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1 = a$.

⌈**R:** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad |a|\leq 1, \\ +\infty, & \text{dacă} \quad |a|>1. \end{cases}$ **I:** Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este crescător. Dacă $|a| \leq 1$, atunci $0 < x_{n+1} \leq 1$. Deci $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent. Notăm $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Trebuie ca să avem $l = \frac{1}{2}(l^2+1) \Rightarrow l = 1$. Dacă $|a| > 1$, atunci $x_{n+1} > 1$. Dacă admitem că şirul este convergent atunci limita sa $l > 1$ trebuie să verifice relaţia $l = \frac{1}{2}(l^2+1)$, ceea ce nu se poate. Deci $l = +\infty$.⌋

1°.198 $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1 = x_2 = 1$ (Şirul lui Fibonacci).

⌈**R:** Divergent. **I:** Din ipoteză, $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = x_1 + x_2 > x_2, ..., x_{n+1} = x_n + x_{n-1} > x_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci şirul este strict crescător. Dacă admitem că el este convergent, atunci limita sa $l > 1$ trebuie să verifice egalitatea $l = 2l$, ceea ce nu se poate. Deci $x_n \to +\infty$.⌋

1°.199 $x_{n+2} = \sqrt{x_n x_{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1 = a > 0, x_2 = b > 0$.

⌈**R:** $\sqrt[3]{ab^2}$. **I:** Din relaţia de recurenţă deducem $\frac{x_{n+2}}{x_n} = \sqrt{\frac{x_{n+1}}{x_n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n x_{n-1}}$, $x_n =$

$\sqrt{x_{n-1}x_{n-2}} \Rightarrow \dfrac{x_{2k+2}}{2_{2k}} = \sqrt[4]{\dfrac{x_{2k}}{x_{2k-2}}} = \ldots = \left(\dfrac{x_4}{x_2}\right)^{2^{-2(k-1)}}$ şi $\dfrac{x_{2k+1}}{x_{2k-1}} = \sqrt[4]{\dfrac{x_{2k-1}}{x_{2k-3}}} = \ldots = \left(\dfrac{x_3}{x_1}\right)^{2^{-2(k-1)}}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$. $a > b \Rightarrow x_{2k+1} < x_{2k-1}$ şi $x_{2k+2} > x_{2k}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. Pe de altă parte $b < x_3 < a$, $b < x_4 < a$, $b < x_5 < a$, iar prin inducţie găsim $b < x_n < a$, $\forall n \geq 3$. Subşirurile $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ şi $(x_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}^*}$ fiind monotone şi mărginite sunt convergente. Notăm $l_1 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1}$ şi respectiv $l_2 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k}$. Din relaţia $\dfrac{x_{2k+2}}{x_{2k}} = \sqrt{\dfrac{x_{2k+1}}{x_{2k}}}$, prin trecere la limită rezultă $l_1 = l_2 =: l$, cu $b < l < a$. Din relaţia $\dfrac{x_{2k+2}}{x_{2k}} = \left(\dfrac{x_4}{x_2}\right)^{2^{-2(k-1)}}$ găsim $x_{2k+2} = \dfrac{x_{2k+2}}{x_{2k}} \cdot \dfrac{x_{2k}}{x_{2k-2}} \cdot \ldots \cdot \dfrac{x_4}{x_2} \cdot x_2 = b\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/4}\right]^{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^{k-1}}}$.⌋

1°.200 $x_{n+2} = \sqrt{5+\sqrt{13+x_n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = \sqrt{5+\sqrt{13}}$.

⌈**R:** $x_1 = \sqrt{5} < x_2 = \sqrt{5+\sqrt{13}}$, $x_3 = \sqrt{5+\sqrt{13+x_1}} > \sqrt{5+\sqrt{13}} = x_2$. Să admitem că $x_k > x_{k-1}$, pentru $k \leq n$. Atunci $x_{n+1} - x_n = \sqrt{5+\sqrt{13+x_{n-1}}} - \sqrt{5+\sqrt{13+x_{n-2}}} =$
$= \dfrac{x_{n-1} - x_{n-2}}{\left(\sqrt{5+\sqrt{13+x_{n-1}}} + \sqrt{5+\sqrt{13+x_{n-2}}}\right)\left(\sqrt{13+x_{n-1}} + \sqrt{13+x_{n-2}}\right)} > 0$. Deci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător. Rezultă că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent. Dacă admitem că $x_n \to +\infty$, avem $1 < \dfrac{x_{n+2}}{x_n} = \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{13+x_n}}}{x_n} \to 0$, când $x_n \to \infty$, absurd. Deci $x_n \to l < \infty$. Ţinând seama de relaţia de recurenţă, prin trecere la limită, avem $l = \sqrt{5+\sqrt{13+l}} \Rightarrow l = 3$.⌋

1°.201 Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_1 = a > 0$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $y_1 = b > 0$, unde $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot y_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că aceste şiruri sunt convergente şi au aceeaşi limită.

⌈**R:** Din relaţia $u^2 + v^2 \geq 2|uv|$ şi din ipoteză, rezultă că $x_n \geq y_n$ şi $x_n > 0$, $y_n > 0$, $\forall n \geq 2$ şi în plus $x_n - x_{n-1} = \dfrac{1}{2}(y_{n-1} - x_{n-1}) \leq 0$, $\forall n \geq 3$, $\dfrac{y_n}{y_{n-1}} = \sqrt{\dfrac{x_{n-1}}{y_{n-1}}} \geq 1$, $\forall n \geq 3$. Deci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător pentru $n \geq 2$ şi mărginit inferior de $m = \min\{a, b\}$, iar şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este crescător şi mărginit superior de $M = \max\{a, b\}$. Prin urmare, şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt convergente. Notăm $l_1 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $l_2 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Din relaţiile de recurenţă, prin trecere la limită, rezultă $l_1 = l_2$.⌋

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_1 = a$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $y_1 = b$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, dacă:

1°.202 $x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\big(2x_n + y_n\big)$, $y_{n+1} = \dfrac{1}{3}\big(x_n + 2y_n\big)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**I:** $x_{n+1} + y_{n+1} = x_n + y_n = \ldots = x_1 + y_1 = a + b$, $x_{n+1} - y_{n+1} = \dfrac{1}{3}(x_n - y_n) = \ldots = \dfrac{1}{3^n}(x_1 - y_1) = \dfrac{1}{3^n}(ab)$. Deci $u_n = x_n + y_n \to a + b$ şi $v_n = x_n - y_n \to 0$, de unde rezultă că $x_n \to \dfrac{1}{2}(a+b)$ şi $y_n \to \dfrac{1}{2}(a+b)$.⌋

1°.203 $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - y_n}{2n+2}$, $y_{n+1} = y_n - \dfrac{y_n - x_n}{2n+2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**I:** Se observă că $x_{n+1} + y_{n+1} = x_n + y_n = \ldots = a + b$, $x_{n+1} - y_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}(x_n - y_n) = \dfrac{n}{n+1}\,\dfrac{n-1}{n}(x_{n-1} - y_{n-1}) = \ldots = \dfrac{1}{n+1}(a - b)$. Deci $x_n \to \dfrac{1}{2}(a+b)$ şi $y_n \to \dfrac{1}{2}(a+b)$.⌋

1°.204 $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{x_n + y_n}$, $y_{n+1} = \dfrac{y_n^2}{x_n + y_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a > 0 < b$.

⌈**I:** $x_{n+1} - y_{n+1} = x_n - y_n = \ldots = a - b$, $\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)^2 = \ldots = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{2^n} \to$

$\begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad |a|<|b|, \\ 1, & \text{dacă} \quad |a|=|b|, \\ +\infty, & \text{dacă} \quad |a|>|b|. \end{cases}$ $a=b \Rightarrow x_n = y_n = \dfrac{a}{2^{n-1}} \to 0.$ $a \neq b \Rightarrow x_n = \dfrac{(x_n - y_n)\dfrac{x_n}{y_n}}{\dfrac{x_n}{y_n}-1},$

$y_n = \dfrac{x_n - y_n}{\dfrac{x_n}{y_n}-1} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad |a|<|b|, \\ a-b, & \text{dacă} \quad |a|>|b| \end{cases}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \begin{cases} b-a, & \text{dacă} \quad |a|<|b|, \\ 0, & \text{dacă} \quad |a|>|b|. \end{cases}$

Dacă $a=-b$, atunci nu se pot construi şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.⌋

1°.205 Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_1>0$, $y_1>0$, $z_1>0$, unde

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\big(x_n+y_n+z_n\big), \quad y_{n+1} = \sqrt[3]{x_n \cdot y_n \cdot z_n}, \quad \frac{3}{z_{n+1}} = \frac{1}{x_n}+\frac{1}{y_n}+\frac{1}{z_n}, \ n\in\mathbb{N}^*.$$

1) Să se arate că pentru orice $n>1$ avem $x_n > y_n > z_n$, dacă $x_1 \neq y_1$ sau $x_1 \neq z_1$ sau $y_1 \neq z_1$.

2) Şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt monotone şi au o limită comună. Care este această limită dacă $x_1 \cdot z_1 = y_1^2$?

3) Să se demonstreze că dacă $x_1 \cdot z_1 \neq y_1^2$, atunci $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton.

⌈**I:** 1) Din identitatea $a^3+b^3+c^3-3abc = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\big[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\big]$ şi din ipoteze, găsim $x_{n+1}-y_{n+1} = \dfrac{1}{3}\Big[x_n+y_n+z_n-3\sqrt[3]{x_ny_nz_n}\Big] > 0$ şi $y_{n+1}-z_{n+1} = \sqrt[3]{x_ny_nz_n}\Big[\dfrac{x_ny_n+x_nz_n+y_nz_n-3\sqrt[3]{x_n^2y_n^2z_n^2}}{x_ny_n+y_nz_n+z_nx_n}\Big] > 0.$ Se demonstrează, prin inducţie, că $x_n>0, y_n>0, z_n>0$ şi $x_n \neq y_n$ sau $x_n \neq z_n$ sau $y_n \neq z_n$. Aşadar, $x_{n+1} > y_{n+1} > z_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să observăm că dacă $x_1=y_1=z_1=a$, atunci $x_n = y_n = z_n = a$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. 2) $x_{n+1}-x_n = \dfrac{1}{3}\big[(y_n-x_n)+(z_n-x_n)\big] < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ şi $z_{n+1}-z_n = \dfrac{x_nz_n(y_n-z_n)+y_nz_n(x_n-z_n)}{x_ny_n+x_nz_n+y_nz_n} > 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$. Aşadar, şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător, iar şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este crescător. Din relaţiile $z_{n+1} \le y_{n+1} \le x_{n+1}$, rezultă că şirurile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt convergente. Avem $0 < l_3 = \lim\limits_{n\to\infty} z_n \le \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_1$. Folosind prima şi a treia relaţie de recurenţă, găsim $z_{n+1} = \dfrac{3x_nz_n(3x_{n+1}-x_n-z_n)}{(x_n+z_n)(3x_{n+1}-x_n-z_n)+x_nz_n}$, iar prin trecere la limită rezultă că $l_3(4l_1^2-5l_1l_3+l_3^2)=0$. Cum $l_3>0$ şi ţinând seama de inegalitatea $l_3 \le l_1$, urmează că singura soluţie a ecuaţiei este $l_1 = l_3 =: l > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$. Dacă $x_1z_1 = y_1^2$, atunci $y_2 = y_1 \Rightarrow x_2z_2 = y_1^2 = y_2^2 \Rightarrow y_3 = y_2 = y_1$ şi prin inducţie rezultă $y_n = y_1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Deci $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = y_1$. 3) Să presupunem că $x_1z_1 > y_1^2$. Din relaţiile de recurenţă, găsim $y_2 = \sqrt[3]{x_1y_1z_1} > \sqrt[3]{y_1^3} = y_1$, $x_2 = \dfrac{1}{3}(x_1+y_1+z_1)$, $z_2 = \dfrac{3x_1y_1z_1}{x_1y_1+x_1z_1+y_1z_1}$, de unde urmează că $x_2z_2 - y_2^2 = \dfrac{(x_1+y_1+z_1)x_1y_1z_1}{x_1y_1+x_1z_1+y_1z_1} - \sqrt[3]{x_1^2y_1^2z_1^2} = \sqrt[3]{x_1^2y_1^2z_1^2}\dfrac{(x_1+y_1+z_1)\sqrt[3]{x_1y_1z_1}-x_1y_1-x_1z_1-y_1z_1}{x_1y_1+x_1z_1+y_1z_1} = \sqrt[3]{x_1^2y_1^2z_1^2}\dfrac{\Big(\sqrt[3]{x_1^2}-\sqrt[3]{y_1z_1}\Big)\Big(\sqrt[3]{x_1z_1}-\sqrt[3]{y_1^2}\Big)\Big(\sqrt[3]{x_1y_1}-\sqrt[3]{z_1^2}\Big)}{x_1y_1+x_1z_1+y_1z_1} > 0$, deoarece $x_1^2 > y_1z_1$, $x_1z_1 > y_1^2$, $x_1y_1 > z_1^2$. Prin urmare $x_2z_2 > y_2^2$. Prin inducţie completă se poate demonstra că $x_nz_n > y_n^2$. Să arătăm că şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este crescător. Avem $y_{n+1}-y_n = \sqrt[3]{y_n}\Big(\sqrt[3]{x_nz_n}-\sqrt[3]{y_n^2}\Big) > 0$, ceea ce demonstrează afirmaţia. În mod similar, se arată că dacă $x_1z_1 < y_1^2$, atunci şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător.⌋

Folosind criteriul lui Cauchy, să se studieze convergenţa şirurilor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, dacă:

1°.206 $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$ ⌈**R:** Convergent. **I:** $|x_{n+p}-x_n| < \dfrac{1}{n}$, $\forall n,p\in\mathbb{N}^*$.⌋

1°.207 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\ln(k+1)}$.

⌈**R:** Convergent. **I:** $|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{\ln(n+1)}$, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.208 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!(k+2)}$.

⌈**R:** Convergent. **I:** $|x_{n+p} - x_n| < \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{2}{n+2} + ... + \frac{2^{p-1}}{(n+2)(n+3)...(n+p)}\right) < \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n+2}{n}$, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.209 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{(2k+1)!}$, $a \in \mathbb{R}$ fixat.

⌈**R:** Convergent. **I:** $|x_{n+p} - x_n| < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|a|^k}{k!} < \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+2-|a|}$, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*, n+2 > [|a|]$.⌋

1°.210 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k\pi/6)}{k(k+1)}$.

⌈**R:** Convergent. **I:** $|x_{n+p} - x_n| < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{n}$, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.211 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\alpha)}{2^k}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** Convergent. **I:** $|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{2^n}$, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.212 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\alpha)}{k}$, $\alpha \in]0, 2\pi[$.

⌈**R:** Convergent. **I:** Notăm $S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \sin(k\alpha)$. Şirul $(S_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit (vezi ex.1°.5) şi $\sin(n\alpha) = S_n(\alpha) - S_{n-1}(\alpha)$, $\forall n \geq 2$. Avem $|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{S_{n+1}(\alpha) - S_n(\alpha)}{n+1} + ... + \frac{S_{n+p}(\alpha) - S_{n+p-1}(\alpha)}{n+p}\right|$ $= \left|\frac{-S_n(\alpha)}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)S_{n+1}(\alpha) + ... + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right)S_{n+p-1}(\alpha) + \frac{1}{n+p}S_{n+p}(\alpha)\right| \leq \frac{2M}{n+1} < \frac{2M}{n}$, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$, unde $M = \frac{1}{sin(\alpha/2)}$.⌋

1°.213 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k\alpha)}{k}$, $\alpha \in]0, 2\pi[$. ⌈**R:** Convergent. **I:** Analog ca la ex.1°.211.⌋

1°.214 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k!\alpha)}{k!}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** Convergent. **I:** $|x_{n+p} - x_n| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k!} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p-1} < \frac{1}{n}$, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.215 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(k\pi)}{k^2+1}$.

⌈**R:** Convergent. **I:** $|x_{n+p} - x_n| < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k-1)} < \frac{1}{n}$, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.216 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}.$

⌈**R:** Convergent. **I:** $|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2p-1}\right)$ $< \frac{1}{n}$, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.217 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+\alpha^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ fixat.

⌈**R:** Convergent. **I:** $|x_{n+p} - x_n| < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k-1)} < \frac{1}{n}$, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.218 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$.

⌈**R:** Divergent. **I:** Deoarece $\alpha \in]0,1]$, găsim $|x_{n+p} - x_n| \geq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k}$, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$. Dacă luăm $k_n = p_n = n$, atunci $|x_{k_n+p_n} - x_{k_n}| \geq \frac{1}{2}$. Aşadar, există $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$, cu proprietatea că pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$, luând $k_n = p_n = n \Rightarrow |x_{n+n} - x_n| \geq \varepsilon_0$. Prin urmare şirul în cauză nu este fundamental şi deci nu este convergent.⌋

1°.219 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln^\alpha(k+1)}$, $0 < \alpha \leq 1$.

⌈**R:** Divergent. **I:** Pentru $\alpha \in]0,1]$, avem $|x_{n+p} - x_n| > \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k+1}$, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.220 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\big(\ln(k+1)\big)^{\ln(k+1)}}.$

⌈**R:** Convergent. **I:** Egalitatea $\big(\ln(n+1)\big)^{\ln(n+1)} = (n+1)^{\ln\big(\ln(n+1)\big)} \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{(k+1)^{\ln\big(\ln(k+1)\big)}} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{n}$, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$, $n \geq e^{e^2}$.⌋

1°.221 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{10^k}$, unde $a_k \in \{0, 1, ..., 9\}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Convergent. **I:** $|x_{n+p} - x_n| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{10^k} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{9^k}{10^k} < 10\left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}$, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.222 $x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin\frac{1}{k^2}.$

⌈**R:** Convergent. **I:** $|x_{n+p} - x_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} (-1)^k \sin\frac{1}{k^2}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.223 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \sin^2\frac{\pi}{k}.$

⌈**R:** Convergent. **I:** $|x_{n+p} - x_n| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \sin^2\frac{\pi}{k} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\pi^2}{k^2} < \frac{\pi^2}{n}$, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.224 $x_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \sin \frac{\pi}{2^k}$.

⌈**R:** Convergent. **I:** Se ţine seama de inegalitatea $0 < \sin \frac{\pi}{2^n} \le \frac{\pi}{2^n}$.⌋

1°.225 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[k]{k^3}}$.

⌈**R:** Divergent. **I:** Se foloseşte inegalitatea $\sqrt[k]{k^3} \le \sqrt[4]{k^3}$, $\forall k \ge 4$ şi apoi se aplică ex.1°.217.⌋

§3.2. Şiruri în $(\mathbb{C}, |\cdot|)$

Să se studieze convergenţa şirurilor $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $z_n \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, dacă:

2°.1 $z_n = i^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Divergent. **I:** Avem $z_n = \begin{cases} i(-1)^{m-1}, & \text{dacă} \quad n = 2m-1, \\ (-1)^m, & \text{dacă} \quad n = 2m, \end{cases} \Rightarrow x_n = Re(z_n) =$
$= \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad n = 2m-1, \\ (-1)^m, & \text{dacă} \quad n = 2m, \end{cases}$ şi $y_n = Im(z_n) = \begin{cases} (-1)^{m-1}, & \text{dacă} \quad n = 2m-1, \\ 0, & \text{dacă} \quad n = 2m, \end{cases}$.⌋

2°.2 $z_n = \frac{i^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. ⌈**R:** Convergent. **I:** $|z_n| = \frac{1}{n} \to 0$.⌋

2°.3 $z_n = a^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$ - discuţie.

⌈**R:** Dacă $|a| < 1$, atunci $|z_n| = |a|^n \to 0$. Dacă $|a| > 1$, atunci şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este nemărgint, deci este divergent. Dacă $|a| = 1$, atunci $z_n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$, unde $\theta = \arg(a) \in [0, 2\pi[$. Pentru $\theta \ne 0 \Rightarrow (z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu are limită, iar pentru $\theta = 0$ avem $z_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.⌋

2°.4 $z_n = \frac{a^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$ - discuţie.

⌈**R:** Dacă $|a| \le 1$, atunci $z_n \to 0$, iar dacă $|a| > 1$, atunci $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este nemărginit.⌋

2°.5 $z_n = n \cdot a^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$ - discuţie.

⌈**R:** Dacă $|a| < 1 \Rightarrow z_n \to 0$, iar dacă $|a| \ge 1$ şirul este divergent.⌋

2°.6 $z_n = \sum_{k=1}^{n} a^{k-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$ - discuţie.

⌈**R:** Din egalitatea $z_n = \begin{cases} n, & \text{dacă} \quad a = 1, \\ \frac{1-a^n}{1-a}, & \text{dacă} \quad a \ne 1, \end{cases}$ rezultă că $x_n \to \frac{1}{1-a}$, dacă $|a| < 1$ şi este divergent în caz contrar.⌋

2°.7 $z_n = \frac{a^n}{1+|a|^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$ - discuţie.

⌈**R:** Dacă $|a| < 1$, atunci $z_n \to 0$. Dacă $a = 1$, atunci $z_n = \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, atunci $z_n \to 1$. Dacă $a \ne 1$, $|a| \ge 1$ şi $a \notin \mathbb{R}_+$, atunci şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este divergent. **I:** $z_n = \frac{|a|^n}{1+|a|^n}\left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right]$.⌋

2°.8 $z_n = \frac{a^n}{1+a^{2n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$ - discuţie.

⌈**R:** Din condiţia de existenţă este necesar ca $1 + a^{2n} \ne 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, adică $a \ne e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$, $\forall k = 0, ..., 2n-1$ şi $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a \in \mathbb{C} \setminus \{a/|a| = 1, a \ne 1\}$. Dacă $|a| < 1$, atunci $z_n \to 0$. Dacă $a = 1$, atunci $z_n = \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $|a| > 1$, atunci $z_n = \frac{|a|e^{in\theta}}{1+|a|^{2n}e^{2in\theta}} \Rightarrow z_n \to 0$.⌋

2°.9 $z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{ik\varphi}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** Avem $z_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\dfrac{e^{i\varphi} - e^{i(n+1)\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}, & \text{dacă } \varphi \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \\ \dfrac{n+1}{n}, & \text{dacă } \varphi \in 2\pi\mathbb{Z}, \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \varphi \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \\ 1, & \text{dacă } \varphi \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$⌋

2°.10 $\quad z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k e^{ik\varphi},\ n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi \in]-\pi, \pi[.$

⌈**R:** Din egalitatea $z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \dfrac{-e^{i\varphi} - (-e^{i\varphi})^{n+1}}{1 + e^{i\varphi}} \Rightarrow z_n \to 0.$⌋

2°.11 $\quad z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{e^{ik\varphi}}{k^2+1},\ n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi \in \mathbb{R}.$

⌈**R:** Convergent. **I:** $|z_{n+p} - z_n| \le \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} \dfrac{1}{k^2+1} < \dfrac{1}{n},\ \forall n, p \in \mathbb{N}^*$. Deci şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este fundamental.⌋

2°.12 $\quad z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{e^{ik\varphi}}{k},\ n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi \in \mathbb{R}.$

⌈**R:** Convergent, dacă $\varphi \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ şi divergent dacă $\varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$. **I:** $z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\cos(k\varphi)}{k} + i \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(k\varphi)}{k}$ şi se aplică 1°.211 şi 1°.212 pentru $\varphi \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.⌋

2°.13 $\quad z_n = \dfrac{i^n}{2 + \sqrt{n}\cos(n\pi)},\ n \in \mathbb{N}^*.$

⌈**R:** $z_n \to 0$. **I:** $|z_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n} + 2(-1)^n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \ge 4.$⌋

2°.14 $\quad z_n = i^n\big(\sqrt{n^2+1} - n\big),\ n \in \mathbb{N}^*.$

⌈**R:** $z_n \to 0$. **I:** $z_n = \dfrac{i^n}{\sqrt{n^2+1}+n},\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow |z_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \to 0.$⌋

2°.15 $\quad z_n = \sqrt[n]{in},\ n \in \mathbb{N}^*.$

⌈**R:** Divergent. **I:** $z_n = \sqrt[n]{ni} = \sqrt[n]{n} \cdot e^{i\frac{(4k+1)\pi}{2n}},\ k = 0, ..., n-1$. Pentru $n = 2m$ şi $k = 0$ găsim $z_{2m,0} \to 1$, iar pentru $k = m$ avem $z_{2m,m} = \sqrt[2m]{2m} \cdot e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{4m}\right)} \to -1.$⌋

2°.16 $\quad z_n = \dfrac{n^i}{n+1},\ n \in \mathbb{N}^*.$

⌈**R:** $z_n \to 0$. **I:** Deoarece $n^i = e^{i\mathrm{Ln}(n)}$, unde $\mathrm{Ln}(z) = \ln(|z|) + i(\theta + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$, atunci $n^i = e^{i\left(\ln n + i2k\pi\right)} = e^{-2k\pi}\big(\cos(\ln n) + i\sin(\ln n)\big) \Rightarrow |z_n| = \dfrac{e^{-2k\pi}}{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall k \in \mathbb{Z}$ fixat. Deci $z_n \to 0.$⌋

2°.17 $\quad z_n = \dfrac{n^{1+2i}}{n^2+1},\ n \in \mathbb{N}^*.$

⌈**R:** $z_n = \dfrac{n}{n^2+1} n^{2i} = \dfrac{n \cdot e^{2i(\ln n + 2k\pi i)}}{n^2+1} \Rightarrow |z_n| = \dfrac{n\, e^{-4k\pi}}{n^2+1} \to 0 \Rightarrow z_n \to 0.$⌋

2°.18 $\quad z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Big(\dfrac{\sin k}{k^3} + i\dfrac{\cos k^3}{k!}\Big),\ n \in \mathbb{N}^*.$

⌈**R:** Convergent. **I:** Şirurile formate cu partea reală şi partea imaginară $x_n = \mathrm{Re}(z_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sin k}{k^3}$ şi respectiv $y_n = \mathrm{Im}(z_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\cos k^3}{k!}$ sunt şiruri fundamentale.⌋

Să se calculeze:

2°.19 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^n+\sqrt[n]{\dfrac{(n!)^3}{(3n)!}}\right),\ a\in\mathbb{C}.$

⌈**R:** $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\begin{cases}\dfrac{1}{27}, & \text{dacă} \quad |a|<1,\\ \dfrac{28}{27}, & \text{dacă} \quad a=1,\\ \nexists, & \text{dacă} \quad |a|\geq 1 \wedge a\neq 1;\end{cases}$⌋

2°.20 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2i)^n}{n!}.$ ⌈**R:** 0.⌋

2°.21 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin^n\alpha+i\cos^n\alpha\right),\ \alpha\in[0,2\pi]$

⌈**R:** $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\begin{cases} i, & \text{dacă} \quad \alpha=0\vee\alpha=2\pi,\\ 1, & \text{dacă} \quad \alpha=\pi/2,\\ \nexists, & \text{dacă} \quad \alpha=\pi\\ \nexists, & \text{dacă} \quad \alpha=3\pi/2.\\ 0, & \text{dacă} \quad \alpha\in[0,2\pi]\setminus\{0,\pi/2,\pi,3\pi/2,2\pi\}.\end{cases}$⌋

2°.22 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{i\varphi}{n}\right)^n.\ \varphi\in\mathbb{R}.$ ⌈**R:** $e^{i\varphi}$. ⌋

2°.23 Să se arate că dacă şirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent şi are limita z°, atunci şirul $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, unde

$$w_n=\frac{1}{n}\big(z_1+z_2+...+z_n\big),\ n\in\mathbb{N}^*,$$

este convergent şi are limita z°.

⌈**R:** Fie $\varepsilon>0$. $\exists n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n\geq n_1(\varepsilon)\Rightarrow|z_n-z^\circ|<\varepsilon/2$. În plus, $\exists M>0$ astfel încât $|z_n-z^\circ|\leq M,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Fie $n>n_1(\varepsilon)$. Avem $|w_n-z^\circ|=\dfrac{1}{n}\big|(z_1-z^\circ)+...+(z_n-z^\circ)\big|\leq\dfrac{1}{n}\Big[M\cdot n_1(\varepsilon)+\big(n-n_1(\varepsilon)\big)\dfrac{\varepsilon}{2}\Big]=\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\big(M-\varepsilon/2\big)n_1(\varepsilon)}{n}$. Din $\dfrac{\big(M-\varepsilon/2\big)n_1(\varepsilon)}{n}\to 0$, $\exists n(\varepsilon)\geq n_1(\varepsilon)$ astfel încât $n\geq n(\varepsilon)\Rightarrow\dfrac{\big(M-\varepsilon/2\big)n_1(\varepsilon)}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}\Rightarrow|w_n-z^\circ|<\varepsilon,\ \forall n\geq n(\varepsilon)\Rightarrow w_n\to z^\circ$.⌋

2°.24 Fie $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât $z_n\to z^\circ\in\mathbb{C}$ şi $w_n\to w^\circ\in\mathbb{C}$. Atunci şirul care are termenul general

$$\zeta_n=\frac{1}{n}\big(z_1w_1+z_2w_2+...+z_nw_n\big),\ n\in\mathbb{N}^*,$$

este convergent şi $\zeta_n\to z^\circ\cdot w^\circ$.

⌈**R:** Deoarece $z_n\to z^\circ$ şi $w_n\to w^\circ$, avem $z_n\cdot w_n\to z^\circ\cdot w^\circ$ $\big(|z_n\cdot w_n-z^\circ\cdot w^\circ|\leq|z_n-z^\circ|\cdot|w_n|+|w_n-w^\circ|\cdot|z^\circ|\big)$.⌋

2°.25 Fie $\lambda_k\in\mathbb{R}_+\setminus\{0\},\ \forall k\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k=+\infty$ şi fie $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât $z_n\to z^\circ$. Să se arate că

$$w_n=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k z_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k}\to z^\circ.$$

⌈**R:** Fie $\varepsilon > 0$. Din $z_n \to z^\circ \Rightarrow \exists n_1(\varepsilon)$ astfel încât $n \geq n_1(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - z^\circ| < \varepsilon/2$. Fie $n \geq n_1(\varepsilon)$. Avem $|w_n - z^\circ| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^{-1} \left|\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k(z_k - z^\circ)\right| \leq \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^{-1} \left(M \sum\limits_{k=1}^{n_1(\varepsilon)-1} \lambda_k + \frac{\varepsilon}{2} \sum\limits_{k=n_1(\varepsilon)}^{n} \lambda_k\right) \leq M\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^{-1} \left(\sum\limits_{k=1}^{n_1(\varepsilon)-1} \lambda_k\right) + \frac{\varepsilon}{2}$. Deoarece $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \to +\infty \Rightarrow \exists n(\varepsilon) \geq n_1(\varepsilon)$ astfel încât $\forall n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow M\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\right)^{-1} \left(\sum\limits_{k=1}^{n_1(\varepsilon)-1} \lambda_k\right) < \frac{\varepsilon}{2}$. Deci $n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |w_n - z^\circ| < \varepsilon$, adică $w_n \to z^\circ$.⌋

Să se demonstreze convergenţa şirului $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, dacă:

2°.26 $z_n = \dfrac{1}{n+1}\Big(n + 1 + nz + (n-1)z^2 + \ldots + z^n\Big)$, $|z| < 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Se observă că $z_n = \dfrac{1}{n+1}\Big[(n+1)(1+z+z^2+\ldots+z^n) - (z+2z^2+\ldots+nz^n)\Big] = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} - \dfrac{z}{n+1}\Big(\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}\Big)' \to \dfrac{1}{1-z}$.⌋

2°.27 $z_n = \dfrac{1}{2n+1}\Big(2n+1-(2n-1)z^2+(2n-3)z^4-\ldots+(-1)^n z^{2n}\Big)$, $|z| < 1$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $z_n = \dfrac{1}{2n+1}\Big[(2n+1)(1 - z^2 + z^3 \ldots + (-1)^n z^{2n}) - (-2z^2 + 4z^4 + \ldots + (-1)^n 2nz^{2n})\Big] = \dfrac{1-(-z^2)^{n+1}}{1+z^2} - \dfrac{z}{2n+1}\Big(\dfrac{1-(-z^2)^{n+1}}{1+z^2}\Big)' \to \dfrac{1}{1+z^2}$.⌋

§3.3. Şiruri în $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$ $(m \geq 2)$

Să se studieze convergenţa şirului de termen general:

3°.1 $x^n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^3+2}, \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}\right) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Convergent. **I:**Şirurile de termen general $x_1^n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^3+2}$ şi $x_2^n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, sunt fundamentale.⌋

3°.2 $x^n = \left((-1)^n \sqrt[n]{a}, \sin\dfrac{n\pi}{3}\right) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Divergent. **I:** Şirul $\left(x_2^n = \sin\dfrac{n\pi}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu are limită.⌋

3°.3 $x^n = \left(\dfrac{\big(n+\sqrt{n^2+1}\big)^2}{\sqrt{n^6+1}}, \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}\right) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Convergent. **I:** $x^n \to (0,0)$.⌋

3°.4 $x^n = \left(\dfrac{\ln n}{n^\alpha}, \cos\dfrac{n\pi}{2}, \dfrac{1+(-1)^n \sqrt[n]{n}}{2+\cos(n\pi)}\right) \in \mathbb{R}^3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha > 0$.

⌈**R:** Divergent. **I:** Şirul $\left(x_2^n = \cos\dfrac{n\pi}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu are limită.⌋

3°.5 $x^n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}, \dfrac{n!}{n^n}, \dfrac{1+2+\ldots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}\right) \in \mathbb{R}^3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Convergent. **I:** $x^n = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}, \dfrac{n!}{n^n}, -\dfrac{n}{2(n+2)}\right) \to \left(1, 0, -\dfrac{1}{2}\right)$.⌋

3°.6 $x^n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k^2}, \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{\big(\ln(k+1)\big)^{\ln(k+1)}}, \dfrac{5+(-1)^n}{2}\right) \in \mathbb{R}^3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Divergent. **I:** $\left(x_3^n=\dfrac{5+(-1)^n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu este convergent.⌋

3°.7 $x^n=\left(\dfrac{n+1}{2^{n+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^k}{k},\dfrac{1}{(n!)^2}\sum\limits_{k=1}^{n}k^k,\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin k\right)\in\mathbb{R}^3,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$

⌈**R:** Convergent. **I:** Pentru şirurile formate cu componentele şirului de vectori se va aplica lema lui *O. Stolz* şi găsim $x^n\to(1,0,0)$.⌋

3°.8 $x^n=\left(\dfrac{C_{2n}^n}{2^{2n}},\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\arcsin\dfrac{1}{k}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{k}\right),\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^k+3^k}{k+4^k}\right)\in\mathbb{R}^3,\ n\in\mathbb{N}^*.$

⌈**R:** Convergent. **I:** $x_1^n=\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot,,,\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\to0$. Şirul $\left(x_2^n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\arcsin\dfrac{1}{k}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{k}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are aceeaşi natură cu şirul $\left(u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^3}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, deoarece $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x-\operatorname{arctg}x}{x^3}=\dfrac{1}{2}$. Şirul $\left(x_3^n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^k+3^k}{k+4^k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este fundamental.⌋

3°.9 $x^n=\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k},\dfrac{\ln(n!)}{n\cdot\ln(n+1)},\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}\right)\in\mathbb{R}^3,n\in\mathbb{N}^*.$

⌈**R:** Convergent. **I:** $x_1^n=\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}\to\dfrac{2}{3}$ (lema lui Stolz). $x_2^n=\dfrac{\ln(n!)}{n\ln(n+1)}=\dfrac{1}{n\ln(n+1)}\times\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k\to1$ (lema lui Stolz). $x_3^n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}\to\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}$.⌋

3°.10 $x^n=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(k+1)\left(a^{1/(k+1)^m}-1\right),\sqrt[n]{n!\sin\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{3}\ldots\sin\dfrac{\pi}{n}},\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=2}^{n+1}\dfrac{1}{\ln k}\right)\in\mathbb{R}^3,\ a>1,m\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$

⌈**R:** Deoarece $\lim\limits_{k\to\infty}(k+1)^m\left(a^{1/(k+1)^m}-1\right)=\ln a$, şirul $\left(x_1^n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(k+1)^m}{(k+1)^{m-1}}\left(a^{1/(k+1)^m}-1\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are aceeaşi natură ca şirul $\left(u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(k+1)^{m-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, care este convergent dacă $m>2$ şi divergent dacă $m\le2$. În continuare avem:

$$\lim_{n\to\infty}x_2^n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\sin\frac{\pi}{2}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{\pi}{n+1}}{n!\sin\frac{\pi}{2}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{\pi}{n}}=\pi\ \wedge\ \lim_{n\to\infty}x_3^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+2)}=0.$$⌋

§ 3.4. Şiruri de funcţii reale

Pentru şirurile de funcţii de mai jos, să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$.

4°.1 $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*},\quad f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^{2n}},\ x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}^*.$

⌈**R:** $f(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } |x|\le1,\\ x^2, & \text{dacă } |x|>1.\end{cases}$⌋

4°.2 $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*},\quad f_n(x)=\sqrt[n]{|\sin x|^n+|\cos x|^n+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n},\ x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}^*.$

$$\lceil \mathbf{R:}\ f(x) = \begin{cases} |\cos x|, & \text{dacă} \quad x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [(k-\frac{1}{4})\pi, (k+\frac{1}{4})\pi[, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{dacă} \quad x \in \{(k \pm \frac{1}{4})\pi / k \in \mathbb{Z}\}, \\ |\sin x|, & \text{dacă} \quad x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}](k+\frac{1}{4})\pi, (k+\frac{3}{4})\pi[. \end{cases} \rfloor$$

4°.3 $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad f_n(x) = \dfrac{\ln(1+e^{nx})}{\ln(1+e^n)},\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil \mathbf{R:}\ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x \le 0, \\ x, & \text{dacă} \quad x > 0. \end{cases} \rfloor$

4°.4 $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad f_n(x) = \dfrac{x + x^2 e^{nx}}{1+e^{nx}},\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil \mathbf{R:}\ f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă} \quad x \le 0, \\ x^2, & \text{dacă} \quad x > 0. \end{cases} \rfloor$

4°.5 $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad f_n(x) = (1-x)^n \sin(nx),\ x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil \mathbf{R:}\ f(x) = 0(\cdot).\rfloor$

4°.6 $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad f_n(x) = \dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}},\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*.$

$$\lceil \mathbf{R:}\ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} [(k+\frac{1}{6})\pi, (k+\frac{5}{6})\pi[, \\ \frac{x}{2}, & \text{dacă} \quad x \in \{(k \pm \frac{1}{6})\pi / k \in \mathbb{Z}\}, \\ x, & \text{dacă} \quad x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}](k-\frac{1}{6})\pi, (k+\frac{1}{6})\pi[. \end{cases} \rfloor$$

4°.7 $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad f_n(x) = \cos\dfrac{x}{2} \cdot \ldots \cdot \cos\dfrac{x}{2^n},\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil \mathbf{R:}\ f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{dacă} \quad x \ne 0, \\ 1, & \text{dacă} \quad x = 0. \end{cases}$ (Se folose te identitatea $\sin x = 2^n \sin\frac{x}{2^n} \prod\limits_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k}$).$\rfloor$

4°.8 $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad f_n(x) = \left(\dfrac{\sin x}{2^n \sin(x/2)}\right)^n,\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil \mathbf{R:}\ f(x) = 0(\cdot).\rfloor$

4°.9 $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad f_n(x) = \dfrac{\sin(n!x)}{n},\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil \mathbf{R:}\ f(x) = 0(\cdot).\rfloor$

4°.10 $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad f_n(x) = \cos\dfrac{x}{n},\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil \mathbf{R:}\ f(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}.\rfloor$

4°.11 $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad f_n(x) = e^{-n^2 x} \sin(n^3 x),\ x \in]0,+\infty[,\ n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil \mathbf{R:}\ f(x) = 0(\cdot).\rfloor$

4°.12 $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad f_n(x) = \dfrac{x}{x^3+n^2},\ x \in [1,+\infty[,\ n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil \mathbf{R:}\ f(x) = 0(\cdot).\rfloor$

4°.13 $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad f_n(x) = \dfrac{x}{x+n},\ x \in]0,+\infty[,\ n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil \mathbf{R:}\ f(x) = 0(\cdot).\rfloor$

4°.14 $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x},\ x \in [0,+\infty[,\ n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil \mathbf{R:}\ f(x) = x,\ x \in [0,+\infty[.\rfloor$

4°.15 $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2},\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil$**R:** $f(x) = 0(\cdot).\rfloor$

4°.16 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\quad f_n(x) = x^n,\ x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil$**R:** $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x \in [0,1[, \\ 1, & \text{dacă} \quad x = 1. \end{cases} \rfloor$

4°.17 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\quad f_n(x) = x^n(1-x),\ x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil$**R:** $f(x) = 0(\cdot).\rfloor$

4°.18 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\quad f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x^n. & \text{dacă} \quad x \in [0,1[, \\ 0, & \text{dacă} \quad x = 1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil$**R:** $f(x) = 0(\cdot).\rfloor$

4°.19 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\quad f_n(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdot \ldots \cdot (1+x^{2n}),\ \ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil$**R:** $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x = -1, \\ \dfrac{1}{1-x}, & \text{dacă} \quad x =]-1,1[. \end{cases}$ **I:** $f_n(x) = \begin{cases} 2^{n+1}, & \text{dacă} \quad x = 1, \\ \dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}. \end{cases} \rfloor$

4°.20 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{[x] + [2^m x] + \ldots + [n^m x]}{n^{m+1}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ - fixat.

$\lceil$**R:** $f(x) = \dfrac{x}{m+1}$ (Se ţine seama de inegalitatea $k^m x - 1 < [k^m x] \leq k^m x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi $\forall k \in \mathbb{N}^*$).$\rfloor$

4°.21 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\quad f_n(x) = \displaystyle\int_0^x \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t,\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil$**R:** $f(x) = e^x - 1.\rfloor$

4°.22 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{n \cdot \ln x}{n^3 \cdot \ln^2 x + 1}$, $x \in]0,+\infty[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$\lceil$**R:** $f(x) = 0(\cdot).\rfloor$

4°.23 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{n \cdot \operatorname{argsh} x + \alpha^2}{n+x}$, $x \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$\lceil$**R:** $f(x) = \operatorname{argsh} x.\rfloor$

4°.24 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\quad f_n(x) = n^\alpha \cdot x \cdot e^{-nx},\ x \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil$**R:** $f(x) = 0(\cdot)$, $\forall x \in [0,+\infty[.\rfloor$

4°.25 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\quad f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$\lceil$**R:** $f(x) = 0(\cdot).\rfloor$

4°.26 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\quad f_n(x) = \begin{cases} (n-1)x, & \text{dacă} \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right], \\ 1-x, & \text{dacă} \quad x \in \left]\dfrac{1}{n}, 1\right], \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil$**R:** $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x = 0, \\ 1-x, & \text{dacă} \quad x \in]0,1]. \end{cases} \rfloor$

4°.27 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\quad f_n(x) = \begin{cases} xn^\alpha, & \text{dacă} \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right], \\ \left(\dfrac{2}{n} - x\right)n^\alpha, & \text{dacă} \quad x \in \left]\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right], \\ 0, & \text{dacă} \quad x \in \left]\dfrac{2}{n}, 1\right], \end{cases} \quad n \geq 3,\ \alpha > 0.$

$\lceil$**R:** $f = 0(\cdot)$. **I:** Dacă $0 < \alpha < 1$, atunci $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{n^{1-\alpha}}$, $\forall x \in [0,1]$. Dacă $\alpha \geq 1$, atunci pentru $x = 0$ găsim $f_n(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, iar pentru $x \in]0,1]$, există $n_x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\dfrac{2}{n} < x \Rightarrow f_n(x) = 0$, $\forall n \geq n_x$.$\rfloor$

Pentru şirurile de funcţii de mai jos să se studieze convergenţa uniformă către funcţia corespunzătoare $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

4°.28 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n(x) = \dfrac{x^2}{1+(2\sin x)^{2n}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $f_n \in C^\circ(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $f \notin C^\circ(\mathbb{R};\mathbb{R})$, deci $f_n \overset{u.}{\not\to} f$.⌋

4°.29 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{x^3+n^2}$, $x \in [1,+\infty[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $0 < f_n(x) < \dfrac{x}{x^2+n^2} \le \dfrac{1}{2n}$, $\forall x \in [1,+\infty[\Rightarrow f_n \overset{u.}{\to} 0$.⌋

4°.30 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n(x) = \dfrac{n}{x+n}$, a) $x \in]0,+\infty[$, b) $x \in [1,2]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** a) $f_n(n) = \dfrac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f_n \overset{u.}{\not\to} f = 0(\cdot)$. b) $0 < f_n(x) < \dfrac{2}{n+1} \Rightarrow f_n \overset{u.}{\to} f = 0(\cdot)$.⌋

4°.31 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x}$, a) $x \in [0,1]$, b) $x \in 1,+\infty[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** a) $f_n \overset{u.}{\to} 1_{[0,1]}$, deoarece $|f_n(x) - x| = \dfrac{x^2+x}{1+n+x} \le \dfrac{2}{n+1}$, $\forall x \in [0,1]$. b) $f_n \overset{u.}{\not\to} 1_{[1,+\infty[}$ deoarece $|f_n(n) - n| = \dfrac{n(n+1)}{2n+1} \ge \dfrac{2}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.⌋

4°.32 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$, a) $x \in [0,1]$, b) $x \in [1,+\infty[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** a) $f_n \overset{u.}{\not\to} f = 0(\cdot)$. b) $f_n \overset{u.}{\to} f = 0(\cdot)$. **I:** $f_n(1) \ge f_n(x)$, $\forall x \in [1,+\infty[$.⌋

4°.33 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $f_n \overset{u.}{\not\to} f$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [0,1[, \\ 1, & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$⌋

4°.34 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n(x) = x(1-x)^n$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $f_n \overset{u.}{\to} f = 0(\cdot)$.⌋

4°.35 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{(1+x^{2n})^n}$, $x \in [1,+\infty[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $f_n \overset{u.}{\to} f = 0(\cdot)$. **I:** $1 + x^{2n} > 2x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall x \in [1,+\infty[\Rightarrow 0 < f_n(x) < \dfrac{1}{2^{n-1}}$.⌋

4°.36 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n(x) = 4^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}})$, $x \in [-1,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $f_n \overset{s.}{\to} f = 0(\cdot)$. **I:** Pentru $x_n = 2^{-1/2^n} \in]01[$, obţinem $|f_n(2^{-1/2^n}) - f(2^{-1/2^n})| = 2^{2(n-1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci $f_n \overset{u.}{\not\to} f$.⌋

4°.37 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x^n, & \text{dacă } x \in [0,1[, \\ 0, & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $f_n \overset{u.}{\not\to} f$ **I:** $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 (n+1)x^n \mathrm{d}x = 1 \ne 0 = \int_{[0,1]} \big(\lim_{n\to\infty}(n+1)x^n\big)\mathrm{d}x$.⌋

4°.38 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n(x) = \dfrac{\sin(n!x)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $f_n \overset{u.}{\to} f = 0(\cdot)$.⌋

4°.39 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n(x) = \cos\dfrac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $f_n \overset{u.}{\not\to} f(x) = 1$ **I:** $|f_n(n) - 1| = 1 - \cos(1) =: \varepsilon_0 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.⌋

4°.40 $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n(x) = e^{-n^2x}\sin(n^3x)$, $x \in]0,+\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $f_n \overset{u.}{\not\to} f = 0(\cdot)$. **I:** $|f_n \overset{s.}{\to} f = 0(\cdot)$, iar $f_n(\dfrac{1}{n^2}) = e^{-1}\sin n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (care nu are limită când $n \to +\infty$).⌋

4°.41 $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{ne^{-\frac{1}{x^2}}}{n^2e^{-\frac{2}{x^2}}+1}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $f_n \overset{u.}{\not\to} f = 0(\cdot)$. **I:** $f_n \overset{s.}{\to} f = 0(\cdot)$ şi $f_n(\dfrac{1}{\sqrt{\ln n}}) = \dfrac{1}{2}$, $\forall n \geq 2$.⌋

4°.42 $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\quad f_n(x) = \sum k = 1^n \dfrac{1}{k^2+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $f_n \overset{u.}{\to} f$. **I:** $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \dfrac{1}{n}$, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall x \in \mathbb{R}$.⌋

4°.43 $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\quad f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(1-x)x^k$, $x \in]-1,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $f_n(x) \overset{s.}{\to} f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă} \quad x \in]-1,1[, \\ 0, & \text{dacă} \quad x = 1. \end{cases}$ $\quad f_n \overset{u.}{\not\to} f$, deoarece $(f_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir de funcţii continue pe $]-1,1]$, iar f nu este continuă în $x = 1$.⌋

4°.44 Fie $f : [a,b] \to [0,+\infty[$ o funcţie continuă. Să se arate că şirul $(f_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2^n}, & \text{dacă} \quad \dfrac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{k}{2^n},\ k = 1,...,n2^n, \\ n, & \text{dacă} \quad f(x) \geq n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

converge uniform către funcţia f.

⌈**R:** Deoarece $f \in C^\circ([a,b];\mathbb{R}) \Rightarrow f$ este mărginită. Deci există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x \in [a,b] \Rightarrow 0 \leq f(x) < n_0$. Fie $x \in [a,b]$ şi $n \leq n_0$. Există $k_x \in \{1,...,n2^n\}$ astfel încât $\dfrac{k_x-1}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{k_x}{2^n} \Rightarrow f_n(x) = \dfrac{k_x-1}{2^n}$ şi $\dfrac{k_x-1}{2^n} - \dfrac{k_x}{2^n} < f_n(x) - f(x) \leq 0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{1}{2^n} \Rightarrow f_n \overset{u.}{\to} f$.⌋

4°.45 Fie şirul $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\quad f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{b_n}, & \text{dacă} \quad 0 \leq x \leq b_n, \\ 1 - \dfrac{x-b_n}{c_n-b_n}, & \text{dacă} \quad b_n < x < c_n, \\ 0, & \text{dacă} \quad c \geq c_n, \end{cases}$

unde $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir de numere reale descrescător şi convergent către zero. Să se arate că $f_n \to f = 0(\cdot)$. Convergenţa este uniformă?

⌈**R:** $f_n \overset{s.}{\to} f = 0(\cdot)$, dar $f_n \overset{u.}{\not\to} f = 0(\cdot)$. **I:** Fie $x > 0$. Deoarece $c_n \to 0, \Rightarrow \exists n_x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n \geq n_x \Rightarrow f_n(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Dacă $x_n = b_n, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f_n(x_n) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f_n \overset{u.}{\not\to} f$.⌋

4°.46 Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f_n \overset{s.}{\to} 0(\cdot)$. Să se arate că există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x_n \searrow 0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = 0$.

⌈**R:** Fie $x \in \mathbb{R}$. Deoarece $f_n(x) \to 0, \Rightarrow \left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este mărginit. Notăm $g_n(x) = \sup\{f_k(x); k \geq n\}$. Avem $0 \leq f_n(x) \leq g_n(x)$, $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall x \in \mathbb{R}$ cu $g_n(x) \to 0$. Fie $\varepsilon_m = \dfrac{1}{m}$ şi $x = \dfrac{1}{m}$. Există $n_m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \geq n_m \Rightarrow 0 \leq g(\dfrac{1}{m}) < \dfrac{1}{m}$. Fără a mărgini generalitatea, putem presupune că şirul $(n_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător şi nemărginit. Punem $x_n = \dfrac{1}{m}$, dacă $n \in [n_m, n_{m+1}[$. Avem $g_n(x_n) \leq g_{n_m}(x_n) = g_{n_m}(\dfrac{1}{m}) < \dfrac{1}{m}$ şi $x_n \nearrow 0$ când $m \to \infty$, de unde rezultă că $g_n(x_n) \to 0$. Dacă ţinem seama de inegalitatea $0 \leq f_n(x_n) \leq g_n(x_n) \Rightarrow f_n(x_n) \to 0$.⌋

4°.47 Să se arate că şirul $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$, $x \in [0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge către o funcţie continuă, dar nu este convergent uniform.

⌈**R:** $f_n \xrightarrow{s} f = 0(\cdot)$ $\left(0 \le f_n(x) \le x^n, \forall x \in [0,1[\right)$. Considerăm şirul $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Avem $x_n = 1 - \dfrac{1}{n} \in [0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, iar $f_n(x_n) \to \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} \neq 0$. Deci $f_n \overset{u.}{\not\to} f$.⌋

4°.48 Să se arate că şirul $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{kx}}{k}$, $x \in]-\infty, 0[$, $n \in \mathbb{N}^*$, nu este convergent uniform.

⌈**R:** Arătăm că şirul $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x \in], 0[$, este mărginit şi deoarece este crescător este convergent. Avem $e^{kx} = e^{-k(-x)} < \dfrac{1}{k(-x)}$, $\forall x \in]-\infty, 0[$ şi $\forall k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < f_n(x) < \left(-\dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}\right) < -\dfrac{2}{x}$, $\forall n \ge 2$. Notăm $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}$. Dacă luăm $x = -\dfrac{1}{2n}$, obţinem $\left|f\left(-\dfrac{1}{2n}\right) - f_n\left(-\dfrac{1}{2n}\right)\right| > \dfrac{e^{-\frac{n+1}{2n}}}{n+1} + \ldots + \dfrac{e^{-1}}{2n} > e^{-1}\left(\dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{2n}\right) > \dfrac{1}{2e}$, de unde urmează că $f_n \overset{u.}{\not\to} f$. Fie $n, m \in \mathbb{N}^*$ şi $x \in \{x / |f_n(x) - f_m(x)| \ge \varepsilon_0\}$. Avem $\varepsilon < |f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)|$. Dacă $|f_n(x) - f(x)| \ge |f_m(x) - f(x)|$, atunci $f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon/2$, iar dacă $|f_m(x) - f(x)| \ge |f_n(x) - f(x)|$, atunci $|f_m(x) - f(x)| \ge \varepsilon/2$.⌋

4°.49 Fie $f_n : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\varepsilon > 0$. Să se arate că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, atunci, pentru $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$ este adevărată incluziunea

$$\left\{x \in A / |f_n(x) - f_m(x)| \ge \varepsilon\right\} \subset \left\{x \in A / |f_n(x) - f(x)| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in A / |f_m(x) - f(x)| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

⌈**R:**

⌋

4°.50 Să se arate că limita şirului de funcşii $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kx)}{k(k+1)}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, este o funcţie continuă.

⌈**R:** Fie $x \in \mathbb{R}$, $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$. Avem $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \dfrac{1}{n} \Rightarrow \left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, convergent uniform; notăm $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Deoarece $f_n \in C^\circ(\mathbb{R};\mathbb{R})$ şi $f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow f \in C^\circ(\mathbb{R};\mathbb{R})$.⌋

4°.51 Fie $A \subset \mathbb{R}$ şi $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$, $f_n(x) \to 0$, $\forall x \in A$. Să se arate că dacă există $x^\circ \in A$ astfel încât $\lim\limits_{x\to x^\circ} f_n(x) = c_n$, iar $c_n \not\to 0$, atunci convergenţa nu poate fi uniformă pe A.

⌈**R:** Să presupunem contrariul, adică $f_n \xrightarrow{u} f$. Atunci $\left(f_n(\cdot)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, este fundamental pe A, deci mărginit. Prin urmare, pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$, există $\sup\{|f_n(x)|; x \in A\}$ şi ţinând seama că $f_n \xrightarrow{u} f = 0(\cdot)$, obţinem că $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in A} |f(x)|\right) = 0$. Cum c_n este punct de aderenţă pentru mulţimea $f_n(A)$, atunci $0 \le |c_n| \le \sup\limits_{x\in A} |f(x)|$ şi folosind rezultatul de mai sus, urmează că $c_n \to 0$, ceea ce contrazice ipoteza.⌋

4°.52 Fie $A \subset \mathbb{R}$ compactă şi $f_n \in C^\circ(A;\mathbb{R})$, $f_{n+1} \le f_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că dacă $f_n \xrightarrow{s} f \in C^\circ(A;\mathbb{R})$, atunci $f_n \xrightarrow{u} f$.

⌈**R:** Notăm $\varphi_n = f_n - f$. Deoarece $f_n \xrightarrow{s} f$, iar $f_n, f \in C^\circ(A;\mathbb{R})$, atunci: $\varphi_n \xrightarrow{s} 0(\cdot)$, $\varphi_n \in C^\circ(A;\mathbb{R})$ şi $\varphi_n \ge 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Fie $\varepsilon > 0$ şi $x^\circ \in A$. Cum $\varphi_n(x^\circ) \to 0$, $\exists n(\varepsilon, x^\circ) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n \ge n(\varepsilon, x^\circ) \Rightarrow \varphi_{n(\varepsilon,x^\circ)}(x^\circ) < \varepsilon$. Cum $\varphi_{n(\varepsilon,x^\circ)}$ este continuă în punctul x°, există $V(\varepsilon, x^\circ) \in \mathcal{V}(x^\circ)$

astfel încât $x \in A \cap V(\varepsilon, x^\circ) \Rightarrow \varphi_{n(\varepsilon,x^\circ)}(x) < \varepsilon$. Din ipoteză avem $\varphi_{n(\varepsilon,x^\circ)+1} \le \varphi_{n(\varepsilon,x^\circ)}$ şi ţinând seama de inegalitatea precedentă, rezultă că $\varphi_n(x) < \varepsilon$, $\forall n \ge n(\varepsilon, x^\circ)$ şi $\forall x \in A \cap V(\varepsilon, x^\circ)$. Prin ipoteză A este compactă, există $x_1, ..., x_m \in A$ astfel încât $A \subset V(\varepsilon, x_1) \cup ... \cup V(\varepsilon, x_m)$ şi $\varphi_n(x) < \varepsilon$, $\forall n \ge n(\varepsilon, x_k)$, $\forall x \in A \cap V(\varepsilon, x_k), k = 1, ..., m$. Notăm $n(\varepsilon) = \max\{n(\varepsilon, x_1), ..., n(\varepsilon, x_m)\}$. Fie $n \ge n(\varepsilon)$ şi $x \in A$. Atunci există $k^\circ \in \{1, ..., m\}$ astfel încât $x \in A \cap V(\varepsilon, x_{k^\circ}) \Rightarrow \varphi_n(x) < \varepsilon \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{u} 0(\cdot) \Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f.\rfloor$

4°.53 Fie şirurile $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $\big(g_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\left.\begin{aligned} f_n(x) &= \left(1+\frac{x^2}{1^2}\right)e^{-\frac{x^2}{1^2}}\left(1+\frac{x^2}{2^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2^2}}...\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)e^{-\frac{x^2}{n^2}}, \\ g_n(x) &= \frac{(1^1+x^2)(2^2+x^2)...(n^2+x^2)}{(n!)^2 e^{Sx^2}}, \end{aligned}\right. \quad , \forall n \in \mathbb{N}^*$$

unde $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$. Să se arate că cele două şiruri sunt punctual convergente către aceeaşi limită.

$\lceil$**R:** Fie $x \in \mathbb{R}$. Avem $e^{\frac{x^2}{n^2}} \ge 1 + \dfrac{x^2}{n^2}$. Deci $0 \le f_{n+1}(x) \le f_n(x)\Big(1 + \dfrac{x^2}{n^2}\Big)e^{-\frac{x^2}{(n+1)^2}}$ $\le f_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este monoton şi mărginit, atunci el este convergent. Deci există $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f_n \xrightarrow{s} f$. Dar $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ şi $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(1 - \dfrac{y^2}{n^2}\Big) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad y = 0, \\ \dfrac{\sin(\pi y)}{\pi y}, & \text{dacă} \quad y \ne 0, \end{cases}$

atunci $f(x) = \prod\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(1 + \dfrac{x^2}{n^2}\Big)\exp(-x^2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}) = \begin{cases} \exp\Big(-\dfrac{\pi x^2}{6}\Big), & \text{dacă} \quad x = 0, \\ \dfrac{\mathrm{sh}\,(\pi x)}{\pi x}\cdot\exp\Big(-\dfrac{\pi x^2}{6}\Big), & \text{dacă} \quad x \ne 0. \end{cases}$ Se observă că $g_n(x) = f_n(x)\exp\Big(-x^2\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2}\Big)$. Întrucât $f_n \xrightarrow{s} f$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n+1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2} = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) =$ $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(f_n(x)\exp\Big(-x^2\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\Big)\Big)$
$= f(x).\rfloor$

4°.54 Fie şirurile $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $\big(g_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n, g_n :]-1, 1[\to \mathbb{R}$,

$$\left.\begin{aligned} f_n(x) &= \left(1+\frac{x}{1}\right)e^{-\frac{x}{1}}\left(1-\frac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}...\left(1+\frac{(-1)^{n-1}x}{n}\right)e^{\frac{(-1)^n x}{n}}, \\ g_n(x) &= \frac{(1+x)(2-x)...(n+(-1)^{n-1}x)}{n!\,2^n}, \end{aligned}\right. \quad , \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Să se arate că cele două şiruri sunt punctual (simplu) convergente către aceeaşi limită.

$\lceil$**R:** Dacă notăm $\varphi_n(x) = \prod\limits_{k=1}^{n}\Big(1 + \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}x\Big)$ şi $\psi_n(x) = \exp\Big[x\Big(1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - ... + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\Big)\Big]$, atunci $f_n(x) = \varphi_n(x)\cdot\psi_n(x)$. Întrucât seria $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^*}\dfrac{x(-1)^{n-1}}{n}$ este convergentă pentru orice $x \in]-1, 1[$, atunci şi produsul infinit $\prod\limits_{k=1}^{+\infty}\Big(1 + \dfrac{x(-1)^{k-1}}{k}\Big)$ este convergent. Avem $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \prod\limits_{k=1}^{+\infty}\Big(1 + \dfrac{x(-1)^{k-1}}{k}\Big)$ şi $\psi(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x) = \exp(-x\ln 2) = 2^{-x}$. Deci $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 2^{-x}\prod\limits_{k=1}^{\infty}\Big(1 +$

$\left.\frac{x(-1)^{k-1}}{k}\right)$. De asemenea, avem $g_n(x) = f_n(x)\cdot\exp\left(-x\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$. Seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ este convergentă, atunci $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = 0$. Deci $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[f_n(x)\cdot\exp\left(-x\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right] = f(x)$, $\forall x \in]-1,1[.\rfloor$

4°.55 Fie şirul $(f_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definit de relaţia de recurenţă

$$f_1(x) = 1,\ \ f_{n+1}(x) = \sqrt{xf_n(x)},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că:

1) şirul $(f_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}^*}$, este convergent către o funcţie continuă;

2) şirul $(f_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}^*}$, este convergent uniform.

$\lceil$**R:** 1) Din ipoteză, găsim: $f_2(x) = \sqrt{x}, ..., f_{n+1}(x) = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}$. Deci $\lim_{n\to\infty} f_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x^{1-\frac{1}{2^n}} x$. Deci $f_n \xrightarrow{s} f = 1_{[0,1]} \in C^\circ([0,1];\mathbb{R})$. 2) Notăm $\varphi_n(x) = f_n(x) - f(x)$. Funcţia φ_n : $[0,1] \to \mathbb{R}$ îşi realizează maximul în punctul $x_n = \left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^{n-1}}$. Avem $0 \le \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in[0,1]}\varphi_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^{n-1}} = 0$. Deci $\varphi_n \xrightarrow{u} 0(\cdot) \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{u} f.\rfloor$

4°.56 Fie $(f_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}^*}$, un şir de funcţii pentru care $f1 : [0,a] \to \mathbb{R}$ este funcţie continuă, iar $f_{n+1}(x) = \int_{[0,x]} f_n(t)\mathrm{d}t$, $x \in [0,a]$. Să se arate că şirul converge uniform către $0(\cdot)$ pe $[0,a]$.

$\lceil$**R:** Se demonstrează, prin inducţie, că $f_{n+1}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}f_1(t)\mathrm{d}t$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall x \in [0,a]$. Din această relaţie, găsim $|f_{n+1}(x) \le \frac{M}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}\mathrm{d}t \le \frac{Ma^n}{n!}$, unde $M = \max\{|f_1(x)|; x \in [0,a]\}$. Deci $f_n \xrightarrow{u} 0(\cdot).\rfloor$

4°.57 Fie şirul $(f_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu proprietatea că f_n are derivată continuă pe $[a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că dacă $(f_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge punctual pe $[a,b]$ şi dacă există $M > 0$ astfel încât $|f_n'(x)| \le M$, $\forall x \in [a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, atunci convergenţa este uniformă.

$\lceil$**R:** Fie $\varepsilon > 0$. Considerăm diviziunea $d = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b\}$ astfel încât $\nu(d) < \varepsilon/(3M)$. Pentru $x_k \in [a,b]$, $\exists n(\varepsilon, x_k) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n \ge n(\varepsilon, x_k)$ şi $\in p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow |f_{n+p}(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon/3$, $\forall k = 0,1,...,m$. Fie $x, x' \in [x_k, x_{k+1}]$. Avem $|f_n(x) - f_n(x')| \le M\cdot|x-x'| < \varepsilon/3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall k = 0,...,m-1$. Notăm $n(\varepsilon) = \max\{n(\varepsilon,x_0), n(\varepsilon,x_1), ..., n(\varepsilon,x_m)\}$. Fie $x \in [a,b]$, $n \ge n(\varepsilon)$ şi $p \in \mathbb{N}^*$. Atunci, $\exists k^\circ \in \{0,1,...,m-1\}$, astfel încât $x \in [x_{k^\circ}, x_{k^\circ+1}] \Rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \le |f_{n+p}(x) - f_{n+p}(x_{k^\circ})| + |f_{n+p}(x_{k^\circ}) - f_n(x_{k^\circ})| + |f_n(x_{k^\circ}) - f_n(x)| < \varepsilon$. Conform criteriului lui Cauchy, şirul converge uniform pe $[a,b].\rfloor$

Pentru şirurile de funcţii de mai jos, să se arate că limita integralei nu este egală cu integrala limitei. Ce se poate spune despre convergen a uniform ?

4°.58 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx\cdot e^{-nx^2}$, $x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Avem $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} nxe^{-nx^2} = 0$, $\forall x \in [0,1]$ deci $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$. Pe de altă parte $\int\limits_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 nxe^{-nx^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(1-e^{-n}\big)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \neq 0$. În plus, $f_n \overset{u.}{\not\to} f = 0(\cdot)$.⌋

4°.59 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, & \text{dacă } 0 \le x < \dfrac{1}{2n}, \\ n - 2n^2\Big(x - \dfrac{1}{2n}\Big), & \text{dacă } \dfrac{1}{2n} \le x < \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \text{dacă } \dfrac{1}{n} \le x \le 1, \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $\int\limits_0^1 \big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\big)\mathrm{d}x = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \Rightarrow f_n \overset{u.}{\not\to} f$.⌋

4°.60 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} 2n^3x, & \text{dacă } 0 \le x < \dfrac{1}{2n}, \\ n^2 - 2n^3\Big(x - \dfrac{1}{2n}\Big), & \text{dacă } \dfrac{1}{2n} \le x < \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \text{dacă } \dfrac{1}{n} \le x \le 1, \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $\int\limits_0^1 \big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\big)\mathrm{d}x = 0 \neq \infty = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \Rightarrow f_n \overset{u.}{\not\to} f$.⌋

4°.61 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x^n, & \text{dacă } 0 \le x < 1, \\ 0, & \text{dacă } x = 1, \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $\int\limits_0^1 \big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\big)\mathrm{d}x = 0 \neq 1 = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \Rightarrow f_n \overset{u.}{\not\to} f$.⌋

4°.62 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n)x^{n-1}}{\sqrt{x^n+1}}, & \text{dacă } 0 \le x < 1, \\ 1, & \text{dacă } x = 1, \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $\int\limits_0^1 \big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\big)\mathrm{d}x = 0 \neq 2\big(\sqrt{2}-1\big) = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \Rightarrow f_n \overset{u.}{\not\to} f$.⌋

Pentru şirurile $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, de mai jos, să se arate că

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\mathrm{d}x.$$

Convergenţa este uniformă?

4°.63 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \cos\dfrac{x}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Avem $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{n} = 1$, $\forall x \in [0,1] \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$. Pe de altă parte $\int\limits_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = n \cdot \sin\frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 1$. Deoarece $|f_n(x) - f(x)| = 2\cdot\sin^2\frac{x}{2n} \le$

$\frac{1}{2n^2} \Rightarrow f_n \overset{u.}{\to} f.\rfloor$

4°.64 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = nx(1-x)^n,\ n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil$**R:** $\int_0^1 \big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big)\mathrm{d}x = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$. Pentru $x_n = \frac{1}{n}$, avem $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \geq \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \Rightarrow f_n \overset{u.}{\not\to} f.\rfloor$

4°.65 $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x= \frac{nx^2}{1+nx^2},\ n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil$**R:** $\int_{-1}^1 \big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big)\mathrm{d}x = 2 = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$. Dacă luăm $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, obţinem $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f_n \overset{u.}{\not\to} f.\rfloor$

4°.66 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x/n)}{x}, & \text{dacă } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{dacă } x = 0, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil$**R:** $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ şi $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^1 \varphi_n(x)\mathrm{d}x$, unde $\varphi_n(x) =$

$= \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = 0, \\ \frac{n}{x}\sin\frac{x}{n}, & \text{dacă } x \in]0,1]. \end{cases}$ Funcţia $\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ este continuă şi $0 \leq \varphi_n(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \varphi_n(x)\mathrm{d}x \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0$. Întrucât $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}, \forall x \in [0,1]$ şi $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f_n \overset{u.}{\to} f.\rfloor$

4°.67 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n}, \\ \frac{1}{\sin(nx)}, & \text{dacă } \frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{dacă } \frac{1}{n} \leq x \leq 0, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil$**R:** $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{1/2n} dx + \int_{1/2n}^{1/n} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(nx)} = \frac{1}{2n} + \int_{1/2n}^{1/n} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(nx)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Pentru $x \in \left]\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right[$, avem $\frac{1}{2} < nx < 1 \Rightarrow \frac{1}{\sin 1} < \frac{1}{\sin(nx)} < \frac{1}{\sin(1/2)} \Rightarrow \frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{\sin 1}\right) \leq \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{\sin(1/2)}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0 = \int_0^1 \big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big)\mathrm{d}x$. Luând însă $x_n = \frac{1}{2n}$, atunci $|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f_n \overset{u.}{\not\to} f.\rfloor$

Pentru fiecare dintre şirurile de funcţii $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, de mai jos, să se arate că limita şirului derivatelor nu este egală cu derivata limitei şirului de funcţii. Să se precizeze natura convergenţei şirului de funcţii şi a şirului derivatelor.

4°.68 $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2},\ n \in \mathbb{N}^*.$

$\lceil$**R:** Avem: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $f'(x) = 0$, $f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}, \forall x \in [-1,1]$ şi $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = 0, \\ 0, & \text{dacă } x \in [-1,1] \setminus \{0\}. \end{cases}$ Deci $g \neq f'$. Din inegalitatea $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2n}, \forall n \in$

$\mathbb{N}^*$ şi $\forall x \in [-1,1] \Rightarrow f_n \overset{u}{\to} f$ şi în plus $f_n' \overset{u}{\not\to} g$, deoarece, în caz contrar, ar trebui ca $g = f'$.⌋

4°.69 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{x^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $f'(x) = 0,\ \forall x \in [0,1]$ şi $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad x = 1, \\ 0, & \text{dacă} \quad x \in [0,1[. \end{cases}$ Deci $g \neq f'$. Avem: $f_n \overset{u}{\to} f = 0(\cdot)$, iar $f_n' \overset{s}{\to} g$.⌋

4°.70 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{1}{n} \cdot \operatorname{arctg} x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad |x| \neq 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{dacă} \quad x = 1, \\ \nexists, & \text{dacă} \quad x = -1, \end{cases}$ $f_n \overset{u}{\to} f, f_n \overset{s}{\to} g$.⌋

4°.71 $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k^2},\ n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**R:** $f_n \overset{u}{\to} f,\ f_n' \overset{s}{\to} g$.⌋

4°.72 Fie $C^1([0,2];\mathbb{R})$ spaţiul funcţiilor derivabile şi cu derivate continue definite pe $[0,2]$. Să se demonstreze că dacă se organizează acest spaţiu cu aceeaşi structură algebrică şi normă ca $C^\circ([0,2];\mathbb{R})$, atunci $C^1([0,2];\mathbb{R})$ este un spaţiu normat, dar nu este complet.

⌈**R:** În mulţimea $C^1([0,2];\mathbb{R}) = \{f / f : [0,2] \to \mathbb{R},\ f$ derivabilă şi cu derivata f' funcţie continuă$\}$, operaţiile: $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ şi $(\alpha f)(x) := \alpha f(x),\ \forall f, g \in C^1([0,2];\mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ şi $\forall x \in [0,2]$, definesc o structură de spaţiu liniar real. Funcţia $\|\cdot\| : C^1([0,2];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+,\ \|f\| := \max\{|f(x)|; x \in [0,2]\}$ este o normă pe $C^1([0,2];\mathbb{R})$. Şirul $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă} \quad x \in \Big[0, \dfrac{n-1}{n}\Big], \\ \dfrac{n-2}{n} + \dfrac{1}{n}\sqrt{2 - n^2(1-x)^2}, & \text{dacă} \quad x \in \Big]\dfrac{n-1}{n}, \dfrac{n+1}{n}\Big[, \\ 2 - x, & \text{dacă} \quad x \in \Big[\dfrac{n+1}{n}, 2\Big], \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

este fundamental, dar nu converge în $C^1([0,2];\mathbb{R})$. Avem $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă} \quad x \in [0,1], \\ 2 - x, & \text{dacă} \quad x \in]1,2]. \end{cases}$ iar $f \notin C^1([0,2];\mathbb{R})$.⌋

4°.73 Fie $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sigma(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x < 0, \\ 1, & \text{dacă} \quad x \geq 0, \end{cases}$ funcţia treaptă unitate şi fie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \alpha\big[\sigma(x+1) - \sigma(x)\big] \exp\Big(-\frac{1}{1+x^2}\Big),$$

unde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Să se arate că:

1) pentru şirul de semnale reprezentat prin şirul de funcţii $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{n} \cdot \varphi(x),\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$, există un interval mărginit $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ astfel încât $\varphi_n(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{I}$ şi $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

2) pentru orice $k \in \mathbb{Z}_+$ fixat, şirul derivatelor de ordinul k, $(\varphi_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}^*}$, este convergent uniform către zero în $\mathbf{I}$.

⌈**R:** 1) Să observăm că $\varphi(x) = \begin{cases} \alpha \cdot \exp\Big(-\dfrac{1}{x^2+1}\Big), & \text{dacă} \quad x \in [-1,1], \\ 0, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1], \end{cases}$ şi $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{n}\varphi(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$. Avem $|\varphi_n(x)| \leq \dfrac{|\alpha|}{n},\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi_n \overset{u}{\to} 0(\cdot)$. 2) Prin inducţie, găsim $\varphi_n^{(k)}(x) = \dfrac{\alpha}{n} \cdot P_{3k-2}(x) \cdot \dfrac{1}{(x^2+1)^{2^k}} \cdot \exp\Big(-\dfrac{1}{x^2+1}\Big),\ \forall x \in]-1,1[$. Cum intervalul $]-1,1[$ este mărginit, urmează că $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists M_k > 0$ astfel încât $|\varphi_n^{(k)}(x) \leq M_k \dfrac{|\alpha|}{n}$. Deci $\varphi_n^{(k)} \overset{u}{\to} 0(\cdot)$.⌋

4°.74 Fie $f_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(\ln x)^{2n} - 2}{(\ln x)^{2n} + 2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

2) Să se arate că şirul $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent uniform pe $[1,2]$ şi simplu convergent pe $[a,1]$, unde $0 < a < 1/e$.

3) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^2 f_n(x)\sin^{2n}(2\pi x)\mathrm{d}x$.

⌈**R:** 1) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă} \quad x \in]e^{-1}, e[, \\ -\dfrac{1}{3}, & \text{dacă} \quad x = e^{-1} \vee x = e, \\ 1, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{R} \setminus [e^{-1}, e]. \end{cases}$ 2) Pentru $x \in [1,2]$, găsim $|f_n(x) - f(x)| \le (\ln 2)^{2n} \Rightarrow f_n \overset{u}{\to} f$. Pe $[a,1]$ avem $f(x)|_{[a,1]} = \begin{cases} -1, & \text{dacă} \quad x \in]e^{-1}, 1], \\ -\dfrac{1}{3}, & \text{dacă} \quad x = e^{-1}, \\ 1, & \text{dacă} \quad x \in [a, e^{-1}[. \end{cases}$ $f \notin C^\circ([a,1];\mathbb{R})$, în timp ce $f_n \in C^\circ([a,1];\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. 3) Avem $\int\limits_1^2 \sin^{2n}(2\pi x)\mathrm{d}x = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ şi $f_n \overset{u}{\to} f$, $f(x) = -1$ pe $[1,2]$. Fie $\varepsilon > 0$. Din $f_n \overset{u}{\to} f, \Rightarrow \exists n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \ge n_1(\varepsilon)$ şi $\forall x \in [1,2] \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\varepsilon}$, iar din faptul că $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \to 0$, când $n \to +\infty, \Rightarrow \exists n_2(\varepsilon)$ astfel încât $n \ge n_2(\varepsilon) \Rightarrow \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \sqrt{\varepsilon}$. Notăm $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$ şi fie $n \ge n(\varepsilon)$. Avem $\Big|\int\limits_1^2 \big(f_n(x) - f(x)\big)\sin^{2n}(2\pi x)\mathrm{d}x\Big| \le \int\limits_1^2 |f_n(x) - f(x)|\sin^{2n}(2\pi x)\mathrm{d}x \le \sqrt{\varepsilon}\int\limits_1^2 \sin^{2n}(2\pi x)\mathrm{d}x < \varepsilon$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^2 f_n(x)\sin^{2n}(2\pi x)\mathrm{d}x =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^2 f(x)\sin^{2n}(2\pi x)\mathrm{d}x = 0.$⌋

4°.75 Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann. Să se arate că:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\int\limits_{a,b]} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = 0. \qquad 2)\ \lim_{n\to\infty}\int\limits_{[a,b]} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = 0.$$

⌈**R:** 1) Funcţia f fiind integrabilă este mărginită, iar $\Big|\int\limits_a^b \sin(nx)\mathrm{d}x\Big| \le \dfrac{2}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = 0$. 2) Acelaşi raţionament.⌋

4°.76 Să se arate că şirul de funcţii $\big(f_n(\cdot)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^{n+1}$ este strict crescător dacă şi numai dacă $x \in]0,2]$.

⌈**R:** Avem $f_1(x) > f_2(x) \Leftrightarrow (1+x^2) - \left(1+\dfrac{x}{2}\right)^3 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1-\sqrt{5}[\cup]0, 1+\sqrt{5}[\supset]0,2]$; $f_2(x) > f_3(x) \Leftrightarrow \left(1+\dfrac{x}{2}\right)^3 - \left(1+\dfrac{x}{3}\right)^4 > 0 \Leftrightarrow x \in]0,a[$, unde a este rădăcina ecuaţiei $8x^3 + 15x^2 - 54x - 108 = 0$ şi $a \in]2,3[$. Fie $\varphi : [1,+\infty[\times]0,a[\to \mathbb{R}$, $\varphi(y,x) = \left(1 + \dfrac{x}{y}\right)^{y+1}$ şi definim funcţia $\psi : [1,+\infty[\times]0,a[\to \mathbb{R}$, $\psi(y,x) = (y+1)\ln\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)$. Avem $\varphi(y,x) = \exp(\psi(y,x))$ şi $f_n(x) = \varphi(n,x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\forall x \in$

$]0, a[$. Pentru funcţia ψ avem: $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}(y,x) = \ln\Big(1+\dfrac{x}{y}\Big) - \dfrac{1}{y} + \dfrac{1+x}{y+x}$, $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}(y,x) = x\dfrac{x+y(2-x)}{y^2(y+x)^2}$ şi $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}(y,x) = 0$. Dacă $x \in]0,2]$, atunci $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}(y,x) > 0, \forall y \geq 1$. Cum $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}(y,x) = 0$, atunci $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}(y,x) < 0$ şi deci funcţia $\psi(\cdot,x) : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ este descrescătoare. Dacă $x \in]2,a[$, atunci $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}(y,x) < 0, \forall y > y_0 = \dfrac{x}{x-2} > 1$ şi ţinând seama că $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}(y.x) = 0$, urmează că $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}(y,x) > 0$ pentru $\forall y > y_0 = \dfrac{x}{x-2} > 1$. Deci $\psi(\cdot,x) :]y_0,+\infty[\to \mathbb{R}$ este crescătoare. Prin urmare funcţia $\varphi(\cdot,x) : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ este strict descrescătoare dacă şi numai dacă $x \in]0,2]$.$\rfloor$

§ 3.5. Puncte fixe. Principiul contracţiei

Să se precizeze dacă funcţiile de mai jos au puncte fixe. În caz afirmativ să se găsească punctele fixe.

5°.1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x.$

$\lceil$**R:** Orice punct $x \in \mathbb{R}$ este punct fix pentru funcţia f.$\rfloor$

5°.2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x.$

$\lceil$**R:** Singurul punct fix este $x^\circ = 0$.$\rfloor$

5°.3 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos x.$

$\lceil$**R:** Funcţia are un singur punct fix $x^\circ \in]0,\pi/2[$.$\rfloor$

5°.4 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{arctg} x.$

$\lceil$**R:** $x^\circ = 0$ este singurul punct fix.$\rfloor$

5°.5 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^7.$

$\lceil$**R:** Ecuaţia $x^7 = x \Leftrightarrow x(x^3-1)(x^3+1) = 0 \Rightarrow \{-1,0,1\}$ - mulţimea punctelor fixe.$\rfloor$

5°.6 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = z^7.$

$\lceil$**R:** Mulţimea punctelor fixe este $\big\{-1,0,1,\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2},\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\big\}$.$\rfloor$

5°.7 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}\cos x.$

$\lceil$**R:** $x^\circ = \dfrac{\pi}{6}$.$\rfloor$

5°.8 $f : [1+\infty[\to [1,+\infty[,\ f(x) = 1 + \ln\sqrt[3]{x}.$

$\lceil$**R:** $x^\circ = 1$.$\rfloor$

5°.9 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x.$

$\lceil$**R:** Ecuaţia $e^x = x$ nu are rădăcini reale, prin urmare f nu are puncte fixe.$\rfloor$

5°.10 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{2x} - 1.$

$\lceil$**R:** $x^\circ = 0$ este singurul punct fix pentru f.$\rfloor$

5°.11 $f :]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\ \to\ ]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[,$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1), & \text{dacă} \quad x \leq -1, \\ \frac{1}{2}(x+1), & \text{dacă} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

$\lceil$**R:** Mulţimea punctelor fixe ale funcţiei f este $\{-1,1\}$.$\rfloor$

5°.12 $f : [1,+\infty[\to [1,+\infty[,\ f(x) = x + \dfrac{1}{x}.$

$\lceil$**R:** Nu are puncte fixe.$\rfloor$

5°.13 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{sh} 2x.$

⌈**R:** $x^\circ = 0$ este singurul punct fix al funcţiei f.⌋

5°.14 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{ch}3x-1.$

⌈**R:** $x^\circ = 0$ şi $x_1 > 0$ puncte fixe ale funcţiei f.⌋

5°.15 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{2+x}.$

⌈**R:** $x^\circ = 2$.⌋

5°.16 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\dfrac{1}{2}\Big(x+\dfrac{9}{x}\Big).$

⌈**R:** $x^\circ = 3$.⌋

5°.17 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+1.$

⌈**R:** Nu are puncte fixe.⌋

5°.18 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ f(x)=z^2+z+1.$

⌈**R:** $\{-i,i\}$ - mulţimea punctelor fixe.⌋

5°.19 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ f(x)=2x^2+2x-1.$

⌈**R:** $x^\circ = -1$.⌋

5°.20 $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q},\ f(x)=x^4-3x^2+x+2.$

⌈**R:** Ecuaţia $x^4-3x^2+x+2=x \Leftrightarrow (x^2-2)(x^2-1)=0 \Rightarrow \{-1,1\}$ - mulţimea punctelor fixe.⌋

Să se precizeze dacă funcţiile ce urmează sunt contracţii.

5°.21 $(\mathbb{R},d),\ d(x,y)=|x-y|,\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{3}x.$

⌈**R:** Fie $x,y\in\mathbb{R}$. Avem $d(f(x),f(y))=\dfrac{1}{3}|x-y|=\dfrac{1}{3}\cdot d(x,y)$. Prin urmare f este contracţie.⌋

5°.22 $(\mathbb{R},d),\ d(x,y)=|x-y|,\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}x.$

⌈**R:** Fie $x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow d(f(x),f(y))=\dfrac{1}{5}|\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y|=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{1+c^2}|x-y|\le\dfrac{1}{5}\cdot d(x,y)$. S-a aplicat formula lui Lagrange.⌋

5°.23 $(\mathbb{R}_+,d),\ d(x,y)=|x-y|,\ f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x+1}.$

⌈**R:** Fie $x,y\in\mathbb{R}_+\Rightarrow d(f(x),f(y))=|\sqrt{x+1}-\sqrt{y+1}|=\dfrac{1}{2\sqrt{c+1}}|x-y|\le\dfrac{1}{2}|x-y|$.⌋

5°.24 $\Big(\Big[0,\dfrac{\pi}{2}\Big],d\Big),\ d(x,y)=|x-y|,\ f:\Big[0,\dfrac{\pi}{2}\Big]\to\Big[0,\dfrac{\pi}{2}\Big],\ f(x)=\arcsin\dfrac{x+1}{4}.$

⌈**R:** Fie $x,y\in\Big[0,\dfrac{\pi}{2}\Big]\Rightarrow d(f(x),f(y))=\Big|\arcsin\dfrac{x+1}{4}-\arcsin\dfrac{y+1}{4}\Big|=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\big(\frac{c+1}{4}\big)^2}}|x-y|.$

Deoarece $\dfrac{1}{4}\le\dfrac{c+1}{4}\le\dfrac{1+\pi/2}{4}<\dfrac{3}{4}$, avem $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\big(\frac{c+1}{4}\big)^2}}\le\dfrac{1}{\sqrt{7}}$. Deci $d(f(x),f(y))\le\dfrac{1}{\sqrt{7}}\cdot d(x,y)$.⌋

5°.25 $\Big(\Big[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\Big],d\Big),\ d(x,y)=|x-y|,\ f:\Big[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\Big]\to\Big[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\Big],\ f(x)=\sqrt{\sin x}.$

⌈**R:** Fie $x,y\in\Big[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\Big]\Rightarrow d(f(x),f(y))=|\sqrt{\sin x}-\sqrt{\sin y}|=\dfrac{\cos c}{2\sqrt{\sin c}}|x-y|\le\lambda\cdot d(x,y)$, unde $\lambda=\dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}$.⌋

5°.26 $([1,9],d),\ d(x,y)=|x-y|,\ f:[1,9]\to[1,9],\ f(x)=1+\sqrt[3]{x+2}.$

⌈**R:** Fie $x,y\in[1,9]\Rightarrow d(f(x),f(y))=|\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{y+2}|=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(c+2)^2}}|x-y|<\dfrac{1}{3}\cdot d(x,y)$.⌋

5°.27 $(\mathbb{R}^2,d_2),\ d_2(X,Y)=\|X-Y\|_2,\ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,$

$$f(x,y)=\Big(\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x+y),\ \sqrt[3]{2+\sin(x-y)}\ \Big).$$

⌈**R:** $d_2(f(x,y),f(u,v))=\sqrt{\left(f_1(x,y)-f_1(u,v)\right)^2+\left(f_2(x,y)-f_2(u,v)\right)^2}\le\frac{2}{3}\cdot d_2((x,y),(u,v))$, $\forall (x,y),(u,v)\in\mathbb{R}^2$.⌋

5°.28 $\left(B_1[(0,0)],d_2\right),\ d_2(X,Y)=\|X-Y\|_2,\ f:B_1[(0,0)]\to B_1[(0,0)]$,

$$f(x,y)=\left(\frac{1}{2}\ln(4+x^2+y^2),\arcsin\frac{x+y}{4}\right).$$

⌈**R:** $d_2(f(x,y),f(u,v))=\sqrt{\left(f_1(x,y)-f_1(u,v)\right)^2+\left(f_2(x,y)-f_2(u,v)\right)^2}\le\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot d_2((x,y),(u,v))$, $\forall (x,y),(u,v)\in\mathbb{R}^2$.⌋

Să se aplice principiul contracţiei pentru studiul convergenţei şirurilor date prin relaţiile de recurenţă:

5°.29 $x_{n+1}=\frac{1}{3}\cdot\operatorname{arctg}x_n,\ x_1=a\in\mathbb{R}$ - dat.

⌈**R:** $(\mathbb{R},d),\ d(x,y)=|x-y|$, este un spaţiu metric complet. Aplicaţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{3}\cdot\operatorname{arctg}x$ este o contracţie. Prin urmare, aplicând ***principiul contracţiei***, funcţia f admite un singur punct fix. Deci $f(x^\circ)=x^\circ\Leftrightarrow\frac{1}{3}\cdot\operatorname{arctg}x^\circ=x^\circ\Rightarrow x^\circ=0$. Întrucât şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir de aproximaţii succesive corespunzător funcţiei f, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0,\ \forall a>0$.⌋

5°.30 $x_{n+1}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\cdot\cos x_n,\ x_1=a\in\mathbb{R}$ - dat.

⌈**R:** $(\mathbb{R},d),\ d(x,y)=|x-y|$, este un spaţiu metric complet. Aplicaţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\cdot\cos x$ este o contracţie. Deci, există $x^\circ\in\mathbb{R}$ unic astfel încât $f(x^\circ)=x^\circ\Leftrightarrow\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\cdot\cos x^\circ=x^\circ\Rightarrow x^\circ=\frac{\pi}{6}$. Şiru $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir de aproximaţii succesive al funcţiei f şi în concluzie $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{6}$.⌋

5°.31 $x_{n+1}=1+\ln\sqrt[3]{x_n},\ x_1=a\in[1,+\infty[$ - dat.

⌈**R:** Mulţimea $[1,+\infty[\subset\mathbb{R}$ este închisă în spaţiul metric complet $(\mathbb{R},d),\ d(x,y)=|x-y|$. Deci $([1,+\infty[,d|_{[1,+\infty[})$ este, de asemenea, un spaţiu metric complet. Aplicaţia $f:[1,+\infty[\to[1,+\infty[,\ f(x)=1+\ln\sqrt[3]{x}$, este o contracţie. Atunci, există $x^\circ\in[1,+\infty[$ unic astfel încât $f(x^\circ)=x^\circ\Leftrightarrow 1+\ln\sqrt[3]{x^\circ}=x^\circ\Rightarrow x^\circ=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.⌋

5°.32 Folosind metoda aproximaţiilor succesive, să se găsească soluţia ecuaţiei

$$1+\operatorname{arctg}x=2x,$$

cu aproximaţie de $0,01$.

⌈**R:** Aplicaţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2}(1+\operatorname{arctg}x)$, este o contracţie pe spaţiul metric complet $(\mathbb{R},|\cdot|)$. Prin urmare există $x^\circ\in\mathbb{R}$ unic astfel încât $f(x^\circ)=x^\circ$, adică x° este punct fix. Dacă x_1 este arbitrar în $\mathbb{R}$, atunci şirul de aproximaţii succesive $x_{n+1}=f(x_n)$ este convergent către x°, şi $d(x^\circ,x_{n+1})\le\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\cdot d(x_1,x_2)$. În cazul nostru $\lambda=\frac{1}{2}\Rightarrow d(x_1,x_2)\le\frac{1}{2}(3x_1+1)$. Dacă $x_1=0$, atunci numărul minim de iteraţii este 6, iar dacă $x_1=1$, atunci numărul minim de iteraţii este 8:

$x_1=0$	$x_1=1$
$x_2=0,5$	$x_2=0,89269905$
$x_3=0,73182375$	$x_3=0,86438335$
$x_4=0,8158832$	$x_4=0,856339265$
$x_5=0,8421755$	$x_5=0,85409675$
$x_6=0,84996695$	$x_6=0,85343375$
$x_7=0,85223735$	$x_7=0,85324205$
$x_8=0,8528957$	$x_8=0,85318655$
	$x_9=0,8531705$
	$x_{10}=0,85316585$

Se observă că în iteraţia a doua se produce o stabilizare chiar de la zecimala a treia începând cu pasul al şaselea.$\rfloor$

5°.33 Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime închisă şi $f = (f_1, f_2) : A \to A$. Presupunem că există $a_{ij} \in \mathbb{R}_+,\ i, j = 1, 2$ astfel încât

$$|f_k(x, y) - f_k(x', y')| \leq a_{k1}|x - x'| + a_{k2}|y - y'|,$$

$\forall (x, y), (x', y') \in A$ şi $a_{k1} + a_{k2} < 1,\ k = 1, 2.$

Să se arate că, în condiţiile de mai sus, sistemul:

$$\begin{aligned} x &= f_1(x, y), \\ y &= f_2(x, y), \end{aligned}$$

are soluţie unică.

$\lceil$**R:** (A, d_∞), cu $d_\infty\big((x, y), (u, v)\big) = \max\{|x - u|, |y - v|\}$ este un spaţiu metric complet (A este închisă şi în topologia indusă de metrica d_∞). Să arătăm că $f : A \to A$ este o contracţie. Avem $d_\infty\big(f(x, y), f(u, v)\big) = \max\{|f_1(x, y) - f_1(u, v)|, |f_2(x, y) - f_2(u, v)|\} \leq \max\{a_{11}|x - u| + a_{12}|y - v|, a_{21}|x - u| + a_{22}|y = v|\} \leq \max\{(a_{11} + a_{12}) \max\{|x - u|, |y - v|\}, (a_{21} + a_{22}) \max\{|x - u|, |y - v|\}\} \leq \lambda \max\{|x - u|, |y - v|\} = \lambda \cdot d_\infty\big((x, y), (u, v)\big)$ unde $\lambda := \max\{a_{11} + a_{12}, a_{21} + a_{22}\}$. Suntem în condiţiile principiului contracţiei. Există $(x^\circ, y^\circ) \in A$ unic astfel încât $f(x^\circ, y^\circ) = (x^\circ, y^\circ)$.$\rfloor$

5°.34 Fie $A \neq \emptyset$ şi $f, g : A \to A$ astfel încât $f \circ g = g \circ f$. Să se arate că dacă f are un punct fix unic x°, atunci

$$g(x^\circ) = x^\circ.$$

$\lceil$**R:** Din ipoteză avem $f(x^\circ) = x^\circ$ şi $f(x) = x \Leftrightarrow x = x^\circ$. Dar $f\big(g(x^\circ)\big) = g\big(f(x^\circ)\big) = g(x^\circ) \Rightarrow\Rightarrow g(x^\circ) = x^\circ$.$\rfloor$

5°.35 O aplicaţie a metodei aproximaţiilor succesive la rezolvarea aproximativă a unor sisteme algebrice liniare.

Fie sistemul

$$AX = B, \tag{1}$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$a_{ij},\ b_k,\ x_k \in \mathbb{R}$.

Considerăm matricea

$$C := \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

şi presupunem $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \neq 0$ (deci $\exists C^{-1}$).

Evident, sistemul (1) se poate scrie sub forma

$$CX = B - (A - C)X \Leftrightarrow X = C^{-1}B + C^{-1}(C - A)X. \tag{1'}$$

Noând $B_1 : +C^{-1}B,\ A_1 := C^{-1}(C - A)$, relaţia $(1')$ devine

$$X = A_1X + B_1, \tag{2}$$

adică

$$x = \varphi(x), \tag{2'}$$

unde

$$\varphi(x) := (A_1X + B_1)^T,\ x = X^T \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Astfel, am redus rezolvarea sistemului (1) la "*găsirea*" punctului fix al aplicaţiei φ, care, în anumite condiţii asupra matricei A_1, este unic.

Mai precis, presupunând că $A_1 = \left(\alpha_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$, definim:

$$\|A_1\|_2 := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}^2} \ \text{ şi } \ \|X\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

Se araă uşor că

$$\|A_1X\|_2 \le \|A_1\|_2 \cdot \|X\|_2. \tag{4}$$

În plus, are loc

Teorema 35. *Dacă $\|A_1\|_2 < 1$, atunci $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este o contracţie. În particular, ecuaţia (vectorială)* (2) *are o unică soluţie în $\mathbb{R}^n$.*

Din principiul contracţiei (metoda aproximaţiilor succesive), obţinem şi un procedeu de aproximare a soluţiei:

fixăm un vector coloană X^0 oarecare şi apoi calculăm vectorii coloană

$$X^1 = A_1X^0 + B_1,\ \ X^2 = A_1X^1 + B_1,\ \ldots,\ X^{k+1} = A_1X^k + B_1, \ldots$$

sau echivalent

$$x^1 = \varphi(x^0),\ \ x^2 = \varphi(x^1),\ \ldots\ x^{k+1} = \varphi(x^k), \ldots$$

unde $x^k = (X^k)^T$, $\forall k = 0, 1, ...$

La limită (după $k \to \infty$), obţinem soluţia X (sau $x = X^T$) a ecuaţiei (2). În particular se consideră aproximarea soluţiei

$$X \approx X^k,$$

cu $k \in \mathbb{N}^*$ suficient de mare pentru care se verifică *precizia dorită.*

Observaţii: (i) Matricea B_1 din (2) joacă rol indirect.

(ii) Metoda *aproximaţiilor succesive* se aplică unui sistem de tipul (2); aducerea unui sistem de forma (1) la forma (2), indicată mai sus, nu este unica posibilă.

Exerciţiu rezolvat

Să se aproximeze (cu precizarea erorii) soluţia sistemului liniar

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_2 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 20x_3 - x_4 = -10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 20x_4 = 15. \end{cases} \qquad (i)$$

⌈**Soluţie:** Folosind metoda din teoria de mai sus, sistemul se scrie sub forma:

$$\begin{cases} x_1 = 0,1x_2 - 0,2x_3 + 0,3x_4, \\ x_2 = -0,1x_1 + 0,1x_3 - 0,2x_4 + 0,5, \\ x_3 = -0,1x_1 - 0,15x_2 + 0,05x_4 - 0,5, \\ x_4 = -0,15x_1 - 0,1x_2 - 0,05x_3 + 0,75, \end{cases} \qquad (ii)$$

adică sub forma

$$X = A_1X + B_1, \qquad (ii')$$

unde

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & -0,2 & 0,3 \\ -0,1 & 0 & 0,1 & -0,2 \\ -0,1 & -0,15 & 0 & 0,05 \\ -0,15 & -0,1 & 0,05 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ -0,5 \\ 0,75 \end{pmatrix}.$$

Pentru matricea A_1 avem $||A_1||_2 = \dfrac{\sqrt{27}}{10} < 1$, astfel că metoda aproximaţiilor succesive poate fi aplicată. Luăm de exemplu

$X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de unde găsim: $X^1 := A_1X^0 + B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ -0,5 \\ 0,75 \end{pmatrix}$, $X^2 := A_1X^1 + B_1$, etc.

Conform metodei aproximaţiilor succesive, se poate da o evaluare a erorii în formula aproximativă $X \approx X^k$, anume

$$||X - X^k||_2 \le \frac{q^k}{1-q}||X^1 - X^0||_2,$$

unde $q := ||A_1||_2 = \dfrac{\sqrt{27}}{10}$.

Avem, deci

$$||X - X^k||_2 \le \frac{\left(\frac{\sqrt{27}}{10}\right)^k}{1 - \frac{\sqrt{27}}{10}} \cdot 1,0625, \; k \in \mathbb{N}^*.$$

Astfel, pentru $k = 1$, avem $X \approx X^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ -0,5 \\ 0,75 \end{pmatrix}$, cu $||X - X^1||_2 \le \dfrac{\frac{\sqrt{27}}{10}}{1 - \frac{\sqrt{27}}{10}} \cdot 1,0625 \approx 1,1323404.$⌋

§ 3.6 Mulţimi compacte

Să se stabilească dacă mulţimile de mai jos sunt compacte.

6°.1 $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \le x^2 + y^2 \le 9\}$.

⌈**R:** Mulţime compactă. Este închisă şi mărginită.⌋

6°.2 $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > y^2, \; x^2 + y^2 \le 4\}$.

⌈**R:** Mulţimea nu este compactă. Nu este închisă.⌋

6°.3 $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \leq 0,\ |x - y| \leq 2\}$.

$\lceil$**R:** Mulţime închisă şi mărginită, deci compactă.$\rfloor$

6°.4 $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| \leq 1\}$.

$\lceil$**R:** Mulţime compactă.$\rfloor$

6°.5 $A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \leq y \leq 1 + |x|\}$.

$\lceil$**R:** Mulţime compactă.$\rfloor$

6°.6 $A_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -x^2 \leq y \leq x^3,\ 0 \leq x \leq 4\}$.

$\lceil$**R:** Mulţime compactă.$\rfloor$

6°.7 $A_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq x^2,\ x \geq 0.\}$.

$\lceil$**R:** Mulţime necompactă. Este nemărginită.$\rfloor$

6°.8 $A_8 = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq 2\}$.

$\lceil$**R:** Mulţime compactă.$\rfloor$

6°.9 $A_9 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 4 > z \geq x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$.

$\lceil$**R:** Mulţimea nu este compactă, nefiid închisă.$\rfloor$

6°.10 $A_{10} = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 / z^2 \geq x^2 + y^2,\ |z| \leq 2\}$.

$\lceil$**R:** Mulţime închisă şi mărginită, deci compactă.$\rfloor$

6°.11 $A_{11} = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 / 4 \geq x^2 + y^2 + z^2 \geq 1,\ |x + y + z| \leq 1\}$.

$\lceil$**R:** Mulţime închisă şi mărginită, deci compactă.$\rfloor$

6°.12 $A_{12} = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 / x^{2/3} + y^{2/3} \leq a^{2/3},\ |z| \leq 1\},\ a > 0$.

$\lceil$**R:** Mulţime compactă, fiind închisă şi mărginită.$\rfloor$

6°.13 $A_{13} = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 / x^{2/3} + y^{2/3} \leq a^{2/3},\ x^2 + y^2 \leq z \leq 4a^2\},\ a > 0$.

$\lceil$**R:** Mulţime compactă. Este închisă şi mărginită.$\rfloor$

6°.14 $A_{14} = \{z \in \mathbb{C} / |Im(z)| \leq 1,\ Re(z) \geq 0\}$.

$\lceil$**R:** Mulţimea nu este compactă. Este mulţime nemărginită.$\rfloor$

6°.15 $A_{15} = \{z \in \mathbb{C} / 1 \leq |z - 1| \leq 2\}$.

$\lceil$**R:** Mulţime compactă. Este închisă şi mărginită.$\rfloor$

6°.16 $A_{16} = \{z \in \mathbb{C} / \dfrac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \dfrac{3\pi}{4},\ |Re(z)| \leq 2\}$.

$\lceil$**R:** Mulţimea nu este compactă. Este mulţime nemărginită.$\rfloor$

6°.17 $A_{17} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} \{x \in \mathbb{R}^n / 2k \leq \|x\|_2 \leq 2k + 1\}$.

$\lceil$**R:** Mulţimea nu este compactă. Este mulţime nemărginită.$\rfloor$

Cap. 4. SERII NUMERICE

Definiţia 1. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir de numere reale căruia îi asociem şirul* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $S_n := x_1 + x_2 + ... + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Perechea $\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\}$ *se numeşte serie de numere reale şi se notează prin*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n \;\; sau \;\; \sum_{n\geq 1} x_n \;\; sau \;\; x_1 + x_2 + ... + x_n + ...$$

Şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *se numeşte şirul sumelor parţiale ataşat seriei* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$.

Termenul general al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, *adică* x_n, *se numeşte termenul general al seriei* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$.

Definiţia 2. *Două serii* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ *se numesc egale dacă şi numai dacă* $x_n = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ *şi notăm* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$.

Definiţia 3. *Seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte convergentă dacă şi numai dacă există* $S \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. *În acest caz* S *se numeşte suma seriei* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi se notează prin* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *(adică* $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$*).*

Dacă şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *nu are limită sau dacă limita sa este infinită, seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte divergentă.*

Observaţia 1. **(Condiţia necesară de convergenţă)** *Dacă seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Definiţia 4. *Fie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$. *două serii de numere reale şi* $\alpha \in \mathbb{R}$.

1° *Prin definiţie, suma seriilor* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ *este seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (x_n + y_n)$ *adică*

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n\Big) + \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n\Big) := \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (x_n + y_n).$$

2° *Prin definiţie, produsul dintre scalarul* α *şi seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (\alpha x_n)$ *adică*

$$\alpha\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n\Big) := \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (\alpha x_n).$$

Teorema 1. *Fie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ *două serii convergente şi* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Atunci seria*

$$\alpha\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n\Big) + \beta\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n\Big) := \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (\alpha x_n + \beta y_n).$$

este convergentă.

Teorema 2. *Fie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ *două serii de numere reale. Presupunem că există* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât*

$$y_n = x_n,\ \forall n \geq n_0.$$

Atunci cele două serii au simultan aceeaşi natură (sunt în acelaşi timp sau convergente sau divergente).

Teorema 3. (**Criteriul general de convergenţă al lui Cauchy**) *Fie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *o serie de numere reale. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă;*

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ *a. î.* $|x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+p}| < \varepsilon$, $\forall n \geq n(\varepsilon)$ *şi* $\forall p \in \mathbb{N}^*$.

Consecinţa 1. *Seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă dacă şi numai dacă* $\exists \varepsilon_0 > 0$ *cu proprietatea că* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k_n \geq n$ *şi* $\exists p_n \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $|x_{k_n+1} + \ldots + x_{k_n+p_n}| \geq \varepsilon_0$.

Teorema 4. (**Criteriul lui Abel**) *Fie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *o serie convergentă şi* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir descrescător şi mărginit. Atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \alpha_n x_n$ *este convergentă.*

Teorema 5. (**Criteriul Dirichlet**) *Fie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *o serie de numere reale cu şirul* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *mărginit şi fie* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir de numere reale descrescător şi convergent către* 0 $(\alpha_n \searrow 0)$. *Atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (\alpha_n x_n)$ *este convergentă.*

Definiţia 5. *Seria de numere reale* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte alternată dacă şi numai dacă* $x_n \cdot x_{n+1} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 6. (**Criteriul lui Leibniz**) *Fie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *o serie alternată. Dacă şirul* $\big(|x_n|\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este descrescător şi convergent către zero* $(|x_n| \searrow 0)$, *atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă.*

Definiţia 6. *Seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte absolut convergentă dacă şi numai dacă seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n|$ *este convergentă.*

Teorema 7. *Dacă seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.*

Definiţia 7. *O serie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *convergentă care nu este absolut convergentă se numeşte semiconvergentă.*

Definiţia 8. *O serie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte necondiţionat convergentă dacă şi numai dacă oricare ar fi bijecţia (permutarea)* $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, *seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_{\sigma(n)}$ *este convergentă.*

Teorema 8. *Dacă seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este absolut convergentă, atunci ea este necondiţionat convergentă şi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}.$$

oricare ar fi bijecţia $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$.

Teorema 9. (**Teorema lui Riemann**) *Fie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *o serie de numere reale semiconvergentă. Sunt adevărate afirmaţiile:*

(i) *Există o permutare* $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *pentru care seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_{\sigma(n)}$ *este divergentă.*

(ii) *Pentru orice* $a \in \mathbb{R}$ *există o permutare* $\sigma_a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $a = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_a(n)}$.

Teorema 10. *Fie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, $x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă;*

(ii) *şirul* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este mărginit.*

Teorema 11. (**Criteriul I de comparaţie**) *Fie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$, $x_n > 0 < y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Presupunem că există* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *şi* $c > 0$ *astfel încât*

$$x_n \leq c \cdot y_n,\ \forall n \geq n_0.$$

1° *Dacă seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ *este convergentă, atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă.*

2° *Dacă seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă, atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ *este divergentă.*

Consecinţa 2. *Fie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$, $x_n > 0 < y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Presupunem că există*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lambda.$$

1° *Dacă* $\lambda \in]0, \infty[$, *atunci seriile* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ *au aceeaşi natură.*

2° *Dacă* $\lambda = 0$ *şi seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ *este convergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă.*

3° *Dacă* $\lambda = +\infty$ *şi seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ *este divergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă.*

Teorema 12. (**Criteriul II de comparaţie**) *Fie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n, \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n,\ x_n > 0 < y_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. *Presupunem că există* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n},\ \forall n \geq n_0.$$

1° *Dacă seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ *este convergentă, atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă.*

2° *Dacă seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă, atunai seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ *este divergentă.*

Teorema 13. (**Criteriul de condensare al lui Cauchy**) *Fie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n,\ x_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, *cu şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *descrescător. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *Seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă;*

(ii) *Seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} 2^n x_{2^n}$ *este convergentă.*

Teorema 14. (**Criteriul integral (Cauchy)**) *Fie* $f : [1, +\infty[\to]0, +\infty[$ *o funcţie continuă şi descrescătoare,* $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *două şiruri definite prin relaţiile* $x_n = f(n),\ I_n = \int\limits_1^n f(x)\mathrm{d}x,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. *Atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *are aceeaşi natură cu şirul* $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Teorema 15. (**Criteriul rădăcinii (Cauchy)**) *Fie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n,\ x_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1° *Dacă există* $\lambda \in]0, 1[$ *şi* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât*

$$\sqrt[n]{x_n} \leq \lambda,\ \forall n \geq n_0,$$

atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este covergentă.*

2° *Dacă*

$$\sqrt[n]{x_n} \geq 1$$

pentru o infinitate de termeni, atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă.*

Consecinţa 3. *Fie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n,\ x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. *Presupunem că există*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lambda_1.$$

1° *Dacă* $\lambda_1 < 1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă.*

2° *Dacă* $\lambda_1 > 1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă.*

Consecinţa 4. *Fie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n,\ x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. *Notăm*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} = \lambda_1.$$

1° *Dacă* $\lambda_1 < 1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă.*

2° *Dacă* $\lambda_1 > 1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă.*

Teorema 16. (**Criteriul raportului** (**d'Alembert**)) *Fie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n,\ x_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1° *Dacă există* $\lambda \in]0,1[$ *şi* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \le \lambda,\ \forall n \ge n_0,$$

atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n,\ x_n > 0$ *este convergentă.*

2° *Dacă există* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \ge 1,\ \forall n \ge n_0,$$

atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n,\ x_n > 0$ *este divergentă.*

Consecinţa 5. *Fie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n,\ x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. *Presupunem că există*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda_1.$$

1° *Dacă* $\lambda_1 < 1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă.*

2° *Dacă* $\lambda_1 > 1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă.*

Consecinţa 6. *Fie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n,\ x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. *Notăm*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda_1 \ \text{ și } \ \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda_2.$$

1° *Dacă* $\lambda_2 < 1$, *atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă.*

2° *Dacă* $\lambda_1 > 1$, *atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă.*

Teorema 17. (**Criteriul logaritmic**) *Fie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n,\ x_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1) *Presupunem că există* $\lambda > 1$ *și* $n_0 \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ *astfel încât*

$$\frac{\ln \dfrac{1}{x_n}}{\ln n} \geq \lambda,\ \forall n \geq n_0,$$

atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă.*

2) *Dacă există* $n_0 \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ *astfel încât*

$$\frac{\ln \dfrac{1}{x_n}}{\ln n} \leq 1,\ \forall n \geq n_0,$$

atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă.*

Teorema 18. (**Criteriul Raabe-Duhamel**) *Fie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n,\ x_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

1° *Dacă există* $\lambda_1 > 1$ *și* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât*

$$n\Big[\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\Big] \geq \lambda_1,\ \forall n \geq n_0,$$

atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă.*

2° *Dacă există* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât*

$$n\Big[\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\Big] \leq 1,\ \forall n \geq n_0,$$

atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă.*

Consecinţa 7. *Fie* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n,\ x_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. *Presupunem că există*

$$\lim_{n\to\infty} n\Big[\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\Big] = \lambda_1.$$

1° *Dacă* $\lambda_1 > 1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă.*

2° *Dacă* $\lambda_1 < 1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă.*

Teorema 19. (**Criteriul lui Gauss**) *Fie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Presupunem că există* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât are loc egalitatea:*

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta_n}{n^{1+\gamma}},\ \forall n \geq n_0,$$

unde $\gamma > 0$, *iar* $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este un şir mărginit.*

1° *Dacă* $\alpha > 1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este convergentă.*

2° *Dacă* $\alpha \leq 1$, *atunci seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *este divergentă.*

Teorema 20. *Fie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n x_n$, $x_n \searrow 0$ *o serie alternată,* S *suma sa. Atunci*

$$|S - S_n| < x_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Teorema 21. *Fie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *o serie absolut convergentă şi* S *suma sa. Dacă* $\exists \lambda \in]0,1[$ *şi* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $\sqrt[n]{|x_n|} \leq \lambda$, $\forall n \geq n_0$, *atunci* $|S - S_n| \leq \dfrac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda}$, $\forall n \geq n_0$.

Teorema 22. *Fie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *o serie absolut convergentă şi* S *suma sa. Dacă* $\exists \lambda \in]0,1[$ *şi* $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq \lambda$, $\forall n \geq n_0$, *atunci* $|S - S_n| < \dfrac{|x_{n+1}|}{1-\lambda}$, $\forall n \geq n_0$.

Definiţia 9. *Fie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ *două serii convergente. Seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *se numeşte mai rapid convergentă decât seria* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ *dacă şi numai dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$.

Teorema 23. (**Kummer**) *Fie* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ *două serii convergente cu sumele* S, *respectiv* T. *Presupunem că există* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lambda \in]0,\infty[$. *Atunci seria*

$$\lambda T + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (x_n - \lambda y_n)$$

este o serie care converge mai rapid către S *decât seria iniţială* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$.

Definiţia 10. *Fie* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *un şir de numere complexe căruia îi asociem şirul* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $S_n := z_1 + z_2 + ... + z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Perechea* $\{(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\}$ *se numeşte serie de numere complexe şi se notează prin:*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} z_n \;\; sau \;\; \sum_{n\geq 1} z_n \;\; sau \;\; z_1 + z_2 + ... + z_n + ...$$

Şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *se numeşte şirul sumelor parţiale ataşat seriei* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} z_n$.

Termenul general al şirului $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, *adică* z_n, *se numeşte termenul general al seriei* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} z_n$.

Definiţia 11. *Seria de numere complexe* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} z_n$ *se numeşte convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este convergent.*

Dacă $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, *atunci* S *se numeşte suma seriei* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} z_n$ *şi se noteazš prin:*

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} z_n \;\; \Big(= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k \Big).$$

Dacă şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *este divergent, atunci seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} z_n$ *se numeşte divergentă.*

Teorema 24. *Fie seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} z_n$, $z_n = x_n + i\cdot y_n \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *Seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} z_n$ *este convergentă;*

(ii) *Seriile* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ *sunt convergente.*

Definiţia 12. *Seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} z_n$ *se numeşte absolut convergentă dacă şi numai dacă seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |z_n|$ *este convergentă.*

Teorema 25. *Dacă seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} z_n$ *este absolut convergentă atunci ea este convergentă.*

Teorema 26. *Fie seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} z_n$, $z_n = x_n + i\cdot y_n \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *Seria* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} z_n$ *este absolut convergentă;*

(ii) *Seriile* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ *sunt absolut convergente.*

EXERCIŢII

§4.1. Serii în $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

1°.1 Seria de numere reale $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} aq^n$, $a, q \in \mathbb{R}$, este numită *seria geometrică*. Ea este convergentă dacă şi numai dacă $|q| < 1$ şi în acest caz $S = \dfrac{a}{1-q}$.

⌈**Soluţie:** $x_n = aq^n$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_n = \begin{cases} na, & \text{dacă} \quad q = 1, \\ a\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{dacă} \quad q \neq 1, \end{cases}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$ numai pentru $|q| < 1$. În celelalte cazuri limita este infinită sau nu există.⌋

Utilizând acest rezultat să se studieze convergenţa şi să se găsească sumele seriilor care apar în exerciţiile următoare:

1°.2 Să se arate că $2,999... = 3$.

⌈**Soluţie:** $2,999... = 2 + 0,9 + 0,09 + ... = 2 + \dfrac{9}{10}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{10^{n-1}} = 2 + \dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{10}} = 3.$⌋

1°.3 Să se arate că $4,(9) = 5$.

1°.4 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2^{n-1}}$. ⌈**R:** Convergentă şi $S = \dfrac{2}{3}$.⌋

1°.5 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{3^n+2^n}{6^n}$. ⌈**R:** $x_n = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n}$, $S_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) + \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right) \to \dfrac{3}{2}$.⌋

1°.6 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{3^{n-1}+2^{n+1}}{6^n}$. ⌈**R:** $x_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ şi $S = \dfrac{11}{3}$.⌋

1°.7 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n+1}\dfrac{1+2^{n-1}}{3^{n-1}}$. ⌈**R:** $x_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ şi $S = \dfrac{27}{20}$.⌋

1°.8 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{2^n+(-1)^{n+1}}{5^n}$. ⌈**R:** $x_n = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n - \left(-\dfrac{1}{5}\right)^n$ şi $S = \dfrac{5}{6}$.⌋

1°.9 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{2^n+3^{n+1}-6^{n-1}}{12^n}$. ⌈**R:** $x_n = \left(\dfrac{1}{6}\right)^n + 3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ şi $S = \dfrac{31}{30}$.⌋

1°.10 Să se arate că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1}{n^2+n}$ este convergentă şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n} = 1$.

⌈**Soluţie:** Din egalitatea $x_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow S_n = x_1 + ... + x_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$. Deci seria este convergentă şi are suma egală cu 1.⌋

Pentru seriile de mai jos să se calculeze termenul general al şirului sumelor parţiale şi apoi să se precizeze natura lor.

1°.11 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1}{(n+1)^2-1}$.

⌈**Soluţie:** $x_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\right), S_n = x_1 + \ldots + x_n = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{3}{4}$.⌋

1°.12 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+3)}$. $\lceil$**R:** $S = \frac{11}{18}\rfloor$

1°.13 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+k)}$, $k \in \mathbb{N}^*$ - fixat.

$\lceil$**Soluţie:** $x_n = \frac{1}{k}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\Big)$, $S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} + ... - \frac{1}{n+k}$ $\Rightarrow S = \frac{1}{k}\Big(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k}\Big).\rfloor$

1°.14 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \big[f(n+k) - f(n)\big]$, $k \in \mathbb{N}^*, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$\lceil$**Soluţie:** $S_n = f(n+1) + ... + f(n+k) - f(1) - ... - f(k)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ există în $\mathbb{R}$, seria este convergentă, iar dacă $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ nu există sau este infinită, seria este divergentă.$\rfloor$

1°.15 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$. $\lceil$**R:** $S_n = \frac{1}{3}\Big(1 - \frac{1}{3n+1}\Big)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*.\rfloor$

1°.16 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(\frac{2n}{2n+1} - \frac{2n-1}{2n}\Big)$.

$\lceil$**Soluţie:** $x_n = \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$, $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} = 2\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}\Big) - \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}\Big) = 1 - \Big(\frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n+1}\Big)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S = 1 - \ln 2.\rfloor$

1°.17 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

$\lceil$**Soluţie:** $x_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$, $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow S = 1.\rfloor$

1°.18 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$.

$\lceil$**Soluţie:** $x_n = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{3}{n+2}\Big)$, $S_n = \frac{1}{2}\Big(\frac{5}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{3}{n+2}\Big)$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow S = 5/4.\rfloor$

Să se studieze convergenţa şi în cazul convergenţei să se afle sumele următoarelor serii:

1°.19 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}$.

$\lceil$**Soluţie:** $x_n = \frac{5}{8}\Big(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\Big) + \frac{11}{8}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\Big)$, $S_n = \frac{1}{8}\Big(\frac{167}{12} - \frac{5}{n-1} - \frac{5}{n} - \frac{11}{n+1} - \frac{11}{n+2}\Big)$, $\forall n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow S = 167/96.\rfloor$

1°.20 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(n+\sqrt{2})(n+1+\sqrt{2})}$. $\lceil$**R:** $\sqrt{2} - 1.\rfloor$

1°.21 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\Big)$. $\lceil$**R:** $1 - \sqrt{2}.\rfloor$

1°.22 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(2n+3)(4n^2-1)}$.

$\lceil$**R:** $x_n = \frac{1}{8}\Big[\frac{1}{2n+3} - \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}\Big]$; $S_n = \frac{1}{8}\Big(\frac{2}{3} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1}\Big) \Rightarrow S = \frac{1}{12}.\rfloor$

1°.23 $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n(n-1)}}$

⌈**R:** $x_n=\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}-\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$, $\Rightarrow S_n=\sqrt{2}-\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$, $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\Rightarrow S=\sqrt{2}-1.$⌋

1°.24 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}.$

⌈**R:** $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, $\Rightarrow S_n=1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\Rightarrow S=1.$⌋

1°.25 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sqrt{n+2+\alpha}-2\sqrt{n+1+\alpha}+\sqrt{n+\alpha}\right),\ \alpha\in\mathbb{R}_+-$ fixat.

⌈**R:** $S_n=\sqrt{1+\alpha}-\sqrt{2+\alpha}+\sqrt{n+2+\alpha}-\sqrt{n+1+\alpha}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow S=\sqrt{1+\alpha}-\sqrt{2+\alpha}.$⌋

1°.26 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\ln\Big(1+\frac{2}{n(n+3)}\Big).$

⌈**R:** $x_n=\ln\dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}$, $S_n=\ln\Big(3\,\dfrac{n+1}{n+3}\Big)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow S=\ln 3.$⌋

1°.27 $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\ln\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big).$

⌈**R:** $x_n=\ln\Big(\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}\Big)$, $S_n=\ln\Big(\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k}\Big)=\ln\Big(\dfrac{n+1}{2n}\Big)$, $\forall n\geq 2\Rightarrow S=$ $\ln\Big(\dfrac{1}{2}\Big).$⌋

1°.28 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big).$

⌈**R:** $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\Big(1+\frac{1}{k}\Big)=\ln(n+1)\to\infty$, deci seria este divergentă.⌋

1°.29 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\sin\dfrac{1}{n(n+1)}}{\cos\dfrac{1}{n}\,\cos\dfrac{1}{n+1}}.$

⌈**R:** $x_n=\operatorname{tg}\dfrac{1}{n}-\operatorname{tg}\dfrac{1}{n+1}\Rightarrow S_n=\operatorname{tg}1-\operatorname{tg}\dfrac{1}{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow S=\operatorname{tg}1.$⌋

1°.30 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}.$

⌈**R:** Convergentă. **I:** $x_n=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $S=\dfrac{\pi}{4}.$⌋

1°.31 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+3n+3}.$

⌈**R:** $x_n=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n+1}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n+2}$, $S_n=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n+2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow S=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}.$⌋

1°.32 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}.$

⌈**R:** $x_n=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2n-1}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow S=\pi/4.$⌋

1°.33 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{n(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}.$

⌈**Soluţie:** $S_n = 1 - \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{n(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$. Fie funcţia polinomială $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Atunci $P_n'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}$ şi $P_n'\left(-\frac{1}{2}\right) = S_n = \frac{4}{9}\left[n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1\right], \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow S = 4/9.$⌋

1°.34 $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{a_n}{(1 + a_1) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n)}$, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

⌈**Soluţie:** $x_n = \frac{1}{(1 + a_1)\ldots(1 + a_{n-1})} - \frac{1}{(1 + a_1)\ldots(1 + a_{n-1})(1 + a_n)}$, $\Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{(1 + a_1)\ldots(1 + a_n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Notăm $u_n = (1 + a_1)\ldots(1 + a_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Şirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict crescător. Dacă el este mărginit superior, este convergent şi fie $u°$ limita sa. Atunci $S = 1 - \frac{1}{u°}$. Dacă şirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este nemărginit, atunci $S = 1$. În ambele cazuri seria în cauză este convergentă.⌋

1°.35 $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n}\right)$.

⌈**R:** $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) \Rightarrow S = c$ (*constanta lui Euler*).⌋

1°.36 $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int_n^{n+1} e^{-x} dx$.

⌈**R:** $x_n = e^{-n} - e^{-(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow S = e^{-1}$.⌋

1°.37 $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{2^n}\left(\lambda + 2^{n-1}\right)\right]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, iar $[x]$ este partea întreagă a lui x.

⌈**Soluţie:** Folosind iedentitatea $\left[\lambda + \frac{1}{2}\right] = [2\lambda] - [\lambda]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, obţinem $x_n = \left[\frac{1}{2^n}(\lambda + 2^{n-1}\right] = \left[\frac{\lambda}{2^{n-1}}\right] - \left[\frac{\lambda}{2^n}\right] \Rightarrow S_n = [\lambda] - \left[\frac{\lambda}{2^n}\right]$. Dacă $\lambda \geq 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\forall n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq \frac{\lambda}{2^n} < 1$, iar dacă $\lambda < 0$, există $n_0 \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\forall n \geq n_0 \Rightarrow -1 < \frac{\lambda}{2^n} < 0 \Rightarrow S = \begin{cases} [\lambda], & \text{dacă} \quad \lambda \geq 0, \\ [\lambda] - 1, & \text{dacă} \quad \lambda < 0. \end{cases}$

Să demonstrăm acum identitatea $\left[\lambda + \frac{1}{2}\right] = [2\lambda] - [\lambda]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, Fie $\lambda \in \mathbb{R}$. Atunci $\exists n_\lambda \in \mathbb{Z}$ şi $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ astfel încât să avem una dintre situaţiile: 1) $\lambda = n_\lambda + \alpha$ sau 2) $\lambda = n_\lambda + \alpha + \frac{1}{2}$.

Dacă are loc 1), atunci $[\lambda] = n_\lambda$ şi $\left[\lambda + \frac{1}{2}\right] = n_\lambda$ şi deci $[2\lambda] = [2(n_\lambda + \alpha)] = 2n_\lambda$, adică identitatea.

Dacă are loc 2), atunci $\left[\lambda + \frac{1}{2}\right] = [n_\lambda + \alpha + 1 = n_\lambda + 1$, $[2\lambda] = \left[2\left(n_\lambda + \alpha + \frac{1}{2}\right)\right] = [2n_\lambda + 1 + 2\alpha] = 2n_\lambda + 1$ şi $[\lambda] = \left[n_\lambda + \alpha + \frac{1}{2}\right] = n_\lambda$, deci identitatea are lor din nou.⌋

Utilizând observaţia 1 (condiţia necesară de convergenţă) să se precizeze dacă seriile care urmează sunt convergente.

1°.38 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{n^2}{2n^2+1}.$ ⌈**R:** Divergentă; $x_n \to \frac{1}{2}$.⌋

1°.39 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}.$ ⌈**R:** Divergentă; $x_n \to \infty$.⌋

1°.40 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-\sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right).$ ⌈**R:** Divergentă; $x_n \to \frac{2}{3}$.⌋

1°.41 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{\sqrt[3]{2n+1}-\sqrt[3]{2n-1}}.$ ⌈**R:** Divergentă; $x_n \to \infty$.⌋

1°.42 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}.$ ⌈**R:** Divergentă; $x_n \to \frac{1}{3}$.⌋

1°.43 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \ln\left(\dfrac{3n^2+2}{n^2+1}\right).$ ⌈**R:** Divergentă; $|x_n| \to \ln 3 \Rightarrow x_n \not\to 0$.⌋

1°.44 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} n\cdot\sin\dfrac{1}{n}.$ ⌈**R:** Divergentă; $x_n = n\cdot\sin\frac{1}{n} \to 1$.⌋

1°.45 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \operatorname{arctg}(n+1).$ ⌈**R:** Divergentă; $x_n = \operatorname{arctg}(n+1) \to \frac{\pi}{2}$.⌋

1°.46 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \arcsin\left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right).$ ⌈**R:** Divergentă; $x_n = \arcsin\frac{n+1}{2n+3} \to \frac{\pi}{6}$.⌋

1°.47 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n.$ ⌈**R:** Divergentă; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1}$.⌋

1°.48 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\dfrac{3n}{3n+2}\right)^n.$ ⌈**R:** Divergentă; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n+2}\right)^n = e^{-2/3}$.⌋

1°.49 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}.$ ⌈**R:** Divergentă; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}(-1)^{n-1}\nexists$.⌋

1°.50 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \dfrac{\ln(2+e^{3n})}{\ln(3+e^{2n})}.$ ⌈**R:** Divergentă; $|x_n| \to \frac{3}{2}$.⌋

1°.51 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \dfrac{1}{n}\left[\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+...+\sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right].$

⌈**R:** Divergentă; $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = \int_0^1 \sqrt{1+x}\mathrm{d}x \neq 0$.⌋

1°.52 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \sin(n).$ ⌈**R:** Divergentă. **I:** $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ nu există.⌋

1°.53 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{\sqrt[n+1]{\ln(n+1)}}.$ ⌈**R:** Divergentă. **I:** $\frac{1}{\sqrt[n+1]{\ln(n+1)}} > \frac{1}{\sqrt[n+1]{n+1}} \to 1$.⌋

1°.54 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \prod\limits_{k=1}^{n} \cos\dfrac{\alpha}{2^k},\ \alpha \in]0,\pi[.$ ⌈**R:** Divergentă. **I:** $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \neq 0$.⌋

1°.55 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} 3^{n-(-1)^n}.$ ⌈**R:** Divergentă. **I:** $x_n > 1$.⌋

1°.56 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \big(2+(-1)^n\big)^n.$ ⌈**R:** Divergentă. **I:** $x_n \geq 1$.⌋

1°.57 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \cdot e^{\sqrt{n}}.$ ⌈**R:** Divergentă; $x_n \to \infty$.⌋

4.1.1. Criterii generale de convergenţă

Folosind criteriul general de convergenţă al lui Cauchy sau consecinţele sale să se stabilească dacă seriile de mai jos sunt convergente.

1°.58 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} q^n \sin(n\alpha), |q|<1,\ \alpha\in\mathbb{R}.$

⌈**R:** Convergentă. **I:** $|x_{n+1}+...+x_{n+p}| \leq |q|^{n+1}|\sin(n+1)\alpha| + ... + |q|^{n+p}|\sin(n+p)\alpha| \leq |q|^{n+1}+...+|q|^{n+p} \leq \dfrac{1-|q|^p}{1-|q|}\cdot|q|^{n+1} < \dfrac{|q|^{n+1}}{1-|q|}$, $\forall n,p\in\mathbb{N}^*$.⌋

1°.59 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} q^n \cos(n\alpha), |q|<1,\ \alpha\in\mathbb{R}.$

⌈**R:** Convergentă. **I:** $|x_{n+1}+...+x_{n+p}| \leq |q|^{n+1}|\cos(n+1)\alpha| + ... + |q|^{n+p}|\cos(n+p)\alpha| \leq |q|^{n+1}+...+|q|^{n+p} \leq \dfrac{1-|q|^p}{1-|q|}\cdot|q|^{n+1} \leq \dfrac{|q|^{n+1}}{1-|q|}$, $\forall n,p\in\mathbb{N}^*$.⌋

1°.60 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2}.$

⌈**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$, $\forall n\geq 2 \Rightarrow |x_{n+1}+...+x_{n+p}| < \dfrac{1}{n}$, $\forall n,p\in\mathbb{N}^*$.⌋

1°.61 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2+a^2}.$

⌈**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{1}{n^2+a^2} \leq \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$, $\forall n\geq 2 \Rightarrow |x_{n+1}+...+x_{n+p}| < \dfrac{1}{n}$, $\forall n,p\in\mathbb{N}^*$.⌋

1°.62 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n}.$

⌈**R:** Divergentă. **I:** Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Alegând $k_n = n = p_n$, găsim $|x_{n+1}+...+x_{n+n}| = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{n+n} \geq \dfrac{1}{2}$.⌋

1°.63 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^\alpha},\ \alpha<1.$

⌈**R:** Divergentă. **I:** Fie $n,p\in\mathbb{N}^*$. Găsim $|x_{n+1}+...+x_{n+p}| \geq \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{n+p}$, apoi se aplică exemplul precedent.⌋

1°.64 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}.$

⌈**R:** Convergentă. **I:** $|x_{n+1}+...+x_{n+p}| = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + ... + (-1)^{p-1}\dfrac{1}{n+p} < \dfrac{1}{n+1} - \Big(\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3} + ... + (-1)^{p-2}\dfrac{1}{n+p}\Big) \leq \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$, $\forall n,p\in\mathbb{N}^*$.⌋

1°.65 $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln n}$.

⌈**R:** Convergentă. **I:** $|x_{n+1}+...+x_{n+p}|\leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$⌋

1°.66 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\cos(n\alpha)}{n^p}, \alpha\in]0,\pi[, p>0.$

⌈**R:** Convergentă. **I:** $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\cos(n\alpha)$ are şirul sumelor parţiale mărginit, iar şirul $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător şi convergent către zero. Din criteriul Dirichlet rezultă convergenţa seriei.⌋

1°.67 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\sin(n\alpha)}{n^p}, \alpha\in]0,\pi[, p>0.$

⌈**R:** Convergentă. **I:** $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\sin(n\alpha)$ are şirul sumelor parţiale mărginit, iar şirul $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător şi convergent către zero. Din criteriul Dirichlet rezultă convergenţa seriei.⌋

1°.68 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\sin n\sin n^2}{n}.$

⌈**R:** Convergentă. **I:** Deoarece $\sin n^2\sin n=\dfrac{1}{2}\big[\cos n(n-1)-\cos n(n+1)\big]$, atunci $x_n=\dfrac{1}{2n}\big[\cos n(n-1)-\cos n(n+1)\big]$. Şirul $\left(\alpha_n=\dfrac{1}{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător şi convergent către zero, iar seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\big[\cos n(n-1)-\cos n(n+1)\big]$ are şirul sumelor parţiale mărginit. Aplicând criteriul lui Dirichlet obţinem că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ este convergentă.⌋

1°.69 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\sin n\cos n^2}{\sqrt{n}}.$ ⌈**R:** Convergentă.⌋

4.1.2. Serii cu termeni pozitivi

4.1.2.1. Criterii de comparaţie

Aplicând criteriile de comparaţie sau consecinţele lor, să se studieze convergenţa seriilor:

1°.70 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R}.$

⌈**Soluţie:** Dacă $\alpha\leq 0$ seria este divergentă întrucât $x_n\not\to 0$. Dacă $\alpha>0$, deoarece şirul $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător, atunci seriile $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1}{n^\alpha}$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}2^n\dfrac{1}{(2^n)^\alpha}$ au aceeaşi natură (criteriul condensării lui Cauchy). Dar seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}2^n\dfrac{1}{(2^n)^\alpha}=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1}{(2^{\alpha-1})^n}$ este convergentă dacă $q=\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}<1\Leftrightarrow\alpha>1.$⌋

1°.71 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{\sqrt{n^2-n+1}}.$

⌈**R:** Divergentă. **I:** Deoarece $\dfrac{x_n}{1/n}\to 1$, seriile $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1}{n}$ au aceeaşi natură, însă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1}{n}$ este divergentă (vezi ex. 1°.63).⌋

1°.72 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$.

⌈**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}<\dfrac{1}{n^{3/2}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ şi seria $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^{3/2}}$ este convergentă.⌋

1°.73 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{1+n^{4/3}}$.

⌈**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{1}{1+n^{4/3}}<\dfrac{1}{n^{4/3}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, iar seria $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^{4/3}}$ este convergentă.⌋

1°.74 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{5+n\sqrt{n}}$.

⌈**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{1}{5+n\sqrt{n}}<\dfrac{1}{n^{3/2}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, iar seria $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^{3/2}}$ este convergentă.⌋

1°.75 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{n!}{n^n}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{n!}{n^n}\le\dfrac{2}{n^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.⌋

1°.76 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^4}}$.

⌈**R:** Convergentă. **I:** Pentru $0<\alpha<\dfrac{1}{3}$, avem $\dfrac{\ln n}{n^{4/3}}=\dfrac{\ln(n^\alpha)}{\alpha n^{4/3}}<\dfrac{n^\alpha}{\alpha n^{4/3}}=\dfrac{1}{\alpha n^{4/3-\alpha}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^{4/3-\alpha}}$ este convergentă.⌋

1°.77 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{\big(\ln(n+1)\big)^{\ln(n+1)}}$.

⌈**R:** Convergentă. **I:** $x_n=\dfrac{1}{(n+1)^{\ln(\ln(n+1))}}<\dfrac{1}{(n+1)^2}$, dacă $(n+1)\ge\left[e^{e^2}\right]+1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.⌋

1°.78 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^{\sqrt{n}}}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{1}{n^{\sqrt{n}}}<\dfrac{1}{n^2}$, $\forall n\ge 4$.⌋

1°.79 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}2^{-\sqrt{n^2+1}}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $0<x_n<\dfrac{1}{2^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.⌋

1°.80 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}2^{-\log_2(2n)}$. ⌈**R:** Divergentă. **I:** $0<x_n=\dfrac{1}{2n}$, $\forall n\ge 2,\ n\in\mathbb{N}^*$.⌋

1°.81 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $0<x_n<\dfrac{1}{n^{3/2}}$.⌋

1°.82 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{n+3\sqrt{n}}{n(n+1)\sqrt{n+2}}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $0<x_n<\dfrac{4}{n^{3/2}}$.⌋

1°.83 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.

⌈**R:** Convergentă, dacă $p>0$ şi divergentă, dacă $p\le 0$. **I:** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{1/n^{1+p/2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^p\cdot$ $n\cdot\ln\left(1+\dfrac{2}{n-1}\right)=2^{1-p}$.⌋

1°.84 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. ⌈**R:** Divergentă. **I:** $x_n>\dfrac{1}{n+1}$.⌋

1°.85 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}\right)$.

⌈**R:** Convergentă. **I:** Din inegalitatea $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$, obţinem $0<x_n<\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}<\dfrac{1}{n^{3/2}}$.⌋

1°.86 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sin\frac{1}{n^2}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $0<\sin\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{n^2}$.⌋

1°.87 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)+\sqrt{\ln^3(n+1)}}$.

⌈**R:** Divergentă. **I:** Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător. Seria, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}y_n$, $y_n=2^n x_{2^n}$, $y_n=\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)\left[2^{n+1}+\sqrt{(n+1)\ln 2}\right]}\cdot\dfrac{1}{\ln 2}$, este divergentă.⌋

1°.88 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n}\right)$.

⌈**R:** Divergentă. **I:** $x_n=\dfrac{9n^2-2}{(3n-2)(3n-1)(3n)}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.⌋

1°.89 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}e^{-n^2}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $0<x_n=e^{-n^2}<\dfrac{1}{n^2}$.⌋

1°.90 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}ne^{-(n^2+n)}$.

⌈**R:** Convergentă. **I:** $0<x_n=n\cdot e^{-(n^2+n)}<\dfrac{2}{n(n+1)^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.⌋

1°.91 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}n^2e^{-\sqrt{n}}$.

⌈**R:** Convergentă. **I:** $0<x_n=n^2\cdot e^{-\sqrt{n}}<\dfrac{7!}{n^{3/2}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.⌋

1°.92 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}$.

⌈**R:** Divergentă. **I:** Din inegalitatea $\sqrt[k]{k}<2$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$, avem $x_n>\dfrac{1}{2n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.⌋

1°.93 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{1}{n}$.

⌈**R:** Convergentă. **I:** $0<x_n=\dfrac{1}{n}\cdot\left[\dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)}\right]^2<\dfrac{1}{n\left(\sqrt{2n+1}\right)^2}<\dfrac{1}{n^2}$.⌋

1°.94 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n+2)!}$.

⌈**R:** Convergentă. **I:** $0<x_n<\dfrac{(n-1)(n-1)!+n!}{(n+2)!}<\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}<\dfrac{2}{n^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.⌋

1°.95 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$. ⌈**R:** Convergentă; $x_n=\dfrac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}<\dfrac{1}{n^{3/2}}$.⌋

1°.96 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{n^2-1}{C_n^4}$.

⌈**R:** Convergentă. **I:** Deoarece $\dfrac{x_n}{1/n^2}\to 4!$, seriile $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ şi $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{4!}{n^2}$ au aceeaşi natură, însă $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{4!}{n^2}$ este convergentă (vezi ex. 1°.60).⌋

1°.97 $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

⌈**R:** Convergentă, dacă $\alpha>\dfrac{1}{2}$ şi divergentă, dacă $\alpha\leq\dfrac{1}{2}$. **I:** Dacă $\alpha>1/2$ şi $n\geq 3$ avem $0<x_n=\dfrac{4}{n^\alpha\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}\right)}<\dfrac{2}{(n-2)^{\alpha+1/2}}$. Dacă $\alpha\leq 1/2$, atunci $\beta=\alpha+\dfrac{1}{2}<1$, iar $\dfrac{x_n}{1/n^\beta}\to 2$. Seriile $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ şi $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^\beta}$ au aceeaşi natură, însă $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^\beta}$ este divergentă (vezi ex. 1°.63).⌋

1°.98 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{x_n}{1/n^{4/3}}\to 1$.⌋

1°.99 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n\sqrt[n]{n^3}}$. ⌈**R:** Divergentă. **I:** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{1/n}=1$.⌋

1°.100 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$. ⌈**R:** Divergentă. **I:** $\dfrac{x_n}{1/n}\to 1$.⌋

1°.101 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\operatorname{arctg}\frac{1}{n}$.

⌈**R:** Divergentă. **I:** Seria $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$, $0<x_n=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}$, are aceeaşi natură cu seria $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$.⌋

1°.102 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sin\frac{1}{n}$.

⌈**R:** Divergentă. **I:** Seria $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$, $0<x_n=\sin\dfrac{1}{n}$, are aceeaşi natură cu seria $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$.⌋

1°.103 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}$.

⌈**R:** Divergentă. **I:** Seria $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$, $0<x_n=\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n}$, are aceeaşi natură cu seria $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n}$.⌋

1°.104 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{10\sqrt[3]{n}+3}$.

⌈**R:** Divergentă; $\dfrac{x_n}{1/n^{1/3}}\to\dfrac{1}{10}$, iar seria $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^{1/3}}$ este divergentă.⌋

1°.105 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{n+a\sqrt{n}}{n(n+1)\sqrt{n+2}}$, $a\in\mathbb{R}$.

⌈**R:** Convergentă; $\dfrac{x_n}{1/n^{3/2}}\to 1$, iar seria $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^{3/2}}$ este convergentă.⌋

1°.106 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\sqrt{7n}}{n^2+n+5}$. ⌈**R:** Convergentă; $\dfrac{x_n}{1/n^{3/2}}\to\sqrt{7}$.⌋

1°.107 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\sqrt{2n^4+3n^2-1}-\sqrt{2n^4-3n^2-1}}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** Deoarece $x_n = \dfrac{6n^2}{n^\alpha\left(\sqrt{2n^4+3n^2-1}+\sqrt{2n^4-3n^2-1}\right)}$, rezultă că seria în cauză are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^\alpha}$, adică este convergentă, dacă $\alpha > 1$ şi divergentă, dacă $\alpha \le 1$.⌋

1°.108 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)^a}{\left(\sqrt[3]{n+3}+\sqrt[3]{n+1}\right)^b}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

⌈**Soluţie:** Avem $x_n = \dfrac{1}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)^a\left(\sqrt[3]{n+3}+\sqrt[3]{n+1}\right)^b}$. Seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ cu $y_n = \dfrac{1}{n^{a/2+b/3}}$ pentru că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} \in]0,\infty[$. Dacă $\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3} \le 1$, seria este divergentă, iar dacă $\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3} > 1$, seria este convergentă.⌋

1°.109 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \arcsin\dfrac{1}{n}$. ⌈**R:** Divergentă; $\dfrac{x_n}{1/n} \to 1$.⌋

1°.110 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n}\arcsin\dfrac{1}{n}$. ⌈**R:** Convergentă; $\dfrac{x_n}{1/n^2} \to 1$.⌋

1°.111 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}+5}$. ⌈**R:** Convergentă; $\dfrac{x_n}{1/n^{4/3}} \to 1$.⌋

1°.112 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. ⌈**R:** Divergentă; $\dfrac{x_n}{1/n} \to 1$.⌋

1°.113 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. ⌈**R:** Convergentă; $\dfrac{x_n}{1/n^3} \to 1$.⌋

1°.114 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n}\operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$. ⌈**R:** Convergentă; $\dfrac{x_n}{1/n^2} \to 1$.⌋

1°.115 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$. ⌈**R:** Convergentă; $\dfrac{x_n}{1/n^2} \to \dfrac{1}{2}$.⌋

1°.116 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{1}{n}\right)$. ⌈**R:** Convergentă; $\dfrac{x_n}{1/n^3} \to \dfrac{1}{6}$.⌋

1°.117 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n\right)$. ⌈**R:** Divergentă; $\dfrac{x_n}{1/n} \to 1$.⌋

1°.118 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{e\sqrt{e}\sqrt[3]{e}\ldots\sqrt[n]{e}}$.

⌈**R:** Divergentă; $x_n = e^{-(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})} = \dfrac{1}{n}e^{\ln n-(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{1/n} \in]0,+\infty[$.⌋

1°.119 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{e+e^2+\ldots+e^n}{e+2e^2+\ldots+ne^n}$. ⌈**R:** Divergentă; $x_n = \dfrac{(e-1)(e^n-1)}{ne^{n+1}-(n+1)e^n+1}$, $\dfrac{x_n}{1/n} \to 1$.⌋

1°.120 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}$. ⌈**R:** Divergentă; $x_n > \dfrac{1}{n}$.⌋

1°.121 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\sin^2(n\alpha)}{(\ln 5)^n}$.

⌈**R:** Convergentă. **I:** $0\le x_n=\dfrac{\sin^2(n\alpha)}{(\ln 5)^n}<\dfrac{1}{(\ln 5)^n}=y_n$, iar seria $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}y_n$ este convergentă.⌋

1°.122 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\operatorname{arctg}(n\alpha)}{(\ln 3)^n}$, $\alpha>0$. ⌈**R:** Convergentă.⌋

1°.123 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{[\ln(n+2)]^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

⌈**R:** Divergentă. **I:**Metoda 1. Pentru $\alpha>0$, avem $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{1/(n+1)}=+\infty$, iar pentru $\alpha\le 0\Rightarrow x_n\not\to 0$. Metoda 2. Seria se scrie sub forma $\displaystyle\sum_{n\ge 3}\frac{1}{\ln^\alpha n}$. Pentru $\alpha\le 0$ avem $x_n\not\to 0$. Pentru $\alpha>0$, se foloseşte criteriul de condensare al lui Cauchy şi obţinem seria $\displaystyle\frac{1}{\ln^\alpha 2}\sum_{n\ge 3}\frac{2^n}{n^\alpha}$ care este divergentă.⌋

1°.124 $\displaystyle\sum_{n\ge 2}\frac{1}{n\ln n}$.

⌈**R:** Divergentă. **I:** Şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător, iar seria $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}y_n$, $y_n=2^n x_{2^n}=\dfrac{1}{n\ln 2}$, este divergentă.⌋

1°.125 $\displaystyle\sum_{n\ge 3}\frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$.

⌈**R:** Divergentă. **I:** Aplicăm criteriul de condensare al lui Cauchy: seria $\displaystyle\sum_{n\ge 3}2^n x_{2^n}=$ $\displaystyle=\frac{1}{\ln 2}\sum_{n\ge 3}\frac{1}{n\left[\ln n+\ln(\ln 2)\right]}$ este divergentă.⌋

1°.126 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n\ln^2 n}$. ⌈**R:** Convergentă.⌋

1°.127 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n\sqrt[4]{\ln^5 n}}$. ⌈**R:** Convergentă.⌋

1°.128 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n\ln n\ln^2(\ln n)}$. ⌈**R:** Convergentă.⌋

4.1.2.2. Criteriul rădăcinii (Cauchy)

Folosind criteriul rădăcinii (al lui Cauchy) sau consecinţele sale, să se stabilească natura seriilor:

1°.129 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{3n^{n+1}}{(2n+1)^n}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n} \to \frac{1}{2} < 1.$⌋

1°.130 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{n!}{n^n}\right)^n$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n} \to 0 < 1.$⌋

1°.131 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{5n^2+2n-1}{2n^2-n+1}\right)^n$. ⌈**R:** Divergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n} \to \frac{5}{2} > 1.$⌋

1°.132 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n} \to 0 < 1.$⌋

1°.133 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\arccos\frac{1}{n}\right)^{-n}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n} \to \frac{2}{\pi} < 1.$⌋

1°.134 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \big(\operatorname{arctg} n\big)^{-n}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n} \to \frac{2}{\pi} < 1.$⌋

1°.135 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\big(\ln n\big)^n}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{\ln n} \to 0 < 1.$⌋

1°.136 $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\lg n)^n}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{\lg n} \to 0.$⌋

1°.137 $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\big(\ln n\big)^{-n}}{n^n}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{n\ln n} \to 0.$⌋

1°.138 $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \big(\sqrt[n]{n}-1\big)^n$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n} = \sqrt[n]{n}-1 \to 0.$⌋

1°.139 $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n} = \frac{n\sqrt[n]{n^2}}{2n+1} \to \frac{1}{2}.$⌋

1°.140 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. ⌈**R:** Divergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n} \to e > 1.$⌋

1°.141 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n} \to \frac{e}{3} < 1.$⌋

1°.142 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. ⌈**R:** Divergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n} \to \frac{e}{2} > 1.$⌋

1°.143 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} 2^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n} \to \frac{2}{e} < 1.$⌋

1°.144 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^2\cos^2(n\pi/3)}{2^n+1}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n} \to \frac{1}{2} < 1.$⌋

1°.145 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} na^n,\ a>0.$

⌈**R:** $\sqrt[n]{x_n}\to a$. Dacă $a<1$, seria este convergentă, iar dacă $a\geq 1$, seria este divergentă.⌋

1°.146 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\alpha^n}{4n^2-1},\ \alpha\in\mathbb{R}_+.$

⌈**R:** $\sqrt[n]{x_n}\to a$. Dacă $a\leq 1$, seria este convergentă, iar dacă $a>1$, seria este divergentă.⌋

1°.147 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{a^n}{n^\alpha},\ a>0,\ \alpha\in\mathbb{R}.$

⌈**R:** $\sqrt[n]{x_n}\to a$. Dacă $a<1$, seria este convergentă pentru $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, dacă $a>1$, seria este divergentă pentru $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, iar dacă $a=1$, seria este convergentă pentru $\alpha>1$ şi divergentă pentru $\alpha\leq 1$.⌋

1°.148 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}.$ ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n}\to\dfrac{1}{2}<1.$⌋

1°.149 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{n+(-1)^n}{3^n+2}.$ ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n}\to\dfrac{1}{3}<1.$⌋

1°.150 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{n^2[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}.$ ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{3}<1.$⌋

1°.151 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\dfrac{1^3+2^3+...+n^3}{n^3}-\dfrac{n}{4}\right)^n.$ ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n}\to\dfrac{1}{2}<1.$⌋

1°.152 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\dfrac{1^m+2^m+...+n^m}{n^m}-\dfrac{n}{m+1}\right)^n,\ m\in\mathbb{N}^*$-fixat.

⌈**R:** Convergentă. **I:** $\sqrt[n]{|x_n|}\to\dfrac{1}{2}<1.$⌋

1°.153 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \big(3+(-1)^n\big)^n.$ ⌈**R:** Divergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n}\geq 2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$⌋

1°.154 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\dfrac{5+(-1)^n}{2}\right)^{-n}.$ ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}=\dfrac{1}{2}<1.$⌋

1°.155 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\dfrac{2+(-1)^n}{3}\right)^{n^2}.$ ⌈**R:** Divergentă. **I:** $\sqrt[2n]{x_{2n}}=1.$⌋

1°.156 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(5n)^3}{\left(\sqrt{16n^2+5n+1}\right)^{n+1}}.$ ⌈**R:** Convergentă; $\sqrt[n]{x_n}\to 0.$⌋

1°.157 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{n^2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}},$ ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{e}<1.$⌋

1°.158 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{3^n n!}{n^n}.$ ⌈**R:** Divergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n}\to\dfrac{3}{e}>1.$⌋

1°.159 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{2^n n!}{n^n}.$ ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\sqrt[n]{x_n}\to\dfrac{2}{e}<1.$⌋

1°.160 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} 2^{\ln n}\cdot a^n,\ a\in\mathbb{R}.$

⌈**R:** $\sqrt[n]{|x_n|}\to a$. Dacă $|a|<1$, seria este convergentă, iar dacă $|a|\geq 1$, seria este divergentă.⌋

4.1.2.3. Criteriul raportului (d'Alembert)

Aplicând criteriul raportului (lui d'Alembert) sau consecinţele sale, să se studieze natura seriilor:

1°.161 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{3^n}{n!}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{3}{n+1} \to 0 < 1.$⌋

1°.162 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(n+1)2^n}{n!}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{2(n+2)}{(n+1)^2} \to 0 < 1.$⌋

1°.163 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{n}{2^n}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \to \dfrac{1}{2} < 1.$⌋

1°.164 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{5^n}{(n+1)!+(n+3)!}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \to 0 < 1.$⌋

1°.165 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^2$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \to \dfrac{1}{e^2} < 1.$⌋

1°.166 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{n^{\ln 2}}{(\ln 2)^n}$. ⌈**R:** Divergentă. **I:** $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\ln 2} \cdot \dfrac{1}{\ln 2} \to \dfrac{1}{\ln 2} > 1.$⌋

1°.167 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \to \dfrac{1}{4} < 1.$⌋

1°.168 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot(4n-3)}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \to \dfrac{3}{4} < 1.$⌋

1°.169 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot(2n)}{n^n}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \to \dfrac{2}{e} < 1.$⌋

1°.170 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{n^a \ln n}{n!}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \to 0 < 1.$⌋

1°.171 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \dfrac{1\cdot 3\cdot \ldots (2n+1)}{2^n\, n!}$. ⌈**R:** Divergentă. **I:** $\dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \dfrac{2n+3}{2n+2} > 1$ de unde rezultă că $x_n \not\to 0.$⌋

1°.172 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n(1+a+a^2+\ldots+a^{n-1})}, a \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}.$

⌈**Soluţie:** Deoarece $1+a+a^2+\ldots+a^{n-1} = \begin{cases} n, & \text{dacă } a = 1, \\ \dfrac{1-a^n}{1-a}, & \text{dacă } a \neq 1, \end{cases}$ vom deosebi mai multe cazuri:

Cazul 1. Dacă $a = 1$ seria devine $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^2}$ care este convergentă fiind seria armonică generalizată cu $\alpha > 1$.

Cazul 2. Pentru $a \in]-1,1[$ seria are forma $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1-a}{n(1-a^n)}$ şi are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n}$ care este divergentă. Într-adevăr, seria este cu termeni pozitivi şi dacă luăm $x_n = \dfrac{1-a}{n(1-a^n)}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 1-a > 0$. Aplicând Consecinţa 2 rezultă divergenţa seriei în cauză.

Cazul 3. Dacă $a > 1$ obţinem seria cu termeni poxitivi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{a-1}{n(a^n-1)}$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{1}{a} < 1$, rezultă convergenţa seriei.

Cazul 4. Dacă $a<-1$ seria se poate scrie sub forma $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n\dfrac{1+|a|}{n(|a|^n-(-1)^n)}$. Această serie alternată. Este absolut convergentă deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=\dfrac{1}{|a|}<1.\rfloor$

1°.173 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\sqrt[5]{\dfrac{a^n+5}{(5a)^n}}$, $a>0$.

$\lceil$**Soluţie:** Seria în cauză este cu termeni pozitivi. $\lambda_1=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\sqrt[5]{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{5a}\cdot\dfrac{a^{n+1}+5}{a^n+5}}=$ $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[5]{5}}, & \text{dacă } a\ge 1,\\ \dfrac{1}{\sqrt[5]{5a}}, & \text{dacă } a\in]0,1[.\end{cases}$ Dacă $a\ge 1$ seria este convergentă. Pentru $a\in]0,1[$ avem cazurile: $a>\dfrac{1}{5}\Rightarrow$ serie este convergentă, $a<\dfrac{1}{5}\Rightarrow$ serie divergentă, iar $a=\dfrac{1}{5}\Rightarrow x_n=\sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{5}\right)^n+5}>\sqrt[5]{5}>1\Rightarrow$ serie divergentă.$\rfloor$

1°.174 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{(n!)^n}{2^{n^2}}$. $\lceil$**R:** Divergentă. **I:** $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\to+\infty.\rfloor$

1°.175 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{2^n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$. $\lceil$**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\to 0<1.\rfloor$

1°.176 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right)$.

$\lceil$**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\sqrt{2}-\sqrt[2n+3]{2}\to\sqrt{2}-1<1.\rfloor$

1°.177 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}n^2\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$. $\lceil$**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\to\dfrac{1}{2}<1.\rfloor$

1°.178 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}n^a\sin\dfrac{\pi}{5^n}$. $\lceil$**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\to\dfrac{1}{5}<1.\rfloor$

1°.179 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}n\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ $\lceil$**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\to\dfrac{1}{2}<1.\rfloor$

1°.180 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}a^n\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2^n}\right)$, $a>0$, $\alpha\in]0,\pi[$.

$\lceil$**R:** Convergentă, dacă $a<2$; divergentă, dacă $a\ge 2.\rfloor$

1°.181 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{\operatorname{ch}n}{\operatorname{ch}2n}$ $\lceil$**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\to\dfrac{1}{e}<1.\rfloor$

1°.182 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}2^{-n+(-1)^n}$.

$\lceil$**R:** Convergentă. **I:** Consecinţa 6 nu se poate aplica, deoarece $\underline{\lim}_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{8}$ iar $\overline{\lim}_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=2$. Dar $x_n\le\dfrac{1}{2^{n-1}}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*.\rfloor$

1°.183 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}2^{-\sqrt{n^2+1}}$. $\lceil$**R:** Divergentă. **I:** $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\to\dfrac{1}{2}<1.\rfloor$

1°.184 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}e^{-n^2}$. $\lceil$**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\to 0<1.\rfloor$

1°.185 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}ne^{-(n^2+n)}$. $\lceil$**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\to 0<1.\rfloor$

4.1.2.4. Criteriile Raabe-Duhamel, Gauss, logaritmic, etc.

Utilizînd criteriile Raabe-Duhamel, Gauss, logaritmic, să se stabilească natura seriilor de mai jos:

1°.186 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(2+\sqrt{n})}$.

⌈**R:** Convergentă. **I:** $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1\Big)=+\infty>1.$⌋

1°.187 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{n!e^n}{n^{n+p}},\ p\in\mathbb{N}^*.$

⌈**R:** Convergentă, dacă $p\geq 2$; divergentă, dacă $p=1$. **I:** S-a folosit formula lui **Stirling**: $n!=\sqrt{2\pi n}\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^n\Big(1+\dfrac{1}{12n}+\dfrac{\alpha(1))}{n^2}\Big)$⌋

1°.188 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{n!}{(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n)},\ \alpha\in\mathbb{R},\ \alpha>-1.$

⌈**R:** Convergentă, dacă $\alpha>1$; divergentă, dacă $\alpha\leq 1$.⌋

1°.189 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)}{n!\,n^\beta},\ \alpha\in\mathbb{R}_+^*,\ \beta\in\mathbb{R}.$

⌈**R:** Convergentă, dacă $q+\dfrac{p}{2}>1$; divergentă, dacă $q+\dfrac{p}{2}\leq 1$. **I:** Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1-ax}{x^2}=\dfrac{(a-1)}{2}$, rezultă că $\forall\varepsilon>0$, $\exists n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $\forall n\geq n(\varepsilon)\Rightarrow\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^a=1+\dfrac{a}{n}+\dfrac{\alpha_n}{n^2}$, cu $|\alpha_n|\leq M_1$. Atunci $\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^q\Big(1+\dfrac{1}{2n+1}\Big)^p=1+\dfrac{q+p/2}{n}+\dfrac{\beta_n}{n^2}$, $|\beta_n|\leq M$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.⌋

1°.190 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^q}\cdot\Big(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big)^p,\ p>0<q.$

⌈**R:** Convergentă, dacă $\dfrac{p}{2}+q>1$ şi divergentă, dacă $\dfrac{p}{2}+q\leq 1$. **I:** $\dfrac{x_n}{x_{n+1}}=\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^q\Big(\dfrac{2n+2}{2n+1}\Big)^p=1+\dfrac{q+p/2}{n}+\dfrac{\beta_n}{n^2}$, $|\beta_n|\leq M$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.⌋

1°.191 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\mathrm{sech}^2 n.$ ⌈**R:** Convergentă.⌋

1°.192 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{n!\,n^{-p}}{q(q+1)\cdot\ldots\cdot(q+n)},\ p>0<q.$

⌈**R:** Convergentă, dacă $p+q>1$ şi divergentă, dacă $p+q\leq 1$. **I:** $\dfrac{x_n}{x_{n+1}}=\dfrac{n+1+q}{n+1}\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^p=1+\dfrac{q+p}{n}+\dfrac{p(p-1)}{2n^2}\Big(1+\dfrac{\beta_n}{n}\Big)+\dfrac{pq}{n^2}-\dfrac{q}{n(n+1)}$.⌋

1°.193 $\displaystyle\sum_{n\geq 3}\frac{1}{\big(\ln(\ln n)\big)^2}.$ ⌈**R:** Divergentă. **I:** $\dfrac{\ln(1/x_n)}{\ln n}\to 0.$⌋

1°.194 $\displaystyle\sum_{n\geq 3}\frac{1}{\big(\ln n\big)^{\ln(\ln n)}}.$ ⌈**R:** Divergentă. **I:** $\dfrac{\ln(1/x_n)}{\ln n}\to 0.$⌋

1°.195 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\Big(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^n.$ ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\dfrac{\ln(1/x_n)}{\ln n}=\dfrac{\sqrt{n}}{\ln n}\ln\Big(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)^{-\sqrt{n}}\to\infty.$⌋

1°.196 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(n+1)\ln^\alpha(n+1)},\ \alpha\in\mathbb{R}.$

⌈**R:** Convergentă, dacă $\alpha > 1$ şi divergentă, dacă $\alpha \leq 1$. **I:** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1/x_n)}{\ln n} = 1$.⌋

1°.197 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)\big(\ln(\ln(n+1))\big)^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** Convergentă, dacă $\alpha > 1$ şi divergentă, dacă $\alpha \leq 1$.⌋

1°.198 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln^2 n}$.

⌈**R:** Convergentă. **I:** Avem: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1/x_n)}{\ln n} = 1$, $\dfrac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln^2 n} < \dfrac{1}{n\ln^2 n}$ şi $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2^n}{2^n \ln^2(2^n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2\ln^2 2}$ este convergentă.⌋

1°.199 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(n+\frac{1}{n}\right)^{-1}$. ⌈**R:** Divergentă.⌋

1°.200 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n^2}$. ⌈**R:** Convergentă.⌋

1°.201 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}\cdot\sin\frac{1}{n}$. ⌈**R:** Convergentă.⌋

1°.202 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sqrt{n}\cdot e^{-\sqrt{n}}$. ⌈**R:** Convergentă.⌋

1°.203 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}\cdot\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\frac{1}{n^{3/2}}} = 1$.⌋

4.1.3. Serii alternate

Este aplicabil criteriul lui Leibniz pentru seriile de mai jos?

1°.204 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

⌈**R:** Da; convergentă. **I:** $|x_n| = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \to 0$, iar şirul $\big(|x_n|\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător.⌋

1°.205 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$.

⌈**R:** Da; convergentă. **I:** $|x_n| = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt[6]{n}} \to 0$, iar şirul $\big(|x_n|\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător.⌋

1°.206 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{(n+1)}$.

⌈**R:** Da; convergentă. **I:** $|x_n| = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1} \to 0$, iar şirul $\big(|x_n|\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător.⌋

1°.207 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n+1} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$.

⌈**R:** Da; convergentă. **I:** $|x_n| = \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \to 0$, iar şirul $\big(|x_n|\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător.⌋

1°.208 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

⌈**R:** Da; convergentă. **I:** $|x_n| = \dfrac{\ln n}{n} \to 0$, iar şirul $\big(|x_n|\big)_{n\geq 3}$ este descrescător.⌋

1°.209 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2+2n(-1)^n}$

⌈**R:** Nu; absolut convergentă. **I:** $|x_{2k-1}| > |x_{2k}| < |x_{2k+1}|$, dar $|x_n| = \dfrac{1}{(n+1)^2+2n(-1)^n} < \dfrac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.⌋

1°.210 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(n\pi)}{\operatorname{arctg} n}$. ⌈**R:** Nu; divergentă. **I:** $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \dfrac{2}{\pi}$.⌋

1°.211 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n-1}\frac{\sin^2 n}{n}$.

⌈**R:** Nu; convergentă. **I:** În teorema 1 (Criteriul lui Dirichlet) luăm $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$ şi $x_n = (-1)^{n-1}\sin^2 n = (-1)^n\dfrac{\cos(2n)-1}{2}$.⌋

1°.212 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}+(-1)^n}$.

⌈**R:** Nu; divergentă. **I:** $|x_{2k-1}| > |x_{2k}| < |x_{2k+1}|$, dar $S_n > 2\Big(1+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{2k-1}\Big)$, $k = \Big[\dfrac{n}{2}\Big]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.⌋

1°.213 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n(-1)^{n-1}}{3n-1}$. ⌈**R:** Nu; divergentă. **I:** $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \dfrac{1}{3}$. ⌋

1°.214 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}$. ⌈**R:** Da; convergentă.⌋

1°.215 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}$. ⌈**R:** Nu; divergentă. **I:** $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 1$.⌋

1°.216 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \operatorname{tg}\frac{\alpha}{n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq n(k\pi+\pi/2)$. ⌈**R:** Da; convergentă.⌋

1°.217 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n\frac{(n+1)^{(n+1)}}{n^{n+2}}$. ⌈**R:** Da; convergentă.⌋

1°.218 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n\frac{n+1}{2^n+n(-1)^n}$. ⌈**R:** Da; convergentă.⌋

Să se stabilească natura seriilor alternate:

1°.219 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n\Big(\frac{3n+1}{5n+1}\Big)^n$. ⌈**R:** Absolut convergentă. **I:** $\lim\limits_{n\to\mathbb{N}^*} \sqrt[n]{|x_n|} = \dfrac{3}{5} < 1$.⌋

1°.220 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n-1}\frac{2n+3}{5^n}$. ⌈**R:** Absolut convergentă. **I:** $\dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \to \dfrac{1}{5} < 1$.⌋

1°.221 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** Convergentă, dacă $\alpha > 0$ şi divergentă, dacă $\alpha \le 0$. **I:** Pentru $\alpha > 0$, $|x_n| \searrow 0$, iar pentru $\alpha \le 0$, $x_n \not\to 0$.⌋

1°.222 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n-1}\ln\Big(\frac{n^2+2}{n^2+1}\Big)$. ⌈**R:** Absolut convergentă. **I:** $\dfrac{|x_n|}{1/n^2} \to 1$.⌋

1°.223 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\big(\ln(n+1)\big)^{\alpha}},\ \alpha\in\mathbb{R}.$

⌈**R:** Convergentă, dacă $\alpha>0$ şi divergentă, dacă $\alpha\le 0$. **I:** Pentru $\alpha>0$, $|x_n|\searrow 0$, iar pentru $\alpha\le 0$, $x_n\not\to 0$.⌋

1°.224 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(5^n+1)n!}.$ ⌈**R:** Convergentă. **I:** $|x_n|\searrow 0$.⌋

1°.225 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n+(-1)^n}.$ ⌈**R:** Convergentă. **I:** $|x_n|\searrow 0$.⌋

1°.226 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{a^n}{2^n+5^n},\ a\in\mathbb{R}$

⌈**R:** Convergentă absolut, dacă $|a|<5$ şi divergentă, dacă $|a|\ge 5$.⌋

1°.227 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{3^n}.$ ⌈**R:** Convergentă. **I:** $|x_n|\searrow 0$.⌋

1°.228 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n-1}\dfrac{a+a\cdot 10+\ldots+a\cdot 10^{n-1}}{10^n},\ a\in\mathbb{R}.$

⌈**R:** Divergentă. **I:** $x_n=(-1)^{n-1}\dfrac{10^n-1}{10^n}\cdot\dfrac{a}{9}\not\to 0$, dacă $a\neq 0$.⌋

1°.229 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{an+1}{bn+1}\right)^n, 0<a<b.$ ⌈**R:** Convergentă. **I:** $|x_n|\searrow 0$.⌋

1°.230 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{(-1)^{n-1}(n+1)}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}.$ ⌈**R:** Convergentă. **I:** $|x_n|\searrow 0$.⌋

1°.231 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n^{\alpha}}},\ \alpha\in\mathbb{R}.$ ⌈**R:** Divergentă. **I:** $|x_n|\to 1$.⌋

1°.232 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\big(3+(-1)^n\big)^n}.$

⌈**R:** Absolut convergentă. **I:** Nu este aplicabil criteriul lui Leibniz, însă $|x_n|=\dfrac{1}{\big(3+(-1)^n\big)^n}\le\dfrac{1}{2^n}$.⌋

1°.233 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}.$

⌈**R:** Divergentă. **I:** $\sqrt{2}=2\cos\dfrac{\pi}{2^2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}=2\cos\dfrac{\pi}{2^3}$ şi prin inducţie $\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}=2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$, de unde rezultă că $x_n\not\to 0$.⌋

1°.234 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n-1}\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$

⌈**R:** Absolut convergentă. **I:** Procedând ca mai sus avem: $\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ (n-1 radicali) şi $\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}=2\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\searrow 0$.⌋

4.1.4. Serii cu termeni oarecare

Să se studieze convergenţa seriilor:

1°.235 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(2n-1)\pi/4}{3^n}$. ⌈**R:** Absolut convergentă. **I:** $|x_n| < \dfrac{1}{3^n}$.⌋

1°.236 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \frac{\sin(n!)}{n^2}$. ⌈**R:** Absolut convergentă. **I:** $|x_n| \le \dfrac{1}{n^2}$.⌋

1°.237 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(n\alpha)}{n^2},\ \alpha \in \mathbb{R}$. ⌈**R:** Absolut convergentă. **I:** $|x_n| \le \dfrac{1}{n^2}$.⌋

1°.238 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \frac{\operatorname{tg}(n\pi/3)}{n(n+1)}$. ⌈**R:** Absolut convergentă. **I:** $|x_n| \le \dfrac{\sqrt{3}}{n^2}$.⌋

1°.239 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(\frac{n+1}{n}\Big) \frac{\sin(n\pi/6)}{\sqrt{n^3+1}}$. ⌈**R:** Absolut convergentă. **I:** $|x_n| \le \dfrac{2}{n^{3/2}}$.⌋

1°.240 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} 2^{-n}\cos(n\pi/4)$. ⌈**R:** Absolut convergentă. **I:** $|x_n| \le \dfrac{1}{2^n}$.⌋

1°.241 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n-1} \frac{1}{n-\ln n}$. ⌈**R:** Semiconvergentă. **I:** $|x_n| = \dfrac{1}{n-\ln n} > \dfrac{1}{n}$; $|x_n| \searrow 0$.⌋

1°.242 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a^n\, n!}{n^n},\ a > 0$. ⌈**R:** Convergentă, dacă $a < e$ şi divergentă, dacă $a \ge e$.⌋

1°.243 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{a^n}{2n+1},\ a \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** $\dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \to |a|$. Absolut convergentă, dacă $|a| \le 1$ şi divergentă, dacă $|a| > 1$. (**I:** Dacă $a = 1$, atunci $n\Big(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\Big) \to \dfrac{3}{2} > 1$ şi deci seria este convergentă. Dacă $a = -1$, atunci seria este absolut convergentă.)⌋

1°.244 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (n!) \prod_{k=1}^{n} \sin\frac{a}{k},\ a \in]0,\pi[$.

⌈**R:** Convergentă, dacă $a \in [0,1[$ şi divergentă, dacă $a \in [1,\pi[$.⌋

1°.245 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a^n \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n,\ a \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** Absolut convergentă, dacă $|a| < 1$ şi divergentă, dacă $|a| \ge 1$.⌋

1°.246 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \Big[a\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n\Big]^n,\ a \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** Convergentă, dacă $|a| < e^{-1}$ şi divergentă, dacă $|a| \ge e^{-1}$.⌋

1°.247 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a^n}{n+b^n},\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}_+^*$

⌈**R:** $\dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \to \begin{cases} |a|, & \text{dacă} \quad b \le 1, \\ \dfrac{|a|}{b}, & \text{dacă} \quad b > 1. \end{cases}$ Dacă $b \le 1$ şi $|a| < 1$ sau dacă $b > 1$ şi $|a| < b$, seria este absolut convergentă. Dacă $b \le 1$ şi $|a| > 1$ sau dacă $b > 1$ şi $|a| > b$, seria este divergentă. Dacă $0 < b \le 1$ şi $a = 1$, seria este divergentă, iar dacă $0 < b \le 1$ şi $a = -1$, seria este semiconvergentă. Dacă $b > 1$ şi $|a| = b$, seria este divergentă, întrucât $|x_n| \to 1$.⌋

1°.248 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{a^n + \operatorname{sh} n}{3^n} \cdot b^n,\ a, b \in \mathbb{R}.$

⌈**R:** Să observăm că $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \dfrac{|b|}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a^{n+1} + \operatorname{sh}(n+1)|}{|a^n + \operatorname{sh} n|} = \begin{cases} \dfrac{e|b|}{3}, & \text{dacă } |a| \le e, \\ \dfrac{|ab|}{3}, & \text{dacă } |a| > e. \end{cases}$ Dacă $|b| < \dfrac{3}{e}$ şi $|a| \le e$ sau dacă $|ab| < 3$ şi $|a| > e$, seria este absolut convergentă. Dacă $|b| > \dfrac{3}{e}$ şi $|a| \le e$ sau dacă $|ab| > 3$ şi $|a| > e$, seria este divergentă. Dacă $|a| \le e$ şi $|b| = \dfrac{3}{e}$ sau dacă $|a| > e$ şi $|ab| = 3$, atunci $x_n \not\to 0$, deci seria este divergentă.⌋

1°.249 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a^n \cos^n\left(b + \dfrac{c}{n}\right),\ a, b, c \in \mathbb{R},\ |a|\cdot|\cos b| \ne 1.$

⌈**R:** Absolut convergentă, dacă $|a|\cdot|\cos b| < 1$ şi divergentă, dacă $|a|\cdot|\cos b| > 1$.⌋

1°.250 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{a^n}{1 - a^n},\ |a| \ne 1.$

⌈**R:** Absolut convergentă, dacă $|a| < 1$ şi divergentă, dacă $|a| > 1$.⌋

1°.251 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{a^{n^2}}{n!},\ a \in \mathbb{R}.$

⌈**R:** Absolut convergentă, dacă $|a| \le 1$ şi divergentă, dacă $|a| > 1$.⌋

1°.252 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\dfrac{1}{(3n-2)^\alpha} + \dfrac{1}{(3n-1)^\alpha} - \dfrac{2}{(3n)^\alpha}\right),\ \alpha \in \mathbb{R}.$

⌈**R:** Convergentă, dacă $\alpha \ge 0$ şi divergentă, dacă $\alpha < 0$. **I:** Dacă $\alpha = 0$, atunci $x_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ şi deci seria este convergentă. Fie $\alpha \ne 0$. Vom studia convergenţa seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\dfrac{1}{(3n-2)^\alpha} - \dfrac{1}{(3n)^\alpha}\right)$. Notăm $y_n = \dfrac{1}{(3n-2)^\alpha} - \dfrac{1}{(3n)^\alpha}$. Avem $y_n = \dfrac{1 - \left(1 - \dfrac{2}{3n}\right)^\alpha}{(3n-2)^\alpha}$. Fie $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) := \dfrac{x^{\alpha+1}\left[1 - \left(1 - \dfrac{2}{3x}\right)^\alpha\right]}{(3x-2)^\alpha} = \dfrac{1 - \left(1 - \dfrac{2}{3x}\right)^\alpha}{\dfrac{1}{x}} \cdot \dfrac{x^\alpha}{(3x-2)^\alpha}$. Avem $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x) = \dfrac{2\alpha}{3^{\alpha+1}}$, de unde urmează că $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n) = \dfrac{2\alpha}{3^{\alpha+1}}$. Deci, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\dfrac{1}{(3n-2)^\alpha} - \dfrac{1}{(3n)^\alpha}\right)$ este convergentă, dacă $\alpha > 0$ şi divergentă, dacă $\alpha \le 0$. Analog, seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\dfrac{1}{(3n-1)^\alpha} - \dfrac{1}{(3n)^\alpha}\right)$ este convergentă, dacă $\alpha > 0$ şi divergentă, dacă $\alpha \le 0$. Cum seria iniţială este suma a două serii convergente, dacă $\alpha > 0$, atunci este o serie convergentă.⌋

1°.253 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha+1/n}},\ \alpha \in \mathbb{R}.$

⌈**R:** Convergentă, dacă $\alpha > 0$ şi divergentă, dacă $\alpha \le 0$.⌋

1°.254 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (2n-1)\left[\dfrac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}\right]^2,\ a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.$

⌈**R:** Convergentă, dacă $a > 0$ şi divergentă, dacă $a < 0$. **I:** Avem $n\left[\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right] \to 4a + 1$. ⌋

1°.255 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+a)^\alpha},\ a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\ \alpha \in \mathbb{R}.$

⌈**R:** Convergentă, dacă $\alpha > 0$ şi divergentă, dacă $\alpha \le 0$.⌋

1°.256 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n-1}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\Big)a^{2n+1},\ a\in\mathbb{R}.$

⌈**R:** Absolut convergentă, dacă $|a|<1$ şi divergentă, dacă $|a|\geq 1$.⌋

1°.257 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(n!)^2a^n}{(2n)!},\ a\in\mathbb{R}.$

⌈**R:** Absolut convergentă, dacă $|a|<4$ şi divergentă, dacă $|a|\geq 4$.⌋

1°.258 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1+n(-1)^n}{n^2}.$

⌈**R:** Convergentă. **I:** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}x_n=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}+\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n}{n}$.⌋

1°.259 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}n^{n+\frac{1}{n}}\Big(n+\frac{1}{n}\Big)^{-n}.$ ⌈**R:** Divergentă. **I:** $x_n\to 1$.⌋

1°.260 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\cos(n^n)}{n!}.$ ⌈**R:** Absolut convergentă.⌋

1°.261 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\sin(n)\sin(n^2)}{\sqrt{n}}.$

⌈**R:** Convergentă. **I:** Să observăm că $x_n=\dfrac{\cos(n(n-1))-\cos(n(n+1))}{2\sqrt{n}}$, de unde rezultă că $S_n=\dfrac{1}{2}\Big[1-\dfrac{\cos(n(n+1))}{\sqrt{n}}-\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\Big)\cos(k(k-1))\Big]$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Deoarece şirul $\displaystyle\Bigg(\sum_{k=2}^{n-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\Big)\cos(k(k-1))\Bigg)_{n\geq 2}$ este convergent, rezultă că şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.⌋

1°.262 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n-1}\frac{n^3}{2^n}.$ ⌈**R:** Absolut convergentă.⌋

1°.263 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n-1}\frac{\cos(\alpha/n)}{n},\ \alpha\in]0,\pi[.$

⌈**R:** Convergentă. **I:** Avem $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n-1}\frac{\cos(a/n)}{n}=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n-1}}{n}-2\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n-1}\frac{\sin^2(\alpha/2n)}{n}$. În membrul drept al egalităţii avem suma a două serii convergente (prima este alternată, iar a doua este absolut convergentă).⌋

1°.264 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n-1}\frac{\sin(\alpha/n)}{n},\ \alpha\in]0,\pi[.$ ⌈**R:** Absolut convergentă.⌋

1°.265 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n-1}\frac{\cos(n\alpha)}{n},\ \alpha\in]0,\pi[.$ ⌈**R:** Convergentă.⌋

1°.266 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n-1}\frac{\sin(n\alpha)}{n},\ \alpha\in]0,\pi[.$ ⌈**R:** Convergentă.⌋

1°.267 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\Big(\mathrm{tg}\Big(a+\frac{b}{n}\Big)\Big)^n,\ a,b\in[0,\pi/2[.$

⌈**R:** Convergentă, dacă $a\in[0,\pi/4[$ şi divergentă, dacă $a\in[\pi/4,\pi/2[$.⌋

1°.268 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sin\left(a+\dfrac{b}{n}\right)\right)^n$, $a,b\in[0,\pi/2[$.

⌈**R:** Convergentă, dacă $a\in[0,\pi/2[$, $\forall b\in[0.\pi/2]$, iar dacă $a=\pi/2$, seria este divergentă deoarece $\cos\left(\dfrac{b}{n}\right)^n\to 1$.⌋

1°.269 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$. ⌈**R:** Divergentă.⌋

1°.270 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{\sqrt{1-\cos(\pi/n)}}{n\cdot\ln(n+1)}$. ⌈**R:** Convergentă.⌋

1°.271 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{\sqrt{n+1}\cdot\ln n}{(n^2+4)\sqrt[3]{3+\ln n}}$. ⌈**R:** Convergentă.⌋

1°.272 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)\sqrt{\ln n}$. ⌈**R:** Convergentă.⌋

1°.273 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\left(n^{\frac{n^\alpha}{n^2+1}}-1\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

⌈**R:** Convergentă, dacă $\alpha<1$ şi divergentă, dacă $\alpha\geq 1$. **I:** Pentru $\alpha<1$ avem $x_n=a^{\frac{n^\alpha}{n^2+1}}-1=\dfrac{n^\alpha}{n^2+1}\ln n+\dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{n^\alpha}{n^2+1}\ln n\right)^2+\ldots$ şi $\dfrac{n^\alpha}{n^2+1}\ln n<\dfrac{1}{\beta n^{2-\alpha-\beta}}$, $\forall\beta>0$, iar $\alpha\geq 1\Rightarrow x_n>\dfrac{n^\alpha}{n^2+1}-1\not\to 0$.⌋

1°.274 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\cos\left(\pi n^2\ln\dfrac{n}{n+1}\right)$.

⌈**R:** Convergentă. **I:** $x_n=\cos\left(\pi n^2\ln\dfrac{n}{n+1}\right)=(-1)^n\cos\left[n\pi\left(1-n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)\right]$. Funcţia $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ este crescătoare şi satisface condiţia $0<f(1)\leq f(2)\leq\ldots\leq f(n)\leq f(n+1)\leq\ldots\leq\dfrac{1}{2}$, de unde urmează că $1>\cos(\pi f(1))\geq\cos(\pi f(2))\geq\ldots\geq\cos(\pi f(n))\geq\ldots\geq 0=\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\pi f(n))$. Se aplică apoi criteriul lui Leibniz.⌋

1°.275 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n-1}n^\alpha\left(\ln\left(\dfrac{n+2}{n}\right)\right)^\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

⌈**R:** Absolut convergentă, dacă $\beta-\alpha>1$, semiconvergentă, dacă $0<\beta-\alpha\leq 1$ şi divergentă, dacă $\beta-\alpha\leq 0$.⌋

1°.276 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{\alpha^n(-1)^{n-1}}{3^n n^{-3/2}}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$, $\alpha>0$.

⌈**R:** Absolut convergentă, dacă $\alpha\in]0,3[$, semiconvergentă, dacă $\alpha=3$ şi divergentă, dacă $\alpha>3$. **I:** $|x_n|=\left(\dfrac{\alpha}{3}\right)^n\left(\dfrac{\sin(\pi/2n)}{\pi/2n}\right)^2\cdot\dfrac{\pi^2}{2\sqrt{n}}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=\dfrac{\alpha}{3}$. Dacă $\alpha=3$, seria devine $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}2(-1)^{n-1}n^{3/2}\sin^2\dfrac{\pi}{2n}$, iar funcţia $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=x^{3/2}\left(1-\cos\frac{\pi}{x}\right)$ este strict descrescătoare pe $]x_0,+\infty[$, unde x_0 este suficient de mare şi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. Se va folosi apoi criteriul lui Leibniz. Dacă $\alpha>3$, atunci $|x_n|\to+\infty$.⌋

1°.277 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{\ln^\alpha n}{n^\beta}$, $\alpha\in[0,1]$, $\beta\in\mathbb{R}$.

⌈**R:** Convergentă, dacă $\beta>1$ şi divergentă, dacă $\beta\leq 1$.⌋

1°.278 $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Absolut convergentă, dacă $\alpha \geq 0$, semiconvergentă, dacă $\alpha \in]-1,0[$ şi divergentă, dacă $\alpha \leq -1$. **I:** Dacă $\alpha > 0$ găsim $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(\dfrac{|x_n|}{|x_{n+1}|}-1\Big) = 1+\alpha$. Dacă $\alpha \leq -1$, atunci $|x_n| = \dfrac{(-\alpha)(1-\alpha)\ldots(n-\alpha-1)}{n!}$ ≥ 1. Dacă $\alpha \in]-1,0[$, atunci $\Big|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\Big| < 1$. Se arată că $|x_n| \to 0$. Vom determina un şir $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cu proprietăţile $y_n > 0$, $y_n \to 0$, $|x_n| = \dfrac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}$. Avem $y_n = n|x_n| - (n-1)|x_{n-1}| = (-\alpha)|x_{n-1}$ (s-a înlocuit $|x_n|$ cu expresia sa). Dacă notăm $l = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, atunci şi $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = l$ şi deci $l = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-\alpha)(|x_{n-1}| = (-\alpha)l \Rightarrow l = 0$.⌋

1°.279 $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(\dfrac{a}{n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\Big)$, $a \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** Convergentă, dacă $a = 0$ şi divergentă, dacă $a \neq 0$.⌋

1°.280 $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \Big(\sqrt[3]{\ln(2n)} - \sqrt[3]{\ln(2n-1)}\Big)$.

⌈**R:** Divergentă. **I:** Seria este cu termeni pozitivi şi $x_n = \sqrt[3]{\ln(2n)} - \sqrt[3]{\ln(2n-1)} > \dfrac{\ln 2}{3\sqrt[3]{\ln^2(2n)}} =:$ y_n, iar $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n$ este divergentă.⌋

1°.281 $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{[\sqrt{n}]}$, $\big([x]$ -partea întreagă$\big)$.

⌈**R:** Divergentă. **I**: Notăm $k = [\sqrt{n}]$. Atunci $\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{[\sqrt{n}]} = \dfrac{(-1)^k}{k}$, cu $k^2 \leq n < (k+1)^2$. Cum sunt $2k+1$ termeni identici, seria considerată devine $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{[\sqrt{n}]} = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} (-1)^k \dfrac{2k+1}{k}$ - serie divergentă.⌋

1°.282 $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[4]{n^2(n^3+1)}}$. ⌈**R:** Divergentă.⌋

1°.283 $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \int_0^{1/n} \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$. ⌈**R:** Convergentă. **I:** $0 < x_n < \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\sqrt{1/n}}{1+\sqrt[3]{1/n}} < \dfrac{1}{n^{3/2}}$.⌋

1°.284 $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \int_0^{\pi} \sin(n^2x)\mathrm{d}x$. ⌈**R:** Absolut convergentă. **I:** $0 < |x_n| \leq \dfrac{2}{n^2}$.⌋

1°.285 $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \int_{n\pi}^{n\pi+\pi/4} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** Absolut convergentă, dacă $\alpha > 1$, semiconvergentă, dacă $\alpha \in]0,1]$ şi divergentă, dacă $\alpha \leq 0$.⌋

1°.286 Fie $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Presupunem că $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$, $a, b > 0$.

1) Să se discute natura seriei.

2) Să se aplice rezultatul stabilit la punctul 1) pentru a preciza natura seriei

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n+2)}.$$

⌈1) **R:** Convergentă, dacă $b - a > 1$ şi divergentă, dacă $b - a \leq 1$. Se foloseşte criteriul Raabe-Duhamel. 2) Convergentă.⌋

Să se arate că:

1°.287 Dacă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este convergentă, atunci $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n^2$ este convergentă.

⌈**R:** $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ convergentă $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ a. î. $0 < x_n < 1$, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n^2 \leq x_n$, $\forall n \geq n_0$. Deci $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n^2$ este convergentă.⌋

1°.288 Dacă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n^2$ şi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} y_n^2$ sunt convergente, atunci $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n y_n$ este convergentă.

⌈**R:** Avem $|x_n y_n| \leq \frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)$.⌋

1°.289 Dacă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n^2$ este convergentă, atunci $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x_n}{n}$ este convergentă.

⌈**R:** Avem $\frac{|x_n|}{n} \leq \frac{1}{2}\left(x_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$.⌋

1°.290 Dacă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$, $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este convergentă, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (nx_n) = 0$.

⌈**R:** Presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} (nx_n) = l > 0$. Fie $\varepsilon = l/2$. Atunci $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ a. î. $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{l}{2} = l - \varepsilon < nx_n < l + \varepsilon = \frac{3l}{2} \Rightarrow x_n > \frac{l}{2n} \Rightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ divergentă, ceea ce contrazice ipoteza.⌋

1°.291 Dacă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă, iar $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir monoton şi mărginit, atunci $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n x_n$ este convergentă.

⌈**R:** $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şir mărginit $\Rightarrow \exists M > 0$ a. î. $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ convergentă $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ a. î. $\forall n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |\sigma_n| = |S_n - S| < \varepsilon/4M$. Fie $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ descrescător. Atunci $\forall n \geq n(\varepsilon)$ şi $p \in \mathbb{N}^*$, avem $|a_{n+1}x_{n+1} + ... + a_{n+p}x_{n+p}| = |a_{n+1}(\sigma_{n+1} - \sigma_n) + ... + a_{n+p}(\sigma_{n+p} - \sigma_{n+p-1})| = |-a_{n+1}\sigma_n + (a_{n+1} - a_{n+2})\sigma_{n+1} + ... + (a_{n+p-1} - a_{n+p})\sigma_{n+p-1} + a_{n+p}\sigma_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{4M}(|a_{n+1}| + a_{n+1} - a_{n+p} + |a_{n+p}|) < \varepsilon$.⌋

1°.292 Dacă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă, iar $S_n = x_1 + ... + x_n$, atunci şirul $\left(y_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $y_n = \dfrac{S_1 + \ldots + S_n}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este convergent şi are ca limită suma seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$.

⌈**R:** Punând $S_n = x_1 + ... + x_n$, atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent. Dacă $S_n \to S$, atunci şirul de termen general $y_n = \frac{1}{n}(S_1 + ... + S_n) \to S$.⌋

1°.293 Să se arate că dacă seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x_n}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, este convergentă pentru o anumită valoare α_0, atunci ea este convergentă pentru $\forall \alpha \geq \alpha_0$.

⌈**R:** Seria în cauză se scrie astfel $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x_n}{n^\alpha} = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{x_n}{n^{\alpha_0}} \cdot \frac{1}{n^{\alpha - \alpha_0}}$. Aplicăm apoi criteriul lui Abel

$\Big($şirul $\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-\alpha_0}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător şi convergent către zero, iar seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{x_n}{n^{\alpha_0}}$ are şirul sumelor parţiale mărginit$\Big)$.$\rfloor$

1°.294 Să se arate că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} x_n,\ x_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, este convergentă dacă şi numai dacă şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ y_1=1,\ y_{n+1}=y_n+\dfrac{x_n}{y_n},\ \forall n\in\mathbb{N}$, este convergent.

$\lceil$**R:** Din relaţia de recurenţă deducem $y_{n+1}\ge y_n\ge ...\ge y_1=1$ şi deci $0<\dfrac{x_n}{y_n}\le x_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Prin urmare seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{x_n}{y_n}$ este convergentă $\Rightarrow (T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent, unde $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{x_k}{y_k}=\sum\limits_{k=1}^{n}(y_{k+1}-y_k)=y_{n+1}-1\Rightarrow (y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şir convergent. Dacă şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent, $\exists M>0$ astfel încât $1\le y_n\le M,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. Din relaţia de recurenţă găsim $x_n=y_n(y_{n+1}-y_n)$ şi $y_{n+1}\ge y_n\Rightarrow 0<S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=\sum\limits_{k=1}^{n}y_k(y_{k+1}-y_k)\le M\sum\limits_{k=1}^{n}(y_{k+1}-y_k)\le M^2,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ serie convergentă.$\rfloor$

1°.295 Să se arate că dacă seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}|x_{n+1}-x_n|$ este convergentă, atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent. Reciproca este adevărată?

$\lceil$**R:** Pentru $n,p\in\mathbb{N}^*$, avem: $|x_{n+p}-x_n|\le|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+...+|x_{n+1}-x_n|$. Deoarece seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}|x_{n+1}-x_n|$ este convergentă, din inegalitatea precedentă urmează convergenţa şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Reciproca nu este adevărată. Exemplu şirul $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.$\rfloor$

1°.296 Să se arate că dacă seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ este convergentă, atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\cos(x_n)$ este divergentă.

$\lceil$**R:** Dacă seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$ este convergentă, atunci $x_n\to 0\Rightarrow\cos(x_n)\to 1\Rightarrow\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\cos(x_n)$ divergentă.$\rfloor$

1°.297 Fie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n,\ x_n>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, o serie convergentă.

1) Să se afle natura seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{x_n}{x_1+x_2+\ldots+x_n}$.

2) Să se calculeze $y_n=\prod\limits_{k=2}^{n}\left(1-\dfrac{x_k}{x_1+x_2+\ldots+x_k}\right),\ \forall n\ge 2,\ n\in\mathbb{N}^*$.

3) Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}y_n$.

$\lceil$**R:** 1) Convergentă. **I:** Se utilizează al doilea criteriu de comparaţie. 2) $y_n=\dfrac{x_1}{x_1+...+x_n}$. 3) Divergentă. **I:** $y_n\not\to 0$.$\rfloor$

1°.298 Fie şirul $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ definit de relaţia de recurenţă

$$S_1=1,\quad 2S_{n+1}=S_n+\sqrt{S_n^2+a_n},\ n\in\mathbb{N}^*,$$

unde $a_n>0$ este termenul general al unei serii. Să se arate că:

1) $S_{n+1}<S_n+\dfrac{a_n}{4}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

2) Dacă $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}a_n$ este convergentă, atunci şirul $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

3) Este adevărată reciproca afirmaţiei de la punctul 2)?

⌈**R:** 1) Relaţia de recurenţă $\Rightarrow 2S_{n+1}>2S_n\geq 2$ şi $S_{n+1}-S_n=\dfrac{\sqrt{S_n^2+a_n}-S_n}{2}=$ $=\dfrac{a_n}{2\left(\sqrt{S_n^2+a_n}+S_n\right)}<\dfrac{a_n}{4}$. 2) Avem $0\leq 4(S_{n+p}-S_n)=a_{n+p-1}+...+a_n$. 3) Da. **I:** Dacă $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent, atunci el este fundamental. Relaţia de recurenţă $\Rightarrow a_n=4S_{n+1}\left(S_{n+1}-S_n\right)\leq 4M\left(S_{n+1}-S_n\right)\Rightarrow 0<a_{n+1}+...+a_{n+p}\leq 4M\left(S_{n+p+1}-S_{n+1}\right)$.⌋

1°.299 Să se arate că seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}a_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şirul $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $S_n=\int\limits_1^{n+1}a_{[x]}\mathrm{d}x$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, este convergent.

⌈**R:** Avem $S_n=\int_1^2 a_1dx+\ldots+\int_n^{n+1}a_ndx=a_1+\ldots+a_n$.⌋

1°.300 Să se arate că există funcţii $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ astfel încât seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}f(n)$ este convergentă, iar $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^n f(x)\mathrm{d}x$ nu este finită.

⌈**R:** Pentru funcţia $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & \text{dacă } x\in\mathbb{N}^*,\\ 1+\dfrac{1}{x^2}, & \text{dacă } x\in[1,+\infty[\setminus\mathbb{N}^*,\end{cases}$ avem $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}f(n)$ $=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{1}{n^2}$, serie convergentă şi $\int_1^n f(x)dx=n-\dfrac{1}{n}\to\infty$.⌋

1°.301 Să se studieze convergenţa şirului $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_{n+2}=\dfrac{x_{n+1}^2+x_n^2}{x_{n+1}+x_n}$, $x_1>0, x_2>0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

⌈**R:** Notăm $y_n=x_{n+1}-x_n$ şi considerăm seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}x_n$. Se observă că $x_n=x_1+y_1+...+y_{n-1}=x_1+S_{n-1}$. Să presupunem că $x_2>x_1$, adică $y_1>0$. Atunci $y_2=-\dfrac{x_1}{x_1+x_2}\cdot y_1<0$ şi $|y_2|<\dfrac{1}{2}|y_1|$. Se demonstrează, prin inducţie, că $y_{2k}<0$, $y_{2k+1}>0$ şi $|y_n|<\dfrac{1}{n}|y_1|$. Seriei alternate $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}y_n$ i se aplică criteriul lui Leibniz: $|y_{n+1}|=\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\cdot|y_n|<|y_n|$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Deci este convergentă. Prin urmare şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent. Dacă $x_2<x_1$ se raţionează analog.⌋

1°.302 Să se arate că produsul seriei convergente $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ cu ea însăşi este o serie divergentă.

⌈**R:** Avem $\Big(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)\cdot\Big(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^{n-1}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k(n+1-k)}}\Big)$. Dar $k(n+1-k)<n^2$, $\forall k=1,...,n$. Prin urmare $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k(n+1-k)}}\geq 1$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.⌋

1°.303 Folosind descompunerea în factori a funcţiei polinomiale $P_n(x)=x^n-1$, să se arate că

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}},\ \forall n>2$$

şi apoi să se stabilească natura seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\sin\dfrac{\pi}{n}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{n}\ldots\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}$

⌈**R:** În identitatea $1+x+...+x^{n-1}=\prod\limits_{k=1}^{n-1}\Big(x-\cos\dfrac{2k\pi}{n}-i\sin\dfrac{2k\pi}{n}\Big)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, pentru $x=1\Rightarrow n=\prod\limits_{k=1}^{n-1}|1-\cos\dfrac{2k\pi}{n}-i\sin\dfrac{2k\pi}{n}|=\prod\limits_{k=1}^{n-1}\Big(2\sin\dfrac{k\pi}{n}\Big)$. Seria în cauză devine $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{n}{2^{n-1}}$, care este convergentă.⌋

1°.304 Într-un con care are raza cercului de bază R şi unghiul la vârf 2α se înscrie o sferă. În spaţiul rămas până la vârf se înscrie o altă sferă, etc. Să se afle suma volumelor acestor sfere când numărul sferelor înscrise tinde la infinit.

⌈**R:** $V=\dfrac{2\pi}{3}\cdot\dfrac{R^3\cos^3\alpha}{(3+\sin^2\alpha)\sin\alpha}$.⌋

1°.305 Fie $a>0<b$. Să se arate că:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n}{a+nb}=\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}\mathrm{d}t.$$

⌈**R:** $\alpha>0\Rightarrow\int_0^1 x^{\alpha+k-1}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\alpha+k}$, $\forall k\in\mathbb{N}\Rightarrow\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{(-1)^k}{\alpha+k}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k\int_0^1 x^{\alpha+k-1}\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}[1-(-x)^n]\mathrm{d}x$. Dar $0<\int_0^1\dfrac{x^{\alpha+n-1}}{1+x}\mathrm{d}x\leq\int_0^1 x^{\alpha+n-1}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\alpha+n}\to 0\Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\alpha+n}=\int_0^1\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x$. Luând $\alpha=a/b$ şi făcând schimbarea de variabilă $x=t^b$, se obţine rezultatul cerut.⌋

Utilizând rezultatul de mai sus, să se arate că:

1°.306 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2.$ ⌈**R:** Se ia $a=b=1$.⌋

1°.307 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\dfrac{\pi}{4}.$ ⌈**R:** Se ia $a=1$ şi $b=2$.⌋

1°.308 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{3n-2}=\dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}+\ln 2\Big).$ ⌈**R:** Se ia $a=1$ şi $b=3$.⌋

1°.309 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{3n-1}=\dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2\Big).$ ⌈**R:** Luăm $a=2$ şi $b=3$.⌋

Să se calculeze sumele seriilor:

1°.310 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$. ⌈**R:** e.⌋

1°.311 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$. ⌈**R:** $2e$.⌋

1°.312 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$. ⌈**R:** $5e$.⌋

1°.313 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$. ⌈**R:** 1.⌋

1°.314 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. ⌈**R:** $\ln 2$.⌋

1°.315 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$.

⌈**R:** $2\ln 2-1$. **I:** Se observă că $x_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+(-1)^n\frac{1}{n+1}$.⌋

Aproximaţi sumele seriilor de mai jos, cu erorile specificate:

1°.316 $\displaystyle\frac{1}{3\cdot 2!}-\frac{1}{5\cdot 3!}+\frac{1}{7\cdot 4!}-\frac{1}{9\cdot 5!}+\ldots;\quad |E|\le 0,001.$

⌈**R:** Pentru serii alternate, eroarea $E_n=S-S_n$ satisface condiţia $|E_n|<|x_{n+1}|$. Dacă punem condiţia ca $|x_{n+1}|\le 10^{-3}$, atunci $|E_n|<10^{-3}$. Din inegalitatea $|x_{n+1}|\le 10^{-3}\Rightarrow n\ge 3$. Deci $S\approx S_3$.⌋

1°.317 $\displaystyle 1-\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1}{2^4\cdot 4!}-\frac{1}{2^6\cdot 6!}+\ldots;\quad |E|\le 0,00005.$

⌈**R:** $n\ge 3; S\approx S_3$.⌋

1°.318 $\displaystyle \frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\ldots;\quad |E|\le 0,00001.$

⌈**R:** $n\ge 4; S\approx S_4$.⌋

1°.319 Să se găsească marginea superioară a erorii de aproximare $E_6=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}-S_6$.

⌈**R:** $E_6=\displaystyle\sum_{n=7}^{\infty}\frac{3^n}{n!}=\frac{3^7}{7!}\Big(1+\frac{3}{8}+\frac{3^2}{8\cdot 9}+\ldots\Big)<\frac{3^7}{7!}\cdot\frac{1}{1-3/8}=\frac{8\cdot 3^7}{5\cdot 7!}=\frac{243}{350}$.⌋

1°.320 Să se găseasc primul termen din şirul sumelor parţiale care aproximează seria $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\cos^2(n\pi/4)}{3^n}$ cu o eroare mai mică decât $0,01$.

⌈**R:** Deoarece $0\le x_n\le\rho^n=\frac{1}{3^n}$, atunci $E_n\le\frac{\rho^{n+1}}{1-\rho}=\frac{1}{2\cdot 3^n}$. Din condiţia $E_n<0,01\Rightarrow n=4$.⌋

1°.321 Care este eroarea aproximării sumei seriei $\displaystyle\sum_{n\ge 3}\frac{1}{n^2-4}$ cu suma primilor 15 termeni?

⌈**R:** Să obsrvăm că $S_n=\frac{1}{4}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\Big)-\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}\Big)\Rightarrow E_n=\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}\Big)$. Pentru $n=15\Rightarrow E_{15}=\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}\Big)$.⌋

1°.322 Fie $S(\alpha)$ suma seriei $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha>1$.

1) Ştiind că $\int\limits_1^n f_\alpha(x)\mathrm{d}x \le S_n(\alpha) \le 1+\int\limits_1^n f_\alpha(x)\mathrm{d}x$, unde $f_\alpha:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$, $f_\alpha(x)=\frac{1}{x^\alpha}$, să se arate că

$$\frac{1}{\alpha-1}\le S(\alpha)\le\frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

2) Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, avem

$$S(\alpha)=S_n(\alpha)+E_n(\alpha),\ \forall n\in\mathbb{N}^*,$$

unde $S_n(\alpha)=\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}$, $0\le E_n(\alpha)\le\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

⌈**R:** 1) Din relaţia $F_\alpha(n)=\int_1^n\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha-1}\Big(1-\frac{1}{n^{\alpha-1}}\Big)\to\frac{1}{\alpha-1}$ rezultă dubla inegalitate. 2) $E_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)^\alpha}$. Din inegalitatea $\frac{1}{(n+k)^\alpha}\le\int_{n+k-1}^{n+k}\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$, deducem că $E_n\le\lim\limits_{m\to\infty}\int_n^m\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.⌋

1°.323 Graficul unei funcţii f este o linie poligonală care uneşte succesiv punctele $(0,0),(1,1),(2,0),(3,-\frac{1}{3}),(4,0),(5,\frac{1}{5}),(6,0),(7,-\frac{1}{7}),\ldots$ Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^n f(x)\mathrm{d}x$ cu o eroare mai mică decât $0,1$.

⌈**R:** Se observă că $\int_0^{2n}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x+\ldots+\int_{2n-2}^{2b}f(x)\mathrm{d}x=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2n}f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$. Întrucât seria din membrul drept este alternată, avem $|E_n|<\frac{1}{2n+1}\le\frac{1}{10}\Rightarrow n\ge5$. Aşadar $S=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{2n}f(x)\mathrm{d}x\approx S_5=\frac{263}{315}$.⌋

1°.324 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{n^n}{(a+1)(2a+1)\ldots(na+1)}$, $a>0$.

⌈**Soluţie:** Seria este cu termeni pozitivi. Avem $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n\frac{n+1}{(n+1)a+1}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{e}{a}$. Din consecinţa 5 a criteriului raportului rezultă: seria este convergentă dacă $a>e$ şi divergentă dacă $a\in]0,e[$. În cazul $a=e$ seria devine $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{n^n}{(e+1)(2e+1)\ldots(ne+1)}$. Vom calcula $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}n\Big(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\Big)=\lim\limits_{n\to\infty}n\Big[\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n\frac{(n+1)e+1}{n+1}-1\Big]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)^n\Big(e+\frac{1}{n+1}\Big)-1}{\frac{1}{n+1}}$. Pentru a calcula această limită, vom considera funcţia $\varphi:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$, $\varphi(x)=\frac{(1-x)^{\frac{1}{x}-1}(e+x)-1}{x}$. Să calculăm $\lambda_1=\lim\limits_{x\to0}\varphi(x)$. Vom aplica regula lui l'Hospital. Găsim $\lambda_1=\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}-1}\Big[1-\frac{(e+x)\big(\ln(1-x)+x\big)}{x^2}\Big]=\frac{1}{e}\Big[1-e\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}\Big]$. Aplicând iarăşi regula lui l'Hospital, obţinem

$\lambda_1 = \dfrac{2+e}{2e} < 1$. Ţinând seama că $\varphi(\dfrac{1}{n+1}) = \dfrac{\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n\left(e+\dfrac{1}{n+1}\right)-1}{\dfrac{1}{n+1}}$, folosind teorema de echivalenţă de la limite de funcţii, avem $\lambda = \lambda_1$. Prin urmare seria este divergentă (consecinţa 7).⌋

1°.325 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n!\cdot\frac{a^n}{n^n}$, $a \in \mathbb{R}$.

⌈**Soluţie:** Avem $|x_n| = n!.\dfrac{|a|^n}{n^n}$ şi $\dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = |a|\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \to \dfrac{|a|}{e}$.

Dacă $a \in]-e, e[$ atunci seria în cauză este absolut convergentă.

Dacă $|a| > e$, atunci seria este divergentă ($|x_{n+1}| > |x_n|$ de la un anumit $n_0 \in \mathbb{N}^*$).

Rămân de analizat cazurile $a = \pm e$.

Pentru $a = \pm e$ obţinem $\dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = e\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n > 1$, rezultă că $x_n \not\to 0$. Deci seria este divergentă (nu este îndeplinită condiţia necesară de convergenţă).⌋

1°.326 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\right)^2$.

⌈**R:** Divergentă. **I:** Seria este cu termeni pozitivi. Aplicăm teorem 17 (criteriul Raabe-Duhamel): $n\left[\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1\right]=\dfrac{4n^2+3n}{4n^2+4n+1}<1$.⌋

1°.327 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}\right)^3$.

⌈**R:** Divergentă. **I:** Seria este cu termeni pozitivi. Aplicăm teorem 17 (criteriul Raabe-Duhamel): $n\left[\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1\right]=\dfrac{27n^3+27n^2+7n}{27n^3+27n^2+9n+1}<1$.⌋

1°.328 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}{2\cdot 6\cdot 10\ldots(4n-2)}\right)^4$.

⌈**R:** Divergentă. **I:** Seria este cu termeni pozitivi. Aplicăm teorem 18 (criteriul Gauss): $\dfrac{x_n}{x_{n+1}} = \left(\dfrac{4n+2}{4n+1}\right)^4 = \left(1+\dfrac{1}{4n+1}\right)^4 = 1+\dfrac{4}{4n+1}+\dfrac{6}{(4n+1)^2}+\dfrac{4}{(4n+1)^3}+\dfrac{1}{(4n+1)^4} = 1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{\beta_n}{n^2}$. unde $\beta_n = \dfrac{n(2n-1)}{(4n+1)^2}+\dfrac{4n^2}{(4n+1)^3}+\dfrac{n^2}{(4n+1)^4} \to \dfrac{1}{8}$ (şir mărginit).⌋

§2. Serii în $(\mathbb{C}, |\cdot|)$

Să se studieze convergenţa seriilor de numere complexe:

2°.1 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} i^n$.

⌈**R:** Divergentă. **I:** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = \sum_{m\in\mathbb{N}^*}(-1)^m$ şi $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n = \sum_{m\in\mathbb{N}^*}(-1)^{m-1}$ sunt serii divergente.⌋

2°.2 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{i^n}{n}$.

⌈**R:** Convergentă. **I:** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = \sum_{m\in\mathbb{N}^*}(-1)^m\frac{1}{2m}$ şi $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n = \sum_{m\in\mathbb{N}^*}(-1)^{m-1}\frac{1}{2m-1}$ sunt serii alternate convergente.⌋

2°.3 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{i^n}{\ln(n+1)}$.

⌈**R:** Convergentă. **I:** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{i^n}{\ln(n+1)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{\ln(2k+1)} + i \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k-1}}{\ln(2k)}$.⌋

2°.4 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{i^n}{n^2}$. ⌈**R:** Absolut convergentă. **I:** $\displaystyle\frac{|i^n|}{n^2} = \frac{1}{n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.⌋

2°.5 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$.

⌈**R:** Convergentă. **I:** $\displaystyle\frac{1}{(n+i)\sqrt{n}} = \frac{n-i}{(n^2+1)\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.⌋

2°.6 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(3+i)^n}$. ⌈**R:** Absolut convergentă.⌋

2°.7 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n(2i-1)^n}{3^n}$. ⌈**R:** Absolut convergentă.⌋

2°.8 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n(2+i)^n}{2^n}$.

⌈**R:** Divergentă. **I:** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n(2+i)^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{5^n}\big(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)\big)}{2^n} \neq 0$.⌋

2°.9 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n + i^n}{n}$. ⌈**R:** Convergentă.⌋

2°.10 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{e^{in\alpha}}{n}$, $\alpha \in]0, 2\pi[$.

⌈**R:** Convergentă. **I:** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(n\alpha)}{n}$ şi $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin(n\alpha)}{n}$.⌋

2°.11 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{n} + \frac{i}{n^2}\right)$.

⌈**R:** Divergentă. **I:** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ şi $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n = \sum_{m\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$. Prima serie este divergentă.⌋

2°.12 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{i+\sqrt{n}}$.

⌈**R:** Divergentă. **I:** $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} x_n = \sum_{m\in\mathbb{N}^*} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ şi $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} y_n = \sum_{m\in\mathbb{N}^*} \frac{-1}{n+1}$, iar ambele serii sunt divergente.⌋

2°.13 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{5^n + 2^n i}{10^n}$. ⌈**R:** Convergentă.⌋

2°.14 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^i}{n^2+1}$, ($n^i := e^{i\ln n}$-determinarea principală). ⌈**R:** Absolut convergentă.⌋

2°.15 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(ni)^\alpha}{n^4+1}$, ($i^\alpha$- determinarea principală).

⌈**R:** Absolut convergentă, dacă $\alpha < 3$ şi divergentă, dacă $\alpha \geq 3$.⌋

Să se arate că:

2°.16 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2},\ \theta \in \mathbb{R},\ |r| < 1.$

⌈**R:** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n \big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} = \frac{1}{1 - re^{i\theta}} = \frac{1 - r\cos\theta + i\,r\sin\theta}{1 - 2\cos\theta + r^2}.$⌋

2°.17 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \sin(n\theta) = \frac{r\sin\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2},\ \theta \in \mathbb{R},\ |r| < 1.$ ⌈**R:** Vezi **2°.16**⌋

2°.18 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!} = e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta),\ \theta \in \mathbb{R}.$

⌈**R:** Avem $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{e^{i\theta}} = e^{\cos\theta + i\sin\theta} = e^{\cos\theta}\left[\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta)\right].$⌋

2°.19 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} = e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta),\ \theta \in \mathbb{R}.$ ⌈**R:** Vezi **2°.18**⌋

2°.20 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)!} = \sin(\cos\theta)\mathrm{ch}\,(\sin\theta),\ \theta \in \mathbb{R}.$

⌈**R:** În egalitatea $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin\lambda$ vom pune $\lambda = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$⌋

2°.21 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(2n+1)\theta}{(2n+1)!} = \mathrm{sh}\,(\sin\theta)\cos(\cos\theta),\ \theta \in \mathbb{R}.$ ⌈**R:** Vezi **2°.20**⌋

2°.22 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n\theta)}{(2n)!} = -1 + \cos(\cos\theta)\mathrm{ch}\,(\sin\theta),\ \theta \in \mathbb{R}.$

⌈**R:** În egalitatea $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = \cos\lambda$ vom pune $\lambda = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$⌋

2°.23 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(2n\theta)}{(2n)!} = \sin(\cos\theta)\mathrm{sh}\,(\sin\theta),\ \theta \in \mathbb{R}.$ ⌈**R:** Vezi **2°.22**⌋

2°.24 În electrotehnică, un semnal periodic se exprimă uzual printr-o serie trigonometrică. Se spune că s-a efectuat sinteza semnalului dacă s-a găsit suma seriei date. Pentru ce valori ale parametrului q se poate face sinteza semnalului periodic exprimat prin:

$$(1^\circ)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} q^n \cdot \cos(n\alpha), \qquad (2^\circ)\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} q^n \cdot \sin(n\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}?$$

⌈**R:** Dacă $|q| < 1$, seriile sunt convergente şi se aplică exerciţiile 2°.16 şi 2°.17, iar dacă $|q| \geq 1$, seriile sunt divergente.⌋

Să se determine valorile parametrului $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât seriile care urmează să fie convergente:

2°.25 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{-\alpha} e^{in}.$ ⌈**R:** $\alpha > 0.$⌋

2°.26 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{-\alpha} e^{\pi i/n}.$ ⌈**R:** $\alpha > 1.$⌋

2°.27 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(n^2+1)^{-\alpha}(e^{\pi i/n}-1)$. ⌈**R:** $\alpha>0$.⌋

2°.28 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{n!}\,i^n$. ⌈**R:** $\alpha<1$.⌋

2°.29 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{\big(\ln(n^2+1)\big)^{\alpha}}{n}\,i^n$. ⌈**R:** $\alpha\in\mathbb{R}$.⌋

2°.30 $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}2^{-n/2}(1+i)^n\Big(\ln\big(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4n}\big)\Big)^{\alpha}$. ⌈**R:** $\alpha<0$.⌋

2°.31 Să se arate că dacă seriile $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}z_n$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}|w_{n+1}-w_n|$, $z_n,\ w_n\in\mathbb{C}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, sunt convergente, atunci seria $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}z_nw_n$ este convergentă.

⌈**R:** Fie $\sigma_{n,n+p}:=z_{n+1}+\ldots+z_{n+p}$. Deoarece seria este convergentă, atunci şirul $\left(\sigma_{n,n+p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent către zero, $\forall p\in\mathbb{N}^*$, deci este mărginit $\Rightarrow$ $\exists M>0$ astfel încât $|\sigma_{n,n+p}|\le M$, $\forall n,p\in\mathbb{N}^*$. Fie $n,p\in\mathbb{N}^*$. Avem $z_{n+1}=\sigma_{n,n+1},\ldots,z_{n+k}=\sigma_{n,n+k}-\sigma_{n,n+k-1}\Rightarrow|z_{n+1}w_{n+1}+\ldots+z_{n+p}w_{n+p}|=|(w_{n+1}-w_{n+2})\sigma_{n,n+1}+\ldots+(w_{n+p-1}-w_{n+p})\sigma_{n,n+p-1}+w_{n+p}\sigma_{n,n+p}|\le M\big(|w_{n+1}-w_{n+2}|+\ldots+|w_{n+p-1}-w_{n+p}|\big)+|w_{n+p}\sigma_{n,n+p}|$. Fie $\varepsilon>0$. Din ipoteză, $\exists n(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $n\ge n(\varepsilon)$ şi $\Rightarrow$ $|w_{n+p}\sigma_{n,n+p}|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ şi $|w_{n+1}-w_{n+2}|+\ldots+|w_{n+p-1}-w_{n+p}|<\dfrac{\varepsilon}{2M}\Rightarrow|z_{n+1}w_{n+1}+\ldots+z_{n+p}w_{n+p}|<\varepsilon$.⌋

Cap. 5. STUDIUL FUNCŢIILOR

§ 5.1 Limite de funcţii

Fie (X,d), (Y,d_1) spaţii metrice, τ_X topologia metrică pe X, τ_Y topologia metrică pe Y.

Definiţia 1. *Fie $\emptyset \neq A \subset X$, $x^\circ \in A'$ şi $f : A \to Y$. Elementul $l \in Y$ se numeşte limita funcţiei f în punctul x° dacă şi numai dacă pentru orice $U \in \mathcal{V}(l)$, există $V_U \in \mathcal{V}(x^\circ)$ astfel încât $x \in A \cap V_U \setminus \{x^\circ\} \Rightarrow f(x) \in U$ $\Big(f(A \cap V_U \setminus \{x^\circ\}) \subset U\Big)$.*

Se notează
$$l = \lim_{x \to x^\circ} f(x) \text{ sau } (f(x) \to l \text{ când } x \to x^\circ).$$

Definiţia 2. *Vom spune că funcţia f are limită în punctul $x^\circ \in A'$ dacă şi numai dacă există $l \in Y$ astfel încât $l = \lim\limits_{x \to x^\circ} f(x)$.*

Consecinţa 1. *Elementul $l \in Y$ nu este limita funcţiei f în punctul x° dacă şi numai dacă există $U_0 \in \mathcal{V}(l)$ astfel încât pentru orice $V \in \mathcal{V}(x^\circ)$, există $x_V \in A \cap V \setminus \{x^\circ\}$ cu proprietatea că $f(x_V) \notin U_0$.*

Notăm $f(x) \not\to l$ când $x \to x^\circ$.

Teorema 1. (**Condiţii echivalente**) *Fie $\emptyset \neq A \subset X$, $x^\circ \in A'$, $f : A \to Y$ şi $l \in Y$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
1° $\quad l = \lim\limits_{x \to x^\circ} f(x)$;
2° $\quad \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât* $x \in A \setminus \{x^\circ\}$ *cu* $d(x, x^\circ) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d_1(f(x), l) < \varepsilon$.
3° $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x_n A \setminus \{x^\circ\} \forall n \in \mathbb{N}^*$, *cu* $x_n \to x^\circ \Rightarrow f(x_n) \to l$.

Teorema 2. *Fie $\emptyset \neq A \subset X$, $x^\circ \in A'$, $f : A \to Y$. Dacă funcţia f are limită în punctul x°, atunci limita este unică.*

Teorema 3. (**Criteriu**) *Fie $\emptyset \neq A \subset X$, $x^\circ \in A'$, $f : A \to Y$ şi $\varphi : A \to \mathbb{R}_+$. Presupunem că:*
1° $\quad$ *există* $l \in Y$ *astfel încât* $d_1(f(x), l) \leq \varphi(x)$, $\forall x \in A$;
2° $\quad \lim\limits_{x \to x^\circ} \varphi(x) = 0$.
Atunci $\lim\limits_{x \to x^\circ} f(x) = l$.

Teorema 4. *Fie $\emptyset \neq A \subset X, x^\circ \in A'$, $f : A \to Y$. Dacă funcţia f are limită în punctul x°, atunci $\exists V_0 \in \mathcal{V}(x^\circ)$ astfel încât $f|_{(A \cap V_0) \setminus \{x^\circ\}}$ este mărginită.*

Teorema 5. *Fie (X,d) un spaţiu metric, $(Y, \|\cdot\|)$ un* **K** *-spaţiu normat, $\emptyset \neq A \subset X$, $x^\circ \in A'$, $f : A \to Y$.*
1° *Dacă* $\lim\limits_{x \to x^\circ} f(x) = l$, *atunci* $\lim\limits_{x \to x^\circ} \|f(x)\| = \|l\|$.
2° *Dacă* $\lim\limits_{x \to x^\circ} \|f(x)\| = 0$, *atunci* $\lim\limits_{x \to x^\circ} f(x) = 0_Y$.
3° *Dacă* $\lim\limits_{x \to x^\circ} f(x) = l \neq 0_Y$, *atunci* $\exists V_0 \in \mathcal{V}(x^\circ)$ *astfel încât* $f(x) \neq 0_Y$, $\forall x \in A \cap V_0 \setminus \{x^\circ\}$.

Teorema 6. *Fie (X,d) un spaţiu metric, $(Y,\|\cdot\|)$ un $\mathbf{K}$ -spaţiu normat, $\emptyset \neq A \subset X$, $x^\circ \in A'$, $f,g : A \to Y$. Presupunem că există $l_1 = \lim\limits_{x\to x^\circ} f(x)$ şi $l_2 = \lim\limits_{x\to x^\circ} g(x)$. Atunci, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$, funcţia $\alpha f + \beta g : A \to Y$ are limită în punctul x° şi are loc egalitatea*

$$\lim_{x\to x^\circ} \big(\alpha f + \beta g\big)(x) = \alpha l_1 + \beta l_2 = \alpha \lim_{x\to x^\circ} f(x) + \beta \lim_{x\to x^\circ} g(x).$$

Teorema 7. *Fie (X,d) un spaţiu metric, $(Y,\|\cdot\|)$ un $\mathbf{K}$ -spaţiu normat, $\emptyset \neq A \subset X$, $x^\circ \in A'$, $f : A \to Y$ şi $\varphi : A \to \mathbf{K}$. Presupunem că există $l = \lim\limits_{x\to x^\circ} f(x)$ şi $\alpha = \lim\limits_{x\to x^\circ} \varphi(x)$. Atunci funcţia $\varphi \cdot f : A \to Y$ are limită în punctul x° şi are loc egalitatea*

$$\lim_{x\to x^\circ} \big(\varphi \cdot f\big)(x) = \alpha \cdot l = \lim_{x\to x^\circ} \varphi(x) \cdot \lim_{x\to x^\circ} f(x).$$

Teorema 8. *Fie $(X,d), (Y,d_1), (Z,d_2)$ spaţii metrice, $A \subset X$, $x^\circ \in A'$, $B \subset Y$, $y^\circ \in B'$, $f : A \to B$, $g : B \to Z$. Presupunem că:*

1° $y^\circ = \lim\limits_{x\to x^\circ} f(x)$;

2° $f(x) \neq y^\circ$, $\forall x \in A \setminus \{x^\circ\}$;

3° $\lim\limits_{y\to y^\circ} g(y) = l$.

Atunci funcţia compusă $g \circ f : A \to Z$ are limită în punctul x° şi are loc egalitatea

$$\lim_{x\to x^\circ} \big(g \circ f\big)(x) = \lim_{x\to x^\circ} g\big(f(x)\big) = \lim_{y\to y^\circ} g(y) = l.$$

Teorema 9. *Fie (X,d) un spaţiu metric, $\emptyset \neq A \subset X$, $x^\circ \in A'$, $f,g : A \to \mathbb{R}$. Presupunem că:*

1° $\lim\limits_{x\to x^\circ} f(x) = 0$;

2° *g este funcţie mărginită pe o vecinătate a lui x°.*

Atunci $\lim\limits_{x\to x^\circ} \big(f \cdot g\big)(x) := \lim\limits_{x\to x^\circ} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Teorema 10. *Fie (X,d) un spaţiu metric, (Y,d_1) un spaţiu metric complet, $\emptyset \neq A \subset X$, $x^\circ \in A'$, $f : A \to Y$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1° *există $l \in Y$ astfel încât $l = \lim\limits_{x\to x^\circ} f(x)$;*

2° $\forall \varepsilon > 0, \exists V_\varepsilon \in \mathcal{V}(x^\circ)$ *astfel încât* $x', x'' \in (A \cap V_\varepsilon) \setminus \{x^\circ\} \Rightarrow d_1(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$.

Teorema 11. *Fie $\emptyset \neq A \subset X$, $x^\circ \in A'$, $f = f_1 + i f_2 : A \to \mathbb{C}$, $l = l_1 + i l_2 \in \mathbb{C}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1° $l = \lim\limits_{x\to x^\circ} f(x)$ *(relativ la metrica din $\mathbb{C}$)*;

2° $l_k = \lim\limits_{x\to x^\circ} f_k(x)$, $k = 1,2$ *(relativ la metrica din $\mathbb{R}$)*;

Teorema 12. *Fie $\emptyset \neq A \subset X$, $x^\circ \in A'$, $f = (f_1, f_2, ..., f_m) : A \to \mathbb{R}^m$, $l = (l_1, l_2, ..., l_m) \in \mathbb{R}^m$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1° $l = \lim\limits_{x\to x^\circ} f(x)$ *(relativ la metrica din $\mathbb{R}^m$)*;

2° $l_k = \lim\limits_{x\to x^\circ} f_k(x)$, $k \in \{1, ..., m\}$ *(relativ la metrica din $\mathbb{R}$)*.

Definiţia 3. *Fie* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n, x^\circ = (x_1^\circ, ..., x_n^\circ) \in A'$, $f : A \to Y$, (Y,d) *spaţiu metric.*

Notăm

$$A_k = pr_k A = \{x_k \in \mathbb{R} / \exists x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n \in \mathbb{R} \text{ a.î.} (x_1, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, ..., x_n) \in A\}.$$

Presupunem că:

1) $x_k^\circ \in A_k$, $\forall k \in \{1, ..., n\}$;

2) *există limitele iterate succesive*

$$\lim_{x_{\sigma(n)} \to x^\circ_{\sigma(n)}} \left[... \left(\lim_{x_{\sigma(1)} \to x^\circ_{\sigma(1)}} f(x_1, ..., x_n) \right) \right] = l_\sigma,$$

unde $\sigma \in S_n$ *- mulţimea permutărilor mulţimii* $\{1, ..., n\}$.

Elementul l_σ *se numeşte limită iterată.*

Teorema 13. *Fie* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$, (Y,d) *spaţiu metric,* $x^\circ \in A'$ *şi* $f : A \to Y$. *Dacă funcţia* f *are limita* l *în punctul* x° *şi dacă există o limită iterată* l_σ, *cu* $\sigma \in S_n$, *atunci* $l = l_\sigma$.

Consecinţa 2. *Fie* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n, (Y,d)$ *spaţiu metric,* $x^\circ \in A'$, $f : A \to Y$. *Dacă* $\exists \sigma, \tau \in S_n$ *astfel încât funcţia* f *admite limitele iterate* l_σ *şi* l_τ *în punctul* x° *şi dacă* $l_\sigma \neq l_\tau$, *atunci funcţia în cauză nu are limită în punctul* x°.

§ 5.2. Continuitate

Fie (X,d), (Y,d_1) spaţii metrice, τ_X, τ_Y topologiile metrice, $\mathcal{F}_X, \mathcal{F}_Y$ familiile de mulţimi închise în X, respectiv în Y.

Definiţia 4. *Fie* $\emptyset \neq A \subset X$, $f : A \to Y$ *şi* $x^\circ \in A$. *Funcţia* f *se numeşte continuă în punctul* x° *dacă şi numai dacă pentru orice* $U \in \mathcal{V}(f(x^\circ))$, *există* $V_U \in \mathcal{V}(x^\circ)$ *astfel încât* $x \in A \cap V_U \Rightarrow f(x) \in U$ $(f(A \cap V_U) \subset U)$.

Observaţia 1. *Dacă* $x^\circ \in A \cap A'$, *atunci* f *este continuă în punctul* x° *dacă şi numai dacă există* $\lim\limits_{x \to x^\circ} f(x)$ *şi este egală cu* $f(x^\circ)$.

Observaţia 2. *Fie* $f : A \subset X \to Y$. *Dacă* $x^\circ \in A$ *este punct izolat, atunci* f *este continuă în punctul* x°.

Definiţia 5. *Funcţia* $f : A \to Y$ *se numeşte continuă (pe* A*) dacă şi numai dacă este continuă în fiecare punct din* A.

Teorema 14. *Fie* $\emptyset \neq A \subset X$, $f : A \to Y$ *şi* $x^\circ \in A$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1° f *este continuă în* x°;

2° $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât* $x \in A$ *cu* $d(x, x^\circ) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d_1(f(x), f(x^\circ)) < \varepsilon$.

3° $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x_n \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \to x^\circ \Rightarrow f(x_n) \to f(x^\circ)$.

Teorema 15. *Fie $f : X \to Y$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
1° *f este continuă (pe A);*
2° $\forall D \in \tau_Y \Rightarrow f^{-1}(D) \in \tau_X$;
3° $\forall F \in \mathcal{F}_Y \Rightarrow f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_X$.

Teorema 16. *Fie $(X, d), (Y, d_1), (Z, d_2)$ spaţii metrice, $A \subset X, B \subset Y$, $f : A \to B$, $g : B \to Z$, $x^\circ \in A$, $y^\circ = f(x^\circ) \in B$. Dacă f este continuă în punctul x° şi dacă g este continuă în punctul y°, atunci funcţia compusă $g \circ f : A \to Z$ este continuă în punctul x°.*

Definiţia 6. *Aplicaţia $f : X \to Y$ se numeşte homeomorfism dacă şi numai dacă:*
1° *f este bijectivă;*
2° *f şi f^{-1} sunt continue (pe X, respectiv pe Y).*

Teorema 17. *Fie (X, d) spaţiu metric, $(Y, \|\cdot\|)$ $\mathbf{K}$ -spaţiu normat, $\emptyset \neq A \subset X$, $f, g : A \to Y$, $x^\circ \in A$, $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$. Dacă funcţiile f şi g sunt continue în punctul x°, atunci funcţia $\alpha f + \beta g : A \to Y$ este continuă în x°.*

Teorema 18. *Fie (X, d) spaţiu metric, $(Y, \|\cdot\|)$ $\mathbf{K}$ -spaţiu normat, $\emptyset \neq A \subset X$, $x^\circ \in A$, $f : A \to Y$ continuă în x°. Sunt adevărate afirmaţiile:*
1° *există $V_0 \in \mathcal{V}(x^\circ)$ astfel încât $f|_{A \cap V_0}$ este mărginită;*
2° *funcţia $\|f(\cdot)\| : A \to \mathbb{R}$ este continuă în x°;*
3° *dacă $f(x^\circ) \neq 0_Y$, atunci există $V_0 \in \mathcal{V}(x^\circ)$ astfel încât $f(x) \neq 0_Y$, $\forall x \in A \cap V_0$.*

Consecinţa 3. *Dacă funcţia $f : A \subset X \to \mathbb{R}$ este continuă în punctul $x^\circ \in A$ şi $f(x^\circ) > 0$ $[f(x^\circ) < 0]$, atunci există $V_0 \in \mathcal{V}(x^\circ)$ astfel încât $f(x) > 0$ $[f(x) < 0]$, $\forall x \in A \cap V_0$.*

Teorema 19. *Fie $f = f_1 + i f_2 : A \subset X \to \mathbb{C}$ şi $x^\circ \in A$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
1° *f este continuă în punctul x° (relativ la metrica din $\mathbb{C}$);*
2° *f_1 şi f_2 sunt continue în punctul x° (relativ la metrica din $\mathbb{R}$).*

Teorema 20. *Fie $f = (f_1, ..., f_m) : A \subset X \to \mathbb{R}^m$ $(m > 1)$ şi $x^\circ \in A$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
1° *f este continuă în x° (relativ la metrica din $\mathbb{R}^m$);*
2° *f_k este continuă în x° (relativ la metrica din $\mathbb{R}$), $\forall k \in \{1, ..., m\}$.*

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to Y$, $x^\circ = (x_1^\circ, ..., x_n^\circ) \in A$. Definim

$$A_k(x^\circ) = \{x_k \in \mathbb{R} / (x_1^\circ, ... x_{k-1}^\circ, x_k, x_{k+1}^\circ, ..., x_n^\circ) \in A\}$$

şi $f^k : A_k(x^\circ) \to Y$,

$$f^k(x_k) := f(x_1^\circ, ... x_{k-1}^\circ, x_k, x_{k+1}^\circ, ..., x_n^\circ),\ k \in \{1, ..., n\}.$$

Funcţiile f^k se numesc funcţiile parţiale ale funcţiei f în punctul x°.

Definiţia 7. *Funcţia $f : A \to Y$ se numeşte continuă parţial în raport cu variabila x_k în punctul x° dacă şi numai dacă funcţia parţială $f^k : A_k(x^\circ) \to Y$ este continuă în punctul x_k°.*

Teorema 21. *Fie* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to Y$ *şi* $x^\circ \in A$. *Dacă* f *este continuă în punctul* x°, *atunci* f *este continuă parţial în raport cu fiecare variabilă* x_k *în punctul* x°.

Definiţia 8. *Fie* $(X,d),(Y,d_1)$ *spaţii metrice,* $\emptyset \neq A \subset X$, $x^\circ \in A' \setminus A$ *şi* $f : A \to Y$. *Presupunem că există* $l = \lim\limits_{x \to x^\circ} f(x)$. *Funcţia* $g : A \cup \{x^\circ\} \to Y$,

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in A, \\ l, & \text{dacă } x = x^\circ, \end{cases}$$

se numeşte prelungirea prin continuitate a funcţiei f *la mulţimea* $A \cup \{x^\circ\}$.

Definiţia 9. *Fie* $(X,d),(Y,d_1)$ *spaţii metrice,* $\emptyset \neq A \subset X$ *şi* $f : A \to Y$. *Presupunem că există* $A_1, ..., A_n \in \tau_X$ $(n \geq 2)$ *astfel încât*

$$\overline{A} = \overline{A}_1 \cup ... \cup \overline{A}_n,$$

cu $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ *şi funcţiile* $f_1, ..., f_n : X \to Y$ *continue astfel încât*

$$f|_{A_k} = f_k|_{A_k} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f_k(x),\ \forall x \in A_k,\ k = 1, ..., n.$$

În acest caz funcţia f *se numeşte continuă pe porţiuni.*

Definiţia 10. *Fie* $(X,d),(Y,d_1)$ *spaţii metrice,* $\emptyset \neq A \subset X$ *şi* $f : A \to Y$. *Funcţia* f *se numeşte continuă uniform (pe* A*) dacă şi numai dacă* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât* $\forall x', x'' \in A$ *cu* $d(x', x'') < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d_1(f(x'), f(x'') < \varepsilon$.

Consecinţa 4. *Funcţia* $f : A \subset X \to Y$ *nu este continuă uniform (pe* A*) dacă şi numai dacă* $\exists \varepsilon_0 > 0$ *cu proprietatea că* $\forall \delta > 0$, $\exists x'_\delta, x''_\delta \in A$ *cu* $d(x'_\delta, x''_\delta) < \delta$ *pentru care avem* $d_1(f(x'_\delta), f(x''_\delta)) \geq \varepsilon_0$.

Propoziţia 1. *Dacă* $f : A \subset X \to Y$ *este continuă uniform, atunci* f *este continuă.*

Observaţia 3. *Reciproca afirmaţiei, în general, nu este adevărată.*

Definiţia 11. *Fie* $(X,d),(Y,d_1)$ *spaţii metrice,* $\emptyset \neq A \subset X$ *şi* $f : A \to Y$. *Funcţia* f *se numeşte lipschitziană (se zice că satisface condiţia lui* **Lipschitz***) dacă şi numai dacă* $\exists M > 0$ *astfel încât*

$$d_1(f(x'), f(x'')) \leq M \cdot d(x', x''),\ \forall x', x'' \in A.$$

Observaţia 4. *Orice contracţie este funcţie lipschitziană.*

Propoziţia 2. *Dacă funcţia* $f : A \subset X \to Y$ *este lipschitziană, atunci* f *este continuă uniform.*

Teorema 22. *Fie* $(X,d),(Y,d_1)$ *spaţii metrice,* $A \subset X$ *compactă şi* $f : A \to Y$ *continuă. Atunci* f *este continuă uniform.*

Teorema 23. *Fie* $(X,d),(Y,d_1)$ *spaţii metrice,* $A \subset X$ *compactă şi* $f : X \to Y$ *continuă. Atunci* $f(A)$ *este compactă.*

Teorema 24. *Fie (X, d) spaţiu metric, $A \subset X$ compactă şi $f : A \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci f este mărginită şi îşi atinge marginile.*

Teorema 25. *Fie $(X, d), (Y, d_1)$ spaţii metrice, $A \subset X$ conexă şi $f : X \to Y$ continuă. Atunci $f(A)$ este conexă.*

Consecinţa 5. (**Teorema lui Weierstrass**) *Fie (X, d) spaţiu metric, $A \subset X$ compactă şi conexă, $f : X \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci $f(A)$ este interval închis şi mărginit.*
În plus, pentru orice $\mu \in [\underline{f}, \overline{f}]$, există $\xi \in A$ astfel încât $\mu = f(\xi)$.

Definiţia 12. *Fie (X, d) spaţiu metric, $f : X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ şi $x^\circ \in X$. Funcţia f se numeşte inferior [superior] semicontinuă în punctul x° dacă şi numai dacă pentru orice $a < f(x^\circ)$ $[b > f(x^\circ)]$, există $V_a \in \mathcal{V}(x^\circ)$ $[V_b \in \mathcal{V}(x^\circ)]$ astfel încât $x \in V_a$ $[x \in V_b] \Rightarrow f(x) > a$ $[f(x) < b]$. Funcţia f se numeşte inferior [superior] semicontinuă pe X dacă şi numai dacă f este inferior [superior] semicontinuă în fiecare punct din $x \in X$.*

Teorema 26. *Fie (X, d) spaţiu metric, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ şi $x^\circ \in X$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
1° *f este inferior [superior] semicontinuă în punctul x°;*
2° $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, x_n \in X, \forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \to x^\circ \Rightarrow f(x^\circ) \leq \varliminf_{n\to\infty} f(x_n)$ $[f(x^\circ) \geq \varlimsup_{n\to\infty} f(x_n)]$.

Definiţia 13. *Fie $f : [a, b] \to Y$, $(Y, \|\cdot\|)$ spaţiu Banach. Funcţia f se numeşte absolut continuă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall]a_i, b_i[\subset [a, b],]a_i, b_i[\cap]a_j, b_j[= \emptyset, i \neq j, i, j = 1, ..., p$ cu $\sum_{i=1}^{p} (b_i - a_i) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \sum_{i=1}^{p} \|f(b_i) - f(a_i)\| < \varepsilon$.*

EXERCIŢII

§ 5.1. Limite de funcţii

5.1.1. Limite de funcţii cu valori reale

5.1.1.1. Funcţii care au limită

Folosind definiţia, să se arate că:
1°.1 $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$.

⌈**R:** $d(f(x), f(a)) = |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = \dfrac{|x-a|}{\sqrt[n]{x^{n-1}} + \sqrt[n]{x^{n-2}a} + ... + \sqrt[n]{a^{n-1}}} \to 0$, când $x \to a$.⌋

1°.2 $\lim_{x\to a} \ln x = \ln a$, $a > 0$.

⌈**R:** Fie $V = \left]\dfrac{a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right[\in \mathcal{V}(a)$. Pentru orice $x \in V$ avem $|\ln x - \ln a| < \dfrac{2}{a}|x - a| \to 0$, când $x \to a$ (conform teoremei creşterilor finite).⌋

1°.3 $\lim_{x\to a} e^x = e^a$, $a \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** Fie $V =]\alpha, \beta[\in \mathcal{V}(a)$ şi $x \in V \Rightarrow |e^x - e^a| \leq e^\beta |x - a| \to 0$, când $x \to a$.⌋

1°.4 $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$, $a \in \mathbb{R}$. ⌈**R:** $|\sin x - \sin a| \leq |x - a| \to 0$.⌋

1°.5 $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a,\ a\in\mathbb{R}$. ⌈**R:** $|\cos x-\cos a|\le|x-a|\to 0.$⌋

1°.6 $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}a,\ a\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi+\dfrac{\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\}$.

⌈**R:** Fie $V\in\mathcal{V}(a)$ şi $x\in V\Rightarrow|\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a|=\dfrac{1}{\cos^2 c}|x-a|\le M\cdot|x-a|\to 0$, unde $M=\max\{\dfrac{1}{\cos^2 x};\ x\in V\}$.⌋

1°.7 $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}a,\ a\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$.

⌈**R:** Fie $V\in\mathcal{V}(a)$ şi $x\in V\Rightarrow|\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}a|=\dfrac{1}{\sin^2 c}|x-a|\le M\cdot|x-a|\to 0$, unde $M=\max\{\dfrac{1}{\sin^2 x};\ x\in V\}$.⌋

1°.8 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$.

⌈**R:** Fie $V\in\mathcal{V}(0)\subset\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ şi $x\in V$. Dacă $x>0\Rightarrow\sin x<x<\operatorname{tg}x\Rightarrow 1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}\Rightarrow\dfrac{x}{\sin x}\to 1$, când $x\searrow 0$. Dacă $x<0\Rightarrow\operatorname{tg}x<x<\sin x\Rightarrow 1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}\Rightarrow\dfrac{x}{\sin x}\to 1$ când $x\nearrow 0$. Prin urmare $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$.⌋

1°.9 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{x}=\alpha$. ⌈**R:** Avem $\dfrac{\sin\alpha x}{x}=\alpha\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}\to\alpha\neq 0$, când $x\to 0$.⌋

1°.10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=1$. ⌈**R:** Avem $\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\to 1$, când $x\to 0$.⌋

1°.11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha x}{x}=\alpha$. ⌈**R:** Avem $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha x}{x}=\dfrac{\sin\alpha x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha x}\to\alpha\neq 0$. când $x\to 0$.⌋

1°.12 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$. ⌈**R:** $\arcsin x=u\Leftrightarrow x=\sin u\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\sin u}=1.$⌋

1°.13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\alpha x}{x}=\alpha$. ⌈**R:** $\lim\limits_{x\to 0}\alpha\dfrac{\arcsin\alpha x}{\alpha x}=\alpha\neq 0.$⌋

1°.14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$. ⌈**R:** $\operatorname{arctg}x=u\Leftrightarrow x=\operatorname{tg}u\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\operatorname{tg}u}=1.$⌋

1°.15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x}=\alpha$. ⌈**R:** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x}=\alpha\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}\alpha}{\alpha x}=\alpha\neq 0.$⌋

1°.16 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

⌈**R:** Afirmaţia rezultă din egalitatea $\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]\to\ln e=1.$⌋

1°.17 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

⌈**R:** Avem $e^x-1=u>0\Rightarrow x=\ln(1+u)$. Deci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\ln(1+u)}=1.$⌋

1°.18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0$.

⌈**R:** Avem $a^x=e^{x\ln a}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=(\ln a)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}=\ln a.$⌋

1°.19 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}=e^a$.

⌈**R:** Are loc egalitatea $\dfrac{e^x-e^a}{x-a}=e^a\cdot\dfrac{e^{x-a}-1}{x-a}\to e^a$, când $x\to a$.⌋

1°.20 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln|x|-\ln|a|}{x-a}=\dfrac{1}{a},\ a\neq 0$.

⌈**R:** Avem $\dfrac{\ln|x|-\ln|a|}{x-a}=\dfrac{\ln\left|\frac{x}{a}\right|}{x-a}=\dfrac{\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)}{x-a}=\dfrac{1}{a}\ln\left(\left(1+\dfrac{x-a}{a}\right)^{\frac{a}{x-a}}\right)\to\dfrac{1}{a}$.⌋

1°.21 $\lim\limits_{x\searrow 0} x\cdot\ln x=0.$

⌈**R:** Avem: $|x\cdot\ln x| = x\cdot\left|\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| = 2x\cdot\left|\ln\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)\right| \le 2\sqrt{x}\to 0$. (s-a folosit inegalitatea $\ln u<u$, $\forall u>0$. Se poate folosi şi regula lui l'Hospital pentru a calcula $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$.⌋

1°.22 $\lim\limits_{x\searrow 0} x^x=1.$ ⌈**R:** Deoarece $x^x=e^{x\cdot\ln x}$, rezultă $x^x\to e^0=1$.⌋

1°.23 $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0.$ ⌈**R:** $\left|x\cdot\sin\dfrac{1}{x}-0\right|\le|x|$.⌋

1°.24 $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\cos\dfrac{1}{x^2}=0.$ ⌈**R:** $|x\cdot\cos\dfrac{1}{x^2}|\le|x|$.⌋

1°.25 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-1/x^2}}{x}=0.$ ⌈**R:** Din $e^{\frac{1}{x^2}}>\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow e^{-\frac{1}{x^2}}<x^2\Rightarrow\left|\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\right|<|x|$.⌋

1°.26 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{x^2}{y}=\dfrac{1}{2}.$

⌈**R:** Fie $V=[0,2]\times[1,3]\in\mathcal{V}((1,2))$ şi $(x,y)\in V$. Avem $d_1\Big(f(x,y),\dfrac{1}{2}\Big)=\dfrac{|2(x^2-1)-(y-2)|}{2y}\le\dfrac{1}{2}\Big[2(x+1)|x-1|+|y-2|\Big]\le 3\big[|x-1|+|y-2|\big]\le 6\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=6\cdot d\big((x,y),(1,2)\big)$. Fie $\varepsilon>0$. Alegând $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/6$, atunci $\forall(x,y)\in V$ cu $d\big((x,y),(1,2)\big)<\delta(\varepsilon)$ avem $d_1\Big(f(x,y),\dfrac{1}{2}\Big)<\varepsilon$.⌋

1°.27 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-2)}\dfrac{x^2}{xy+1}=-1.$

⌈**R:** Fie $V=\left[\dfrac{4}{5},\dfrac{6}{5}\right]\times\left[-\dfrac{11}{5},-\dfrac{9}{5}\right]\in\mathcal{V}((1,-2))$ şi $(x,y)\in V$. Obţinem $d_1\big(f(x,y),-1\big)=\left|\dfrac{x^2}{xy+1}+1\right|=\dfrac{|(x-1)^2+(2+y)x|}{|xy+1|}\le\dfrac{(x+1)|x-1|+x|y+2|}{|xy+1|}\le 10\cdot d\big((x,y),(1,-2)\big)$, deoarece $x<x+1\le 11/5$ şi $\dfrac{1}{|xy+1|}\le\dfrac{25}{11}$ pe V.⌋

1°.28 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\cdot\cos\dfrac{1}{y}=0.$

⌈**R:** $|f(x,y)-0|\le|x|$.⌋

1°.29 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}=0.$

⌈**R:** Fie $V=B_1\big((0,0)\big)\in\mathcal{V}((0,0))$. Pentru $(x,y)\in V\Rightarrow e^{x^2+y^2}\le e\Rightarrow 0\le f(x,y)\le e(x^2+y^2)\to 0$, când $(x,y)\to(0,0)$.⌋

1°.30 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=0.$

⌈**R:** $(x^2+y^2)e^{-(x+y)}<\dfrac{6}{x+y}$.⌋

1°.31 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2+y^2}=0.$

⌈**R:** $0\le f(x,y)\le\dfrac{\pi}{2}(x^2+y^2)$.⌋

1°.32 $\lim\limits_{x\to 0_{\mathbb{R}^n}}\|x\|_2^{-2}e^{-1/\|x\|_2}=0$, $x=(x_1,...x_n)\in\mathbb{R}^n$.

⌈**R:** Ţinând seama de inegalitatea $e^{\lambda}>\dfrac{\lambda^3}{6}$, $\forall\lambda>0\ \Rightarrow\ 0<f(x)<6\cdot\|x\|_2\to 0$ când $x\to 0_{\mathbb{R}^n}$.⌋

Să se calculeze limitele următoare:

1°.33 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

⌈**R:** $l = 2$.⌋

1°.34 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x|y|^{\alpha+1}}{x^2+y^2}$, unde $\alpha > 0$.

⌈**R:** $l = 0$. **I:** Funcţia $\varphi(x,y) = \dfrac{x|y|}{x^2+y^2}$ este mărginită, iar funcţia $|y|^\alpha \to 0$. Deci $f(x,y) \to 0$.⌋

1°.35 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

⌈**R:** $l = 0$. **I:** $x^2+y^2 \geq 2|xy| \Rightarrow \dfrac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2}$. Deci $0 \leq \dfrac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2} \leq \dfrac{|xy|}{2(\sqrt{1+x^2y^2}+1)}$ $\to 0$.⌋

1°.36 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$.

⌈**R:** $l = 0$. **I:** $0 \leq \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = |x|\dfrac{|x|}{|x|+|y|} + |y|\dfrac{|y|}{|x|+|y|} \leq (|x|+|y|) \to 0$.⌋

1°.37 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y\cdot\sin^2(2x)}{x^2+3y^2}$.

⌈**R:** $l = 0$. **I:** $0 \leq \dfrac{|y\cdot\sin^2(2x)|}{x^2+3y^2} \leq \dfrac{4x^2|y|}{x^2+3y^2} \to 0$.⌋

1°.38 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)\mathrm{tg}\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

⌈**R:** Nu există. **I:** Pentru şirurile $\left(\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $\left(\left(\dfrac{1}{n},-\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in mbN^*}$, care converg către $(0,0)$, şirurile de valori corespunzătoare au limite diferite.⌋

1°.39 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

⌈**R:** $l = 0$.⌋

1°.40 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

⌈**R:** $l = 0$. **I:** $0 \leq \dfrac{|\sin(x^3+y^3)|}{x^2+y^2} \leq \dfrac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \to 0$.⌋

1°.41 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}$.

⌈**R:** $l = 0$. **I:** $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{x^2+y^2}{\sin[(x^2+y^2)/2]}\Big)^2 \cdot \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} \to 0$.⌋

1°.42 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+2y^2)^{x^2y}$.

⌈**R:** $l = 1$. **I:** Se folosesc limitele: $u^u \to 1$, când $u \to 0_+$ şi $\dfrac{x^2y}{x^2+2y^2} \to 0$ când $(x,y) \to (0,0)$).⌋

1°.43 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2|y|)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

⌈**R:** $l = 1$. **I:** $f(x,y) = 1$, dacă $\big(x = 0$ sau $y = 0$ şi $(x,y) \neq (0,0)\big)$ şi $f(x,y) =$ $= \left(\left(1+x^2|y|\right)^{1/(x^2|y|)}\right)^{\frac{x^2|y|}{x^2+y^2}}$, dacă $x \neq 0$ şi $y \neq 0$.⌋

1°.44 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y^2 \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

⌈**R:** $l = 0$. **I:** $f(x,y) = \dfrac{y^2}{2(x^2+y^2)} \cdot \ln\left((x^2+y^2)^{x^2+y^2}\right)$.⌋

1°.45 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$. ⌈**R:** $l = 0$. **I:** $|f(x,y)| \le \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$.⌋

1°.46 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-1/(x^2+y^2)}}{x^6+y^6}$.

⌈**R:** $l = 0$. **I:** Avem $e^{\lambda} > \dfrac{\lambda^k}{k!}$, $\forall \lambda > 0$ şi $\forall k \in \mathbb{N}$, iar $x^4+y^4 \ge 2x^2y^2 \Rightarrow x^6+y^6 \ge \dfrac{1}{4}(x^2+y^2)^3$. Deci $0 < f(x,y) < \dfrac{4!(x^2+y^2)^4}{x^6+y^6} \le 96(x^2+y^2) \to 0$.⌋

1°.47 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \sin\frac{1}{x} \cdot \cos\frac{1}{y}$. ⌈**R:** $l = 0$. **I:** $|f(x,y)| \le |x|$.⌋

1°.48 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x-y) \cdot \sin\frac{1}{x^2} \cdot \sin\frac{1}{y^2}$. ⌈**R:** $l = 0$. **I:** $|f(x,y)| \le |x| + |y|$.⌋

1°.49 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{xy} \cdot \operatorname{tg}\frac{xy}{xy+1}$. ⌈**R:** $l = 1$.⌋

1°.50 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. ⌈**R:** $0 \le |f(x,y)| = \left|xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| \le |xy|$.⌋

1°.51 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 \cdot \ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)$.

⌈**R:** $l = 0$. **I:** $0 \le y^2 \cdot \ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right) \le y^2 \cdot \dfrac{x^2}{y^2} = x^2$. S-a folosint inegalitatea $\ln(1+u) \le u$, $\forall u > -1$.⌋

1°.52 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\left(1+x^2y^2\right)}{x^2+y^2}$.

⌈**R:** $l = 0$ **I:** Să observă că $0 \le f(x,y) = \dfrac{\ln(1+x^2y^2)}{x^2+y^2} \le \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. S-a folosit inegalitatea de la exerciţiul precedent.⌋

1°.53 $\displaystyle\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \frac{2x-3y}{x^2-xy+y^2}$.

⌈**R:** Avem $\displaystyle\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \frac{2x-3y}{x^2-xy+y^2} = \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \frac{2x}{x^2-xy+y^2} - \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \frac{3y}{x^2-xy+y^2} = 0$.⌋

1°.54 $\displaystyle\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to a>0}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$. ⌈**R:** $l = e$.⌋

1°.55 $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{1-\cos(1-\cos(x^2+y^2+z^2))}{(x^2+y^2+z^2)^4}$. ⌈**R:** $l = \frac{1}{8}$.⌋

5.1.1.2. Funcţii care nu au limită

1°.56 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ - nu există.

⌈**R:** $l_d(0) = \displaystyle\lim_{x\searrow 0} f(x) = 1$ şi $l_s(0) = \displaystyle\lim_{x\nearrow 0} f(x) = -1$.⌋

1°.57 $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} - \dfrac{\pi}{2}}{x-1}$ - nu există.

⌈**R:** Din teoarema lui Lagrange, avem $\dfrac{\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}-\dfrac{\pi}{2}}{x-1}=\dfrac{2(1-c^2)}{|1-c^2|(1+c^2)}$, $c\in]x,1[$, dacă $x<1$ şi $c\in]1,x[$, dacă $x>1$. Rezultă $l_s(1)=1$ şi $l_d(1)=-1$.⌋

1°.58 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-|x|}-1}{x}$ - nu există.

⌈**R:** $l_s(0)=\lim\limits_{x\nearrow 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, (vezi ex.1°.12) iar $l_d(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}=-1$.⌋

1°.59 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} y\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ - nu există.

⌈**R:** Şirurile $\left(\left(\dfrac{1}{n\pi},1\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $\left(\left(\dfrac{1}{2n\pi+\pi/2},1\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt convergente către $(0,1)$. Avem $f\left(\dfrac{1}{n\pi},1\right)\to 0$ şi $f\left(\dfrac{1}{2n\pi+\pi/2},1\right)\to 1$.⌋

1°.60 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x-y}{x+y}$ - nu există.

⌈**R:** Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{n},0\right)=1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(0,\dfrac{1}{n}\right)=-1$, atunci $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nu există.⌋

1°.61 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ - nu există.

⌈**R:** Şirurile $\left(\left(\dfrac{1}{n},0\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $\left(\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt convergente către $(0,0)$. Avem $f\left(\dfrac{1}{n},0\right)\to 0$ şi $f\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\to\dfrac{1}{2}$.⌋

1°.62 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ - nu există.

⌈**R:** Şirurile $\left(\left(\dfrac{1}{n},0\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $\left(\left(\dfrac{1}{n^2},\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt convergente către (0,0). Avem $f\left(\dfrac{1}{n},0\right)\to 0$ şi $f\left(\dfrac{1}{n^2},\dfrac{1}{n}\right)\to\dfrac{1}{2}$.⌋

1°.63 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ - nu există.

⌈**R:** Şirurile $\left(\left(\dfrac{1}{n},0\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $\left(\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n^3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt convergente către (0,0). Avem $f\left(\dfrac{1}{n},0\right)\to 0$ şi $f\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n^3}\right)\to\dfrac{1}{2}$. ⌋

1°.64 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ - nu există.

⌈**R:** Şirul $\left(\left(\dfrac{1}{\sqrt{n\pi+\pi/2}},0\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent către $(0,0)$ şi $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n\pi+\pi/2}},0\right)=(-1)^n\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n\pi+\pi/2}},0\right)$ nu există.⌋

1°.65 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2-2x^4y^3}{x^2y^2+(3x-2y)^2}$ - nu există.

⌈**R:** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{dacă } m\neq 3/2,\\ 1, & \text{dacă } m=3/2.\end{cases}$ ⌋

1°.66 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x}{y}e^{y-x}$ - nu există.

⌈**R:** Nu există. **I:** Se consideră şirurile $((n,n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $((n^2,n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.⌋

1°.67 $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x+y}{z}$ - nu există.

⌈**R:** Pentru şirurile $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ şi $\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ convergente către $(0,0,0)$, şirurile de valori corespunzătoare ale funcţiei f au limite diferite.⌋

1°.68 $\lim\limits_{x\to 0_{\mathbb{R}^n}} \dfrac{x_1}{\|x\|_2}$, $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ - nu există.

⌈**R:** Şirurile $\left(\left(\frac{1}{n},0,...,0\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\left(\left(0,\frac{1}{n},0,...,0\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt convergente către $0_{\mathbb{R}^n}=(0,0,0,...,0)$ şi $f\left(\frac{1}{n},0,...,0\right)=1$, $f\left(0,\frac{1}{n},0,...,0\right)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.⌋

5.1.1.3. Limite iterate. Limite după direcţii

Să se calculeze următoarele limite iterate:

1°.69 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$. ⌈**R:** $l=1$.⌋

1°.70 $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$. ⌈**R:** $l=-1$.⌋

1°.71 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} y\cdot\sin\dfrac{1}{x}\cdot\cos\dfrac{1}{y}\right)$. ⌈**R:** $l=0$.⌋

1°.72 $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} y\cdot\sin\dfrac{1}{x}\cdot\cos\dfrac{1}{y}\right)$. ⌈**R:** Nu există.⌋

1°.73 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}(x+y)\cdot\cos\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{y}\right)$. ⌈**R:** Nu există.⌋

1°.74 $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}(x+y)\cdot\cos\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{y}\right)$. ⌈**R:** Nu există.⌋

1°.75 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}(x+y)\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{y}\right)$. ⌈**R:** Nu există.⌋

1°.76 $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}(x+y)\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{y}\right)$. ⌈**R:** $l=0$.⌋

1°.77 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{x}{y}e^{-(x-y)}\right)$. ⌈**R:** $l=+\infty$.⌋

1°.78 $\lim\limits_{y\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{y}e^{-(x-y)}\right)$. ⌈**R:** $l=0$.⌋

Să se calculeze următoarele limite după direcţii:

1°.79 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\dfrac{3xy}{x^2+y^2}$. ⌈**R:** Avem $f(x,mx)=\dfrac{3mx^2}{(1+m^2)x^2}\Rightarrow l=\dfrac{3m}{1+m^2}$.⌋

1°.80 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\dfrac{3x^2y^2}{x^2y^2+(2x+3y)^2}$.

⌈**R:** $l=0$, dacă $m\neq-\frac{2}{3}$ şi $l=3$, dacă $m=-\frac{2}{3}$. **I:** $f(x,mx)=\dfrac{3m^2x^2}{x^2m^2+(2+3m)^2}$. ⌋

1°.81 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\dfrac{2x^3y}{x^6+y^2}$. ⌈**R:** $l=0$. **I:** $f(x,mx)=\dfrac{2x^2m}{x^4+m^2}$.⌋

1°.82 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y=mx}}\dfrac{y}{x}e^{-(x+y)}$.

⌈**R:** Avem $f(x,mx) = me^{-x(1+m)} \Rightarrow l = 0$, dacă $m > -1$, $l = -1$, dacă $m = -1$ şi $l = -\infty$, dacă $m < -1$.⌋

1°.83 $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y=mx}} \dfrac{y}{x}e^{-(x+y)}$.

⌈**R:** Avem $f(x,mx) = me^{-x(1+m)} \Rightarrow l = 0$, dacă $m < -1$ sau dacă $m = 0$, $l = -1$, dacă $m = -1$, $l = +\infty$, dacă $m > 0$ şi $l = -\infty$, dacă $-1 < m < 0$.⌋

1°.84 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} (x+y)\cdot \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\cdot \operatorname{arctg}\dfrac{1}{y}$.

⌈**R:** $l = 0$. **I:** $f(x,mx) = x(1+m)\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{mx}$, $m \neq 0$.⌋

5.1.2. Limite de funcţii cu valori vectoriale

Să se calculeze următoarele limite:

1°.85 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x|y|}{|x|+|y|}, \dfrac{5xy}{x^2+y^2+1}, \dfrac{1-\cos(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}\right)$.

⌈**R:** $l = (0,0,0)$. **I:** $l_1 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|y|}{|x|+|y|}x = 0$; $l_2 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{5xy}{x^2+y^2+1} = 0$; $l_3 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} = 0$.⌋

1°.86 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{(x-y)\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \dfrac{x(y-2)}{\sqrt{x^2+y^2}}, \operatorname{sgn}(x-y)\right)$.

⌈**R:** Nu există. **I:** Pentru şirurile $\left(\left(\dfrac{1}{n},0\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $\left(\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ funcţia are limite diferite.⌋

1°.87 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left((x^2+y^2)\ln(x^2+y^2), (x-y)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2x^2+3y^2}, (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}\right)$.

⌈**R:** $l = (0,0,1)$. **I:** $l_1 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = 0$; $l_2 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x-y)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2x^2+3y^2} = 0$; $l_3 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = 1$.⌋

1°.88 $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\dfrac{xy+yz+zx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{2x-3y}{z}, (x+y+z)\ln(1+|xyz|)\right)$.

⌈**R:** Nu există. **I:** Pentru şirurile $\left(\left(0,0,\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $\left(\left(\dfrac{1}{n},0,\dfrac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ funcţia are limite diferite.⌋

5.1.3. Limite de funcţii cu valori complexe

1°.89 $\lim\limits_{t\to t_0} e^{iat} = \lim\limits_{t\to t_0}\big(\cos(at)+i\sin(at)\big)$, $a\in\mathbb{R}$.

⌈**R:** $l = e^{iat_0}$. **I:** $f_1(t) = Re(f(t)) = \cos(at) \to \cos(at_0)$ şi $f_2(t) = Im(f(t)) = \sin(at) \to \sin(at_0)$.⌋

1°.90 $\lim\limits_{t\to t_0} e^{iat}$, $a\in\mathbb{C}$.

⌈**R:** $l = e^{iat_0}$. **I:** $f(t) = e^{i(a_1+ia_2)t} = e^{-a_2t}\cdot e^{ia_1t} \Rightarrow f_1(t) = Re(f(t)) = e^{-a_2t}\cos(a_1t) \to e^{-a_2t_0}\cos(a_1t_0)$ şi $f_2(t) = Im(f(t)) = e^{-a_2t}\sin(a_1t) \to e^{-a_2t_0}\sin(a_1t_0)$. ⌋

1°.91 $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} \left(1+at\right)^{\frac{1}{t}}$, $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

⌈**R:** $l = e^a$. **I:** Fie $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$ şi $0 < |t|$, astfel încât $|ta| < 1$. Atunci $\theta = \arg(1+at) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}\dfrac{a_2 t}{1+a_1 t}$ şi $|1+at| = \sqrt{(1+a_1t)^2 + (a_2t)^2}$. Deci $(1+at)^{\frac{1}{t}} = e^{i\frac{\operatorname{arctg}\frac{a_2t}{1+a_1t}}{t}}\left(1 + t^2(a_1^2+a_2^2) + 2ta_1\right)^{\frac{1}{2t}} \to e^{ia_2}\cdot e^{a_1} = e^a$.⌋

1°.92 $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\overline{z}}{z}$. ⌈**R:** Nu există. **I:** $\dfrac{\overline{z}}{z} = \dfrac{x-iy}{x+iy} = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - 2i\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.⌋

1°.93 $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z}{\overline{z}}$. ⌈**R:** Nu există. **I:** $\dfrac{z}{\overline{z}} = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + 2i\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.⌋

1°.94 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\cos\dfrac{1}{xy} + i\cdot\sin\dfrac{1}{xy}\right)$.

⌈**R:** $l = 0$. **I:** $|f(x,y)| = \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \Rightarrow f(x,y)\to 0$, când $(x,y)\to(0,0)$.⌋

1°.95 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[(x^2+y^2)^{x^2y^2} + i\cdot\dfrac{y^2\cdot\sin x^2}{x^2+2y^2}\right]$.

⌈**R:** $l = 1$. **I:** $f_1(x,y) = Re(f(x,y)) = (x^2+y^2)^{x^2y^2} \to 1$, $f_2(x,y) = Im(f(x,y)) = \dfrac{y^2\cdot\sin x^2}{x^2+y^2} \to 0$, când $(x,y)\to(0,0)$.⌋

1°.96 $\lim\limits_{z\to z^\circ} \sin(az)$, $a\in\mathbb{C}$.

⌈**R:** $l = \sin(az^\circ)$. **I:** $\sin(az) = \sin(a_1+ia_2)(x+iy) = \sin\left(a_1x - a_2y + i(a_1y+a_2x)\right) = \sin(a_1x - a_2y)\operatorname{ch}(a_1y+a_2x) + i\cos(a_1x-a_2y)\operatorname{sh}(a_1y+a_2x) \to \sin(a_1x^\circ - a_2y^\circ)\operatorname{ch}(a_1y^\circ + a_2x^\circ) + i\cos(a_1x^\circ - a_2y^\circ)\operatorname{sh}(a_1y^\circ+a_2x^\circ) = \sin(az^\circ)$.⌋

1°.97 $\lim\limits_{z\to z^\circ} \cos(az)$, $a\in\mathbb{C}$. ⌈**R:** $l = \cos(az^\circ)$.⌋

1°.98 $\lim\limits_{z\to z^\circ} \operatorname{sh}(az)$, $a\in\mathbb{C}$. ⌈**R:** $l = \operatorname{sh}(az^\circ)$.⌋

1°.99 $\lim\limits_{z\to z^\circ} \operatorname{ch}(az)$, $a\in\mathbb{C}$. ⌈**R:** $l = \operatorname{ch}(az^\circ)$. ⌋

1°.100 $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^4-1}{z-i}$. ⌈**R:** $l = -4i$. **I:** $\dfrac{z^4-1}{z-i} = z^3 + z^2 i + zi^2 + i^3$.⌋

1°.101 $\lim\limits_{z\to z^\circ} \dfrac{z^n - z^{\circ n}}{z - z^\circ}$, $n\in\mathbb{N}^*$. ⌈**R:** $l = nz^{\circ n-1}$. **I:** $\dfrac{z^n - z^{\circ n}}{z-z^\circ} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}z^{\circ k}$.⌋

§ 5.2. Continuitate

5.2.1. Continuitatea funcţiilor $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Folosind definiţia sau teorema de condiţii echivalente, să se studieze continuitatea funcţiilor de mai jos în punctele indicate:

2°.1 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x\in\mathbb{Q}, \\ 0, & \text{dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$ în $x = x^\circ \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** Fie $x^\circ \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x^\circ) = 1$. Există $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, x_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $x_n \to x^\circ \Rightarrow f(x_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq 1 = f(x^\circ)$. Dacă $x^\circ \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, atunci $f(x^\circ) = 0$. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n\in\mathbb{Q}$, $x_n\to x^\circ \Rightarrow f(x_n) = 1$, $\forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq 0 = f(x^\circ)$. Aşadar, f nu este continuă în nici un punct din $\mathbb{R}$.⌋

2°.2 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } x\in\mathbb{Q},\\ -x, & \text{dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$ în $x=x^\circ\in\mathbb{R}$.

⌈**R:** Funcţia este continuă numai în punctul $x^\circ=0$ şi este discontinuă în orice punct $x^\circ\neq 0$. **I:** $|f(x)-f(0)|=|x|\to 0$, când $x\to 0$. Fie $x^\circ\neq 0$. Dacă $x^\circ\in\mathbb{Q}\Rightarrow f(x^\circ)=x^\circ$. $\exists(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $x_n\to x^\circ$. Avem $f(x_n)=-x_n\to -x^\circ$. Deci f nu este continuă în x°. Dacă $x^\circ\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\exists(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n\in\mathbb{Q}$ astfel încât $x_n\to x^\circ$. Avem $f(x_n)=x_n\to x^\circ$, iar $f(x^\circ)=-x^\circ$.⌋

2°.3 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{dacă } x\in\mathbb{Q},\\ x^3, & \text{dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$ în $x=x^\circ\in\mathbb{R}$.

⌈**R:** Funcţia f este continuă numai în punctele $x^\circ=0$ şi $x^1=1$. Dacă $x'\in\mathbb{Q}\setminus\{0,1\}$, atunci $f(x')=x'^2$. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*, x_n\to x'\Rightarrow f(x_n)=x_n^3\to x'^3\neq x'^2=f(x')$. Prin urmare f nu este continuă în punctul x'. Dacă $x'\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\Rightarrow f(x')=x'^3$. Fie acum $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n\in\mathbb{Q},\forall n\in\mathbb{N}^*$, $x_n\to x'\Rightarrow f(x_n)=x_n^2\to x'^2\neq x'^3=f(x')$. Deci $x'\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nu este punct de continuitate.⌋

2°.4 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^3+1, & \text{dacă } x\in\mathbb{Q},\\ x^2+x, & \text{dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$ în $x=x^\circ.\in\mathbb{R}$

⌈**R:** Funcţia f are mulţimea de continuitate $\{-1,1\}$. Orice punct din $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ este de discontinuitate.⌋

2°.5 $f:[a,b]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 1, & \text{dacă } x\in[a,b]\cap\mathbb{Q},\\ 0, & \text{dacă } x\in[a,b]\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$ în $x=x^\circ\in[a,b]$.

⌈**R:** Funcţia nu este continuă în nici un punct $x^\circ\in[a,b]$ (este total discontinuă). **I:** Fie $x^\circ\in[a,b]$. Dacă $x^\circ\in\mathbb{Q}$, atunci $\exists(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n\in[a,b]\setminus\mathbb{Q}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $x_n\to x^\circ$. Avem $f(x_n)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ şi $f(x^\circ)=1$. Deci f nu este continuă în x°. Analog, dacă $x^\circ\in[a,b]\setminus\mathbb{Q}$.⌋

2°.6 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=x$, în punctul $(0,0)$.

⌈**R:** Continuă. **I:** $|f(x,y)-f(0,0)|=|x|\to 0$ când $(x,y)\to(0,0)$.⌋

2°.7 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=y$, în punctul $(0,0)$.

⌈**R:** Continuă. **I:** $|f(x,y)-f(0,0)|=|y|\to 0$ când $(x,y)\to(0,0)$.⌋

2°.8 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=x+y$, în punctul $(0,0)$.

⌈**R:** Continuă. **I:** $|f(x,y)-f(0,0)|\leq|x|+|y|\to 0$ când $(x,y)\to(0,0)$.⌋

2°.9 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, în punctul $(0,0)$.

⌈**R:** Continuă. **I:** $|f(x,y)-f(0,0)|=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ când $(x,y)\to(0,0)$.⌋

2°.10 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0),\end{cases}$ în punctul $(0,0)$.

⌈**R:** Nu este continuă în $(0,0)$. **I:** Funcţia f nu are limită în punctul de acumulare $(0,0)$ (vezi ex. 1°.55).⌋

2°.11 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}, & \text{dacă } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{dacă } (x,y)=(0,0),\end{cases}$ în punctul $(0,0)$.

⌈**R:** Nu este continuă în $(0,0)$. **I:** Funcţia f nu are limită în punctul de acumulare $(0,0)$ (vezi ex. 1°.57). Sau, pentru şirul $\left(\frac{1}{n^3},\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ care converge către $(0,0)$, avem $f\left(\frac{1}{n^3},\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$, iar $f(0,0)=0$.⌋

2°.12 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\begin{cases} 1, & \text{dacă } (x,y)\in A,\\ 0, & \text{dacă } (x,y)\notin A,\end{cases}$ în punctul $(x^\circ,y^\circ)\in\partial A$,

unde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0<y<\max\{x^2,x^3\}\}$.

⌈**R:** Discontinuă pe ∂A. **I:** Dacă $(x^\circ,y^\circ)\in\partial A$, atunci $f(x^\circ,y^\circ)=0$. Fie $(x_n,y_n)\in A$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(x_n,y_n)\to(x^\circ,y^\circ)\Rightarrow 1=f(x_n,y_n)\not\to 0=f(x^\circ,y^\circ)$.⌋

2°.13 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = \|x\|_2,\ $ în $x^\circ \in \mathbb{R}^n,\ n > 1.$

$\lceil$**R:** Continuă. **I:** $\big|\|x\| - \|x^\circ\|\big| \le \|x - x^\circ\| \to 0$, când $x \to x^\circ$.$\rfloor$

Să se studieze continuitatea funcţiilor:

2°.14 $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A, \\ 0, & \text{dacă } x \in [0,1] \setminus A, \end{cases}$

unde $A = \{x \in [0,1] / x = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

$\lceil$**R:** f este continuă în punctele din $[0,1] \setminus A$ şi discontinuă pe A. **I:** Fie $x^\circ \in [0,1] \setminus A$. Atunci există $n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\dfrac{1}{n_0+1} < x^\circ < \dfrac{1}{n_0}$. Dacă $x_n \to x^\circ$, atunci $\exists n_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n \ge n_1 \Rightarrow \frac{1}{n_0+1} < x_n < \frac{1}{n_0} \Rightarrow f(x_n) = 0,\ \forall n \ge n_1$ şi $f(x^\circ) = 0$. Deci f este continuă în punctul x°. Fie $x^\circ \in A \setminus \{1\} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x^\circ = \dfrac{1}{n_0}$. Mulţimea $V_0 = \left]\dfrac{1}{n_0+1}, \dfrac{1}{n_0-1}\right[\in \mathcal{V}(x^\circ)$. Dacă $x_n \to x^\circ$, .$x_n \ne x^\circ$, atunci există $n_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n \ge n_1 \Rightarrow x_n \in V_0 \Rightarrow f(x_n) = 0$ şi $f(x^\circ) = 1$. Deci f nu este continuă în x°. Dacă $x^\circ = 1$ se ia $V_0 = \left]\dfrac{1}{2}, 2\right[$ şi se face un raţionament ca mai sus.$\rfloor$

2°.15 $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = 0 \lor x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{dacă } x = \dfrac{m}{n} \in [0,1],\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^*, \\ & \dfrac{m}{n} - \text{fracţie ireductibilă.} \end{cases}$

$\lceil$**R:** f este continuă pe $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ şi discontinuă pe $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.$\rfloor$

2°.16 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x,y) \ne (0,0), \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

$\lceil$**R:** Continuă. **I:** $\left|xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right| \le |xy| \to 0$ când $(x,y) \to (0,0)$). În orice punct $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ funcţia este continuă deoarece este un produs şi un cât de funcţii continuue.$\rfloor$

2°.17 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x,y) \ne (0,0), \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

$\lceil$**R:** Continuă. **I:** În orice punct $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ funcţia este continuă, iar pentru $(0,0)$ avem $\dfrac{|x^3 + y^3|}{x^2 + y^2} \le \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}|x| + \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}|y| \le |x| + |y| \to 0$, când $(x,y) \to (0,0)$.$\rfloor$

2°.18 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x,y) \ne (0,0), \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

$\lceil$**R:** Continuă. **I:** În orice punct $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ funcţia este continuă, iar pentru $(0,0)$ avem $\dfrac{|\sin(x^3 + y^3)|}{x^2 + y^2} \le \dfrac{|x^3 + y^3|}{x^2 + y^2} \to 0$, când $(x,y) \to (0,0)$.$\rfloor$

2°.19 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2), & \text{dacă } (x,y) \ne (0,0), \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

$\lceil$**R:** Continuă. **I:** $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2) = \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \ln\left(x^2 + y^2\right)^{x^2 + y^2} = 0 = f(0,0)$.$\rfloor$

2°.20 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} x^2\ln(x^2 + y^2), & \text{dacă } (x,y) \ne (0,0), \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

$\lceil$**R:** Continuă. **I:** Pentru $(x,y) \ne (0,0)$, avem $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}\Big[(x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)\Big]$ (adică produsul dintre o funcţie mărginită şi o funcţie care are limita 0 în punctul $(0,0)$).$\rfloor$

2°.21 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{dacă}\quad (x,y)\neq(0,0),\\ \lambda, & \text{dacă}\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$

⌈**R:** Continuă, dacă $\lambda=0$ şi discontinuă în $(0,0)$, dacă $\lambda\neq 0$.⌋

2°.22 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{dacă}\quad (x,y)\neq(0,0),\\ \lambda, & \text{dacă}\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$

⌈**R:** Continuă, dacă $\lambda=0$ şi discontinuă în $(0,0)$, dacă $\lambda\neq 0$.⌋

2°.23 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dacă}\quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{dacă}\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$

⌈**R:** Continuă. **I:** $|f(x,y)|=\dfrac{|\sin(xy)|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\to 0$, când $(x,y)\to(0,0)$.⌋

2°.24 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dacă}\quad (x,y)\in A,\\ 0, & \text{dacă}\quad (x,y)\notin A,\end{cases}$

unde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\cdot y>0\}$.

⌈**R:** Continuă.⌋

2°.25 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}y^2\ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right), & \text{dacă}\quad (x,y)\in\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\}),\\ 0, & \text{dacă}\quad (x,y)\in\mathbb{R}\times\{0\}.\end{cases}$

⌈**R:** Continuă.⌋

2°.26 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\alpha\cdot(x^2+y^2), & \text{dacă}\quad (x,y)\in B_r[(0,0)],\\ \dfrac{\beta}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{dacă}\quad (x,y)\notin B_r[(0,0)],\end{cases}\quad r>0.$

⌈**R:** Continuă, dacă $\beta=\alpha r^3$ şi discontinuă pe $\partial B_r[(0,0)]$, dacă $\beta\neq\alpha r^3$.⌋

2°.27 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}x+y, & \text{dacă}\quad (x,y)\in A,\\ 0, & \text{dacă}\quad (x,y)\notin A,\end{cases}$

unde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/-x^2<y<x^2,\ x>0\}$.

⌈**R:** Continuă pe $(\mathbb{R}^2\setminus\partial A)\cup\{(0,0),(1,-1)\}$ şi discontinuă pe $\partial A\setminus\{(0,0),(1,-1)\}$.⌋

2°.28 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2, & \text{dacă}\quad (x,y)\in B_1((1,0)),\\ 0, & \text{dacă}\quad (x,y)\notin B_1((1,0)).\end{cases}$

⌈**R:** Continuă pe $\big(\mathbb{R}^2\setminus\partial B_1((1,0))\big)\cup\{(0,0)\}$ şi discontinuă pe $\partial B_1((1,0))\setminus\{(0,0)\}$.⌋

2°.29 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\beta(x^2+y^2+z^2), & \text{dacă } (x,y,z)\in B_r((0,0,0)),\\ 0, & \text{dacă } (x,y,z)\notin B_r((0,0,0)),\end{cases}$$

unde $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ r>0$.

⌈**R:** Din ipoteză rezultă că $\alpha=0$. Dacă $\beta\neq 0$, funcţia este continuă pe $\mathbb{R}^3\setminus\partial B_r((0,0,0))$ şi discontinuă pe $\partial B_r((0,0,0))$.⌋

2°.30 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \alpha(x^2+y^2+z^2), & \text{dacă} \quad (x,y,z) \in B_{r_1}(O), \\ \beta, & \text{dacă} \quad (x,y,z) \in B_{r_2}[O] \setminus B_{r_1}(O), \\ \dfrac{\gamma}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, & \text{dacă} \quad (x,y,z) \notin B_{r_2}[O]. \end{cases}$$

unde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $r_2 > r_1 > 0$ şi $O = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$.

⌈**R:** Continuă, dacă $\alpha r_1^2 = \beta$ şi $\gamma = \beta r_2^3$.⌋

2°.31 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \begin{cases} \alpha e^{x+y+z} & \text{dacă} \quad x+y+z < 0, \\ \beta, & \text{dacă} \quad x+y+z \geq 0, \end{cases}$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** Continuă, dacă $\alpha = \beta$.⌋

2°.32 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{1}{x^2+y^2}\right)^{-(x^2+y^2+z^2)}, & \text{dacă} \quad (x,y,z) \in \big(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big) \times \mathbb{R}, \\ \lambda, & \text{dacă} \quad (x,y,z) \in \{(0,0)\} \times \mathbb{R}, \end{cases}$$

unde $\lambda \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** Continuă pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, dacă $\lambda = 0$; $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ nu există.⌋

2°.33 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{x^2+y^2}{z^2}\right)^{x^2/(x^2+y^2+z^2)}, & \text{dacă} \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big), \\ \lambda, & \text{dacă} \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

⌈**R:** Continuă pe $\mathbb{R}^2 \times \big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.⌋

2°.34 $f : [0,3] \cup \{4\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

⌈**R:** Continuă pe $[0,3] \cup \{4\}$. **I:** Din definiţie rezultă că f este continuă în punctele izolate ale domeniului de definiţie.⌋

2°.35 $f :]1,5] \cup \left\{\dfrac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

⌈**R:** Continuă pe domeniul de definiţie. **I:** Din definiţie rezultă că f este continuă în punctele izolate ale domeniului de definiţie al funcţiei.⌋

2°.36 $f : [-1,1] \times [-2,3] \cup \{(2,k^2) \in \mathbb{R}^2 / k = 1, ..., 8\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x + 2y$.

⌈**R:** Continuă pe domeniul de definiţie.⌋

2°.37 $f : B_1[(0,0)] \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 4\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x - y$.

⌈**R:** Continuă pe domeniul de definiţie.⌋

Să se studieze continuitatea parţială a funcţiilor ce urmează în punctele indicate:

2°.38 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy}{x^2+y^2}, & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$ - în punctul $(0,0)$.

⌈**R:** Deoarece $f^1(x) := f(x,0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi $f^2(y) := f(0,y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, ca funcţii constante, sunt continue în $x^\circ = 0$, respectiv $y^\circ = 0$. Rezultă că funcţia f este continuă parţial în raport cu x şi în raport cu y în punctul $(0,0)$. Să remarcăm faptul că f nu este continuă în punctul $(0,0)$.⌋

2°.39 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^3y}{x^6+y^2}, & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$ - în punctul $(0,0)$.

⌈**R:** Deoarece $f^1(x) := f(x,0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi $f^2(y) := f(0,y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, rezultă că f este continuă parţial în rapost cu x şi respectiv în raport cu y în punctul $(0,0)$.⌋

2°.40 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$ - în punctul $(0,0)$.

⌈**R:** Deoarece $f^1(x) := f(x,0) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi $f^2(y) := f(0,y) = \begin{cases} -1, & \text{dacă} \quad y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ 1, & \text{dacă} \quad y = 0, \end{cases}$ rezultă că f este continuă parţial în raport cu x în punctul $(0,0)$, dar nu este continuă parţial în raport cu y în punctul $(0,0)$.⌋

2°.41 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & \text{dacă} \quad y > |x| \\ 0, & \text{dacă} \quad y \leq |x|. \end{cases}$ - în punctul $(0,0)$.

⌈**R:** Continuă parţial în raport cu x şi în raport cu y în punctul $(0,0)$ **I:** Avem $f^1(x) := f(x,0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi $f^2(y) := f(0,y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad y \leq 0, \\ y^2, & \text{dacă} \quad y > 0. \end{cases}$⌋

5.2.2. Continuitatea funcţiilor $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $(m > 1)$

Să se studieze continuitatea funcţiilor de mai jos în punctele indicate:

2°.42 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x+y, y-z)$, în punctul $(0,0,0)$.

⌈**R:** Continuă. **I:** $\|f(x,y,z) - f(0,0,0)\|_2 = \|(x+y, y-x)\|_2 \leq |x+y| + |x-y| \to 0$, când $(x,y,z) \to (0,0,0)$.⌋

2°.43 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^k \cdot \sin(x+y)}{x^2+y^2}, \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \dfrac{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right), & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ (0,1,1), & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

în $(0,0)$ - discuţie după $k \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** Continuă, pentru $k > 1$ şi discontinuă, pentru $k \leq 1$. **I:** Se studiază continuitatea componentelor funcţiei f în punctul $(0,0)$. $f_1(x,y) = \dfrac{x^k \cdot \sin(x+y)}{x^2+y^2} = \dfrac{x \cdot \sin(x+y)}{x^2+y^2} \cdot x^{k-1}$, dacă $(x,y) \neq (0,0)$, pentru $k > 1$ are limită în punctul $(0,0)$ şi limita este egală cu $f_1(0,0) = 0$, iar pentru $k \leq 1$ funcţia nu are limită în $(0,0)$, deci nu este continuă. $f_2(x,y) = \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, dacă $(x,y) \neq (0,0)$, are limita egală cu $1 = f_2(0,0)$ în punctul $(0,0)$, deci este continuă. $f_3(x,y) = \dfrac{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, dacă $(x,y) \neq (0,0)$, are limita egală cu $1 = f_3(0,0)$ în punctul $(0,0)$, deci este continuă. Să remarcăm faptul că punctul $(0,0)$ este punct de acumulare pentru $\mathbb{R}^2$.⌋

Să se studieze continuitatea funcţiilor de mai jos pe domeniile de definiţie:

2°.44 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\cos(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{y^2 \cdot \sin x}{x^2+y^2}\right), & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ (0,0), & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

⌈**R:** Continuă. **I:** Notăm $f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ şi $f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 \cdot \sin x}{x^2+y^2}, & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$ Funcţiile f_1 şi f_2, componentele funcţiei vectoriale f sunt continue pe $\mathbb{R}^2$.⌋

2°.45 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{\ln\left(1+|x|^3+|y|^3|\right)}{2x^2+3y^2}, \dfrac{\sin^3 x}{x^2+y^2}\right), & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ (0,0), & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

⌈**R:** Continuă. **I:** Se procedează ca la exerciţiul precedent.⌋

2°.46 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $y = f(x) \Leftrightarrow y^T = A \cdot x^T$, unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice nesingulară. Să se arate că f este un homeomorfism.

⌈**R:** Vom dovedi, mai întâi că f este o bijecţie. Într-adevăr, dacă $x, x' \in \mathbb{R}^n$ cu $f(x) = f(x') \Leftrightarrow A \cdot x^T = A \cdot x'^T \Rightarrow x = x'$, deoarece matricea A este inversabilă. Deci f este injectivă. Fie $y \in \mathbb{R}^n$. Considerăm elementul $x \in \mathbb{R}^n$, $x^T := A^{-1} \cdot y^T$. Avem $A \cdot x^T = A \cdot (A^{-1} \cdot y^T) = y^T \Leftrightarrow f(x) = y$, adică f este surjecţie. Prin urmare $\exists f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ astfel încât $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$, adică f^{-1} este inversa funcţiei f. Pentru matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, definim $||A||_2 := \Big(\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\Big)^{1/2}$, iar pentru x^T definim $||x^T||_2 := ||x||_2$. Are loc relaţia $||A \cdot x^T||_2 \leq ||A||_2 \cdot ||x||_2$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Fie $x, x'y, y' \in \mathbb{R}^n \Rightarrow ||f(x) - f(x')||_2 = ||A \cdot (x-x')^T||_2 \leq ||A||_2 \cdot ||x - x'||_2$ şi $||f^{-1}(y) - f^{-1}(y') = ||A^{-1} \cdot (y-y')^T||_2 \leq ||A^{-1}||_2 \cdot ||y - y'||_2$, de unde rezultă continuitatea funcţiilor f şi f^{-1}.⌋

5.2.3. Continuitatea funcţiilor cu valori în $\mathbb{C}$

2°.47 $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $f(t) = e^{iat}$, $a \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** Avem $f(t) = \cos(at) + i \cdot \sin(at) \Rightarrow f_1(t) = Re(f(at)) = \cos(at) \wedge f_2(t) = Im(f(t)) = \sin(at)$ funcţii continue pe $[0, 2\pi] \Rightarrow f$ funcţie continuă.⌋

2°.48 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = Re(z)$.

⌈**R:** Funcţie continuă. **I:** Fie $z = x + i \cdot y$, $z^\circ = x^\circ + i \cdot y^\circ \in \mathbb{C} \Rightarrow |f(z) - f(z^\circ)| = |x - x^\circ| \to 0$ când $z \to z^\circ$.⌋

2°.49 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = Im(z)$.

⌈**R:** Funcţie continuă. **I:** Fie $z = x + i \cdot y$, $z^\circ = x^\circ + i \cdot y^\circ \in \mathbb{C} \Rightarrow |f(z) - f(z^\circ)| = |y - y^\circ| \to 0$ când $z \to z^\circ$.⌋

2°.50 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = |z|$.

⌈**R:** Funcţie continuă. **I:** Întrucât $z \to z^\circ \Leftrightarrow (x \to x^\circ \ \wedge y \to y^\circ)$ rezultă $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \to \sqrt{x^{\circ 2} + y^{\circ 2}} = |z^\circ|$. Altfel: continuitatea rezultă din inegalitatea $\big||z| - |z^\circ|\big| \leq |z - z^\circ|$.⌋

2°.51 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ \ f(z)=\overline{z}.$

⌈**R:** Funcţie continuă. **I:** $f(z)=\overline{z}=Re(z)-i\cdot Im(z)\to Re(z^\circ)-i\cdot Im(z^\circ)=f(z^\circ).$⌋

2°.52 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ \ f(z)=z^n.$

⌈**R:** Funcţie continuă. **I:** Fie $z=|z|(\cos\theta+i\cdot\sin\theta), z^\circ=|z^\circ|(\cos\theta_\circ+i\cdot\sin\theta_\circ)\in\mathbb{C}$. Atunci $z\to z^\circ\Leftrightarrow\big(|z|\to|z^\circ|\ \wedge\ \theta\to\theta_\circ\big)\Rightarrow f(z)=|z|^n\big(\cos(n\theta)+i\cdot\sin(n\theta)\big)\to|z^\circ|^n\big(\cos(n\theta_\circ)+i\cdot\sin(n\theta_\circ)\big)=f(z^\circ).$⌋

2°.53 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ \ f(z)=e^{az},\ a\in\mathbb{C}.$

⌈**R:** Funcţie continuă. **I:** Fie $a=a_1+ia_2, z=x+iy\in\mathbb{C}\Rightarrow f(z)=e^{az}=e^{a_1x-a_2y+i\cdot(a_1y+a_2x)}=e^{a_1x-a_2y}\big(\cos(a_1y+a_2x)+i\cdot\sin(a_1y+a_2x)\big)\to e^{a_1x^\circ-a_2y^\circ}\big(\cos(a_1y^\circ+a_2x^\circ)+i\cdot\sin(a_1y^\circ+a_2x^\circ)\big)=f(z^\circ)$, când $z\to z^\circ=x^\circ+iy^\circ$.⌋

2°.54 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ \ f(z)=\cos z.$

⌈**R:** Funcţie continuă. **I:** $f(z)=\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cdot\cos(iy)-\sin x\cdot\sin(iy)=\cos x\cdot\operatorname{ch}y-i\cdot\sin x\cdot\operatorname{sh}y.$⌋

2°.55 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ \ f(z)=\sin z.$

⌈**R:** Funcţie continuă. **I:** $f(z)=\sin(x+iy)=\sin x\cdot\cos(iy)+\sin(iy)\cdot\cos x=\sin x\cdot\operatorname{ch}y+i\cdot\cos x\cdot\operatorname{sh}y.$⌋

2°.56 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ \ f(z)=\operatorname{ch}z.$

⌈**R:** Funcţie continuă. **I:** $f(z)=ch(x+iy)=chx\cdot\cos y+i\cdot\operatorname{sh}x\cdot\sin y.$⌋

2°.57 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ \ f(z)=\operatorname{sh}z.$

⌈**R:** Funcţie continuă. **I:** $f(z)=\operatorname{sh}(x+iy)=\operatorname{sh}x\cos y+i\cdot\operatorname{ch}x\cdot\sin y.$⌋

2°.58 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C},\ \ f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^{x^2y^2}+i\cdot\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}, & \text{dacă}\quad (x,y)\neq(0,0),\\ 1, & \text{dacă}\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$

⌈**R:** Funcţie continuă. **I:**Deoarece $f_1(x,y)=Re(f(x,y))=\begin{cases}(x^2+y^2)^{x^2y^2}, & \text{dacă}\ \ (x,y)\neq(0,0),\\ 1, & \text{dacă}\ \ (x,y)=(0,0),\end{cases}$

şi $f_2(x,y)=Im(f(x,y))=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}, & \text{dacă}\quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{dacă}\quad (x,y)=(0,0),\end{cases}$ sunt funcţii continue, rezultă f funcţie continuă.⌋

5.2.4. Prelungirea prin continuitate

2°.59 Fie $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \ f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$, unde $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/xy=0\}$. Dacă este posibil, să se prelungească f la $D\cup\{(0,0)\}$.

⌈**R:** Deoarece $|f(x,y)|\leq|x+y|\to 0$, când $(x,y)\to(0,0)$, atunci prelungirea prin continuitate este $g:D\cup\{(0,0)\}\to\mathbb{R},\ \ g(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & \text{dacă}\quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{dacă}\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$⌋

2°.60 Fie $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \ f(x,y)=x\cos\dfrac{1}{x}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{y}$, unde $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/xy=0\}$. Dacă este posibil, să se prelungească f la $D\cup\{(0,0)\}$.

⌈**R:** $|f(x,y)|\leq|x|\to 0$, când $(x,y)\to(0,0)$. Deci $g(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & \text{dacă}\ \ (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{dacă}\ \ (x,y)=(0,0).\end{cases}$⌋

2°.61 Fie $f:D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R},\ \ f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Este posibilă prelungirea lui f prin continuitate la $\mathbb{R}^2$?

⌈**R:** Nu. **I:** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ nu există.⌋

2°.62 Fie $f:D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R},\ \ f(x,y)=(x^2+y^2)^\alpha\ln(x^2+y^2)$. Este posibilă prelungirea lui f la $\mathbb{R}^2$? - discuţie după α.

⌈**R:** Pentru $\alpha > 0$ este posibilă prelungirea, iar $g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{dacă} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$
Dacă $\alpha \leq 0$, nu este posibilă prelungirea.⌋

2°.63 Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 < y < 2 + x^4\}$. Să se găsească o prelungire prin continuitate a lui f la $D \cup \{(0,0)\}$.

⌈**R:** Da; $g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{dacă} \quad (x,y) \in D, \\ 0, & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$ ⌋

2°.64 Fie $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sh}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 < y < 1 + \dfrac{1}{4}x^4\}$. Să se găsească o prelungire prin continuitate a lui f la $D \cup \{(0,0)\}$.

⌈**R:** Da; $g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{dacă} \quad (x,y) \in D, \\ 1, & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$ ⌋

2°.65 Fie $f : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y^2 \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{y^2}\right)$.

Dacă este posibil, să se prelungească funcţia f la $\mathbb{R}^2$.

⌈**R:** Da; $g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{dacă} \quad (x,y) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}), \\ 0, & \text{dacă} \quad (x,y) \in \mathbb{R} \times \{0\}. \end{cases}$ **I:** $0 \leq f(x,y) \leq 2y^2 \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{y^2}} =$
$2|y|\sqrt{x^2+y^2} \to 0$, când $(x,y) \to (x^\circ, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$.⌋

2°.66 Fie $f : D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad x \in D \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{dacă} \quad x \in D \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Se poate prelungi f prin continuitate la $\mathbb{R}$?

⌈**R:** Nu. **I:** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nu există.⌋

2°.67 Fie $f : D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă} \quad x \in D \cap \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{dacă} \quad x \in D \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Se poate prelungi f prin continuitate la $\mathbb{R}$?

⌈**R:** Da. **I:** Se poate prelungi prin continuitate în $x^\circ = 0$, deoarece $|f(x)| = |x| \to 0$, când $x \to 0$.⌋

2°.68 Fie $f : D = \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă} \quad x \in D \cap \mathbb{Q}, \\ x^3, & \text{dacă} \quad x \in D \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Se poate prelungi f prin continuitate la $\mathbb{R}$?

⌈**R:** Da; $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă} \quad x \in D, \\ 1, & \text{dacă} \quad x = 1. \end{cases}$ ⌋

2°.69 Fie $f : D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \left(\frac{\ln\left(1 + x^2|y|\right)}{x^2+y^2}, \left(1 + \sin(x^4+y^4)\right)^{\dfrac{1}{x^2+y^2}} \right).$$

Se poate prelungi prin continuitate la $\mathbb{R}^2$?

⌈**R:** Da; $g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{dacă} \quad (x,y) \in D, \\ (0,1), & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$ ⌋

2°.70 Fie $f : D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y) = \left(\frac{\sin\left(x^2 - y^2\right)}{|x| + |y|}, \left(|x| + |y|\right)^{x^2+y^2}, \frac{xy}{\sqrt{2x^2 + 3y^2}} \right).$$

Se poate prelungi prin continuitate la $\mathbb{R}^2$?

⌈**R:** Da; $g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{dacă} \quad (x,y) \in D, \\ (0,1,0), & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$ ⌋

5.2.5. Continuitate uniformă

Să se studieze continuitatea uniformă a funcţiilor:

2°.71 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

⌈**R:** f este continuă uniform. **I:** f este continuă pe compactul $[a, b]$.⌋

2°.72 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

⌈**R:** Nu. **I:** Se consideră şirul $(x_n = \sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Avem $|x_{n+1}-x_n| = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$, când $n \to \infty$. Fie $\delta > 0$. Există $n(\delta) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|x_{n(\delta)+1} - x_{n(\delta)}| = \sqrt{n(\delta)+1} - \sqrt{n(\delta)} < \delta$. Avem $|f(x_{n(\delta)+1}) - f(x_{n(\delta)})| = 1 =: \varepsilon_0$.⌋

2°.73 $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

⌈**R:** f este continuă uniform. **I:** Fie $x, y \in [1, +\infty[$. Avem $|f(x) - f(y)| = |\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}| = \dfrac{|x-y|}{xy} \leq |x - y|$. Fie $\varepsilon > 0$. Alegând $\delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$, dacă $x, y \in [1, +\infty[$ cu $|x - y| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, ceea ce exprimă faptul că f este continuă uniform.⌋

2°.74 $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

⌈**R:** Nu. **I:** Şirul $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent către 0. Fie $\delta > 0$. Atunci $\exists n_\delta \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\dfrac{1}{n_\delta} - \dfrac{1}{n_\delta+1} < \delta$. Dar $|f\Big(\dfrac{1}{n_\delta+1}\Big) - f\Big(\dfrac{1}{n_\delta}\Big)| = 1 =: \varepsilon_0$. Aşadar, există $\varepsilon_0 = 1$ cu proprietatea că pentru orice $\delta > 0$, există $x' = \dfrac{1}{n_\delta}$, $x'' = \dfrac{1}{n_\delta + 1}$ astfel încât $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$, ceea ce înseamnă că f nu este continuă uniform.⌋

2°.75 $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

⌈**R:** Nu. **I:** Se consideră şirul $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi se procedează ca la exemplul precedent.⌋

2°.76 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

⌈**R:** Da. **I:** Afirmaţia rezultă din $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.⌋

2°.77 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2(x + y) - \sin x + \cos y$.

⌈**R:** Da. **I:** Avem $d\big(f(x, y), f(u, v)\big) = |f(x, y) - f(u, v)| = |2(x - u) + 2(y - v) - (\sin x - \sin u) + (\cos y - \cos v)| \leq 2|x - u| + 2|y - v| + |\sin x - \sin u| + |\cos y - \cos v| \leq 3\big(|x - u| + |y - v|\big) \leq 6 \cdot d\big((x, y), (u, v)\big)$, $\forall (x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$.⌋

2°.78 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x - y + z + \operatorname{arctg}(x + y + z) + \sin(y - z)$.

⌈**R:** f este continuă uniform. **I:** $d\big(f(x, y, z) - f(u, v, w)\big) \leq |x-u| + |y-v| + |z-w| + |\operatorname{arctg}(x+y+z) - \operatorname{arctg}(u+v+w)| + |\sin(y-z) - \sin(v-w)| \leq 2|x-u| + 3|y-v| + 3|z-w| \leq 3\big(|x-u| + |y-v| + |z-w|\big)$.⌋

2°.79 $d(\cdot, y) : X \to \mathbb{R}_+$, $\forall y \in X$, unde (X, d) este un spaţiu metric.

⌈**R:** Funcţie continuă uniform. **I:** Deoarece $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y)$ şi $d(x', y) \leq d(x, x') + d(x, y)$, avem $|d(x, y) - d(x', y)| \leq d(x, x')$, $\forall x, x' \in X$. Fie $\varepsilon > 0$. Alegem $\delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$. Atunci, pentru orice $x, x' \in X$ care satisfac condiţia $d(x, x') < \delta(\varepsilon)$, obţinem $|d(x, y) - d(x', y)| < \varepsilon$.⌋

2°.80 $d(x, \cdot) : X \to \mathbb{R}_+$, $\forall x \in X$, unde (X, d) este un spaţiu metric.

⌈**R:** Funcţie continuă uniform. **I:** Procedăm ca la exemplul precedent. Găsim $|d(x, y) - d(x, y')| \leq d(y, y')$, $\forall y, y' \in X$.⌋

2°.81 $d(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}_+$, unde (X, d) este un spaţiu metric, iar $(X \times X, d_1)$ este spaţiul metric produs, cu metrica

$$d_1((x, y), (x', y')) := d(x, x') + d(y, y').$$

⌈**R:** Uniform continuă. **I:** Pentru $\forall (x, y), (x', y') \in X \times X$ avem $|d(x, y) - d(x', y')| \le d(x, x') + d(y, y')$.⌋

2°.82 $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$, unde $(X, \|\cdot\|)$ este un spaţiu normat.

⌈**R:** Continuă uniform. **I:** Pentru $\forall x, x' \in X$ avem $\big|\|x\| - \|x'\|\big| \le \|x - x'\|$.⌋

2°.83 $f : X \times X \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \langle x, y\rangle$, unde $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ este un spaţiu prehilbertian real, iar pe $X \times X$ se consideră metrica $d((x, y), (x', y')) = \|x - x'\| + \|y - y'\|$, cu $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$..

⌈**R:** Nu este continuă uniform. **I:** Fie $x^\circ \in X$ cu $\|x^\circ\| = 1$. Construim şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n = x^\circ\sqrt{n}$. Avem $\|x_{n+1} - x_n\| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$, când $n \to +\infty$. Fie $\delta > 0$. Atunci $\exists n_\delta \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\|x_{n_\delta+1} - x_{n_\delta}\| < \delta$. Avem $|f(x_{n_\delta+1}) - f(x_{n_\delta})| = |\langle x_{n_\delta+1}, x_{n_\delta+1}\rangle - \langle x_{n_\delta}, x_{n_\delta}\rangle| = (n+1) - n = 1 = \varepsilon_0$.⌋

2°.84 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{4}{\pi}(x^2+y^2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{dacă} \quad (x,y) \in B_1[(0,0)] \setminus \{(0,0)\}, \\ 1, & \text{dacă} \quad (x,y) \notin B_1[(0,0)], \end{cases}$$

pe mulţimea $B_2[(1,0)]$.

⌈**R:** Continuă uniform. **I:** Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}^2$, iar mulţimea $B_2[(1,0)]$ este compactă.⌋

2°.85 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \exp\Big(-\dfrac{1}{(\|x\|-1)(2-\|x\|)}\Big), & \text{dacă} \quad \|x\| \in]1,2[, \\ 0, & \text{dacă} \quad \|x\| \notin]1,2[. \end{cases}$$

Să se arate că f este continuă uniform pe mulţimea $B_2[(1,0,...,0)]$.

⌈**R:** Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}^n$, iar mulţimea $B_2[(1,0,...,0)]$ este compactă. Deci f este continuă uniform pe $B_2[(1,0,...,0)]$.⌋

2°.86 Fie $A \subset \mathbb{R}$, $x^\circ \in A'$, $(x^\circ \in \mathbb{R})$ şi $f : A \to \mathbb{R}$ care satisface condiţia $\lim\limits_{x\to x^\circ} f(x) = +\infty$. Să se arate că f nu este continuă uniform pe A. Dacă $x^\circ = +\infty$, afirmaţia rămâne adevărată?

⌈**R:** Deoarece $x^\circ \in A'$, atunci $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n \in A \setminus \{x^\circ\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \to x^\circ$. Să admitem că f este continuă uniform. Rezultă că $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir fundamental în $\mathbb{R}$, deci este mărginit şi se contrazice ipoteza. Dacă $x^\circ = +\infty$, afirmaţia nu mai este adevărată. Exemplu: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ este continuă uniform, iar $f(x) \to +\infty$, când $x \to +\infty$.⌋

2°.87 Fie $(X, d), (Y, d_1)$ spaţii metrice şi $f : A \subset X \to Y$ o aplicaţie continuă uniform. Atunci f transformă şiruri fundamentale din A în şiruri fundamentale în Y.

⌈**R:** Fie $\varepsilon > 0$. Din ipoteză, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $x', x'' \in X$ cu $d(x', x'') < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d_1(f(x'), f(x''))$ $< \varepsilon$. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir fundamental din X. Atunci, pentru $\delta(\varepsilon) > 0$, $\exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \ge n(\varepsilon)$ şi $\forall p \in \mathbb{R} \Rightarrow d(x_{n+p}, x_n) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow d_1(f(x_{n+p}), f(x_n)) < \varepsilon \Rightarrow (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ este şir fundamental în (Y, d_1).⌋

Să se arate că funcţiile de mai jos satisfac condiţia lui Lipschitz (deci sunt continue uniform):

2°.88 $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ b > a > 0,\ \ f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$.

⌈**R:** Fie $x, y \in [a, b]$. Avem $d(f(x) - f(y)) = \left|\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{c^2}\left|\cos\frac{1}{c}\right| \cdot |x - y|$ (am folosit teorema lui Lagrange). Funcţia $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{1}{x^2}\left|\cos\frac{1}{x}\right|$ este mărginită pe $[a, b]$, deoarece $b > a > 0$. Notăm $M = \sup\{\varphi(x);\ x \in [a, b]\}$. In final obţinem $d(f(x), f(y)) \le M \cdot d(x, y),\ \forall x, y \in [a, b]$.⌋

2°.89 $f : [5, +\infty[\to \mathbb{R},\ \ f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$.

⌈**R:** Folosind teorema lui Lagrange, obţinem $d(f(x), f(y)) = \left|\frac{x}{\sqrt{x^2-9}} - \frac{y}{\sqrt{y^2-9}}\right| = \frac{9}{(c^2-9)^{3/2}} \times |x - y| \le \frac{9}{64} \cdot |x - y| = \frac{9}{64} \cdot d(x, y)$.⌋

2°.90 $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R},\ \ f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

⌈**R:** $d\big(f(x, y), f(x', y')\big) = |(x^2 + 4y^2) - (x'^2 + 4y'^2)| \le |(x - x')(x + x')| + 4|(y - y')(y + y')| \le 2|x - x'| + 8|y - y'| \le 10 \cdot d_2\big((x, y), (x', y')\big)$.⌋

2°.91 $f : [-a, a] \times [-1, 1] \to \mathbb{R},\ \ f(x, y) = y^2\cos^2 x + x\cos^2 y\ \ (0 < a < +\infty)$.

⌈**R:** $d\big(f(x, y), f(x', y')\big) = |(y^2\cos^2 x + x\cdot\cos^2 y) - (y'^2\cos^2 x' + x'\cdot\cos^2 y')| \le |(x - x')\cos^2 y| + |(y - y')(y + y')\cos^2 x| + |y'^2(\cos^2 x - \cos^2 x'| + |x'(\cos^2 y - \cos^2 y'| \le |x - x'| + 2|y - y'| + 2|x - x'| + 2a|y - y'| \le (5 + 2a) \cdot d_2((x, y), (x', y'))$.⌋

2°.92 $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R},\ \ f(x, y) = |x|y^2$.

⌈**R:** $d\big(f(x, y), f(x', y')\big) = \big|y^2|x| - y'^2|x'|\big| \le |y^2 - y'^2||x| + |y'^2||x - x'| \le 3d_2((x, y), (x', y'))$.⌋

2°.93 $f : [-a, a] \times [-b, b] \to \mathbb{R},\ \ f(x, y) = y^2 e^{\alpha + x},\ \ (a > 0 < b,\ \alpha \in \mathbb{R}$ - fixat.

⌈**R:** $d\big(f(x, y), f(x', y')\big) = y^2 e^{\alpha}|e^x - e^{x'}| + |y^2 - y'^2|e^{\alpha + x'} \le b^2 e^{\alpha + a}|x - x'| + 2be^{\alpha + a}|y - y'| \le b(b + 2)e^{\alpha + a} d_2((x, y), (x', y'))$.⌋

2°.94 $f(x, \cdot) : [-b, b] \to \mathbb{R},\ \ f(x, y) = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$, unde $A, B, C : [-a, a] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue.

⌈**R:** $d\big(f(x, y), f(x, y')\big) = |A(x)(y^2 - y'^2) + B(x)(y - y')| \le \big(2b|A(x)| + |B(x)|\big)|y - y'| \le L \cdot d(y, y')$, unde $L = \sup\{2b|A(x)| + |B(x)|;\ x \in [-a, a]\}$.⌋

2°.95 $f(t, \cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ f(t, x, y) = (3x + 2t, y - x),\ \forall t \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** $d_2\big(f(t, x, y), f(t, x', y')\big) = ||(3x + 2t, y - x) - (3x' + 2t, y' - x')||_2 = ||(3(x - x'), y - y' + x' - x||_2 \le 3|x - x'| + |(y - y') + (x' - x)| \le 4|x - x'| + |y - y'| \le 5 \cdot d_2((x, y), (x', y'))$.⌋

2°.96 $f(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \ f(t, x) = x\cdot A(t) + B(t)$, unde $A(\cdot) = (a_{ij}(\cdot))_{1 \le i, j \le n},\ B(\cdot) = (b_1(\cdot), ..., b_n(\cdot))$, cu $a_{ij}(\cdot), b_j(\cdot) : [-a, a] \to \mathbb{R}$ funcţii continue, $\forall i, j = 1, ..., n$.

⌈**R:** $d_2\big(f(t, x), f(t, x')\big) = ||A(t)(x - x')||_2 \le ||A(t)|| \cdot ||x - x'||_2 \le L \cdot d_2(x, x')$, unde $L = \sup\{||A(t)||;\ t \in [-a, a]\}$.⌋

2°.97 Să se arate că funcţia $f : [0, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R},\ \ f(x, y) = \sqrt{x}$ este continuă uniform, dar nu satisface condiţia lui Lipschitz.

⌈**R:** Funcţia f este continuă pe compactul $[0, 1] \times [-1, 1]$, deci este continuă uniform. Pe de altă parte, pentru $x > 0 < x'$, avem $d_1\big(f(x, y), f(x', y')\big) = |\sqrt{x} - \sqrt{x'}| = \frac{|x - x'|}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}}$, iar $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x'}} \to +\infty$, când $x \to 0$ şi $x' \to 0$. Deci f nu satisface condiţia Lipschitz pe $[0, 1] \times [-1, 1]$.⌋

2°.98 Să se arate că funcţia $f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{x}+\sqrt{y}$ este continuă uniform, dar nu satisface condiţia lui Lipschitz.

⌈**R:** Funcţia f este continuă pe compactul $[0,1]\times[0,1]$, deci este continuă uniform. Fie $(x,y),(u,v) \in]0,1]\times]0,1] \Rightarrow d\big(f(x,y),f(u,v)\big) = |\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{u}-\sqrt{v}| \le \dfrac{|x-u|}{\sqrt{x}+\sqrt{u}} + \dfrac{|y-v|}{\sqrt{y}+\sqrt{v}}$. Întrucât funcţiile $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{u}}$ şi $\dfrac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{v}}$ sunt nemărginite pe $]0,1]\times]0,1]$, rezultă că nu există $M>0$ astfel încât să avem satisfăcută condiţia lui Lipschitz.⌋

5.2.6. Funcţii continue pe mulţimi compacte şi pe mulţimi conexe

2°.99 Să se arate că mulţimea

$$B = \big\{y \in \mathbb{R}/y = e^{\langle a,x\rangle},\ \text{unde } x \in R^n,\ \|x\|_2 \le 1,\ \text{iar } a \in \mathbb{R}^n \text{ este un vector constant}\big\}$$

este compactă şi conexă.

⌈**R:** Funcţia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\langle a,x\rangle}$ este continuă, iar mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R}^n/\|x\|_2 \le 1\}$ este compactă şi conexă. Deci $B = f(A) \subset \mathbb{R}$ este compactă şi conexă.⌋

2°.100 Să se arate că mulţimea

$$B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/(x,y) = \big(\operatorname{arctg} t,\, \ln(1+t^2)\big),\ t \in [-1,1]\big\}$$

este compactă şi conexă.

⌈**R:** Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \big(\operatorname{arctg} x, \ln(x^2+1)\big)$ este continuă, $A = [-1,1]$ este o mulţime compactă şi conexă, iar $B = f(A)$.⌋

2°.101 Să se arate că mulţimea $\big\{x \in \mathbb{R}/0 \le x\cdot\sin\dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{2}\big\}$ este închisă.

⌈**R:** Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & \text{dacă} \quad x \ne 0, \\ 0, & \text{dacă} \quad x = 0, \end{cases}$ este continuă, iar mulţimea $\{x \in \mathbb{R}/0 \le f(x) \le \frac{1}{2}\} = f^{-1}\Big(\Big[0,\frac{1}{2}\Big]\Big)$.⌋

2°.102 Fie $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\} \to \mathbb{R}_+$, $f(x,y,z) = \big(x^2+y^2+z^2\big)^{-1}$. Se cere:

1) să se studieze continuitatea uniformă a funcţiei f;

2) să se studieze continuitatea uniformă a funcţiei $f|_{A_1}$, unde $A_1 = B_3[(1,0,0)] \setminus B_{1/2}((0,0,0))$;

3) să se arate că mulţimea $B = f(A_1)$ este compactă.

4) să se arate că mulţimea $f(A_2)$, unde $A_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/z > x^2+y^2\}$ este conexă.

5) să se arate că mulţimea $A_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/1 < f(x,y,z) < 5\}$ este deschisă.

6) să se arate că mulţimea $A_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/f(x,y,z) \le 2\}$ este închisă.

⌈**R:** 1) Nu este uniform continuă. **I:** Se consideră şirul $(x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x^n = \big(1/\sqrt{n},0,0\big)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. 2) f este continuă pe domeniul de definiţie, iar mulţimea A_1 este compactă, deci f este uniform continuă pe A_1. 3) Din 2) rezultă că $B = f(A_1)$ este compactă. 4) Mulţimea A_2 este conexă, deci $f(A_2)$ este conexă. 5) Deoarece $A_3 = f^{-1}(]1,5[)$, rezultă că $A_3 \in \tau$. 6) Avem $A_4 = f^{-1}(]-\infty,2]) \in \mathcal{F}$.⌋

2°.103 Fie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \Big((|x|+|y|+|z|)\ln\Big(1+\dfrac{1}{|x|+|y|+|z|}\Big), \\ \sqrt{2-(|x|+|y|+|z|)}\Big), & \text{dacă } (x,y,z) \in B_1[0] \setminus \{0\}, \\ (0,\sqrt{2}), & \text{dacă } (x,y,z) = (0,0,0), \\ (\ln 2, 1) & \text{dacă } (x,y,z) \notin B_1[0]. \end{cases}$$

unde $B_1[0] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / |x|+|y|+|z| \le 1\}$ şi $A_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z \ge x^2+y^2,\ x+y+z \le 2\}$.

Să se arate că:

1) mulţimea A_1 este compactă şi conexă;

2) $f|_{A_1}$ este continuă uniform;

3) $f(A_1)$ este compactă şi conexă;

⌈**R:** 1) Mulţimea A_1 este închisă şi mărginită, deci este compactă. Întrucât orice două puncte din A_1 pot fi unite printr-un segment de dreaptă, rezultă că A_1 este conexă. 2) Funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}^3$, iar mulţimea A_1 este compactă, deci f este uniform continuă pe A_1. 3) Se aplică teoria: "*imaginea printr-o funcţie continuă a unei mulţimi compacte şi conexe este mulţime compactă şi conexă*".⌋

2°.104 Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x) = \begin{cases} \Big(e^{-1/\|x\|_2},\ \sqrt{\|x\|_2}\ln(\|x\|_2),\ \|x\|_2^{|x_1|}\Big), & \text{dacă } x \ne 0_{\mathbb{R}^n}, \\ (0,0,1), & \text{dacă } x = 0_{\mathbb{R}^n}, \end{cases}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n / \sum_{k=1}^{n} |x_k| \le 2\}, \quad B = \{(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3 / (y_1/3)^2 + (y_2/2)^2 + (y_3)^2 \le 1\}.$$

Să se arate că:

1) A şi B sunt mulţimi închise în $\mathbb{R}^n$, respectiv în $\mathbb{R}^3$;

2) $f(A) \subset \mathbb{R}^3$ este mulţime compactă şi conexă;

3) $f^{-1}(B) \subset \mathbb{R}^n$ este închisă.

⌈**R:** 1) Funcţiile $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ şi $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\psi(y_1,y_2,y_3) = \dfrac{y_1^2}{9} + \dfrac{y_2^2}{4} + y_3^2$ sunt continue, deci mulţimile $A = \varphi^{-1}([0,2])$ şi $B = \psi^{-1}([0,1])$ sunt închise. 2) Funcţia f este continuă şi mulţimea A este compactă şi conexă, deci $f(A)$ este compactă şi conexă. 3) Mulţimea B fiind închisă şi f fiind funcţie continuă, atunci $f^{-1}(B)$ este mulţime închisă.⌋

2°.105 Să se arate că în teorema lui Weierstass condiţia de compacitate a spaţiului este esenţială. Mai precis:

1) să se dea un exemplu de spaţiu necompact X şi de o funcţie continuă $f : X \to \mathbb{R}$ care nu este mărginită;

2) să se dea un exemplu de spaţiu necompact X şi de o funcţie $f : X \to \mathbb{R}$ continuă şi mărginită care nu îşi atinge marginile în X.

⌈**R:** Teorema lui **Weierstrass** afirmă că: *o funcţie continuă pe un compact şi cu valori reale este mărginită şi îşi atinge marginile*". 1) Dacă se consideră mulţimea necompactă $]0,1]$ şi $f :]0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, atunci f este continuă pe $]0,1]$ însă mulţimea $f(]0,1])$ este nemărginită. 2) Mulţimea $X =]0,1[$ nu este compactă, dar funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ este continuă, mărginită, dar nu îşi atinge marginile.⌋

2°.106 Asimilăm suprafaţa Pământului cu o sferă $X \subset \mathbb{R}^3$. Să se aplice teorema lui Darboux pentru a arăta că există două puncte diametral opuse $P, P' \in X$ având aceeaşi temperatură (se presupune că temperatura variază continuu cu punctul).

⌈**R:** Fie $t(\cdot) : X \to \mathbb{R}$, $x \to t(x)$ temperatura în punctul x. Notăm $f(x) = t(x) - t(x')$, unde $x, x' \in X$ sunt puncte diametral opuse. Avem $f(x) \cdot f(x') = -[t(x) - t(x')]^2 \leq 0$, ceea ce arată că $f(x)$ şi $f(x')$ sunt de semne diferite sau $t(x) = t(x')$. Deoarece f este funcţie continuă, atunci, în cazul $f(x) \cdot f(x') < 0$, rezultă (teorema lui **Darboux**) că există $\xi \in X$ astfel încât $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow t(\xi) = t(\xi')$.⌋

2°.107 Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann-Darboux. Să se arate că funcţia $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) := \int\limits_{[a,x]} f(t)\mathrm{d}t$ este funcţie continuă pe $[a, b]$.

⌈**R:** Fie $x, x' \in [a, b]$. Presupunem că $x < x'$. Deoarece f este funcţie integrabilă Riemann-Darboux pe $[a, b]$, atunci f este mărginită. Deci există $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$. Avem $|g(x') - g(x)| = \Big| \int\limits_{[x,x']} f(t)\mathrm{d}t \Big| \leq \int\limits_{[x,x']} |f(t)|\mathrm{d}t \leq M \cdot |x' - x| \to 0$, când $x' \to x$.⌋

2°.108 Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$ şi $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Să se arate că funcţiile $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) := \int\limits_c^d f(x, y)\mathrm{d}y$ şi $h : [c, d] \to \mathbb{R}$, $h(y) := \int\limits_a^b f(x, y)\mathrm{d}x$ sunt continue pe $[a, b]$, respectiv pe $[c, d]$.

⌈**R:** Mulţimea $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ fiind compactă (închisă şi mărginită) şi f fiind continuă, atunci este continuă uniform pe $[a, b] \times [c, d] \Leftrightarrow \big(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $(x, y), (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$ cu $d((x, y), (u, v)) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x, y) - f(u, v)| < \varepsilon\big)$. Să arătăm că g este continuă pe $[a, b]$. Fie $x^\circ \in [a, b]$ fixat şi $x \in [a, b]$ arbitrar. Avem $|g(x) - g(x^\circ)| = \Big| \int\limits_c^d \left(f(x, y) - f(x^\circ, y)\right)\mathrm{d}y \Big| \leq \int\limits_c^d \big|f(x, y) - f(x^\circ, y)\big|\mathrm{d}y$. Fie $x \in [a, b]$ astfel încât $|x - x^\circ| = d((x, y), (x^\circ, y)) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \big|f(x, y) - f(x^\circ, y)\big| < \varepsilon \Rightarrow |g(x) - g(x^\circ)| \leq \int\limits_c^d \varepsilon \mathrm{d}y = (d - c) \cdot \varepsilon$, de unde urmează că g este continuă în punctul x°. Cum x° a fost ales arbitrar în $[a, b]$, atunci g este continuă pe $[a, b]$. Analog se demonstrează că $h : [c, d] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[c, d]$.⌋

5.2.7. Semicontinuitate

2°.109 Să se arate că funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{dacă } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ este inferior semicontinuă în orice punct iraţional din $[a, b]$.

⌈**R:** Fie $x^\circ \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}$ şi $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x_n \in [a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \to x^\circ$. Avem $f(x^\circ) = 0$ şi $f(x_n) \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Deci $f(x^\circ) = 0 \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} f(x_n)$, ceea ce înseamnă că f este inferior semicontinuă în punctul x°.⌋

2°.110 Fie (X,d) un spaţiu metric şi $A \subset X$. Mulţimea A este deschisă dacă şi numai dacu a funcţia sa caracteristică $\chi_A(\cdot)$ este inferior semicontinuă pe A $\Big(\chi_A : X \to \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad x \in A, \\ 0, & \text{dacă} \quad x \notin A. \end{cases} \Big)$$

⌈**R:** Se poate demonstra uşor afirmaţia: ”*funcţia* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *este inferior semicontinuă pe* $X \Leftrightarrow f^{-1}(]a,+\infty[)$ *este deschisă,* $\forall a \in \mathbb{R}$”. Deoarece $\chi_A^{-1}(]a,+\infty[) = \begin{cases} \emptyset, & \text{dacă} \quad a \geq 1, \\ A, & \text{dacă} \quad 0 \leq a < 1, \\ X, & \text{dacă} \quad a < 0, \end{cases}$ atunci χ_A este inferior semicontinuă dacă şi numai dacă A este mulţime deschisă.⌋

2°.111 Să se arate că dacă (X,d) este un spaţiu metric şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este inferior semicontinuă pe X, atunci mulţimea

$$A_a = \{x \in X / f(x) \leq a\}$$

este închisă.

Dacă f este superior semicontinuă pe X, atunci mulţimea

$$B_a = \{x \in X / f(x) \geq a\}$$

este închisă, $\forall a \in \mathbb{R}$.

⌈**R:** Presupunem că $A_a \neq \emptyset$ şi f inferior semicontinuă. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n \in A_a$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \to x^\circ \in X$. Deoarece $f(x_n) \leq a$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, iar f este inferior semicontinuă, avem $f(x^\circ) \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leq a$, adică $x^\circ \in A_a$, deci A_a este închisă. În cazul când f este superior semicontinuă, găsim $f(x^\circ) \geq \varlimsup\limits_{n\to\infty} f(x_n) \geq a$, adică $x^\circ \in B_a$, deci B_a este închisă.

Altă soluţie: avem $A_a = X \backslash f^{-1}(]a,+\infty[)$, iar $f^{-1}(]a,+\infty[)$ este mulţime deschisă conform observaţiei din rezolvarea exerciţiului precedent. Deci A_a este mulţime închisă, ca fiind complementara unei mulţimi deschise.⌋

2°.112 Fie (X,d) un spaţiu metric şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Să se arate că dacă f este superior semicontinuă în punctul $x^\circ \in X$, atunci funcţia $g = -f$ este inferior semicontinuă în punctul x°.

Dacă $\exists V_0 \in \mathcal{V}(x^\circ)$ astfel încât $f(x) > 0$, $\forall x \in V_0$, iar f este superior semicontinuă, atunci funcţia $h = \dfrac{1}{f|_{V_0}}$ este inferior semicontinuă în x°.

⌈**R:** Fie $\varepsilon > 0$. Din ipoteză, $\exists V_\varepsilon \in \mathcal{V}(x^\circ)$ astfel încât $\forall x \in V_\varepsilon \Rightarrow f(x^\circ) + \varepsilon > f(x) \Leftrightarrow -f(x^\circ) - \varepsilon < -f(x) \Leftrightarrow g(x) > g(x^\circ) - \varepsilon$, ceea ce exprimă faptul că funcţia $g = -f$ este inferior semicontinuă în punctul x°. Pentru a doua afirmaţie, considerăm $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \to x^\circ$. Atunci $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in V_0 \Rightarrow f(x_n) > 0$, $\forall n \geq n_0$. Avem $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(x^\circ) \Rightarrow h(x^\circ) = \dfrac{1}{f(x^\circ)} \leq \dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} f(x_n)} = \varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{f(x_n)} = \varliminf\limits_{n\to\infty} h(x_n)$, adică h este inferior semicontinuă în x°.⌋

2°.113 Fie (X,d) un spaţiu metric şi $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Fie funcţiile $\varphi, \psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$\varphi(x) := \max\{f(x), g(x)\}, \quad \psi(x) = \min\{f(x), g(x)\},\ \forall x \in X.$$

Să se arate că dacă f şi g sunt inferior [superior] semicontinue în punctul $x^\circ \in X$ (pe X), atunci funcţiile φ şi ψ sunt inferior [superior] semicontinue în $x^\circ \in X$ (pe X).

⌈**R:** Vom face demonstraţia în cazul când f şi g sunt inferior semicontinue în $x^\circ \in X$. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci $\exists V_\varepsilon \in \mathcal{V}(x^\circ)$ astfel încât $x \in V_\varepsilon \Rightarrow f(x^\circ) - \varepsilon < f(x)$ şi $g(x^\circ) - \varepsilon < g(x) \Rightarrow \varphi(x^\circ) - \varepsilon = \max\{f(x^\circ), g(x^\circ)\} - \varepsilon < \max\{f(x), g(x)\} = \varphi(x)$ şi $\psi(x^\circ) - \varepsilon = \min\{f(x^\circ), g(x^\circ)\} - \varepsilon < \min\{f(x), g(x)\} = \psi(x)$, adică funcţiile φ şi ψ sunt inferior semicontinue în punctul x°. În cazul superior semicontinuităţii, inegalităţile sunt de forma $f(x) < f(x^\circ) + \varepsilon$ şi $g(x) < g(x^\circ) + \varepsilon$, $\forall x \in V_\varepsilon \in \mathcal{V}(x^\circ)$.⌋

2°.114 Fie (X, d) un spaţiu metric şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ inferior [superior] semicontinuă pe X. Să se arate că $\forall A$, $\emptyset \neq A \subset X$,

$$\sup f(\overline{A}) = \sup f(A) \ \ [\inf f(\overline{A}) = \inf(A)].$$

⌈**R:** Presupunem că f este inferior semicontinuă. Fie $\emptyset \neq A \subset X$. Deoarece $A \subset \overline{A}$, atunci $\sup(f(A)) \leq \sup(f(\overline{A}))$. Să admitem că nu are loc egalitatea. Atunci $\exists a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sup(f(A)) < a < \sup(f(\overline{A}))$. Din definiţia marginii superioare, există $\overline{x} \in \overline{A}$ astfel încât $a < f(\overline{x})$, iar din faptul că f este inferior semicontinuă în $\overline{x}$, $\exists V \in \mathcal{V}(\overline{x})$ astfel încât $x \in \overline{A} \cap V \Rightarrow a \leq f(x)$. Întrucât $\overline{x} \in \overline{A}$, atunci $V \cap A \neq \emptyset$, iar $x \in V \cap A \Rightarrow x \in V \cap \overline{A} \Rightarrow a \leq f(x)$, ceea ce contrazice relaţia $\sup(f(A)) < a$. Deci are loc egalitatea. Analog se raţionează pentru a demonstra relaţia a doua.⌋

2°.115 Fie (X, d) un spaţiu metric, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ inferior [superior] semicontinuă pe X şi $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ crescătoare şi inferior [superior] semicontinuă. Să se arate că funcţia compusă $\varphi \circ f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este inferior [superior] semicontinuă pe X.

⌈**R:** Presupunem f inferior semicontinuă pe X. Fie $x^\circ \in X$ şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $x_n \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \to x^\circ$. Atunci $f(x^\circ) \leq \varliminf_{n\to\infty} f(x_n) =: y^\circ$. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece φ este inferior semicontinuă în y°, atunci $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\forall y \in \mathbb{R}$ cu $|y - y^\circ| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \varphi(y^\circ) - \varepsilon < \varphi(y)$. Luând $y^1 := y^\circ - \delta(\varepsilon)/2$, obţinem $\varphi(y^\circ) < \varphi(y^1) + \varepsilon$. Notăm $\eta(\varepsilon) := \delta(\varepsilon)/2$. Deoarece $y^\circ = \varliminf_{n\to\infty} f(x_n)$, atunci există $n(\eta(\varepsilon)) =: n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\forall n \geq n_1(\varepsilon) \Rightarrow y^1 = y^\circ - \delta(\varepsilon)/2 < f(x_n)$. Cum φ este crescătoare, avem $\varphi(f(x^\circ)) \leq \varphi(y^\circ) < \varphi(y^1) + \varepsilon < \varphi(f(x_n)) + \varepsilon$, de unde găsim $(\varphi \circ f)(x^\circ) \leq \varliminf_{n\to\infty} (\varphi \circ f)(x_n)$, adică $\varphi \circ f$ este inferior semicontinuă în punctul $x^\circ \in X$. Deci $\varphi \circ f$ este inferior semicontinuă pe X. Printr-un raţionament analog se obţine superior semicontinuitatea funcţiei $\varphi \circ f$.⌋

Cap. 6. FUNCŢII DIFERENŢIABILE DE O VARIABILĂ REALĂ

§ 6.1. Derivata şi diferenţiala de ordinul întâi. Derivatele unor funcţii elementare. Operaţii cu funcţii derivabile

Definiţia 1. *Fie* $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ *un interval,* $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ *o funcţie şi* $x^\circ \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$ *(un punct interior intervalului* $\mathbf{I}$*). Spunem că* f *este derivabilă în* x° *dacă şi numai dacă există*

$$f'(x^\circ) := \lim_{x \to x^\circ} \frac{f(x) - f(x^\circ)}{x - x^\circ} \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Uneori se notează $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x^\circ) := f'(x^\circ)$.
Numărul $f'(x^\circ)$ *se numeşte derivata funcţiei* f *în punctul* x°.
Notând $h := x - x^\circ$, *avem*

$$f'(x^\circ) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x^\circ + h) - f(x^\circ)}{h}. \tag{1'}$$

Dacă f *este derivabilă în orice punct* $x^\circ \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$, *spunem că* f *este derivabilă pe* $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$.

Interpretare geometrică.

Dacă în definiţia 1 presupunem că f este continuă pe o vecinătate $]x^\circ - \delta, x^\circ + \delta[$ a punctului x°, notând $M_0\big(x^\circ, f(x^\circ)\big)$ şi $M\big(x, f(x)\big)$, $|x - x^\circ| < \delta$, punctele de pe graficul lui f, de abscise x°, respectiv x, se poate arăta că dreapta de ecuaţie

$$y - f(x^\circ) = f'(x^\circ)(x - x^\circ)$$

este chiar tangenta în $M_0\big(x^\circ, f(x^\circ)\big)$ la graficul funcţiei f, adică "limita" dreptelor secante (M_0M), când $x \to x^\circ$, i.e. $M \to M_0$.

Avem deci

$$f'(x^\circ) = \operatorname{tg} \alpha_0,$$

i.e. coeficientul unghiular (panta) tangentei geometrice la grafic în $M_0\big(x^\circ, f(x^\circ)\big)$ este chiar derivata lui f în x° (aici α_0 este unghiul format de tangenta geometrică cu sensul pozitiv al axei Ox).

Definiţia 2. *Dacă* x° *este punct interior sau este cel mai mare element al intervalului* $\mathbf{I}$, *se defineşte derivata la stânga a lui* f *în* x° *prin*

$$f'_s(x^\circ) := \lim_{\substack{x \to x^\circ \\ x < x^\circ}} \frac{f(x) - f(x^\circ)}{x - x^\circ} = \lim_{x \nearrow x^\circ} \frac{f(x) - f(x^\circ)}{x - x^\circ}.$$

Dacă x° *este punct interior sau este cel mai mic element al intervalului* $\mathbf{I}$, *se defineşte derivata la dreapta a lui* f *în* x° *prin*

$$f'_d(x^\circ) := \lim_{\substack{x \to x^\circ \\ x > x^\circ}} \frac{f(x) - f(x^\circ)}{x - x^\circ} = \lim_{x \searrow x^\circ} \frac{f(x) - f(x^\circ)}{x - x^\circ}.$$

Teorema 1. (a) *Funcţia f este derivabilă într-un punct interior $x^\circ \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$ dacă şi numai dacă derivatele laterale $f'_s(x^\circ)$ şi $f'_d(x^\circ)$ există, sunt finite şi egale între ele* (*şi atunci avem*

$$f'(x^\circ) = f'_s(x^\circ) = f'_d(x^\circ)\big);$$

(b) *f derivabilă în $x^\circ \Rightarrow f$ continuă în x°.*

Trecem acum la noţiunea de diferenţiabilitate într-un punct $x^\circ \in \mathbf{I}$.

Definiţia 3. *Spunem că f este diferenţiabilă în $x^\circ \in \mathbf{I}$ dacă şi numai dacă există un număr $L_{x^\circ} \in \mathbb{R}$ şi o funcţie $\omega(x^\circ, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\omega(x^\circ, h)}{h} = 0,$$

astfel încât să aibă loc egalitatea

$$f(x^\circ + h) - f(x^\circ) = L_{x^\circ} h + \omega(x^\circ, h) \tag{2}$$

$\forall h \in \mathbb{R}$ *pentru care* $x^\circ + h \in \mathbf{I}$.

Elementul $L_{x^\circ} h \in \mathbb{R}$ se numeşte **diferenţiala lui f în x° "după direcţia h"** (*de fapt contează semnul lui h, deci sensul vectorului ce uneşte x° cu $x^\circ + h$*). *Se notează*

$$df(x^\circ, h) = df(x^\circ)h := L_{x^\circ} h. \tag{3}$$

Deseori se notează $h = dx$, obţinându-se notaţia uzuală

$$df(x^\circ, dx) = df(x^\circ) = L_{x^\circ} dx. \tag{3'}$$

Relaţia dintre noţiunile de derivabilitate şi diferenţiabilitate într-un punct $x^\circ \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$ este dată de teorema următoare

Teorema 2. *Funcţia f este diferenţiabilă în $x^\circ \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$ dacă şi numai dacă ea este derivabilă în x°. Atunci avem*

$$L_{x^\circ} = f'(x^\circ). \tag{4}$$

Ţinând cont de notaţiile (3) şi (3′) şi de egalitatea (4), avem

$$\begin{aligned} df(x^\circ, h) &= df(x^\circ)h = f'(x^\circ)h, \\ df(x^\circ, dx) &= df(x^\circ) = f'(x^\circ)dx. \end{aligned} \tag{3''}$$

Definiţia 4. *Dacă f este diferenţiabilă în fiecare punct din $\mathbf{I}$, spunem că este diferenţiabilă pe $\mathbf{I}$.*

Definiţia 5. *Dacă f are în $x^\circ \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$ derivate laterale diferite, şi cel puţin una dintre ele este finită, atunci punctul $\big(x^\circ, f(x^\circ)\big)$ de pe grafic se numeşte* **punct unghiular** *al graficului* (*de exemplu $x^\circ = 0$ este singurul punct unghiular al graficului funcţiei modul*

$$f(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{R}\big).$$

Definiţia 6. *Dacă în* $x^{\circ} \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$ *una dintre derivatele laterale este* $+\infty$*, iar cealaltă este* $-\infty$*, spunem că punctul* $M_0\big(x^{\circ}, f(x^{\circ})\big)$ *de pe grafic este* **punct de întoarcere**.

Dacă f este derivabilă în orice punct din $\mathbf{I}$ (în capetele intervalului fiind vorba de derivate laterale), spunem că f este derivabilă pe $\mathbf{I}$.

Interpretarea geometrică a derivabilităţii pe un interval este aceea că graficul funcţiei este "**neted**" (i.e. fără "**colţuri**", care ar corespunde punctelor unghiulare sau de întoarcere). De aceea funcţiile derivabile pe un interval se mai numesc intuitiv şi funcţii "**netede**".

Dacă $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe $\mathbf{I}$, se defineşte în mod natural o funcţie $f' : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ care asociază fiecărui $x \in \mathbf{I}$ derivata lui f în punctul x, notată $f'(x)$. Funcţia f' se numeşte **derivata lui** f.

În cele ce urmează, reamintim derivatele funcţiilor elementare de bază.

Teorema 3. *Funcţiile de mai jos sunt derivabile pe intervalele indicate şi avem:*

$$
\begin{array}{lll}
f(x) = c, \forall x \in \mathbf{I} & \Rightarrow & f'(x) = 0, \forall x \in \mathbf{I};\\
f(x) = x^n,\ (n \in \mathbb{N}) & \Rightarrow & f'(x) = nx^{n-1},\ \forall x \in \mathbb{R};\\
f(x) = x^{\alpha},\ (\alpha \in \mathbb{R}) & \Rightarrow & f'(x) = \alpha x^{\alpha-1},\ \forall x \in]0, +\infty[;\\
\Big(\text{în particular, pentru } \alpha = \dfrac{1}{2}, & & (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ \forall x > 0\Big);\\
f(x) = e^x & \Rightarrow & f'(x) = e^x,\ \forall x \in \mathbb{R};\\
f(x) = a^x\ \ (a > 0,\ a \neq 1) & \Rightarrow & f'(x) = a^x \ln a,\ \forall x \in \mathbb{R};\\
f(x) = \ln x & \Rightarrow & f'(x) = \dfrac{1}{x},\ \forall x > 0;\\
f(x) = \log_{\mathrm{a}}\mathrm{x}\ \ (\mathrm{a} > 0,\ \mathrm{a} \neq 1) & \Rightarrow & f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a},\ \forall x > 0;\\
f(x) = \sin x & \Rightarrow & f'(x) = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R};\\
f(x) = \cos x & \Rightarrow & f'(x) = -\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R};\\
f(x) = \mathrm{tg\ x} & \Rightarrow & f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \dfrac{\pi}{2}/k \in \mathbb{Z}\};\\
f(x) = \mathrm{ctg\ x} & \Rightarrow & f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi/k \in \mathbb{Z}\}.
\end{array}
$$

Trecem acum la derivarea unor funcţii care se obţin din funcţiile de mai sus prin operaţii algebrice sau prin operaţii de compunere.

Au loc următoarele rezultate de ordin general.

Teorema 4. (**Operaţii algebrice cu funcţii derivabile**) *Fie* f, g *funcţii derivabile pe* $\mathbf{I}$. *Atunci pentru orice* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *funcţiile* $\lambda f + \mu g$, $f \cdot g$ *şi* $\dfrac{f}{g}$ (*dacă* $g(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbf{I}$) *sunt derivabile şi avem*

$$
\begin{array}{l}
(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' \quad \text{- (\textit{operaţia de derivare este liniară}),}\\
(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g',\\
\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.
\end{array}
$$

Teorema 5. (**Derivarea compusei a două funcţii derivabile**) *Fie* **I, J** *două intervale,* $f : \mathbf{I} \to \mathbf{J}$ *derivabilă în* $x^\circ \in \mathbf{I}$, $g : \mathbf{J} \to \mathbb{R}$ *derivabilă în* $y^\circ = f(x^\circ) \in \mathbf{J}$. *Atunci funcţia compusă* $h := g \circ f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ *este derivabilă în* x° *şi*

$$h'(x^\circ) = (g \circ f)'(x^\circ) = g'(f(x^\circ)) \cdot f'(x^\circ). \tag{5}$$

Dacă f *este derivabilă pe* **I** *şi* g *este derivabilă pe* **J**, *atunci funcţia* $g \circ f$ *este derivabilă pe* **I** *şi*

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f' \quad (pe\ \mathbf{I}). \tag{5'}$$

Teorema 6. (**Derivarea funcţiei inverse** f^{-1}) *Fie* $f : \mathbf{I} \to \mathbf{J}$ *o funcţie continuă şi bijectivă între două intervale. Presupunem că* f *este derivabilă în* x° *şi că* $f'(x^\circ) \neq 0$.

Atunci funcţia inversă $f^{-1} : \mathbf{J} \to \mathbf{I}$ *este derivabilă în* $y^\circ = f(x^\circ)$ *şi*

$$\big(f^{-1}\big)'(y^\circ) = \frac{1}{f'(x^\circ)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y^\circ)\big)}. \tag{6}$$

Din teoremele 3 şi 5 rezultă

$$\begin{array}{ll} \big[\big(u(x)\big)^\alpha\big]' = \alpha\big(u(x)\big)^{\alpha-1} u'(x), & \forall x \in \mathbf{I}, \\ \big[a^{u(x)}\big]' = a^{u(x)} (\ln a) u'(x), & \forall x \in \mathbf{I},\ a > 0, \end{array}$$

etc., unde **I** este un interval pe care funcţia u este derivabilă, cu $u(x) \in \mathbf{J}$, **J** fiind inclus în domeniul de derivabilitate al funcţiei g $\big($în primul caz $g(u) = u^\alpha$, $u > 0$, iar în al doilea caz $g(u) = a^u$, $u \in \mathbb{R}$ $(a > 0)\big)$.

Să observăm că din (5), notând $u := f$, avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g \circ u)(x) = g'(u(x))u'(x) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u}\big(u(x)\big) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x),$$

dacă u este derivabilă în x, iar g este derivabilă în $u(x)$.

Dacă u, g sunt derivabile în orice punct din intervalele corespunzătoare, avem

$$\frac{\mathrm{d}(g \circ u)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{5''}$$

Teorema 7. *Fie* u, v *derivabile, astfel încât* u^v *are sens şi este derivabilă* $\Big(u^v = e^{v \cdot \ln u},\ u > 0\Big)$. *Atunci*

$$\Big(u^v\Big)' = u^v \Big[v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}\Big].$$

De observat că teorema 7 se obţine din teoremele 5 şi 4, dacă folosim faptul că

$$\Big(u^v\Big)' = \Big(e^{v \cdot \ln u}\Big)' = e^{v \cdot \ln u}\Big[v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}\Big].$$

EXERCIŢII REZOLVATE

1. Folosind doar definiţia derivatei într-un punct x°, să se studieze existenţa şi valoarea derivatei $f'(x^\circ)$, în cazurile

1.1 $f(x) = \dfrac{2}{x^2+3}$, $x^\circ = -2$;

1.2 $f(x) = \sqrt{x^2+2}$, $x^\circ = 1$.

⌈**Soluţie1.1** $f'(x^\circ) = f'(-2) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\dfrac{2}{x^2+3} - \dfrac{2}{4+3}}{x+2} =$

$= 2\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{7-x^2-3}{(x+2)7(x^2+3)} = \dfrac{2}{7}\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{4-x^2}{x+2} \cdot \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to -2}(x^2+3)} = \dfrac{2}{49}\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(2-x)(2+x)}{x+2} =$

$= \dfrac{2}{49}\lim\limits_{x\to -2}(2-x) = \dfrac{8}{49}.$

1.2 $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{3}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{3})(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{3})}{(x-1)(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{3})} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{3}} \cdot \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2-3}{x-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}.$⌋

2. Să se studieze existenţa derivatelor laterale, continuitatea şi derivabilitatea funcţiei

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x \le 0, \\ \dfrac{1}{x^3} e^{-\dfrac{1}{x^2}}, & \text{dacă} \quad x > 0, \end{cases} \qquad \text{în } x^\circ = 0.$$

⌈**Soluţie** Avem:

$f'_s(0) = \lim\limits_{x\nearrow 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\nearrow 0} \dfrac{0-0}{x} = 0,$

$f'_d(0) = \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{(1/x^3)e^{-1/x^2}-0}{x} = \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{e^{-1/x^2}}{x^4} = \lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}{e^{1/x^2}} = \lim\limits_{u\to +\infty} \dfrac{u^2}{e^u} = 0$, deoarece exponenţiala e^u creşte mai repede la $+\infty$, când $u \to +\infty$.

Rezultă că există $f'(0) = f'_s(0) = f'_d(0) = 0$, ceea ce implică (în particular) continuitatea funcţiei f în 0.⌋

3. În care puncte de pe graficul parabolei cubice $y = x^3 = f(x)$ tangentele la grafic sunt paralele cu dreapta de ecuaţie $x - \dfrac{y}{3} + 1 = 0$. Scrieţi ecuaţiile tangentelor şi normalelor în aceste puncte.

⌈**Soluţie** Ecuaţia tangentei în punctul $\big(x^\circ, f(x^\circ)\big)$ la graficul funcţiei derivabile f este $y - f(x^\circ) = f'(x^\circ)(x - x^\circ)$, iar cea a normalei este $y - f(x^\circ) = -\dfrac{1}{f'(x^\circ)}(x - x^\circ)$ $\big($dacă $f'(x^\circ) \neq 0\big)$.

Pe de altă parte, două drepte sunt paralele dacă şi numai dacă au acelaşi coeficient unghiular. Scriind ecuaţia dreptei date în enunţ sub forma $y = 3x + 3$, rezultă că avem $m = 3$, unde m este coeficientul unghiular.

Tangenta în $\big(x^\circ, f(x^\circ\big) = \big(x^\circ, (x^\circ)^3\big)$ fiind paralelă cu dreapta dată, rezultă $f'(x^\circ) = 3$, adică $3(x^\circ)^2 = 3$. Prin urmare $x^\circ \in \{-1, 1\}$. Deci sunt exact două puncte: $M_1(1,1)$ şi $M_2(-1,-1)$ pe grafic caare îndeplinesc conmdiţiile din enunţ.

În $M_1(1,1)$, ecuaţia tangentei este $y - 1 = 3(x-1)$, iar ecuaţia normalei este $y - 1 = -\dfrac{1}{3}(x-1)$.

În $M_2(-1,-1)$, ecuaţia tangentei este $y + 1 = 3(x+1)$, iar ecuaţia normalei este $y + 1 = -\dfrac{1}{3}(x+1)$.⌋

4. Folosind operaţiile cu funcţii derivabile, să se calculeze $f'(x)$ pentru:

4.1 $f(x) = \dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{x^2}{\beta^2} + \dfrac{\beta^2}{x^2}, \ \ x \neq 0, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

4.2 $f(x) = x \cdot \arcsin x, \ \ x \in]-1, 1[$;

4.3 $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}, \ \ x \neq 0$;

4.4 $f(x) = \ln(\ln x), \ \ x > 1$;

4.5 $f(x) = \log_2\big(\log_3(\log_7 x)\big)$, pentru $x > 7$;

4.6 $f(x) = x^{\sin x}, \ \ x > 0$.

⌈**Soluţie 4.1** $f'(x) = \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{\alpha}{x^2} + \dfrac{2x}{\beta^2} + \beta^2(x^{-2})' = \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{\alpha}{x^2} + \dfrac{2x}{\beta^2} - 2\beta^2 x^{-3} = \dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{\alpha}{x^2} + \dfrac{2x}{\beta^2} - \dfrac{2\beta^2}{x^3}, \ \ x \neq 0.$

4.2 $f'(x) = (x \cdot \arcsin x)' = \arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \ \ x \in]-1, 1[.$

4.3 $f'(x) = \left(\dfrac{1+e^x}{1-e^x}\right)' = \dfrac{e^x(1-e^x) - (1+e^x)(-e^x)}{(1-e^x)^2} = \dfrac{e^x - e^{2x} + e^x + e^{2x}}{(1-e^x)^2} = \dfrac{2e^x}{(1-e^x)^2}, \ \ x \neq 0.$

4.4 $f'(x) = \big(\ln(\ln x)\big)' = \dfrac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln x}, \ \ x > 1.$

4.5 $f'(x) = \Big(\log_2\big(\log_3(\log_7 x)\big)\Big)' = \dfrac{1}{\big(\log_3(\log_7 x)\big) \cdot \ln 2} \cdot \dfrac{1}{(\log_7 x)\ln 3} \cdot \dfrac{1}{x \ln 7} =$

$= \dfrac{1}{(\ln 2)(\ln 3)(\ln 7) \cdot x(\log_7 x)\big(\log_3(\log_7 x)\big)}, \ \ x > 7.$

4.6 $f'(x) = (x^{\sin x})' = \left(e^{(\sin x)\ln x}\right)' = e^{(\sin x)\ln x}\left[(\cos x)\ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right] = x^{\sin x}\left[(\cos x)\ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right], \ \ x > 0.$⌋

5* Calculaţi sumele:

5.1 $S_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$;

5.2 $S_n = \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{2}{2^4} + \dfrac{3}{2^5} + \ldots + \dfrac{n}{2^{n+2}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^{k+2}}.$

⌈**Soluţie**

5.1 $S_n(x) = \begin{cases} (1 + x + x^2 + \ldots + x^n)' = \left(\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)' = \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(x-1)^2}, & \text{dacă} \quad x \neq 1 \\ 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}, & \text{dacă} \quad x = 1. \end{cases}$

5.2 Notăm $x = \dfrac{1}{2}$ şi folosim rezultatul de la punctul precedent. Avem $S_n = x^3 + 2x^4 + 3x^5 + \ldots + nx^{n+2} = x^3\big(1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}\big) = x^3 \cdot \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{n+1}{2^{n+1}} + \dfrac{n}{2^{n+2}}.$⌋

6* Fie $t = t(s) = \arcsin 2^s$. Exprimaţi $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ cu notaţia "în s" şi apoi cu notaţia "în t".

⌈**Soluţie** $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{\sqrt{1-2^{2s}}} \cdot 2^s \ln 2 = \dfrac{2^s \ln 2}{\sqrt{1-2^{2s}}} \ \ \Rightarrow \ \ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}} = \dfrac{\sqrt{1-2^{2s}}}{2^s \ln 2}.$

Pe de altă parte din $t = \arcsin 2^s$, avem $\sin t = 2^s$, deci $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t \ln 2} = \dfrac{\operatorname{ctg} t}{\ln 2}.$⌋

7 Fie $f(x) = x^\alpha, \ \ x > 0, \ \ \alpha \in \mathbb{R}$. Determinaţi toate numerele reale $\alpha \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f'(a+b) = f'(a) + f'(b), \ \ \forall a, b \in]0, +\infty[.$$

⌈**Soluţie** Relaţia din enunţ se scrie

$$\alpha(a+b)^{\alpha-1} = \alpha a^{\alpha-1} + \alpha b^{\alpha-1},\ \forall a,b \in]0,+\infty[$$

Dacă $\alpha = 0$ egalitatea este adevărată.
Dacă $\alpha \neq 0$, ar trebui să avem

$$(a+b)^{\alpha-1} = a^{\alpha-1} + b^{\alpha-1},\ \forall a,b \in]0,+\infty[;$$

în particular, pentru $a = b$, avem

$$(2a)^{\alpha-1} = 2a^{\alpha-1},\ \forall a > 0,$$

ceea ce se întâmplă dacă şi numai dacă $2^{\alpha-1} = 2$, adică $\alpha - 1 = 1$, deci $\alpha = 2$.
Reciproc, pentru $\alpha = 2$, avem

$$(a+b)^{\alpha-1} = a+b = a^{\alpha-1} + b^{\alpha-1},\ \forall a,b > 0.$$

În concluzie, $\alpha \in \{0,2\}$.⌋

EXERCIŢII PROPUSE

8* Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită de

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cdot \cos\dfrac{1}{x}, & \text{dacă} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{dacă} \quad x = 0. \end{cases}$$

Să se discute după $\alpha \in \mathbb{R}$ continuitatea şi derivabilitatea lui f în punctul $x^\circ = 0$.

⌈**R**: $\alpha \in]-\infty, 0] \ \Rightarrow f$ nu are limite laterale în 0, deci nu este continuă (deci nu este derivabilă în $x^\circ = 0$).
$\alpha \in]0,1]$, funcţia f este continuă, dar nu este derivabilă în $x^\circ = 0$.
$\alpha \in]1,+\infty[\Rightarrow \ f$ este derivabilă (deci şi continuă) în $x^\circ = 0$.⌋

9 Pornind de la definiţie, să se studieze existenţa şi valoarea derivatei $f'(x^\circ)$ pentru următoarele funcţii şi puncte x°. Apoi să se calculeze derivatele respective în x° folosind derivatele funcţiilor elementare şi operaţiile cu funcţii derivabile.
9.1 $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 7,\ \ x^\circ \in \mathbb{R}$ oarecare;
9.2 $f(x) = 4\sin x + 7\cos x,\ \ x^\circ = \dfrac{\pi}{2}$;
9.3 $f(x) = \dfrac{1}{e^x+1},\ \ x^\circ = 2.$

⌈**R**: **9.1** $f'(x^\circ) = 6(x^\circ)^2 + 8x^\circ - 3,\ \ x^\circ \in \mathbb{R}.$
9.2 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 7\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -7.$
9.3 $f'(2) = -\dfrac{e^2}{(e^2+1)^2}$.⌋

10 Să se studieze existenţa derivatelor laterale, continuitatea şi derivabilitatea următoarelor funcţii în $x^\circ = 0$.
10.1 $f(x) = \begin{cases} 5x^2, & \text{dacă} \quad x \leq 0, \\ 7x^3, & \text{dacă} \quad x > 0. \end{cases}$
10.2 $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{dacă} \quad x \geq 0. \end{cases}$

10.3 $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{dacă} \quad x \le 0, \\ ax^2 + x + 1, & \text{dacă} \quad x > 0, \end{cases}$ $(a \in \mathbb{R})$.

10.4 $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x = 0, \\ \dfrac{1}{x^3} e^{-\dfrac{1}{x^2}}, & \text{dacă} \quad x \neq 0. \end{cases}$

⌈**R**: **10.1** f este derivabilă în $x^\circ = 0$.
10.2 $f'_s(0) = 0$, $f'_d(0) = +\infty$, deci $(0,0)$ este punct unghiular al graficului lui f (f este continuă în $x^\circ = 0$.)
10.3 Avem $f'_s(0) = f'_d(0) = 1$, deci $\exists f'(0)$ şi $f'(0) = 1$.
10.4 Funcţia f este derivabilă în $x^\circ = 0$ şi $f'(0) = 0$.⌋

11 Determinaţi $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1-x), & \text{dacă} \quad x < 0, \\ a_1 x + a_0, & \text{dac]u a} \quad x \ge 0. \end{cases}$$

să fie derivabilă în $x^\circ = 0$.

⌈**R**: $a_0 = 0,\ a_1 = -1$.⌋

12 Pe graficul funcţiei $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, determinaţi punctul în care tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox.

⌈**R**: (0,1)⌋

13 Arătaţi că suma lungimilor segmentelor determinate pe axele de coordonate de tangenta la curba $f(x) = \left(a^{1/2} - x^{1/2}\right)^2$, $a > 0$, $x > 0$, într-un punct oarecare $\left(x, f(x)\right)$ cu $x \in [0, a]$, este constantă. Să se determine constanta respectivă.

⌈**R**: a⌋

14 Să se determine tangentele la graficul funcţiei $f(x) = x^2 + 2$ care trec prin origine.

⌈**R**: $y - 4 = 2\sqrt{2}(x - \sqrt{2})$ şi $y - 4 = -2\sqrt{2}(x + \sqrt{2})$.⌋

15 Fie $f : [-R, +\infty[\to \mathbb{R}$, unde $R > 0$ este o constantă,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{R^2 - x^2}, & \text{dacă} \quad -R \le x \le R, \\ \sqrt{-x^2 + 4Rx - 3R^2}, & \text{dacă} \quad R < x < 3R, \\ x - 3R, \text{dacă} & x \ge 3R. \end{cases}$$

Să se determine punctele unghiulare şi punctele de întoarcere ale graficului funcţiei f.

⌈**R**: $(R, 0)$ este punct de întoarcere, iar $(3R, 0)$ este punct unghiular.⌋

16 Trasaţi graficele funcţiilor $f(x) = |\sin x|$ şi $g(x) = |\cos x|$, $x \in \mathbb{R}$, observând care sunt punctele unghiulare. Calculaţi derivatele laterale în aceste puncte. Există puncte de întoarcere pe aceste grafice?

⌈**R**: Punctele unghiulare pentru funcţia f sunt punctele de tipul $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ şi avem $f'_s(x_k) = -1$, $f'_d(x_k) = 1$, $k \in \mathbb{Z}$, iar pentru funcţia g sunt punctele de tipul $x_n = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ şi $g'_s(x_n) = -1$, $g'_d(x_n) = 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

Graficele funcţiilor f şi g nu au puncte de întoarcere.⌋

17 Calculaţi $f'(x)$ pentru x în mulţimea punctelor de derivabilitate a funcţiei f, în cazurile:

17.1 $f(x) = x^5 - \dfrac{1}{3}x^3 + 2,5x^2 - 0,2x + 0,1;$

17.2 $f(x) = \dfrac{mx^2}{\sqrt{x}} + \dfrac{nx\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{p\sqrt{x}}{x}$, m,n,p - constante;

17.3 $f(x) = (1+\sqrt{x})(1+\sqrt{2x})(1+\sqrt{3x});$

17.4 $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; $c \neq 0;$

17.5 $f(x) = \dfrac{x}{1-\cos x};$

17.6 $f(x) = \dfrac{x \sin x}{1 + \operatorname{tg} x};$

17.7 $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x};$

17.8 $f(x) = \dfrac{x^2}{\operatorname{arctg} x};$

17.9 $f(x) = x^2 \log_5 x;$

17.10 $f(x) = \ln^2 x;$

17.11 $f(x) = \dfrac{1}{\ln x};$

17.12 $f(x) = \operatorname{arctg} \ln(ax+b);$

17.13 $f(x) = \dfrac{1}{3x};$

17.14 $f(x) = Ae^{-k^2x}\sin(\omega x + \alpha).$

⌈**R**: **17.1** $f'(x) = 5x^4 - x^2 + 5x - 0,2,\ x \in \mathbb{R};$

17.2 $f'(x) = \dfrac{3}{2}m\sqrt{x} + \dfrac{7}{6}n\sqrt[6]{x} + \dfrac{p}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^3}},\ x > 0;$

17.3 $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Big(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2x} + 2\sqrt{3x} + 2\sqrt{6x} + 3x\sqrt{6})\Big),\ x > 0;$

17.4 $f'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{d}{c}\};$

17.5 $f'(x) = \dfrac{1-\cos x - x\sin x}{(1-\cos x)^2},\ x$ astfel încât $\cos x \neq 1;$

17.6 $f'(x) = \dfrac{(1+\operatorname{tg} x)(\sin x + x\cos x) - x\sin x \sec^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^3},\ \operatorname{tg} x \neq -1;$

17.7 $f'(x) = \dfrac{\pi}{2(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}},\ x \in]-1,1[;$

17.8 $f'(x) = \dfrac{2x}{\operatorname{arctg} x} - \dfrac{x^2}{(1+x^2)(\operatorname{arctg} x)^2},\ x \neq 0;$

17.9 $f'(x) = 2x\log_5 x + \dfrac{x}{\ln 5},\ x > 0;$

17.10 $f'(x) = \dfrac{2\ln x}{x},\ x > 0;$

17.11 $f'(x) = -\dfrac{1}{\ln^2 x}\cdot\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{x\ln^2 x},\ x \in]0,+\infty[\setminus\{1\};$

17.12 $f'(x) = \dfrac{a}{(ax+b)[1+\ln^2(ax+b)]}$, $ax+b>0$;
17.13 $f'(x) = -\dfrac{\ln 3}{3^x}$, $x \in \mathbb{R}$;
17.14 $f'(x) = Ae^{-k^2x}[\omega\cos(\omega x+\alpha) - k^2\sin(\omega x+\alpha)]$, $x \in \mathbb{R}$.⌋

18
18.1 Pentru $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x + \sqrt{x} - 1}{x}$; $x > 0$, calculaţi $f'(\dfrac{1}{4})$.
18.2 Pebtru $f(x) = y(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$, $x \neq 1$, $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$, calculaţi $y'(2)$.
18.3* Arătaţi că dacă $f_1, \ldots, f_n$ sunt funcţii derivabile, atunci produsul $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n$ este o funcţie derivabilă şi $\big(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n\big)' = f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_n + \ldots + f_1 \cdot \ldots \cdot f_{n-1} \cdot f_n'$. Calculaţi apoi $f'(r_1), \ldots, f'(r_n)$, unde $f(x) = (x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_n)$.

⌈**R**: **18.1** $f'(\dfrac{1}{4} = 13$.
18.2 $f'(2) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
18.3 $f'(r_1) = (r_1 - r_2)(r_1 - r_3)\ldots(r_1 - r_n), \ldots, f'(r_n) = (r_n - r_1)(r_n - r_2)\ldots(r_n - r_{n-1})$.⌋

19
19.1 Arătaţi că funcţia $y = y(x) = \ln\dfrac{1}{1+x}$ verifică egalitatea

$$xy' + 1 = e^y \quad \big(\text{adică } xy'(x) + 1 = e^{y(x)},\ \forall x \in D\big),$$

(unde D este mulţimea de derivabilitate a funcţiei f).
19.2 Arătaţi că funcţia

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \ln\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$$

verifică egalitatea

$$2y = xy' + \ln y',$$

pe mulţimea ei de derivabilitate.
19.3 Arătaţi că funcţia

$$y(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

verifică egalitatea

$$(1-x^2)y' - xy = 1,$$

pe mulţimea ei de derivabilitate.

20 Calculaţi $f'(x)$ pentru x în mulţimea de derivabilitate a funcţiei f, dacă:
20.1 $f(x) = x^{x^2}$;
20.2 $f(x) = \sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}}$;
20.3 $f(x) = \big(\sin x\big)^{\cos x}$.

⌈**R**: **20.1** $f'(x) = x^{x^2+1}\big(2\ln x + 1\big)$, $x > 0$;
20.2 $f'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\Big(\dfrac{1}{x} + \operatorname{ctg} x - \dfrac{e^x}{2(1-e^x)}\Big)$, $x \in D_{f'}$.
20.3 $f'(x) = \big(\sin x\big)^{\cos x - 1}\big[\cos^2 x - \sin^2 x \ln(\sin x)\big]$, $x \in D_{f'}$.⌋

§6.2. Proprietăţi de bază ale funcţiilor derivabile. Rolul derivatei de ordinul întâi în studiul variaţiei funcţiilor. Consecinţe. Rolul derivatei secunde în studiul funcţiilor, cu aplicaţii la inegalităţi remarcabile. Formula lui Taylor Extremele funcţiilor derivabile de n - ori, $n \geq 2$.

Teoria care urmează are ca scop de bază studiul extremelor (locale sau globale), ale funcţiilor derivabile şi obţinerea unor inegalităţi remarcabile, cu eventuale aplicaţii la rezolvarea unor ecuaţii (este vorba în primul rând de inegalitatea mediilor).

Definiţia 1. *Fie $A \subset \mathbb{R}$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. Un punct $x^\circ \in A$ se numeşte punct de maxim local (respectiv de minim local) al lui f, dacă există o vecinătate V_0 a punctului x° astfel încât*

$$f(x) \leq f(x^\circ) \ \big(\textit{respectiv } f(x) \geq f(x^\circ)\big), \ \forall x \in A \cap V_0. \tag{5.1}$$

În aceste cazuri, valoarea $f(x^\circ)$ se numeşte un maxim (respectiv un minim) local al lui f.

Punctele de maxim sau de minim local se numesc puncte de extrem local.

În continuare, renunţăm la folosirea adjectivului "*local*".

Teorema 1. (**Fermat**) *Fie $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ un interval, $x^\circ \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$ un punct interior intervalului $\mathbf{I}$, $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă x° este un punct de extrem pentru f şi funcţia f este derivabilă în x°, atunci $f'(x^\circ) = 0$.*

Observaţia 1. *Reciproca nu este adevărată în general: dacă $f'(x^\circ) = 0$, nu rezultă că x° este punct de extrem (un contraexemplu este dat de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $x^\circ = 0$).*

Aplicând teorema 1, se obţine:

Teorema 2. (**M. Rolle**) *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe $]a, b[$, astfel încât $f(a) = f(b)$. Atunci există cel puţin un punct $x^\circ \in]a, b[$, pentru care avem*

$$f'(x^\circ) = 0.$$

Consecinţa 1. *Între două zerouri ale unei funcţii derivabile pe un interval se află cel puţin un zerou al derivatei.*

Consecinţa 2. *Între două zerouri consecutive ale derivatei se află cel mult un zerou al funcţiei.*

Rezultatul următor, numit teorema lui *J. Lagrange*, poate fi considerat (datorită consecinţelor şi aplicţiilor sale) ca fiind cel mai important din calculul diferenţial pentru funcţii de o variabilă reală.

Teorema 3. (**J. Lagrange**) *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe $]a, b[$. Atunci există cel puţin un punct $c \in]a, b[$ astfel încât*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Consecinţa 3. *Fie f definită pe o vecinătate V a punctului x°, continuă în x° şi derivabilă pe $V \setminus \{x^\circ\}$. Dacă există*

$$\lambda := \lim_{x \to x^\circ} f'(x),$$

atunci $f'(x^\circ)$ există şi $f'(x^\circ) = \lambda$.

Consecinţa 4. *Dacă $\mathbf{I}$ este un interval, $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ este derivabilă şi $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{I}$, atunci f este constantă pe $\mathbf{I}$.*

Consecinţa 5. *Fie $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe $\mathbf{I}$.*
Dacă $f'(x) \geq 0$ (respectiv $f'(x) > 0$), $\forall x \in \mathbf{I}$, atunci f este crescătoare (respectiv strict crescătoare) pe $\mathbf{I}$.
Dacă $f'(x) \leq 0$ (respectiv $f'(x) < 0$), $\forall x \in \mathbf{I}$, atunci f este descrescătoare (respectiv strict descrescătoare) pe $\mathbf{I}$.

Cu ajutorul consecinţei 5, se pot determina (în unele cazuri) intervalele de monotonie ale unei funcţii derivabile şi eventualele puncte de extrem (vezi exerciţiile rezolvate).

Pe de altă parte, teorema creşterilor finite pune în evidenţă o clasă importantă de funcţii lipschitziene, care cuprinde în particular o clasă importantă de contracţii. Mai precis, avem:

Consecinţa 6. *Fie $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ un interval, $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ derivabilă, astfel încât există $L > 0$, cu proprietatea*

$$|f'(x)| \leq L, \ \forall x \in \mathbf{I}.$$

Atunci avem

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L \cdot |x_2 - x_1|, \ \forall x_1, x_2 \in \mathbf{I},$$

deci f este lipschitziană pe $\mathbf{I}$.
Dacă în particular $L \in]0,1[$, atunci f este o contracţie.

O generalizare a teoremei creşterilor finite este dată de următorul rezultat.

Teorema 4. (**Cauchy**) *Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ două funcţii continue pe $[a,b]$, derivabile pe $]a,b[$. Presupunem că $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a,b[$. Atunci există cel puţin un punct $c \in]a,b[$, astfel încât*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

O aplicaţie importantă a teoremei lui Cauchy o constituie demonstrarea regulei lui L'Hôspital, pe care o reamintim pe scurt şi fără a insista aupra condiţiilor din ipoteză.

Consecinţa 7. (**L'Hôspital**) *În anumite condiţii asupra funcţiilor derivabile f, g, în cazurile $\frac{0}{0}$ şi $\frac{\infty}{\infty}$, se poate scrie*

$$\lim_{x \to x^\circ} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x^\circ} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

în ipoteza că ultima limită există în $\overline{\mathbb{R}}$ $(x^\circ \in \overline{\mathbb{R}})$.

Următorul rezultat se referă la proprietatea lui Darboux a derivatei unei funcţii derivabile.

Teorema 5. *Dacă o funcţia $F : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe intervalul $\mathbf{I}$, atunci derivata sa $f := F'$ are proprietatea lui Darboux (f nu poate trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare).*

Consecinţa 8. *Fie $F : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ derivabilă pe $\mathbf{I}$. Dacă derivata $f = F'$ nu se anulează pe $\mathbf{I}$, atunci f are semn constant pe $\mathbf{I}$.*

Revenind la teorema lui Fermat, care dă o condiţie necesară ($f'(x^\circ) = 0$) pentru ca $x^\circ \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$ să fie punct de extrem pentru funcţia f derivabilă în x°, ne propunem în continuare să dăm condiţii suficiente pentru ca un punct x°, cu $f'(x^\circ) = 0$, să fie punct de extrem pentru funcţia f.

Un rol deosebit în această problematică (numită optimizare), îl are noţiunea de funcţie convexă. În cazul funcţiior derivabile, se poate demonstra că f este convexă dacă şi numai dacă f' este crescătoare, etc. (vezi teoremele de mai jos).

Definiţia 2. *Fie $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ un interval oarecare. O funcţie $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ se numeşte funcţie* **convexă** *dacă*

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in \mathbf{I},\ \forall t \in [0,1].$$

Dacă inegalitatea este strictă pentru orice $x_1, x_2 \in \mathbf{I}$, $x_1 \ne x_2$ şi orice $t \in]0,1[$, spunem că f este funcţie **strict convexă**.

O funcţie $g : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ se numeşte **concavă** (*respectiv* **strict concavă**), *dacă $f := -g$ este funcţie convexă (respectiv strict convexă).*

Lema 1. (a) *Funcţia f este convexă pe intervalul $\mathbf{I}$ (respectiv strict convexă), dacă şi numai dacă $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbf{I}$, $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ cu $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, avem*

$$f\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k),$$

(respectiv inegalitate strictă dacă nu toţi x_k, $k = 1, \dots, n$ sunt egali între ei şi cel puţin un $\lambda_k \in]0,1[$ (**inegalitatea lui Jensen**)).

(b) *Funcţia g este concavă pe intervalul $\mathbf{I}$ (respectiv strict concavă), dacă şi numai dacă $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbf{I}$, $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ cu $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, avem*

$$g\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big) \ge \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g(x_k),$$

(respectiv inegalitate strictă dacă nu toţi x_k, $k = 1, \dots, n$ sunt egali între ei şi cel puţin un $\lambda_k \in]0,1[$.)

Multe dintre funcţiile elementare sunt convexe (sau concave) pe anumite intervale şi, pe de altă parte, admit derivate de ordinul doi (sau chiar de orice ordin (vezi definiţia următoare)). Cum noţiunea de funcţie convexă (derivabilă de două ori), se leagă direct de semnul derivatei secunde, vom putea stabili intervalele de convexitate pentru multe dintre funcţiile elementare.

Definiţia 3. *Fie $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ derivabilă pe $\mathbf{I}$ şi fie f' derivata sa.*
Dacă f' este la rândul ei derivabilă, definim derivata de ordinul doi pentru f prin egalitatea

$$f'' := (f')'.$$

Prin inducţie după $n \in \mathbb{N}$, dacă există derivata de ordinul n, notată $f^{(n)}$ şi aceasta este derivabilă, definim derivata de ordinul $n+1$ a lui f prin

$$f^{(n+1)} := (f^{(n)})'.$$

Legătura dintre convexitatea unei funcţii şi primele două derivate ale ei (dacă acestea există) este dată de următoarea teoremă.

Teorema 6. *Fie $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de două ori pe $\mathbf{I}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) f este convexă (respectiv, strict convexă);
(ii) f' este crescătoare (respectiv, strict crescătoare);
(iii) $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbf{I}$ (respectiv, $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{I}$ şi nu există un subinterval al lui $\mathbf{I}$ pe care f'' să se anuleze).

Consecinţa 9. *Fie $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ un interval şi $g : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de două ori pe $\mathbf{I}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) g este concavă (respectiv, strict concavă);
(ii) g' este descrescătoare (respectiv, strict descrescătoare);
(iii) $g''(x) \leq 0$ $\forall x \in \mathbf{I}$ (respectiv, $g''(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbf{I}$ şi nu există un subinterval al lui $\mathbf{I}$ pe care g'' să se anuleze).

Consecinţa 10. (**Exemple de funcţii elementare convexe sau concave**)

1) Funcţia $f(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, este strict convexă pe $\mathbb{R}$.
2) Funcţia $h(x) = x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, este strict convexă pe $[0, +\infty[$ şi strict concavă pe $]-\infty, 0]$.
3) Funcţia $f(x) = x^p$, $x \geq 0$, $p > 1$, este strict convexă pe domeniul ei de definiţie $[0, +\infty[$.
4) Funcţia $g(x) = x^\alpha$, $x \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, este strict concavă [e $[0, +\infty[$.
5) Funcţia exponenţială $f(x) = a^x$, $a > 0, a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$, este strict convexă pe $\mathbb{R}$.
6) Funcţia $g(x) = \log_a x$, $x > 0$, $a > 1$, este strict concavă pe $]0, +\infty[$.

Aplicând punctul 5) al consecinţei 10 pentru $a = e$, (deci folosind concavitatea strictă a funcţiei " ln " pe intervalul $]0, +\infty[$), se poate demonstra uşor următoarea inegalitate fundamentală, care generalizează inegalitatea mediilor şi se poate aplica, între altele, la rezolvarea unor ecuaţii.

Consecinţa 11. (**Inegalitatea mediilor generalizate**)
Fie $x_1,\dots,x_n \in]0,+\infty[,\ \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}_+,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2,\ \sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k = 1$. *Atunci avem*

$$x_1^{\lambda_1}\cdot x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Consecinţa 12. (**Inegalitatea mediilor**)
Fie $x_1,\dots,x_n \in]0,+\infty[,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$. *Atunci avem*

$$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.
(*Media geometrică este dominată de media aritmetică*).

Consecinţa 13. *Pentru* $x_1, x_2 \geq 0,\ p>1, q>1$ *astfel încât* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, *avem*

$$x_1^{1/p}\cdot x_2^{1/q} \leq \frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{q},$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $x_1 = x_2$.

Consecinţa 14. (**Inegalitatea lui Hölder**)
Fie $\{a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\} \subset [0,+\infty[,\ p>1,\ q>1$ *astfel încât* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. *Atunci avem:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q}.$$

În particular, avem (pentru p=q=2):

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}$$

(*numită* **Inegalitatea Cauchy-Schwarz**, *în care avem egalitate dacă şi numai dacă* $\exists\lambda\in\mathbb{R}_+$ *astfel încât* $a_1=\lambda b_1,\dots,a_n=\lambda b_n$).

Consecinţa 15. (**Inegalitatea lui Minkowski**) *Fie* $a_k, b_k \in\mathbb{R},\ 1\leq k\leq n$ *şi* $p\geq 1$. *Atunci avem*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k-b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}.$$

Trecem acum la aplicaţiile derivatei secunde la studiul extremelor unor funcţii.

Definiţia 4. *Fie* $f:\mathbf{I}\to\mathbb{R}$, f *derivabilă într-un punct* $x^\circ \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$. *Spunem că* x° *este punct staţionar* (*sau critic*) *pentru* f, *dacă*

$$f'(x^\circ) = 0.$$

Teorema lui Fermat spune că orice punct x° din interiorul $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ al intervalului **I**, care este punct de derivabilitate şi de extrem pentru f, este şi punct critic al lui f.

În general, nu orice punct critic al unei funcţii este şi punct de extrem. Totuşi, dacă f este de două ori derivabilă, cu f'' continuă în x°, iar $f''(x^\circ) \neq 0,\ f'(x^\circ) = 0$, se poate trage concluzia că x° este punct de extrem.

Mai precis, avem următorul rezultat:

Teorema 7. *Fie $x^\circ \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$ un punct critic al unei funcţii $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ de două ori derivabilă, cu f'' continuă în x°. Atunci:*

(i) $f''(x^\circ) > 0 \Rightarrow x^\circ$ este un punct de minim pentru f.

(ii) $f''(x^\circ) < 0 \Rightarrow x^\circ$ este un punct de maxim pentru f.

(iii) $f''(x^\circ) = 0 \Rightarrow$ nu se pot trage concluzii despre faptul că x° este sau nu punct de extrem pentru f.

În condiţiile punctului (*iii*) al teoremei 7, pentru a afla natura punctului critic x°, este utilă **formula lui Taylor**, care permite aflarea naturii lui x° cu ajutorul primei derivate care nu se anulează în x°.

Teorema 8. (**Formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange**) *Fie $f : \mathbf{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, **I** interval, f derivabilă de $n+1$ - ori pe interiorul $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ al intervalului **I**; fie $x^\circ \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$. Atunci, pentru $\forall x \in \mathbf{I}$, $\exists c = c(x)$, între x° şi x, $x \neq c \neq x^\circ$, astfel încât are loc egalitatea:*

$$f(x) = f(x^\circ)+\frac{f'(x^\circ)}{1!}(x-x^\circ)+\frac{f''(x^\circ)}{2!}(x-x^\circ)^2+...+\frac{f^{(n)}(x^\circ)}{n!}(x-x^\circ)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x^\circ)^{n+1}.$$

Consecinţa ce urmează permite aflarea punctelor de extrem ale unor funcţii derivabile de cel puţin două ori.

Consecinţa 16. *Fie f derivabilă de $n+1$ - ori într-o vecinătate V a unui punct x° $(n \geq 1)$, astfel încât*

$$f'(x^\circ) = f''(x^\circ) = \ldots = f^{(n)}(x^\circ) = 0,\ f^{(n+1)}(x^\circ) \neq 0,$$

iar derivata $f^{(n+1)}$ este continuă în x°. Atunci:

(i) dacă $n+1$ este număr par, x° este punct de extrem al lui f $\big($şi anume punct de maxin dacă $f^{(n+1)}(x^\circ) < 0$ şi punct de minim dacă $f^{(n+1)}(x^\circ) > 0\big)$;

(ii) dacă $n+1$ este număr impar, atunci x° nu este punct de extrem pentru f.

Următoarea formulă exprimă derivata de ordin n (oarecare) a produsului a două funcţii derivabile de n - ori, în funcţie de derivatele de ordin $k \leq n$ ale celor două funcţii.

Din punctul de vedere al scrierii formale, suma din teorema următoare seamănă cu cea din dezvoltarea binomului lui Newton.

Teorema 9. *Dacă funcţiile f, g sunt derivabile de n - ori, atunci produsul $f \cdot g$ este o funcţie derivabilă de n - ori şi are loc egalitatea:*

$$(f\cdot g)^{(n)} = f^{(n)}\cdot g+C_n^1 f^{(n-1)}\cdot g'+\ldots+C_n^k f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}+\ldots+f\cdot g^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}\cdot g^{(k)},$$

unde $g^{(0)} := g$.

EXERCIŢII REZOLVATE

1*. Inegalităţile lui Bernoulli

Să se arate că pentru orice $-1 < x \neq 0$, avem

1°.1 $(1+x)^\alpha > 1+\alpha x$, dacă $\alpha \notin [0,1]$;

1°.2 $(1+x)^\alpha < 1+\alpha x$, dacă $\alpha \in]0,1[$.

$\big($pentru $\alpha \in \{0,1\}$ avem egalitate între $(1+x)^\alpha$ şi $1+\alpha x\big)$.

$\lceil$**Soluţie:** Fie $f:]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$, unde $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ este fixat. Avem $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha = \alpha\big[(1+x)^{\alpha-1} - 1\big]$. Dacă $\alpha \notin [0,1]$ atunci $f'(x) > 0$, $\forall x \in]0,+\infty[$ şi $f'(x) < 0$, $\forall x \in]-1,0[$. Deci $x^\circ = 0$ este punct de minim (global strict) pentru f (adică $f(x) > f(0)$, $\forall x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$). Rezultă $(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x > f(0) = 0$, $\forall x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$, ceea ce demonstrează 1°.1. Punctul 1°.2 se rezolvă asemănător.$\rfloor$

2* Să se arate că

2°.1 $1+x \le e^x$, cu egalitate dacă şi numai dacă $x = 0$.

2°.2 $\dfrac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x$, $\forall x > -1$, iar egalităţi au loc dacă şi numai dacă $x = 0$.

2°.3 $\forall n \in \mathbb{N}$, avem $\dfrac{1}{1+n} < \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$.

$\lceil$**Soluţie: 2°.1** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$. Avem: $f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow f'(x) > e^0 - 1 = 0$, $\forall x > 0$ şi $f'(x) = e^x - 1 < e^0 - 1 = 0, \forall x < 0$ (deoarece $x \to e^x$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$). Rezultă că f descreşte strict pe $]-\infty, 0]$ şi este strict crescătoare pe $[0,+\infty[$. Deci 0 este un punct de minim global strict, ceea ce conduce la

$$e^x - x - 1 = f(x) > f(0) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

adică

$$e^x > x+1,\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

iar în $x^\circ = 0$ avem evident egalitate.

2°.2 Pentru $x > -1$, avem $x+1 > 0$ şi, din monotonia strictă a funcţiei ln, din **2°.1** obţinem $\ln(1+x) \le \ln e^x = x$, cu egalitate dacă şi numai dacă $x = 0$. Astfel, a doua inegalitate **2°.2** este demonstrată. Pentru prima inegalitate **2°.2** avem de arătat că

$$x \le (1+x)\ln(1+x).\ \forall x > -1,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $x = 0$. Fie $h:]-1,+\infty[\to\mathbb{R}$, $h(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$. Avem de arătat că $h(x) > 0$, $\forall x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ (evident, în $x^\circ = 0$ avem egalitatea $h(x^\circ) = h(0) = 0$). Studiem monotonia funcţiei h cu ajutorul derivatei:

$$h'(x) = \ln(1+x) + \frac{1+x}{1+x} - 1 = \ln(1+x).$$

Avem $h'(x) = \ln(1+x) > \ln(1+0) = \ln 1 = 0$, $\forall x > 0$ şi $h'(x) = \ln(1+x) < \ln(1+0) = 0$, $\forall x \in]-1,0[$ (am folosit faptul că " ln " este strict crescătoare pe $]0,+\infty[$). Rezultă că funcţia h descreşte strict pe $]-1,0[$ şi creşte strict pe $[0,+\infty[$, deci $x^\circ = 0$ este un punct de minim global strict. Aceasta conduce la

$$(1+x)\ln(1+x) - x = h(x) > h(0) = 0,\ \forall x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\},$$

ceea ce încheie demonstraţia inegalităţii **2°.2**.

Inegalităţile **2°.3** rezultă din cele de la **2°.2** scrise pentru $x = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ (ipoteza $n \in \mathbb{N}$ nu este necesară; este suficient să presupunem $n \in]0,+\infty[$). Inegalităţile **2°.3**, scrise de obicei pentru $n \in \mathbb{N}$, se folosesc la studiul convergenţei unor şiruri remarcabile.$\rfloor$

3* Să se arate că:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},\ \forall x > 0$$

şi

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2},\ \forall x < 0.$$

Comentaţi rezultatele respective.

⌈**Soluţie:** Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}; x \neq 0$. Evident, f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi avem

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0,\ \forall x \neq 0.$$

Conform unei consecinţe a teoremei creşterilor finite (Lagrange), f este constantă pe fiecare dintre intervalele $]-\infty, 0[$ şi $]0, +\infty[$. Există, deci, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = c_1,\ \forall x > 0$ şi $f(x) = c_2,\ \forall x < 0$. Constantele c_1, c_2 se determină "*dând valori*" lui x, astfel încât calculele să fie cât mai simple. În cazul nostru, avem $c_1 = f(x) = f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},\ \forall x > 0$ şi $c_2 = f(x) = f(-1) = \operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg}(-1) = 2 \cdot \big(-\frac{\pi}{4}\big) = -\frac{\pi}{2},\ \forall x < 0$.

Faptul că avem $c_1 \neq c_2$ nu este o surpriză, deoarece f nu este definită (deci nu este derivabilă) în 0 şi nu putem aplica teorema lui Lagrange pe un interval $[a, b]$ care să conţină pe $x^\circ = 0$ (în teorema lui Lagrange, f trebuie să fie continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe $]a, b[$. De aceea, consecinţa 4 a teoremei lui Lagrange are loc doar pentru funcţii f definite pe un interval (şi nu pe o reuniune de intervale deschise disjuncte)).⌋

4* Să se determine toate soluţiile ecuaţiei

$$2^x + 5^x = 3^x + 4^x. \tag{E}$$

⌈**Soluţie:** Scriem ecuaţia sub forma echivalentă

$$5^x - 4^x = 3^x - 2^x \tag{E'}$$

şi, pentru x fixat (considerat deocamdată ca fiind o constantă), aplicăm teorema lui Lagrange funcţiei $f(t) = t^x$ (deci $f'(t) = \frac{df}{dt} = xt^{x-1}$), pe intervalele $[4, 5]$ şi $[2, 3]$. Avem $5^x - 4^x = f(5) - f(4) = f'(c_1)(5-4) = f'(c_1) = xc_1^{x-1}$, unde $c_1 \in]4, 5[$ există conform teoremei creşterilor finite (Lagrange). Similar, $3^x - 2^x = f'(c_2) = xc_2^{x-1}$, cu $c_2 \in]2, 3[$. Înlocuind în (E'), rezultă

$$xc_1^{x-1} = xc_2^{x-1},\ \text{ unde } c_1 \in]4, 5[,\ c_2 \in]2, 3[. \tag{E''}$$

În particular, avem deci $c_2 < c_1$. Evident (E) are loc pentru $x = 0$ şi pentru $x = 1$. Pentru a găsi eventuale alte soluţii, presupunând $x \neq 0$ şi $x \neq 1$, din (E'') deducem $c_1 = c_2$, ceea ce contrazice condiţia $c_2 < c_1$. În concluzie, singurele soluţii x ale ecuaţiei (E) sunt $x = 0$ şi $x = 1$.⌋

5* Arătaţi că $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$\frac{\operatorname{tg} x_2}{tgx_1} > \frac{x_2}{x_1}. \tag{I}$$

⌈**Soluţie:** Folosind faptul că $x_2 > 0$ şi $tgx_1 > 0$, inegalitatea (I) este echivalentă cu

$$\frac{\operatorname{tg} x_2}{x_2} > \frac{\operatorname{tg} x_1}{x_1},\ \forall x_1, x_2,\ \text{cu } 0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}.$$

Aceasta revine la faptul că funcţia $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ este strict crescătoare pe $\big]0, \frac{\pi}{2}\big[$. Este deci suficient (şi necesar) să arătăm că $f'(x) > 0,\ \forall x \in \big]0, \frac{\pi}{2}\big[$. Avem

$$f'(x) = \frac{x - \cos x \sin x}{x^2 \cos^2 x} > 0,$$

întrucât numitorul şi numărătorul sunt ambele strict pozitive pentru $x \in \big]0, \frac{\pi}{2}\big[$ $\big(x \in \big]0, \frac{\pi}{2}\big[\Rightarrow \cos x \sin x < \sin x < x\big)$. Concluzia rezultă.⌋

6* Fie f o funcţie polinomială de grad 4. Ştiind că $f(2) = -1$, $f'(2) = 0$, $f''(2) = 2$, $f'''(2) = -12$, $f^{(iv)}(2) = 24$, să se calculeze $f(-1)$, $f'(0)$, $f''(1)$.

⌈**Soluţie:** Construim întâi polinomul de gradul 4 care îndeplineşte condiţiile din ipoteză, folosind formula lui Taylor. Din cele ce urmează, va rezulta şi unicitatea polinomului de grad 4 căutat. Fie f acest polinom. Conform formulei lui Taylor, avem

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{(iv)}(2)}{4!}(x-2)^4 + \frac{f^{(5)}(c)}{5!}(x-2)^5,$$

unde $c = c(x)$ este între 2 şi x. Întrucât f este o funcţie polinomială de grad 4, avem $f^{(5)}(c) = 0$, $\forall c \in \mathbb{R}$, deci

$$\begin{aligned} f(x) &= f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{(iv)}(2)}{4!}(x-2)^4 = \\ &= -1 + \frac{2}{2!}(x-2)^2 - \frac{12}{3!}(x-2)^3 + \frac{24}{4!}(x-2)^4 = \\ &= -1 + (x-2)^2 - 2(x-2)^3 + (x-2)^4, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Avem deci

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-2) - 6(x-2)^2 + 4(x-2)^3, \\ f''(x) &= 2 - 12(x-2) + 12(x-2)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Înlocuind pe x cu valorile din enunţ, avem $f(-1) = -1+(-1-2)^2+2(-1-2)^3+(-1-2)^4 = 143$, $f'(0) = 2(-2) - 6(-2)^2 + 4(-2)^3 = -60$, $f''(1) = 2 - 12(1-2) + 12(1-2)^2 = 26$.⌋

7* Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in]0, +\infty[$, definit prin relaţia

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} = n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Să se precizeze care dintre următoarele afirmaţii este corectă:
1) şirul este strict crescător;
2) şirul este strict descrescător;
3) şirul este oscilant;
4) şirul este constant;
5) şirul este divergent;
6) şirul este nemărginit.

⌈**Soluţie:** Notăm $x_1 = \frac{a_1}{a_2}$, $x_2 = \frac{a_2}{a_3}, \ldots x_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$, $x_n \frac{a_n}{a_1}$, $n \in \mathbb{N}$. Conform definiţiei din enunţ, avem $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$. Pe de altă parte, un calcul uşor arată că $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_1} = 1$. Din ultimele două egalităţi, rezultă

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = 1 = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n},$$

deci, media aritmetică a numerelor pozitive $x_1, \ldots, x_n$ coincide cu media lor geometrică pentru $\forall n \in \mathbb{N}$. Dar pentru $n \geq 2$ aceasta se poate întâmpla dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ (conform teoriei de la inegalitatea mediilor, a cărei demonstraţie se bazează pe concavitatea strictă a funcţiei "ln" pe $]0, +\infty[$). Avem deci $x_1 = x_2 = \ldots = x_n \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Aceste relaţii, împreună cu egalitatea $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, conduc la $n\frac{a_1}{a_2} = n\frac{a_2}{a_3} = \ldots = n\frac{a_n}{a_1} = n$, adică $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \ldots = \frac{a_n}{a_1} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Acestea implică $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este constant. Singura afirmaţie corectă este 4).⌋

8* Fie $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ şi $p \geq 1$. Atunci are loc inegalitatea:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^{1/p} \cdot n^{\frac{p-1}{p}}.$$

În particular, pentru $p \in \mathbb{N}$, avem

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt[p]{x_k} \leq \sqrt[p]{n^{p-1}\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)}$$

şi pentru $p = 2$ avem

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \leq \sqrt{n \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)}.$$

⌈**Soluţie:** Aplicăm inegalitatea lui Hölder: $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\Big)^{1/q}$, unde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, pentru $a_k := x_k^{1/p}$, $b_k := 1, \forall k \in \{1, 2, ..., n\}$. Rezultă $\sum_{k=1}^{n} x^{1/p} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\Big)^{1/q}$ $= \Big[\sum_{k=1}^{n} (x_k^{1/p})^p\Big]^{1/p} (n)^{1/q} = n^{\frac{p-1}{p}} \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big)^{1/p}$. Concluziile rezultă acum în mod evident.⌋

9* Să se afle punctele de extrem şi valorile extreme ale funcţiei:

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10x + 3,\ x \in \mathbb{R}.$$

⌈**Soluţie:** Ştim că punctele de extrem sunt printre punctele critice. De aceea, începem prin a rezolva ecuaţia $f'(x) = 0$. Avem $f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 10 = 2(2x^3 - 9x^2 + 12x - 5) = 2(x-1)^2(2x-5)$. Se observă că $x = 1$ este rădăcină dublă a funcţiei polinomiale $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$. Deci, punctele critice ale funcţiei f sunt $x_1^\circ = 1$, $x_2^\circ = 5/2$. Pentru fiecare dintre aceste puncte, încercăm să vedem dacă sunt puncte de extrem, cu ajutorul derivatei secunde (vezi teorema 7). În acest scop, calculăm $f''(x) = 12(x-1)(x-2)$. Avem $f''(x_2^\circ) = f''(5/2) = 12(\frac{5}{2} - 1)(\frac{5}{2} - 2) > 0$, deci f este strict convexă în vecinătatea punctului critic $x_2^\circ = \frac{5}{2}$ şi în concluzie acest punct este de minim. Valoarea de minim a lui f în acest punct este $f(\frac{5}{2}) = (5/2)^4 - 6(5/2)^3 + 12(5/2)^2 - 10(5/2) + 3$. Pentru celălalt punct critic, $(x_1^\circ = 1)$, avem $f''(1) = 0$ şi teorema 7 nu spune nimic în acest caz. De aceea, apelăm la formula lui Taylor (vezi consecinţa 15), care permite studiul naturii punctului critic $x_1^\circ = 1$ cu ajutorul semnului derivatei de ordin minim > 2 care nu se anulează în acest punct. Avem $f'''(x) = 12(2x-3) \Rightarrow f'''(1) = -12 < 0$. Conform consecinţei 15, aplicată pentru $n + 1 = 3$, punctul $x_1^\circ = 1$ nu este punct de extrem (acelaşi lucru se putea vedea fără a folosi consecinţa 15, observând că derivata secundă $f''(x) = 12(x-1)(x-2)$ îşi schimbă semnul în jurul punctului staţionar $x_1^\circ = 1$ (asemenea puncte, (în jurul cărora f'' îşi schimbă semnul), se numesc *puncte de inflexiune*). Un punct critic care este şi punct de inflexiune, nu poate fi punct de extrem (*exerciţiu*). În concluzie, singurul punct de extrem este $x_2^\circ = \frac{5}{2}$, care este un punct de minim.⌋

10* Fie $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$. Să se determine $f^{(n)}(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

⌈**Soluţie:** Se porneşte de la observaţia următoare: $\Big(\frac{1}{x-a}\Big)^{(n)} = \big((x-a)^{-1}\big)^{(n)} = (-1)(-2)...(-n)$ $(x-a)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \neq a$. Apoi se observă că $f(x)$ se "*descompune*" în fracţii simple astfel $f(x) = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{1}{a-b}\Big(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\Big)$. Folosind descompunerea, liniaritatea operaţiei de derivare (de orice ordin) şi observaţia de mai sus privind derivarea fracţiilor simple, obţinem: $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{a-b}\Big[\dfrac{1}{(x-a)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x-b)^{n+1}}\Big]$.⌋

EXERCIŢII PROPUSE

11°. Pornind de la definiţia punctului de extrem şi fără a folosi noţiunea de derivată, să se studieze dacă 0 este punct de extrem pentru următoarele funcţii:

11°.1 $f(x)=1-x^4$; ⌈**R:** Punct de maxim global.⌋

11°.2 $f(x)=\sqrt[3]{x}$; ⌈**R:** Nu este punct de extrem.⌋

11°.3 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$; ⌈**R:** Punct de minim global.⌋

11°.4 $f(x)=|\operatorname{tg} x|$; ⌈**R:** Punct de minim global.⌋

11°.5 $f(x)=|\ln(1+x)|$; ⌈**R:** Punct de minim global.⌋

11°.6 $f(x)=e^{-|x|}$; ⌈**R:** Punct de maxim global.⌋

11°.7 $f(x)=\sqrt{x^3+x^2}$; ⌈**R:** Punct de minim global pe $]-1,+\infty[$.⌋

11°.8 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}; & \text{dacă } x\neq 0,\\ 1, & \text{dacă } x=0.\end{cases}$ ⌈**R:** Punct de maxim global pe $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.⌋

12°. Determinaţi punctele critice pentru următoarele funcţii:

12°.1 $f(x)=(x-5)e^x,\ x\in\mathbb{R}$; ⌈**R:** $x_1=4$.⌋

12°.2 $f(x)=x\sqrt{1-x^2},\ x\in]-1,1[$; ⌈**R:** $x_1=-\frac{1}{\sqrt2},\ x_2=\frac{1}{\sqrt2}$.⌋

12°.3 $f(x)=1-(x-2)^{4/5},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$; ⌈**R:** Nu există puncte critice.⌋

12°.4 $f(x)=(2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$. ⌈**R:** $x_1=1$.⌋

13°. Verificaţi condiţiile din iporeza teoremei lui Rolle şi concluzia pentru funcţia $f:[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln(\sin x)$. Determinaţi punctul $c\in]\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}[$ în care f' se anulează. ⌈**R:** $c=\frac{\pi}{6}$.⌋

14°. Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}x, & \text{dacă } x\in[0,\frac12],\\ 1-x, & \text{dacă } x\in]\frac12,1].\end{cases}$ Avem $f(0)=f(1)$, f este continuă pe $[0,1]$ şi totuşi nu există nici un punct $c\in]0,1[$ astfel încât $f'(c)=0$. Cum se explică această observaţie? ⌈**R:** f nu este derivabilă în $c=\frac12\in]0,1[$.⌋

15°*. Fie $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie polinomială cu coeficienţi reali. Să se arate că dacă toate rădăcinile lui P sunt reale şi distincte, atunci P' are aceeaşi proprietate.

⌈**R:** Se aplică teorema lui Rolle pe intervale având drept extremităţi rădăcini consecutie ale funcţiei polinomiale P şi faptul că un polinom de grad n, cu toate rădăcinile distincte, are exact n rădăcini. De asemenea, un polinom de grad $n-1$ pentru care există $n-1$ rădăcini distincte, nu poate avea şi alte rădăcini⌋

16°*. Demonstraţi că funcţia $f(x)=x^n+px+q,\ p,q\in\mathbb{R}^*,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$, nu poate avea mai mult de două rădăcini reale pentru n număr par şi nu poate avea mai mult de trei rădăcini reale pentru n număr natural impar.

⌈**I - R:** Fie $n\in\mathbb{N}$, n par. Dacă f ar avea mai mult de 2 rădăcini reale distincte, conform exerciţiului precedent, f' ar avea cel puţin două rădăcini reale distincte. Dar ecuaţia $f'(x)=0$ este echivalentă cu

$nx^{n-1}+p=0$, iar $n-1\in\mathbb{N}$ este impar, deci ultima ecuaţie are exact o rădăcină reală simplă, egală cu $\left(-\frac{p}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$. Cazurile celelalte (când f ar avea cel puţin o rădăcină reală dublă şi alta reală diferită de prima, sau o rădăcină reală multiplă cu ordin de multiplicitate ≥ 3), conduc şi ele la faptul că ar exista două rădăcini distincte ale lui f' sau f' ar avea o rădăcină multiplă, de ordin ≥ 2, ceea ce din nou contrazice faptul că unica rădăcină reală a ecuaţiei $f'(x)=0$ este $x_1=\left(-\frac{p}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$, şi aceasta este simplă. Afirmaţia corespunzătoare cazului când n este impar se demonstrează asemănător (în acest caz, $n-1$ este par şi derivata $f'(x)=nx^{n-1}+p$ are cel mult două rădăcini reale).$\rfloor$

17°. Aplicaţi teorema lui Lagrange pentru funcţia $f(x):=\ln x$, pe intervalul $[1,e]$. Determinaţi punctul $c\in]1,e[$ cu proprietatea $f(e)-f(1)=f'(c)(e-1)$. $\lceil$**R:** $c=e-1$.$\rfloor$

18°*. Demonstraţi inegalităţile:

18°.1 $\dfrac{b-a}{b}\leq\ln\dfrac{b}{a}\leq\dfrac{b-a}{a}$, $\forall a,b$ astfel încât $0<a\leq b$;

18°.2 $\dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}\leq\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\leq\dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$, $\forall\alpha,\beta$ astfel încât $0<\alpha\leq\beta<\dfrac{\pi}{2}$.

Când avem egalităţi în relaţiile de mai sus?

$\lceil$**I - R: 18°.1** Se aplică teorema lui Lagrange pe intervalul $[a,b]$, funcţiei $f(x)=\ln x$. Avem egalităţi dacă şi numai dacă $a=b$.

18°.2 Se aplică teorema lui Lagrange pe intervalul $[\alpha,\beta]$, funcţiei $f(x)=\operatorname{tg}x$. Inegalităţile devin egalităţi dacă şi numai dacă $\alpha=\beta$.$\rfloor$

19°*. Arătaţi că pentru orice $0<a<b$, avem

$$pa^{p-1}(b-a)<b^p-a^p<pb^{p-1}(b-a),$$

dacă $p>1$ şi au loc inegalităţile contrare dacă $p<1$, $p\neq 0$.

$\lceil$**I - R:** Se aplică teorema lui Lagrange pe intervalul $[a,b]$, funcţiei $f(x)=x^p$.$\rfloor$

20°. Fie $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x):=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. Să se determine mulţimea punctelor de derivabilitate pentru f.

$\lceil$**I - R:** Evident, f este derivabilă pe $]-1,1[$. Pe de altă parte, studiem existenţa derivatelor laterale în capetele intervalului $[-1,1]$, folosind teorema lui Lagrange.

$$f'_s(1)=\lim_{x\nearrow 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{c(x)\nearrow 1}f'(c(x))=\lim_{c(x)\nearrow 1}\left[\frac{1}{\sqrt{1-c^2(x)}}+\frac{-2c(x)}{2\sqrt{1-c^2(x)}}\right]=\lim_{c(x)\nearrow 1}\frac{1-c(x)}{\sqrt{1-c^2(x)}}=0,$$

deci f este derivabilă la stânga în 1.

$$f'_d(-1)=\lim_{x\searrow -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{c\searrow -1}f'(c)=\lim_{c\searrow -1}\frac{\sqrt{1-c}}{\sqrt{1+c}}=+\infty,$$

deci f nu este derivabilă la dreapta în -1. Rezultă că $\mathcal{D}_{f'}=]-1,1]$.$\rfloor$

21°. Fie $\{a_1,\ldots,a_nb_1,\ldots,b_n\}\subset\mathbb{R}$. Să se arate că ecuaţia $\sum\limits_{k=1}^{n}\left[a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right]$ $=0$ admite cel puţin o rădăcină în intervalul $]0,2\pi[$.

$\lceil$**I:** Se aplică teorema lui Rolle pe intervalul $[0,2\pi]$, funcţiei $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\left[a_k\sin(kx)-b_k\cos(kx)\right]$.$\rfloor$

22°. Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ şi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie Rolle (f continuă pe $[a,b]$ şi derivabilă pe $]a,b[$). Să se arate că există $c\in]a,b[$ astfel încât

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b\\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(c)-(a+b-c)f'(c).$$

⌈**I:** Se aplică teorema lui Rolle funcţiei $F(x) = (a+b-x)\left[f(x) - \dfrac{a\cdot f(b) - b\cdot f(a)}{a-b}\right]$ sau funcţiei $G(x) = x\left[f(a+b-x) - \dfrac{a\cdot f(b) - b\cdot f(a)}{a-b}\right]$, pe intervalul $[a,b]$. ⌋

23°* (**Funcţii hiperbolice**) Definim

$$\operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

(cosinus hiperbolic, respectiv sinus hiperbolic).

Relaţia fundamentală care leagă între ele aceste funcţii este

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Fie $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin

$$f_1(x) := \frac{e^{2x}}{2}, \qquad f_2(x) = e^x \cdot \operatorname{sh} x, \qquad f_3(x) = e^x \cdot \operatorname{ch} x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Calculaţi $f_1'(x), \ f_2'(x), \ f_3'(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$. Apoi arătaţi că cele trei funcţii diferă una de celelalte prin constante şi determinaţi aceste constante.

⌈**I:** $f_1'(x) = f_2'(x) = f_3'(x) = e^{2x}, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Deci $(f_1 - f_2)'(x) = (f_2 - f_3)'(x) = (f_3 - f_1)'(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Conform unei consecinţe a teoremei lui Lagrange, există c_1, c_2, c_3 astfel încât $f_1(x) - f_2(x) = c_1, \ f_2(x) - f_3(x) = c_2, \ f_3(x) - f_1(x) = c_3, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Constantele c_1, c_2, c_3 se determină ***dând valori*** lui x (de exemplu $c_1 = f_1(0) - f_2(0) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$. ⌋

24°. Arătaţi că pentru orice $a > 0$ şi orice $n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2$, avem

$$a^{n-1} < \frac{1}{n\left[(a^n+1)^{1/n} - a\right]} < (a^n+1)^{(n-1)/n}.$$

Este esenţială condiţia $n \in \mathbb{N}$?

⌈**I:** Se aplică teorema lui Cauchy funcţiilor $f(x) = \left(x^n + a^n\right)^{1/n}$ şi $g(x) = x^n$, pe intervalul $[0,1]$. Există $c \in]0,1[$ astfel încât $\dfrac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. În urma unui calcul, rezultă

$$c^n = \frac{1}{\left[n\left((a^n+1)^{1/n} - a\right)\right]^{n/(n-1)}} - a^n \in]0,1[$$

şi concluzia rezultă "***prelucrând***" faptul că ultima "***expresie***" aparţine intervalului $]0,1[$. Rezultatul este valabil pentru orice $n > 0, \ n \neq 1$. Pentru $n = 1$, inegalităţile devin egalităţi.⌋

25°*. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) := \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}, & \text{dacă} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă} \quad x = 0. \end{cases}$

25°.1 Arătaţi că f nu este continuă în 0;

25°.2 Arătaţi că funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ F(x) := \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{dacă} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă} \quad x = 0, \end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F' = f$.

25°.3 Folosind rezultatele de la 25°.1 şi 25°.2, arătaţi că există funcţii f care au proprietatea lui Darboux, dar nu sunt continue.

⌈**I:** Pentru 25°.3, se aplică teorema lui Darboux.⌋

26°.1 Să se determine intervalele de monotonie pentru funcţiile următoare, pe domeniul maxim de definiţie sau pe domeniul specificat.

26°.1 $f(x) = 2x^3 - x^2$;

⌈**R:** f este strict crescătoare pe $]-\infty, 0]$ şi $[\frac{1}{3}, +\infty[$ şi strict descrescătoare pe $[0, \frac{1}{3}]$.⌋

26°.2 $f(x) = x(1 + \sqrt{x})$;

⌈**R:** f este definită şi strict crescătoare pe $[0, +\infty[$.⌋

26°.3 $f(x) = x - 2\sin x,\ x \in [0, 2\pi]$;

⌈**R:** Pe intervalul $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$ funcţia este strict crescătoare, iar pe fiecare dintre intervalele $[0, \frac{\pi}{3}]$ şi $[\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$ funcţia este strict descrescătoare.⌋

26°.4 $f(x) = (x - 4)e^x$;

⌈**R:** f este strict crescătoare pe $[3, +\infty[$ şi strict descrescătoare pe $]-\infty, 3]$.⌋

26°.5 $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$;

⌈**R:** f este strict crescătoare pe $[-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}]$ şi strict descrescătoare pe intervalele $[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ şi $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$ $(f : [-1, 1] \to \mathbb{R})$.⌋

26°.6 $f(x) = \ln(1 + x^2)$;

⌈**R:** f este strict crescătoare pe $[0, +\infty[$ şi strict descrescătoare pe $]-\infty, 0]$.⌋

26°.7 $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$;

⌈**R:** f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.⌋

26°.8 $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{x^3}$;

⌈**R:** f este strict crescătoare pe $[-e^{1/3}, e^{1/3}] \setminus \{0\}$ şi strict descrescătoare pe fiecare dintre intervalele $]-\infty, -e^{1/3}]$ şi $[e^{1/3}, +\infty[$.⌋

26°.9 $f(x) = |x + 3| - |5x + 1|$;

⌈**R:** f este strict crescătoare pe $]-\infty, -\frac{1}{5}]$ şi strict descrescătoare pe $[-\frac{1}{5}, +\infty[$.⌋

26°.10 $f(x) = \dfrac{\sin(x + a)}{\sin(x + b)}$;

⌈**R:** Să observăm că $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi - b / k \in \mathbb{Z}\}$. Dacă $\sin(b - a) > 0$, f este strict crescătoare pe fiecare interval $\mathbf{I}_k =]k\pi - b, (k + 1)\pi - b[,\ k \in \mathbb{Z}$. Dacă $\sin(b - a) < 0$, f este strict descrescătoare pe fiecare dintre intervalele $\mathbf{I}_k,\ k \in \mathbb{Z}$. Dacă $\sin(b - a) = 0$, f este constantă pe fiecare interval $\mathbf{I}_k$, iar constanta corespunzătoare este $c_k = (-1)^k,\ k \in \mathbb{Z}$.⌋

27°. Să se arate că funcţia $f(x) = (a^x + 1)^{1/x}$ este strict monotonă pe $]0, +\infty[$, pentru orice $a > 1$.

⌈**I:** $f'(x) < 0,\ \forall x \in]0, +\infty[$.⌋

28°. Determinaţi cea mai mică valoare (m) şi cea mai mare valoare (M) pentru fiecare dintre funcţiile:

28°.1. $f : [-2, 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$; ⌈**R:** $m = 4,\ M = 13$.⌋

28°.2. $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$; ⌈**R:** $m = -12,\ M = 2$.⌋

28°.3. $f : [0, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 2\sqrt{x}$; ⌈**R:** $m = 0,\ M = 8$. ⌋

28°.4. $f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$; ⌈**R:** $m = \frac{3}{5},\ M = 1$.⌋

28°.5. $f :]0, 1[\to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{1 - x},\ a > 0 < b$; ⌈**R:** $m = (a + b)^2,\ \nexists M$.⌋

28°.6. $f : [10^{-1}, +\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = x^x$; $\lceil$**R:** $m = \left(\frac{1}{e}\right)^{1/e},\ \nexists M.\rfloor$

29°*. Demonstraţi următoarele inegalităţi:

29°.1. $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x},\ \forall x > 1$;

29°.2. $\ln x > \dfrac{2(x-1)}{x+1},\ \forall x > 1$;

29°.3. $2x \cdot \operatorname{arctg} x \geq \ln(1 + x^2),\ \forall x \in \mathbb{R}$;

29°.4. $1 + x \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) \geq \sqrt{1 + x^2},\ \forall x \in \mathbb{R}$;

29°.5. $\ln(1 + x) > \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1 + x},\ \forall x > 0$;

29°.6. $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x,\ \forall x \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$;

29°.7. $\operatorname{ch} x > 1 + \dfrac{x^2}{2},\ \forall x \neq 0$.

30°. Folosind regulile lui l'Hôspital, calculaţi următoarele limite:

30°.1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{3x - 6}$; $\lceil$**R:** $\frac{4}{3}.\rfloor$

30°.2. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$; $\lceil$**R:** $\frac{2}{3a^{1/6}}.\rfloor$

30°.3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x}$; $\lceil$**R:** $0.\rfloor$

30°.4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - \cos(\alpha x)}{e^{\beta x} - \cos(\beta x)}$; $\lceil$**R:** $\frac{\alpha}{\beta}.\rfloor$

30°.5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$; $\lceil$**R:** $\frac{1}{3}.\rfloor$

30°.6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{c^x - d^x}$; $\lceil$**R:** $\frac{\ln \frac{a}{b}}{\ln \frac{c}{d}}.\rfloor$

30°.7. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos x \ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)}$; $\lceil$**R:** $\cos a.\rfloor$

30°.8. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\left(\pi - 2\operatorname{arctg} x\right) \ln x\right]$; $\lceil$**R:** $0.\rfloor$

30°.9. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$; $\lceil$**R:** $\frac{1}{2}.\rfloor$

30°.10. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{(x + a)(x + b)(x + c)} - x\right)$ $\lceil$**R:** $\frac{a + b + c}{3}.\rfloor$

30°.11. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^x$; $\lceil$**R:** $1.\rfloor$

30°.12. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(e^x + x\right)^{\frac{1}{x}}$; $\lceil$**R:** $e^2.\rfloor$

30°.13. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$; $\lceil$**R:** $1.\rfloor$

30°.14. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{\ln(1 + x)^{1+x}}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right]$; $\lceil$**R:** $\frac{1}{2}.\rfloor$

31°. Arătaţi că deşi $l = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$ există, ea nu poate fi calculată cu ajutorul regulei lui l/Hôspital.

⌈**I:** $l = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - \dfrac{\sin x}{x}}{1 + \dfrac{\sin x}{x}} = 1$. Dacă am aplica regula lui l'Hôspital (de tip $\dfrac{\infty}{\infty}$, ar trebui să existe $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$. Se arată uşor că aceasta ultimă limită nu există.⌋

32°. Calculaţi limitele:

32°.**1** $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbb{N}}} \dfrac{n^k}{a^n}$, $(a > 1,\ k > 0)$; ⌈**R:** 0.⌋

32°.**2** $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbb{N}}} \Big(a^n + n\Big)^{1/n}$, (discuţie după $a > 0$); ⌈**R:** $l = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad a \in]0,1], \\ a, & \text{dacă} \quad a > 1. \end{cases}$⌋

33°. Fie $a, b, c, d \in]0, +\infty[$ şi $\alpha > 0$. Arătaţi că

$$\lambda := \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(ax^\alpha + b)}{\ln(cx^\alpha + d)} = 1.$$

Ce se întâmplă în cazul $\alpha \leq 0$?

⌈**I - R:** Pentru $\alpha > 0$, avem $\dfrac{\infty}{\infty}$, deci $\lambda = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{\alpha a x^{\alpha-1}}{ax^\alpha + b}}{\dfrac{\alpha c x^{\alpha-1}}{cx^\alpha + d}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{cx^\alpha + d}{ax^\alpha + b} \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^{\alpha-1}}{cx^{\alpha-1}} = \dfrac{c}{a} \cdot \dfrac{a}{c} = 1.$

Pentru $\alpha = 0$ funcţia de "*sub*" semnul limită este constantă şi egală cu $\dfrac{\ln(a+b)}{\ln(c+d)}$. Pentru $\alpha < 0$, avem $\lim\limits_{c\to\infty} x^\alpha = 0$, deci $\lambda = \dfrac{\ln(b)}{\ln(d)}$ (în acest caz nu avem "*nedeterminare*").⌋

34°*. Fie $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ interval deschis. Dacă $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe $\mathbf{I}$, arătaţi că f este convexă (respectiv, strict convexă) pe $\mathbf{I}$ dacă şi numai dacă

$$f(x) \geq f(x^\circ) + f'(x^\circ)(x - x^\circ),\ \forall x, x^\circ \in \mathbf{I},$$

(respectiv,

$$f(x) > f(x^\circ) + f'(x^\circ)(x - x^\circ),\ \forall x, x^\circ \in \mathbf{I},\ x \neq x^\circ\Big).$$

Dacă $g : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ este derivabilă, arătaţi că g este concavă (respectiv, strict concavă) pe $\mathbf{I}$ dacă şi numai dacă

$$g(x) \leq g(x^\circ) + g'(x^\circ)(x - x^\circ),\ \forall x, x^\circ \in \mathbf{I},$$

(respectiv,

$$g(x) < g(x^\circ) + g'(x^\circ)(x - x^\circ),\ \forall x, x^\circ \in \mathbf{I},\ x \neq x^\circ\Big).$$

Interpretaţi geometric rezultatele obţinute.

⌈**I - R:** Pentru f convexă şi derivabilă, inegalitatea cerută rezultă din teorema lui Lagrange şi din faptul că derivata este crescătoare pe $\mathbf{I}$.

Interpretarea geometrică este următoarea: graficul unei funcţii convexe şi derivabile f se află "*deasupra*" tangentei la grafic în orice punct $\big(x^\circ, f(x^\circ)\big)$ de pe grafic. În cazul unei funcţii g concave, graficul se află sub tangenta la grafic în orice punct $\big(x^\circ, g(x^\circ)\big)$ al graficului.⌋

35°*. Fie $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ un interval oarecare şi $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R},\ f(x) = \alpha x + \beta$, cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fixate. Arătaţi că f este simultan convexă şi concavă (fără a fi nici strict convexă, nici strict concavă) pe **I**. Arătaţi că, reciproc, dacă $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ este simultan convexă şi concavă, atunci există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = \alpha x + \beta,\ \forall x \in \mathbf{I}$ (funcţiile care sunt simultan convexe şi concave pe **I** se numesc **funcţii afine** pe **I**).

36°*.

36°.1. Arătaţi că funcţia - modul $\big(f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}\big)$ este convexă pe $\mathbb{R}$. Este convexitatea acestei funcţii strictă?

36°.2. Fie **I, J** intervale, $f : \mathbf{I} \to \mathbf{J}$ o funcţie convexă pe **I** şi $\varphi : \mathbf{J} \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă şi crescătoare pe **J**. Arătaţi că $\varphi \circ f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ este convexă pe **I**.

36°.3. Folosind convexitatea funcţiei $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ \varphi(y) = y^\alpha,\ \alpha > 1$ şi afirmaţiile 36°.1, 36°.2, arătaţi că funcţia $\psi(x) = |x|^\alpha$ este convexă pe $\mathbb{R}$.

36°.4. Arătaţi că dacă $\alpha > 1$, atunci

$$|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2|^\alpha < \lambda_1 |x_1|^\alpha + \lambda_2 |x_2|^\alpha,\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 \neq x_2,\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in]0, +\infty[$$

cu $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

36°.5. Folosind ultima inegalitate, arătaţi că $\alpha > 1 \ \Rightarrow\ |x_1 + x_2|^\alpha < 2^{\alpha-1}\big(|x_1|^\alpha + |x_2|^\alpha\big),\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 \neq x_2$. Ce se întâmplă cu ultima inegalitate în cazul $x_1 = x_2$?

37°. Să se determine intervalele de convexitate şi de concavitate pentru funcţiile $f : D \to \mathbb{R}$ următoare (D fiind domeniul maxim de definiţie sau mulţimea specificată); apoi să se determine punctele de inflexiune din D (un punct din interiorul unui interval "*în jurul*" căruia funcţia "*îşi schimbă*" convexitatea se numeşte **punct de inflexiune**).

37°.1. $f(x) = \sin x$;

$\lceil$**R:** f este strict convexă pe fiecare dintre intervalele $[(2k+1)\pi, 2(k+1)\pi],\ k \in \mathbb{Z}$ şi este strict concavă pe fiecare dintre intervalele $[2k\pi, (2k+1)\pi],\ k \in \mathbb{Z}$. Punctele de inflexiune sunt punctele $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. $\rfloor$

37°.2. $f(x) = \cos x$;

$\lceil$**I:** Se ştie că $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, apoi se aplică exerciţiul precedent.$\rfloor$

37°.3. $f(x) = \operatorname{tg} x,\ x \in D := \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$;

$\lceil$**R:** f este strict convexă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ şi strict concavă pe $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, 0 fiind singurul punct de inflexiune.$\rfloor$

37°.4. $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

$\lceil$**R:** f este strict convexă pe $]-\infty, 0]$ şi strict concavă pe $[0, +\infty[$, 0 fiind singurul punct de inflexiune.$\rfloor$

37°.5. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$;

$\lceil$**R:** $\left[\frac{5}{3}, +\infty\right[$ este interval de convexitate strictă, iar $\left]-\infty, \frac{5}{3}\right]$ este interval de concavitate strictă, singurul punct de inflexiune fiind $\frac{5}{3}$.$\rfloor$

37°.6. $f(x) = (x+1)^4 + e^x$;

$\lceil$**R:** f este strict convexă pe $\mathbb{R}$ (şi deci nu are puncte de inflexiune).$\rfloor$

37°.7. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 3a^2},\ (a > 0)$;

$\lceil$**R:** $]-\infty, -3a]$ şi $[0, 3a]$ sunt intervale de convexitate, iar $[-3a, 0]$ şi $[3a, +\infty[$ sunt intervale de concavitate; punctele de inflexiune sunt $-3a,\ 0\ 3a$.$\rfloor$

37°.8. $f(x) = a - \sqrt[3]{x - b}$;

⌈**R:** f este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{b\}$, fiind strict convexă pe $[b, +\infty[$ şi strict concavă pe $]-\infty, b]$; $x^\circ = b$ este singurul punct de inflexiune.⌋

37°.9. $f(x) = e^{\sin x}$, $x \in D := \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

⌈**R:** $\left[-\frac{\pi}{2}, \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ este interval de convexitate strictă, iar $\left[\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ este interval de concavitate strictă; singurul punct de inflexiune este $x^\circ = \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.⌋

37°.10. $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$;

⌈**R:** f este strict convexă pe $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$, strict concavă pe $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, iar $x^\circ = \frac{1}{2}$ este singurul punct de inflexiune.⌋

37°.11. $f(x) = \ln(1 + x^2)$;

⌈**R:** f este strict convexă pe $[-1, 1]$, strict concavă pe fiecare dintre intervalele $]-\infty, -1]$, $[1, +\infty[$; -1 şi 1 sunt punctele de inflexiune.⌋

37°.12. $f(x) = \frac{a}{x} \cdot \ln\frac{x}{a}$, $(a > 0)$;

⌈**R:** f este strict convexă pe $[ae^{3/2}, +\infty[$ şi strict concavă pe $]0, ae^{3/2}]$; $x^\circ = ae^{3/2}$ este singurul punct de inflexiune.⌋

38°. Arătaţi că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{x+1}{x^2+1}$, are exact trei puncte de inflexiune, iar punctele corespunzătoare de pe grafic sunt coliniare.

39°*. Fie $\mathbf{I} \subset \mathbb{R}$ un interval deschis şi $f : \mathbf{I} \to \mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă şi strict convexă pe $\mathbf{I}$, astfel încât $f'(x) \cdot f''(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbf{I}$. Arătaţi că:

39°.1. f este strict crescătoare $\Rightarrow$ $f^{-1} : f(\mathbf{I}) \to \mathbf{I}$ este strict concavă. Verificaţi această afirmaţie în cazul funcţiei $f(x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

39°.2. f este strict descrescătoare $\Rightarrow$ $f^{-1} : f(\mathbf{I}) \to \mathbf{I}$ este strict convexă. Verificaţi această afirmaţie în cazurile funcţiilor: $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = a^x$, $a \in]0, 1[$ şi $f_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$.

⌈**R:** În egalitatea $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$, $\forall y \in f(\mathbf{I})$ derivăm de două ori şi obţinem:

$$f'\big(f^{-1}(y)\big) \cdot \big(f^{-1}\big)''(y) = -f''\big(f^{-1}(y)\big) \cdot \big[(f^{-1})'(y)\big]^2 < 0,$$

ultima inegalitate având loc deoarece $f''(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{I}$.

În cazul 39°.1, avem $f'\big(f^{-1}(y)\big) > 0$, ceea ce împreună cu $f'\big(f^{-1}(y)\big) \cdot \big(f^{-1}\big)''(y) < 0$ conduce la $\big(f^{-1}\big)''(y) < 0$, $\forall y \in f(\mathbf{I})$, feci f^{-1} este strict concavă. În cazul particular $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, avem $f^{-1} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \ln y$, care este strict concavă pe $f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

Afirmaţia de la 39°.2 se demonstrează asemănător.⌋

40°. Puneţi funcţia polinomială

$$f(x) := x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$$

sub forma

$$a_0(x-4)^4 + a_1(x-4)^3 + a_2(x-4)^2 + a_3(x-4) + a_4, \ x \in \mathbb{R}.$$

⌈**I - R:** Se aplică formula lui Taylor pentru n=4. $f(x) = (x-4)^4 + 11(x-4)^3 + 37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56$.⌋

41°. Scrieţi formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange de ordinul n, pentru funcţia $f(x) = \dfrac{1}{x}$, în jurul punctului $x^\circ = -1$.

⌈**R:** $f(x) = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - \ldots - (x+1)^n + (-1)^{n+1}\dfrac{(x+1)^{n+1}}{c^{n+2}}$, $\forall x \in]-\infty, 0[$, unde $c = c(x)$ este între -1 şi x.⌋

42°*. Să se determine raza R şi înălţimea h ale unui cilindru de volum dat V, astfel încât suprafaţa totală a cilindrului să fie minimă (*problema prezintă interes pentru economisirea materialului în construirea unui astfel de cilindru*).

⌈**I - R:** Avem de minimizat suprafaţa totală $S(R) = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + 2\pi R\dfrac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \dfrac{2V}{R} = 2\Big(\pi R^2 + \dfrac{V}{R}\Big)$, unde V este dat, iar variabila este $R > 0$. Condiţia necesară pentru un punct de extrem $R_0 > 0$ este $S'(R_0) = 0$, care conduce la $R_0 = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}} \Rightarrow h_0 = \dfrac{V}{\pi R_0^2} = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$. Punctul critic $R_0 = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ este un punct de minim global strict deoarece $S(R) = 2\Big(\pi R^2 - \dfrac{V}{R}\Big)$ este strict convexă pe $]0, +\infty[$. Avem: $S_{min} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.⌋

43°*.

43°*.1 Arătaţi că suma a două numere pozitive, de produs dat, devine minimă când cele două numere sunt egale între ele.

43°*.2 Demonstraţi aceeaşi afirmaţie pentru $n \geq 3$ numere pozitive.

⌈**I:** Ideea este de a folosi inegalitatea mediilor. Fie $P > 0$ dat. Printre vectorii $(x_1, ..., x_n) \in]0, +\infty[\times \ldots \times]0, +\infty[$ cu proprietatea că $x_1 \cdot ... \cdot x_n = P$, îl căutăm pe acela pentru care $S := x_1 + \ldots + x_n$ este minimă. Din inegalitatea mediilor, avem

$$x_1 + \ldots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 \cdot ... \cdot x_n} = n\sqrt{P} = \underbrace{\sqrt[n]{P} + \ldots + \sqrt[n]{P}}_{n-\text{termeni}}.$$

Deci vectorul $(\sqrt[n]{P}, \ldots, \sqrt[n]{P})$ este cel căutat (evident $\sqrt[n]{P} \cdot ... \cdot \sqrt[n]{P} = P$ şi deci suma este minimă când componentele sunt egale între ele (fiind toate egale cu $\sqrt[n]{P}$)).⌋

44°*. Calculaţi suma

$$S_2(x) := 2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3 \cdot 4 \cdot x^2 + \ldots + n(n-1)x^{n-2}$$

şi apoi găsiţi suma $S = 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3 \cdot 3^2 + \ldots + \dfrac{n(n-1)}{3^{n-5}} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{k(k-1)}{3^{k-5}}$.

⌈**I - R:**

$$S_2(x) = \left(x^2 + x^3 + \ldots + x^n\right)'' = \left(\frac{x^{n+1} - x^2}{x-1}\right)'' = \frac{2 - n(n+1)x^{n-1} + 2(n^2-1)x^n - n(n-1)x^{n+1}}{(1-x)^3}.$$

Apoi $S = 3^3\Big(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{k(k-1)}{3^{k-2}}\Big) = 3^3\Big(\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}\Big) = 3^3 S_2(x)$, unde $x := \dfrac{1}{3}$ şi se aplică formula găsită pentru $S_2(x)$.⌋

45°.

45°.1. Pentru $y = y(x) = x^3 \ln x,\ x > 0$, calculaţi $y^{(4)}$. ⌈**R:** $\dfrac{6}{x}$.⌋

45°.2. Calculaţi $y^{(n)},\ n \in \mathbb{N}$, pentru:

45°.2.1. $y(x) = \dfrac{1-x}{1+x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; ⌈**R:** $\dfrac{2(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$⌋

45°.2.2. $y(x) = xe^x,\ x \in \mathbb{R}$; ⌈**R:** $e^x(x+n)$.⌋

45°.2.3. $y(x) = \log_a x,\ x > 0;$ ⌈**R:** $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln a}$.⌋

45°.2.4. $y(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\};$ ⌈**R:** $(-1)^{n-1}\left[\dfrac{n!}{(x-2)^{n+1}} - \dfrac{n!}{(x-1)^{n+1}}\right]$.⌋

45°.2.5. $y(x) = \sin^2 x,\ x \in \mathbb{R};$ ⌈**R:** $2^{n-1}\sin\left(2x + \dfrac{n-1}{2}\pi\right)$⌋

45°.2.6. $y(x) = x \cdot \ln x,\ x > 0;$ ⌈**R:** $\dfrac{(-1)^n (n-2)!}{x^{n-1}}$⌋

45°.2.7. $y(x) = \ln(ax + b),\ ax + b > 0;$ ⌈**R:** $\dfrac{(-1)^{n-1} a^n (n-1)!}{(ax+b)^n}$⌋

46°.

46°.1. Arătaţi că funcţia $y := e^x \sin x$ verifică egalitatea $y'' - 2y' + 2y = 0$, iar $y := e^{-x} \sin x$ verifică egalitatea $y'' + 2y' + 2y = 0$.

46°.2. Arătaţi că funcţia $y := A \cdot \sin(\omega t + \varphi) + B \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, $(A, B, \omega, \varphi$ - constante), verifică egalitatea $y'' + \omega^2 y = 0$.

46°.3. Arătaţi că funcţia $y := a_1 e^{nx} + a_2 e^{-nx} + a_3 \cos(nx) + a_4 \sin(nx)$ (a_1, a_2, a_3, a_4, n - constante), verifică egalitatea $y^{(4)} = n^4 y$.

47°. Calculaţi:

47°.1. $\left[(x^2 + 1)\sin x\right]^{(20)}$;

⌈**R:** Se aplică regula lui Leibniz de derivare a unui produs de funcţii (teorema 9). Avem

$$(f \cdot g)^{(20)} = f^{(20)} \cdot g + C_{20}^1 f^{(19)} \cdot g' + C_{20}^2 f^{(18)} \cdot g'' + C_{20}^3 f^{(17)} \cdot g''' + \ldots + C_{20}^k f^{(20-k)} \cdot g^{(k)} + \ldots + f \cdot g^{(20)},$$

unde $f(x) = \sin x$, $g(x) = 1 + x^2$. Se observă că suma din formula de mai sus are doar primii trei termeni nenuli, întrucât $g^{(k)}(x) = 0,\ \forall k \geq 3$. Se obţine $\left[(1 + x^2)\sin x\right]^{(20)} = (x^2 - 379)\sin x - 40x \cdot \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.⌋

47°.2. $\left(e^x \sin x\right)^{(n)},\ n \in \mathbb{N}$. ⌈**R:** $\left(e^x \sin x\right)^{(n)} = e^x \left[\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \sin\left(x + \dfrac{k\pi}{2}\right)\right]$.⌋

48°*.

48°.1. Pentru ce constantă $\alpha \in \mathbb{R}$ funcţia $y(x) = e^{\alpha x}$ verifică relaţia

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}?$$

⌈**R:** $\alpha \in \{1, 2\}$.⌋

48°.2. Pentru ce constantă $\alpha \in \mathbb{R}$ funcţia $y(x) = x \cdot e^{\alpha x}$ verifică relaţia

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}?$$

⌈**R:** $\alpha = 3$.⌋

§6.3. Asimptote. Reprezentarea grafică a funcţiilor. Şirul lui Rolle. Aplicaţii la rezolvarea unor ecuaţii. Aproximarea liniară a unei funcţii derivabile în jurul unui punct.

În studiul graficului şi comportării unei funcţii, o noţiune importantă este aceea de asimptotă. Asimptotele pot fi verticale, orizontale sau oblice.

Definiţia 1. *Fie $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dacă $x^\circ \in \mathbb{R}$ este punct de acumulare pentru E şi dacă cel puţin una dintre limitele laterale $\lim\limits_{x \searrow x^\circ} f(x)$, $\lim\limits_{x \nearrow x^\circ} f(x)$ există şi este infinită, spunem că dreapta de ecuaţie $x = x^\circ$ (care esre paralelă cu axa Oy), este* **asimptotă verticală** *la graficul funcţiei f.*

Definiţia 2. *Spunem că dreapta de ecuaţie $y = l$ (paralelă cu axa Ox) este* **asimptotă orizontală** *spre $+\infty$ a lui f dacă şi numai dacă*

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - l| = 0$$

sau, echivalent, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

Analog se defineşte **asimptota orizontală** *spre $-\infty$.*

Observaţia 1. *Afirmaţia definiţiei 2 înseamnă că distanţa dintre punctul $\big(x, f(x)\big)$ de pe graficul funcţiei şi punctul (x, l) de pe dreapta orizontală de ecuaţie $y = l$, tinde la 0 când $x \to +\infty$ (respectiv, $x \to -\infty$).*

Definiţia 3. *Spunem că dreapta de ecuaţie $y = mx + n$, $m \neq 0$, este* **asimptotă oblică** *spre $+\infty$ (resprectiv, spre $-\infty$) a lui f dacă şi numai dacă distanţa dintre punctul $\big(x, f(x)\big)$ de pe grafic şi punctul $(x, mx + n)$ de pe dreaptă, tinde la 0 când $x \to +\infty$ (respectiv, $x \to -\infty$)*

Observaţia 2. *Vom scrie $y = mx + n$, $m \neq 0$, este asimptotă spre $+\infty$ dacă şi numai dacă*

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - mx - n| = 0.$$

Teorema 1. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) Dreapta $y = mx + n$ este asimptotă spre $+\infty$;
(ii) Coeficientul unghiular m şi ordonata la origine n verifică egalităţile:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad n = \lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - mx\big].$$

Reprezentarea grafică a funcţiilor derivabile

Distingem următoarele etape:

I) Determinăm domeniul de definiţie E al funcţiei şi intersecţia graficukui

$$G_f := \{\big(x, f(x)\big);\ x \in E\}$$

cu axele de coordonate;

II) Studiem eventuale simetrii ale graficului şi semnul funcţiei.

Dacă funcţia este pară $\big(E$ simetric faţă de 0 şi $f(-x) = f(x),\ \forall x \in E\big)$, atunci graficul este simetric faţă de axa Oy.

Dacă f este impară $\big(E$ simetric faţă de 0 şi $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in E\big)$, graficul este simetric faţă de origine.

III) Studiem limitele la "*capetele*" unor intervale, continuitatea funcţiei şi asimptotele.

IV) Calculăm prima derivată f', rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0$ şi studiem (dacă este posibil), semnul primei derivate. Obţinem astfel punctele critice (staţionare) şi intervalele de monotonie, conform celor amintite în §2.

Uneori, semnul primei derivate decide şi punctele de extrem. În alte cazuri, nu se poate decide direct semnul lui f', dar se poate determina semnul derivatei secunde $f''(x^\circ)$ într-un punct critic x°.

Dacă f'' este continuă în x° şi $f''(x^\circ) \neq 0$ rezultă că avem:

$$f''(x^\circ) > 0 \ \Rightarrow\ \exists\delta > 0 \text{ astfel încât } f''(x) > 0,\ \forall x \in]x^\circ - \delta, x^\circ + \delta[$$

$\Rightarrow f$ strict convexă pe $]x^\circ - \delta, x^\circ + \delta[\ \Rightarrow\ x^\circ$ punct de minim.

Dacă $f''(x^\circ) < 0$, rezultă că x° este punct de maxim.

Dacă f este de n - ori derivabilă, cu derivata $f^{(n)}$ continuă în vecinătatea unui punct x°, $(n \geq 3)$, pentru care avem

$$f'(x^\circ) = f''(x^\circ) = 0,$$

se foloseşte formula lui Taylor pentru a decide dacă x° este punct de extrem sau nu şi eventual de ce tip este (minim sau maxim; vezi §2).

V) Alcătuim *tabloul de variaţie* (vezi primul exemplu rezolvat de mai jos).

VI) *Trasăm graficul,* pe baza tabloului de variaţie.

Studiul unor ecuaţii cu ajutorul analizei matematice

Fie $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie, pentru care putem trasa graficul G_f.

A rezolva ecuaţia

$$f(x) = y^\circ,\ \ x \in E$$

revine la a determina intersecţia graficului G_f cu dreapta orizontală $[d_0]$ de ecuaţie $y = y^\circ$ $\big($avem $f(x) = y^\circ \ \Leftrightarrow\ \big(x, f(x)\big) = (x, y^\circ) \in G_f \cap [d_0]\big)$.

O altă metodă de a rezolva ecuaţii este dată de **şirul lui Rolle**, care se bazează pe consecinţe ale teoremei lui Rolle (şi pe proprietatea lui Darboux).

Iată **algoritmul** de formare şi utilizare al şirului lui Rolle.

Fie $E \subset \mathbb{R}$ şi $f : E \to \mathbb{R}$, o funcţie derivabilă.

I) Se fixează intervalul de studiu $\mathbf{I} \subset E$, al ecuaţiei

$$f(x) = 0.$$

II) Se rezolvă ecuaţia $f'(x) = 0$ şi se consideră rădăcinile reale ale acestei ecuaţii situate în $\mathbf{I}$, în ordine crescătoare

$$x_m < \ldots < x_1 < x_2 \ldots < x_M,$$

unde

$x_m :=$ cea mai mică rădăcină reală a lui f',

$x_M :=$ cea mai mare rădăcină reală a lui f'.

III) Se calculează $f(x_m), \ldots, f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_M)$, precum şi limitele α şi β ale lui f la capetele intervalului **I**. Se obţine un şir de valori, asociat funcţiei f, numit şirul lui Rolle:

$$\alpha,\ f(x_m), \ldots, f(x_1),\ f(x_2), \ldots, f(x_M),\ \beta.$$

IV) Concluzia se stabileşte astfel:

(i) Dacă în şirul lui Rolle apar două semne alăturate egale $\Big($sign $f(x_1) =$ sign $f(x_2)$, unde

$$\operatorname{sign} y := \begin{cases} -1, & \text{dacă} \quad y < 0, \\ 0, & \text{dacă} \quad y = 0, \\ 1, & \text{dacă} \quad y > 0, \end{cases} \Big)$$

atunci în intervalul $]x_1, x_2[$ nu există rădăcini ale ecuaţiei $f(x) = 0$.

(ii) Dacă în şirul lui Rolle apar două semne alăturate diferite (de exemplu $f(x_1) < 0,\ f(x_2) > 0$), atunci ecuaţia $f(x) = 0$ are exact o rădăcină în intervalul $]x_1, x_2[$.

(iii) Dacă în şirul lui Rolle apare 0 (de exemplu $f(x_k) = 0$), atunci x_k este rădăcină multiplă $\big($de ordin cel puţin doi$\big)$ a ecuaţiei $f(x) = 0$ şi în intervalele $]x_k, x_{k+1}[,\ ]x_{k-1}, x_k[$ nu există nici o rădăcină a acestei ecuaţii.

În acest mod, urmărind schimbările de semn şi zerourile din şirul lui Rolle

$$\alpha,\ f(x_m), \ldots, f(x_1),\ f(x_2), \ldots, f(x_M),\ \beta,$$

se determină numărul de rădăcini reale (fără a determina şi ordinele lor de multiplicitate) ale ecuaţiei $f(x) = 0$, precum şi intervalele în care aceste rădăcini sunt situate (vezi al doilea exerciţiu rezolvat mai jos).

Aproximarea liniară

în jurul unui punct x° de derivabilitate pentru f.

Întrucât pentru f derivabilă în x° avem

$$f(x^\circ + h) - f(x^\circ) = f'(x^\circ) \cdot h + \omega(x^\circ, h),$$

cu

$$\lim_{h \to 0} \frac{\omega(x^\circ, h)}{h} = 0,$$

avem în particular

$$\lim_{h \to 0} \omega(x^\circ, h) = 0,$$

ceea ce implică

$$f(x^\circ + h) - f(x^\circ) \approx f'(x^\circ) \cdot h,$$

adică

$$f(x^\circ + h) \approx f(x^\circ) + f'(x^\circ) \cdot h,$$

şi aproximarea liniară $f(x^\circ) + f'(x^\circ) \cdot h$ a lui $f(x^\circ + h)$, este cu atât mai precisă, cu cât $|h|$ este mai mic. Luând $h := x - x^\circ$, avem deci

$$f(x) \approx f(x^\circ) + f'(x^\circ) \cdot (x - x^\circ),$$

pentru x suficient de "*apropiat*" de x°.

Aproximarea din membrul drept se numeşte liniară deoarece este un polinom de grad 1 în x, deci o funcţie afină (liniară + o constantă) în x.

EXERCIŢII REZOLVATE

1°. Să se reprezinte grafic funcţia $f(x) := \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$, folosind şi derivata a doua.

⌈**Soluţie:** Parcurgem etapele **I**) − **VI**) menţionate în teorie.

I) Domeniul de definiţie E este evident întreaga axă reală. Avem $f(0) = -1$, deci graficul intersectează axa Oy în punctul $(0, -1)$. De asemenea, avem $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, deci singurul punct în care graficul intersectează axa Ox este punctul $(1, 0)$.

II) Evident, semnul lui $f(x)$ este dat de semnul lui $x - 1$, deci $f(x) > 0$, $\forall x \in]1, +\infty[$, $f(x) < 0$, $\forall x \in]-\infty, 1[$. Funcţia nu este nici pară, nici impară.

III Funcţia este continuă pe $\mathbb{R}$, deci nu are asimptote verticale. Pe de altă parte, studiind existenţa unor asimptote orizontale, găsim

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = 1$$

şi

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = -1.$$

Deci, dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$, iar dreapta $y = -1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$. În particular, graficul nu admite asimptote oblice.

IV) Avem $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - (x-1)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{x+1}{(x^2+1)^{3/2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ şi, evident, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, $f'(x) > 0$, $\forall x \in]-1, +\infty[$ şi $f'(x) < 0$, $\forall x \in]-\infty, -1]$. Deci, singurul punct critic este $x^\circ = -1$, funcţia fiind strict crescătoare pe $[-1, +\infty[$ şi strict descrescătoare pe $]-\infty, -1]$. Rezultă că $x^\circ = -1$ este punct de minim global strict ($f(x) > f(-1)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$).

Avem $f_{min} = f(-1) = \dfrac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$.

Trecând la studiul convexităţii, calculăm $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 3x + 1}{(x^2+1)^{5/2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Evident, semnul lui $f''(x)$ este dat de semnul funcţriei polinomiale de gradul 2 de la numărător. Rădăcinile acesteia sunt $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{4}$, $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$. Rezultă că $f''(x) > 0$, $\forall x \in]x_1, x_2[$ şi $f''(x) < 0$, $\forall x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$. Un calcul simplu cu inegalităţi conduce la

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4} < -1 < 0 < x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} < 1.$$

Punctele x_1, x_2 sunt puncte de inflexiune.

V) Tabloul de variaţie este:

x	$-\infty$		x_1	-1		0		x_2	1		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	-1	$\searrow$	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$

VI) Când x parcurge $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, funcţia f descreşte "*concav*" pe $]-\infty, x_1[$ (având asimptotă orizontală $y = -1$ spre $-\infty$, graficul G_f aflându-se "*sub*" această asimptotă). Apoi funcţia descreşte "*convex*" pe $[x_1, -1]$, având pe -1 ca punct de minim global, cu $f_{min} = f(-1) = -\sqrt{2}$. Pe intervalul $[-1, x_2]$, funcţia creşte "*convex*", continuând apoi să crească, dar "*concav*". pe intervalul $[x_2, +\infty[$ şi având dreapta $y = 1$ ca asimptotă orizontală spre $+\infty$. În particular, graficul G_f se află sub această orizontală $y = 1$. Punctele de intersecţie cu axele de coordonate sunt $(0, -1)$ şi $(1, 0)$.⌋

2°. Să se discute după $m \in \mathbb{R}$ numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei

$$f(x) := x + \ln x^2 = m.$$

⌈**Soluţie:** Întâi vom rezolva problema folosind şirul lui Rolle; apoi vom schiţa soluţia aceleiaşi probleme trasând graficul funcţiei f şi discutând după $m \in \mathbb{R}$ intersecţia acestui grafic cu orizontale de ecuaţii $y = m$, $m \in \mathbb{R}$.

1° Revenim la **şirul lui Rolle**. Fie $m \in \mathbb{R}$ şi $f_m(x) := f(x) - m = x + \ln x^2 - m$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Avem:

$E = \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$

f_m este derivabilă pe E şi $f'_m(x) = \dfrac{x+2}{x}$, $\forall x \in E$.

Considerăm întâi eventualele rădăcini ale ecuaţiei $f(x) = m \iff f_m(x) = 0$ situare în intervalul $]0, +\infty[$. Avem $f'_m(x)\dfrac{x+2}{x} > 0$, $\forall x \in]0, +\infty[$, deci f_m este strict crescătoare pe $]0, +\infty[$. Pe de altă parte, avem $\lim\limits_{x \searrow 0} f_m(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \nearrow +\infty} f_m(x) = +\infty$ şi din proprietatea lui Darboux rezultă că există cel puţin o rădăcină a ecuaţiei $f_m(x) = 0$ în $]0, +\infty[$. Conform monotoniei stricte a lui f_m pe $]0, +\infty[$, această rădăcină este unică. Notăm rădăcina pozitivă a lui f_m cu $\widetilde{x}_{3,m}$.

Trecem acum la discuţia asupra rădăcinilor negative ale ecuaţiei $f_m(x) = 0$, urmând etapele **I) - IV)** precizate în teoria referitoare la şirul lui Rolle.

I) Intervalul $\mathbf{I} :=]-\infty, 0[$.

II) $f'_m(x) = \dfrac{x+2}{x} = 0 \iff x = -2$. Deci $x_1 = -2$ este singura rădăcină a derivatei f'_m în intervalul **I**, pentru $\forall m \in \mathbb{R}$.

III) Calculăm

$\alpha := \lim\limits_{x \searrow -\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x \searrow -\infty} \left[x + \ln x^2 - m\right] = \lim\limits_{x \searrow -\infty} x\left[1 + \dfrac{2\ln|x|}{x} - \dfrac{m}{x}\right] = -\infty(1 + 0 + 0) = -\infty$,

$f_m(x_1) = f_m(-2) = -2 + \ln 4 - m = 2\big(\ln 2 - 1\big) - m$ şi

$\beta := \lim\limits_{x \nearrow 0} f_m(x) = -\infty$.

Formăm tabloul referitor la şirul lui Rolle

$$\alpha, \quad f_m(x_1), \quad \beta$$

anume

x	$-\infty$	-2	0
$f'_m(x)$		0	
$f_m(x)$	$-\infty$	$2(\ln 2 - 1) - m$	$-\infty$

(şirul lui Rolle se află pe linia a treia).

IV) Concluzia se stabileşte discutând semnul expresiei $2(\ln 2 - 1) - m$, $f_m(-2) = f(x_1)$, astfel:

(i) dacă $f_m(-2) = 2(\ln 2 - 1) - m) < 0$ $\big($deci, dacă $m > 2(\ln 2 - 1)\big)$, atunci în şirul lui Rolle α, $f_m(-2)$, β apar semnele $-, -, -$, deci nu apar schimbări de semn. Conform teoriei, nu există rădăcini ale ecuaţiei $f_m(x) = 0$ în $\mathbf{I} =]-\infty, 0[$, deci singura rădăcină reală este $\widetilde{x}_{3,m} \in]0, +\infty[$.

(ii) dacă $f_m(-2) > 0$ $\big($deci $2(\ln 2 - 1) - m > 0$, adică $m < 2(\ln 2 - 1)\big)$, atunci în şirul lui Rolle α, $f_m(-2)$, β apar semnele $-, +, -$. Conform teoriei, există exact două rădăcini; $\widetilde{x}_{1,m} \in [-\infty, -2[$ şi $\widetilde{x}_{2,m} \in]-2, 0[$ (câte una pentru fiecare schimbare de semn din şirul lui Rolle). În acest caz, ecuaţia $f_m(x) = 0$ are deci exact trei rădăcini reale, dintre care una este $\widetilde{x}_{3,m} \in]0, +\infty[$.

(iii) dacă $f_m(-2) = 0$, $\big($adică $m = 2(\ln 2 - 1)\big)$, atunci în şirul lui Rolle pe $\mathbf{I} =]-\infty, 0[$ apar semnele $-, 0, -$. În acest caz, $x_1 = -2$ este rădăcină a funcţiei f_m şi a derivatei f'_m, adică $x_1 = -2$ este rădăcină multiplă (de ordin cel puţin 2) pentru ecuaţia $f_m(x) = 0$ şi, conform teoriei, nu există alte rădăcini în $\mathbf{I} =]-\infty, 0[$. În acest caz, ecuaţia $f_m(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^*$ are doar două rădăcini distincte $\widetilde{x}_{1,m} = x_1 = -2$ şi $\widetilde{x}_{3,m} \in]0, +\infty[$, prima dintre ele fiind rădăcină multiplă.

Astfel, discuţia privind numărul rădăcinilor ecuaţiei $f_m(x) = 0$, folosind şirul lui Rolle, este încheiată.

2° La aceleaşi concluzii se putea ajunge trasând graficul funcţiei $f(x) = x + \ln x^2$, $x \in \mathbb{R}^*$ şi "*intersectând*" acest grafic cu drepte orizontale de ecuaţii $y = m$. Într-adevăr, pe intervalul $]-\infty, -2]$, f creşte strict de la $-\infty$ la $f(-2) = -2 + 2\ln 2 = 2(\ln 2 - 1)$. Pe intervalul $[-2, 0[$, funcţia f descreşte strict, de la $f(-2) = 2(\ln 2 - 1)$, la $-\infty$. În sfârşit, pe $]0, +\infty[$ funcţia f creşte strict, de la $-\infty$ la $+\infty$, intersectând axa Ox într-un singur punct $\widetilde{x}_{3,0} \in]0, +\infty[$. Dacă trasăm graficul G_f şi diferite orizontale $y = m$, reobţinem (mai rapid) aceleaşi concluzii asupra rădăcinilor ecuaţiei $f(x) = m$, $m \in \mathbb{R}$.$\rfloor$

3°. Folosind aproximarea liniară pentru funcţia $f(x) = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$, să se determine o valoare aproximativă a numărului $\arcsin 0,51$.

$\lceil$**Soluţie:** Aplicăm formula de aproximare liniară

$$f(x) \approx f(x^\circ) + f'(x^\circ)(x - x^\circ)$$

pentru funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin x$, $x = 0,51$ şi $x^\circ = 0,5$ (f este derivabilă pe $]-1, 1[\ni x^\circ$). Obţinem

$$\arcsin 0,51 \approx \arcsin 0,5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0,5)^2}}(0,51 - 0,5) = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0,01 \quad \left(\approx \frac{\pi}{6} + 0,011 \approx 0,513\right).$$

Aşadar, aproximarea liniară este $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0,01.\rfloor$

EXERCIŢII PROPUSE

4°. Pornind de la definiţie, arătaţi că dreapta $y = 2x + 1$ este asimptotă la graficul funcţiei $f(x) = \dfrac{2x^4 + x^3 + 1}{x^3}$ spre $+\infty$ şi spre $-\infty$.

5°. Determinaţi asimptotele la graficele următoarelor funcţii:

5°.1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 5}$; $\lceil$**R:** $y = 0.\rfloor$

5°.2. $f(x) = c + \dfrac{a^3}{(x-b)^2}$; $\lceil$**R:** $x = b;\ y = c.\rfloor$

5°.3. $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$; $\lceil$**R:** $x = -1,\ y = \dfrac{x}{2} - 1.\rfloor$

5°.4. $f(x) = \sqrt[3]{a^3 - x^3}$; $\lceil$**R:** $y = -x.\rfloor$

5°.5. $f(x) = |x|\sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$; $\lceil$**R:** $y = x$ spre $+\infty$; $y = -x$ spre $-\infty.\rfloor$

5°.6. $f(x) = x \cdot \ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$; $\lceil$**R:** $x = -\dfrac{1}{e};\ y = x + \dfrac{1}{e}.\rfloor$

5°.7. $f(x) = x \cdot e^{2/x} + 1$; $\lceil$**R:** $x = 0,\ y = x + 3.\rfloor$

5°.8. $f(x) = 2x + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$; $\lceil$**R:** $y = 2x + \dfrac{\pi}{2}$ spre $+\infty$, $y = 2x - \dfrac{\pi}{2}$ spre $-\infty.\rfloor$

5°.9. $f(x) = \dfrac{x \cdot P(x) + a}{P(x)}$, unde P este polinom neconstant, $a \neq 0$. $\lceil$**R:** $y = x.\rfloor$

6°. Determinaţi asimptotele următoarelor curbe:

6°.1. $y = y(x) = f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$; $\lceil$**R:** $x = -2$; $y = x - 4.\rfloor$

6°.2. $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$; $\lceil$**R:** $x = 2$; $y = x + 1$ spre $+\infty$, $y = -x - 1$ spre $-\infty.\rfloor$

6°.3. $y = x^2 e^{-x}$; $\lceil$**R:** $y = 0.\rfloor$

6°.4. $y = 2x - \dfrac{\cos x}{x}$; $\lceil$**R:** $x = 0$; $y = 2x.\rfloor$

6°.5. $y = \dfrac{\ln^2 x}{x} - 3x$; $\lceil$**R:** $x = 0$; $y = -3x.\rfloor$

6°.6. $y = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$; $\lceil$**R:** $y = x - 6.\rfloor$

6°.7. $y = 0,5x + \operatorname{arctg} x$; $\lceil$**R:** $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}$ spre $+\infty$, $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{2}$ spre $-\infty.\rfloor$

6°.8. $y = -x \cdot \operatorname{arctg} x$; $\lceil$**R:** $y = -\dfrac{\pi}{2}x + 1$ spre $+\infty$, $y = \dfrac{\pi}{2}x + 1$ spre $-\infty.\rfloor$

7°. Reprezentaţi graficele funcţiilor

7°.1. $f(x) = x^n - nx$, $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$; **7°.2**. $f(x) = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$;

7°.3. $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$; **7°.4**. $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - x$;

7°.5. $f(x) = \ln x + \ln(x - 1)$; **7°.6**. $f(x) = \ln \dfrac{x}{x-1}$;

7°.7. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$; **7°.8**. $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

7°.9. $f(x) = x + e^{-x}$; **7°.10**. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$;

7°.11. $f(x) = e^{2x - x^2}$; **7°.12**. $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$;

7°.13. $f(x) = x \cdot \sin x$; **7°.14**. $f(x) = x + \dfrac{\ln x}{x}$;

7°.15. $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$; **7°.16**. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$;

7°.17. $f(x) = \ln(\cos x)$; **7°.18**. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x \neq 0, \\ 1, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

7°.19. $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$;

7°.20. $f(x) = \begin{cases} 1 - x \cdot e^{-\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x}}, & \text{dacă } x \neq 0, \\ 1, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$

8°. Se dă funcţia

$$f(x) = \begin{cases} a_1(x+2)^2 + b_1, & \text{dacă } x \in]-\infty, -1[, \\ e^x & \text{dacă } x \in [-1, 1], \\ a_2(x-2)^2 + b_2, & \text{dacă } x \in]1, +\infty[. \end{cases}$$

8°.1. Să se determine constantele a_1, b_1, a_2, b_2 astfel încât f să fie derivabilă pe $\mathbb{R}$.
$\lceil$**R:** $a_1 = b_1 = \dfrac{1}{2e}$, $a_2 = -\dfrac{e}{2}$, $b_2 = \dfrac{3e}{2}.\rfloor$

8°.2. Să se traseze graficul lui f, a_1, b_1, a_2, b_2 fiind numerele determinate la 8°.1.

9°. Folosind şirul lui Rolle, determinaţi numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $2x^4 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$.
$\lceil$**R:** Există două rădăcini reale distincte: $x_1 \in \left]-\dfrac{1}{2}, 1\right[$, $x_2 \in]1, +\infty[.\rfloor$

10°. Determinaţi numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei $x \cdot \ln x = a$, unde $a > 0$.

$\lceil$**R:** Folosind şirul lui Rolle pentru funcţia $f_a(x) := x \cdot \ln x - a$, $x > 0$, sau graficul funcţiei $f(x) := x \cdot \ln x$, $x > 0$, se ajunge la concluzia: există o singură rădăcină reală, care se găseşte în intervalul $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ şi această rădăcină este simplă (nefiind şi rădăcină a derivatei f').$\rfloor$

11°. Arătaţi că ecuaţia

$$x^4 + 3x^2 - x - 2 = 0$$

are exact două rădăcini reale, aparţinând intervalelor $]-1, 0[$ şi restectiv $]0, 1[$.

12°. Arătaţi că ecuaţia $x \cdot e^x = 2$ are exact o rădăcină reală, care aparţine intervalului $]0, 1[$ şi care este rădăcină simplă.

Definiţia 4. *Fie $f : M \to M$. Elementul $x^* \in M$ se numeţe punct fix al lui f dacă şi numai dacă $f(x^*) = x^*$.*

13°. Să se studieze existenţa şi eventual valorile punctelor fixe ale funcţiilor următoare:

13°.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$; $\lceil$**R:** $x_1^* = -1$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 1$.$\rfloor$

13°.2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$; $\lceil$**R:** $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$.$\rfloor$

13°.3. $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$; $\lceil$**R:** $x^* = 0$.$\rfloor$

13°.4. $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$; $\lceil$**R:** Nu există puncte fixe.$\rfloor$

13°.5. $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1)$; $\lceil$**R:** $x^* = 0$.$\rfloor$

13°.6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $a > 1$ – discuţie.

$\lceil$**R:** - dacă $a \in \left]1, e^{1/e}\right[$, funcţia exponenţială $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, are exact două puncte fixe;

- dacă $a = e^{1/e}$, avem un singur punct fix $x^* = e$ al funcţiei $f(x) = e^{\frac{x}{e}}$.

- dacă $a > e^{1/e}$, funcţia exponenţială $x \to a^x$ nu are nici un punct fix.$\rfloor$

14°.

14°.1. Arătaţi că aproximarea liniară în jurul punctului $x^\circ = 0$ a funcţiei e^x este $x + 1$. Determinaţia apoi valoarea aproximativă a lui $e^{-0,001}$.

$\lceil$**R:** $e^{-0,001} \approx e^0 + e^0(-0,001 - 0) = 1 - 0,001 = 0,999$.$\rfloor$

14°.2. Care este aproximarea liniară în jurul lui $x^\circ = 0$ a funcţiei $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + x)$? Calculaţi apoi (cu aproximarea liniară) numărul $\ln(0,999)$.

$\lceil$**R:** $\ln(1 + x) \approx x$ în jurul lui $x^\circ = 0 \Rightarrow \ln(0,999) = \ln(1 - 0,001) \approx -0,001$.$\rfloor$

§ 6.4. Rezolvarea unor ecuaţii funcţionale

Asupra ecuaţiei funcţionale
$g(x) = g(f(x)),\ \forall x \in \mathbf{I}$

Unele probleme concrete conduc la ecuaţia funcţională

$$g(x) = g(f(x)), \forall x \in \mathbf{I}, \tag{1}$$

unde f este o funcţia necunoscută, iar g este o funcţie continuă dată, care îndeplineşte anumite condiţii (g descreşte pe un subinterval, apoi creşte).

În astfel de condiţii asupra lui g, există o unică soluţie strict descrescătoare şi continuă a ecuaţiei (1). De exemplu, dacă

$$g(x) = x^2, \tag{1'}$$

soluţia strict descrescătoare (şi continuă) a ecuaţiei

$$x^2 = \big(f(x)\big)^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

este

$$f(x) = -x,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

În cele ce urmează ne ocupăm de ecuaţii funcţionale de tipul

$$g(x) = g(f(x)),\ \forall x \in \mathbf{I},$$

unde f este funcţia necunoscută, iar g este o funcţie dată, ce îndeplineşte anumite condiţii pe intervalul $\mathbf{I}$.

Există multe funcţii concrete g ce satisfac astfel de condiţii.

Metoda de construcţie a funcţiei f pornind de la g are un caracter general şi "*geometric*" după cum rezultă din teorema următoare. Existenţa lui f se demonstrează construind-o efectiv (conform $(viii)$ din teorema următoare).

Teorema 1. *Fie $u, v \in \overline{\mathbb{R}},\ u < v,\ b \in]u, v[,\ g :]u, v[\ \to\ \mathbb{R}$ o funcţie continuă, cu proprietăţile:*

1) $\exists \lim\limits_{x \searrow u} g(x) = \lim\limits_{x \nearrow v} g(x) = w \in \overline{\mathbb{R}}$;

2) *g este strict descrescătoare pe $]u, b]$ şi strict crescătoare pe $[b, v[$.*

Atunci există o funcţie unică $f :]u, v[\ \to\ ]u, v[$ astfel încât

$$g(x) = g(f(x)),\ \forall x \in]u, v[,$$

iar f are următoarele însuşiri:

(i) $\lim\limits_{x \searrow u} f(x) = v,\ \lim\limits_{x \nearrow v} f(x) = u$;

(ii) *b este unicul punct fix al lui f;*

(iii) $f^{-1} = f$ *pe* $]u, v[$;

(iv) *f este continuă;*

(v) *dacă g este derivabilă de n ori $(n \geq 1)$ pe $]u, v[\setminus\{b\}$, atunci f este derivabilă de n ori pe $]u, v[\setminus\{b\}$;*

(*vi*) *dacă* g *este derivabilă de două ori pe* $]u,v[$, g'' *fiind continuă, cu* $g''(b) \neq 0$ *şi dacă există*

$$\rho_1 := \lim_{x \to b} f'(x) \in \overline{\mathbb{R}},$$

atunci f *este derivabilă în* b *şi* $f'(b) = -1$;

(*vii*) *dacă* g *este derivabilă de trei ori, cu* g''' *continuă,* $g''(b) \neq 0$ *şi dacă există*

$$\rho_1 = \lim_{x \to b} f'(x) \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \rho_2 := \lim_{x \to b} f''(x) \in \mathbb{R},$$

atunci f *este derivabilă de două ori în* b *şi*

$$f''(b) = \rho_2 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{g'''(b)}{g''(b)};$$

(*viii*) *dacă notăm* $g_s := g|_{]u,b]}$, $g_d = g|_{[b,v[}$, *atunci* f *se construieşte pornind de la* g, *după "formulele":*

$f(x^\circ) = \big(g_d^{-1} \circ g_s\big)(x^\circ) = \sup\{x \in [b,v[;\ g_d(x) \leq g_s(x^\circ)\},\ \forall x^\circ \in]u,b]$;

$f(x^\circ) = \big(g_s^{-1} \circ g_d\big)(x^\circ) = \inf\{x \in]u,b][;\ g_s(x) \leq g_d(x^\circ)\},\ \forall x^\circ \in [b,v[$;

Exerciţiu rezolvat

4°.1 Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, şi orice $\alpha, \beta, \lambda > 0$ există o unică funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu următoarele proprietăţi:

(P.1) $\begin{cases} x^{2n} - \lambda x = e^{\alpha f(x)} + \beta f(x) - 1, & \text{dacă} \quad x < 0, \\ e^{\alpha x} + \beta x - 1 = \big(f(x)\big)^{2n} - \lambda f(x), & \text{dacă} \quad x \geq 0; \end{cases}$

(P.2) f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$;

(P.3) 0 este unicul punct fix al lui f;

(P.4) $f^{-1} = f$ pe $\mathbb{R}$;

(P.5) f este continuă pe $\mathbb{R}$;

(P.6) f are derivate de orice ordin pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(P.7) f este derivabilă în 0 $\Leftrightarrow \lambda = \alpha + \beta$ şi în acest caz, f' este continuă pe $\mathbb{R}$, cu $f'(0) = -1$;

(P.8) f poate fi "*construită*" după "*formulele*":

$f(x^\circ) = \sup\{x \geq 0;\ e^{\alpha x} + \beta x - 1 \leq (x^\circ)^{2n} - \lambda x^\circ\},\ \forall x^\circ \leq 0,$

$f(x^\circ) = \inf\{x \leq 0;\ x^{2n} - \lambda x \leq e^{\alpha x^\circ} + \beta x^\circ - 1\},\ \forall x^\circ \geq 0;$

(P.9) dacă $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{N}^*$ şi $x \in \mathbb{Z}$, atunci $f(x) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 0$.

⌈**Soluţie:** Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \begin{cases} x^{2n} - \lambda x, & \text{dacă} \quad x < 0, \\ e^{\alpha x} + \beta x - 1, & \text{dacă} \quad x \geq 0. \end{cases}$ Atunci g este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi $g'(x) = \begin{cases} 2nx^{2n-1} - \lambda, & \text{dacă} \quad x < 0, \\ \alpha e^{\alpha x} + \beta, & \text{dacă} \quad x > 0. \end{cases}$ Pe de altă parte, avem evident $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. Astfel, g îndeplineşte condiţiile din ipoteza teoremei precedente, unde $u := -\infty$, $v := +\infty$, $w := +\infty$, $b : +0$.

Aplicând această teoremă, există $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât au loc (P.1) - (P.6) şi (P.8).

Demonstrăm acum că are loc (P.7). Derivând în egalităţile (P.1), obţinem:

$\begin{array}{lll} 2nx^{2n-1} - \lambda = \big[\alpha e^{\alpha f(x)} + \beta\big] f'(x), & \text{dacă} & x < 0, \\ \alpha e^{\alpha x} + \beta = \big[2n\big(f(x)\big)^{2n-1} - \lambda\big] f'(x), & \text{dacă} & x > 0. \end{array}$ Astfel, într-o vecinătate $]-\delta, \delta[$ a lui 0, avem $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2nx^{2n-1}-\lambda}{\alpha e^{\alpha f(x)}+\beta}, & \text{dacă } -\delta<x<0,\\ \dfrac{\alpha e^{\alpha x}+\beta}{2n\big(f(x)\big)^{2n-1}-\lambda}, & \text{dacă } 0<x<\delta.\end{cases}$ Rezultă că $\lim\limits_{x\nearrow 0} f'(x)=-\dfrac{\lambda}{\alpha+\beta}$, $\lim\limits_{x\searrow 0} f'(x)=$ $-\dfrac{\alpha+\beta}{\lambda}$. De aici deducem imediat că derivatele laterale în 0 sunt $f'_s(0)=-\dfrac{\lambda}{\alpha+\beta}$, $f'_d(0)=-\dfrac{\alpha+\beta}{\lambda}$. Pe de altă parte, f este derivabilă în 0 dacă şuınumai dacă $f'_s(0)=f'_d(0)\in\mathbb{R}$. Din cele de mai sus, rezultă că f este derivabilă în 0 atunci şi numai atunci când $-\dfrac{\lambda}{\alpha+\beta}=-\dfrac{\alpha+\beta}{\lambda}\Leftrightarrow\lambda=\alpha+\beta$ şi, în caz de derivabilitate, avem $f'(0)=-1$.

Rămâne de demonstrat (P.9). Fie $\alpha,\beta,\lambda\in\mathbb{N}^*$ şi $x\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Să presupunem prin absurd că $f(x)\in\mathbb{Z}$. Ţinând cont de faptul că f este strict descrescătoare, având ca unic punct fix pe 0, există numai două cazuri:

(C_1) $\quad x\in\mathbb{Z}_-\setminus\{0\}$ şi $f(x)\in\mathbb{Z}_+\setminus\{0\}$

sau

(C_2) $\quad x\in\mathbb{Z}_+\setminus\{0\}$ şi $f(x)\in\mathbb{Z}_-\setminus\{0\}$.

Vom rezolva doar cazul (C_1), întrucât al doilea caz se rezolvă asemănător.

Fie deci $x\in\mathbb{Z}_-\setminus\{0\}$ şi $f(x)\in\mathbb{Z}_+\setminus\{0\}$. Avem $x^{2n}-\lambda x=e^{\alpha f(x)}+\beta f(x)-1\Leftrightarrow e^{\alpha f(x)}+\beta f(x)-1+\lambda x-x^{2n}=0$. Întrucât $\alpha,\beta,\lambda,x,f(x)$ sunt numere întregi, cu $\alpha>0$ $(\alpha\geq 1)$, $f(x)\geq 1$, ultima egalitate spune că e este rădăcina unei ecuaţii algebrice cu coeficienţi întregi, adică e ar fi un număr algebric. Dar se ştie că numărul e este transcendent[1] (nealgebric). Rezultă că $x\in\mathbb{Z}_-\setminus\{0\}\Rightarrow f(x)\notin\mathbb{Z}$. Asemănător, se poate arăta că $x\in\mathbb{Z}_+\setminus\{0\}\Rightarrow f(x)\notin\mathbb{Z}$. Rezultă că $x\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\Rightarrow f(x)\notin\mathbb{Z}$, ceea ce poate fi rescris astfel: $\big(x\in\mathbb{Z},\ f(x)\in\mathbb{Z}\big)\Rightarrow x=0$. Astfel, implicaţia " $\Rightarrow$ " din (P.9) este demonstrată. Cum implicaţia inversă este evidentă $(f(0)=0\in\mathbb{Z})$, rezolvarea este completă.$\rfloor$

Exerciţii propuse

4°.2 Să se demonstreze afirmaţia (vi) şi echivalenţa relaţiei (1) cu formulele

$(1')$ $\qquad f(x^\circ)=\big(g_d^{-1}\circ g_s\big)(x^\circ),\ x^\circ\in\,]u,b]$,

$(1")$ $\qquad f(x^\circ)=\big(g_s^{-1}\circ g_d\big)(x^\circ),\ x^\circ\in[b,v[$.

din teorema 4.1. Interpretaţi geometric egalitatea (1).

$\lceil$**I:** Pentru a demonstra (vi), derivăm în (1), ţinând apoi cont că b fiind punct de minim pentru g, avem $g'(b)=0$. Pe de altă parte, $g''(b)\neq 0$ şi g'' continuă în $b\Rightarrow g''\neq 0$ pe o vecinătate a lui b. Derivând în (1), obţinem pentru orice x într-o vecinătate a lui b: $g'(x)=g'\big(f(x)\big)f'(x)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{g'(x)}{g'\big(f(c)\big)}$, $\forall x\in\,]b-\delta,b+\delta[$. Fie $\rho_1:=\lim\limits_{x\to b} f'(x)\in\overline{\mathbb{R}}$. În ultima egalitate facem $x\to b$ şi obţinem

$$\rho_1=\lim_{x\to b} f'(x)=\lim_{x\to b}\frac{g'(x)}{g'\big(f(x)\big)}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{l'Hospital}{=}\lim_{x\to b}\frac{g''(x)}{g''\big(f(x)\big)f'(x)}=\frac{g''(b)}{g''\big(f(b)\big)}\cdot\frac{1}{\rho_1}\overset{(ii)}{=}\frac{g''(b)}{g''(b)}\cdot\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{\rho_1}.$$

Am obţinut $\rho_1=\dfrac{1}{\rho_1}$, ceea ce implică $\rho_1\in\{-1,1\}$. Ştiind că f este descrescătoare, avem $\rho_1:=\lim\limits_{x\to b} f'(x)\leq 0$, deci $\rho_1=-1$. Rezultă acum uşor că $f'(b)=\rho_1=-1$.

Trecând la "*formula*"

$(1')$ $\qquad f(x^\circ)=\big(g_d^{-1}\circ g_s\big)(x^\circ),\ x^\circ\in\,]u,b]$,

observăm că $(1')$ este echivalentă cu (1) pentru $x=x^\circ\in\,]u,b]$. Într-adevăr, pentru $x^\circ\in\,]u,b]$, $(1')$ $\Leftrightarrow f(x^\circ)=g_d^{-1}\big(g_s(x^\circ)\big)\Leftrightarrow g_d\big(f(x^\circ)\big)=g_s(x^\circ)\Leftrightarrow g\big(f(x^\circ)\big)=g(x^\circ)\Leftrightarrow(1)$, deoarece $x^\circ<b\Leftrightarrow f(x^\circ)>f(b)=b$. Această ultimă afirmaţie se observă uşor dacă interpretăm geometric egalitatea (1) pe un desen al graficului lui g. Mai precis, pentru $x^\circ\in\,]u,b]$, construcţia lui $f(x^\circ)$ se face astfel: se trasează

[1] Miron Nicolescu *Analiză matematică* Vol. I, pag. 224, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1957

o verticală din punctul $(x^\circ, 0)$, până când aceasta intersectează graficul lui g_s în punctul $(x^\circ, g_s(x^\circ)$, apoi se trasează o orizontală, până când aceasta intersectează cealaltă ramură a graficului lui g, adică graficul lui g_d, în punctul $\big(f(x^\circ, g_s(x^\circ)\big) = \big(f(x^\circ), g_d(f(x^\circ))\big)$. Din acest punct se trasează o vertivală, ce intersectează axa Ox în punctul $\big(f(x^\circ), 0\big)$, cu $f(x^\circ) > b$. Pentru $x \in [b, v[$, echivalenţa $(1'') \Leftrightarrow (1)$ şi interpretarea geometrică respectivă se demonstrează asemănător.⌋

4°.3 Fie $\alpha, \beta, \lambda, \mu > 0, \alpha \neq \beta, \lambda \neq \mu$ şi fie $k \in \mathbb{N}^*$. Atunci există o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât:

(P.1)
$$\begin{aligned} -\alpha x^{2k+1} - \lambda x &= \beta\big(f(x)\big)^{2k+1} + \mu f(x), \quad \text{dacă} \quad x < 0, \\ \beta x^{2k+1} + \mu x &= -\alpha\big(f(x)\big)^{2k+1} - \lambda f(x), \quad \text{dacă} \quad x > 0; \end{aligned}$$

(P.2) f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$;
(P.3) 0 este unicul punct fix al lui f;
(P.4) $f^{-1} = f$ pe $\mathbb{R}$:
(P.5) f este continuă pe $\mathbb{R}$;
(P.6) f este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
(P.7) dacă există $\rho_1 := \lim\limits_{x \to 0} f'(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci f este derivabilă şi în 0, f' este continuă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(0) = -1$;
(P.8) au loc următoarele formule constructive pentru f :

$$\begin{aligned} f(x^\circ) &= \sup\{x \geq 0;\ \beta x^{2k+1} + \mu x \leq -\alpha(x^\circ)^{2k+1} - \lambda x^\circ\}, \quad \text{dacă} \quad x^\circ < 0, \\ f(x^\circ) &= \inf\{x \leq 0;\ -\alpha x^{2k+1} - \lambda x \leq \beta(x^\circ)^{2k+1} + \mu x^\circ\}, \quad \text{dacă} \quad x^\circ > 0; \end{aligned}$$

(P.9) dreapta $y = -\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2k+1}} x$ este asimptotă oblică la $-\infty$ pentru graficul lui f, în timp ce dreapta $y = -\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2k+1}} x$ este asimptotă oblică la $+\infty$;

(P.10) dacă există $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{N}^*$, cu $(\alpha_1, \beta_1) = 1$,[2] astfel încât $\alpha = \alpha_1^{2k+1}$, $\beta = \beta_1^{2k+1}$, atunci pentru orice întreg prim x cu $|x|$ suficient de mare, $f(x)$ nu poate fi un întreg prim.

⌈**I:** Se aplică teorema 4.1 funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(u := -\infty,\ v := +\infty)$, definită prin:

$$\begin{aligned} g(x) &= -\alpha x^{2k+1} - \lambda x, \quad \text{dacă} \quad x \leq 0, \\ g(x) &= \beta x^{2k+1} + \mu x, \quad \text{dacă} \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Pentru a demonstra (P.9), se împarte cu $x \neq 0$ în egalităţile (P.1) şi se face $|x| \to \infty$.⌋

[2] α_1 şi β_1 - numere naturale prime între ele

§ 6.5 Exerciţii diverse la capitolul 6

5°.1 Să se arate că pentru orice $a \in]1, e^{1/e}[$ fixat, funcţia exponenţială $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, are exact două puncte fixe în $\mathbb{R}$.

⌈**I:** Se pune ecuaţia $f(x) = a^x = x$ sub forma echivalentă $\varphi(x) = a^x - x = 0$ şi se studiază zerourile (şi eventual graficul) funcţiei φ.⌋

5°.2 Fie ecuaţia algebrică

$$f(x) := x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

cu $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Ştiind că toate rădăcinile acestei ecuaţii sunt reale, pozitive şi îndeplinesc condiţia

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix} = 0,$$

să se rezolve ecuaţia.

⌈**I:** Egalitatea din ipoteză este echivalentă cu: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3x_1x_2x_3$ (calcul), care se poate scrie astfel: $\dfrac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{3} = \sqrt[3]{x_1^3x_2^3x_3^3}$. Conform inegalităţii mediilor (în care avem egalitate dacă şi numai dacă termenii (factorii) care apar sunt egali între ei), rezultă că $x_1 = x_2 = x_3$. Apoi se arată uşor că $x_1 = -\sqrt[3]{a_0} (= x_2 = x_3)$.⌋

5°.3 Fie ecuaţia algebrică

$$f(x) := x^n - nx^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + (-1)^n = 0,$$

unde $a_1, ..., a_{n-2} \in \mathbb{R}$. Ştiind că toate rădăcinile ecuaţiei sunt reale şi pozitive, să se rezolve ecuaţia.

⌈**I:** Folosind relaţiile lui Viète, se arată că media aritmetică a rădăcinilor coincide cu media lor geometrică. Din inegalitatea mediilor, rezultă că rădăcinile sunt egale între ele. Apoi rezultă uşor că rădăcina multiplă de ordinul n este $x_1 = 1$.⌋

5°.4 Arătaţi că pentru orice $a, b > 0$, $a \neq b$, avem

1°) $\dfrac{a+b}{2} > \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a}$;

2°) $\sqrt{ab} < \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a}$.

⌈**I:** Pentru a demonstra (de exemplu) 1°), presupunem $a < b$ şi scriem inegalitatea sub forma echivalentă (împărţim cu $b > 0$):

$$\frac{a}{b} + 1 > 2\frac{1 - \frac{a}{b}}{-\ln \frac{a}{b}}.$$

Notând $\dfrac{a}{b} =: t \in]0, 1[$, avem de arătat că $t + 1 > 2\dfrac{t-1}{\ln t}$, $\forall t \in]0, 1[$. Aceasta revine la a scrie: $\varphi(t) = t + 1 + 2\dfrac{1-t}{\ln t} > 0$, $\forall t \in]0, 1[$. Ultima inegalitate se demonstrează studiind semnul (şi eventual graficul) funcţiei $\varphi :]0, 1[\to \mathbb{R}$, cu ajutorul primelor două derivate.⌋

5°.5 Fie $0 < a < b$, $n > 1$. Să se arate că:

1) $a + \left(\sqrt[n]{2} - 1\right)b < \sqrt[n]{a^n + b^n} < a + b$;

2) $b - a < \sqrt[n]{b^n - a^n} < \dfrac{2}{\sqrt[n]{2}} \cdot b - a$.

⌈**I:** Se procedează ca la exerciţiul anterior.⌋

5°.6 Să se arate că pentru orice $a > 0$, $a \neq 1$ şi orice $x > 1$, avem

$$a - 1 > x\left(a^{1/x} - 1\right) > \ln a.$$

⌈**I:** Fie $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x\left(a^{1/x} - 1\right)$. Se arată că f este strict descrescătoare pe $]0, +\infty[$. Apoi se exploatează inegalităţile $f(1) > f(x) > \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ln a$, $\forall x > 1$.⌋

5°.7 Folosind inegalitatea

$$\ln(1 + x) \leq x, \ \forall x > -1,$$

să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2.$$

5°.8 Fie $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) := 2\sqrt{x} - 3 + \dfrac{1}{x}$.

(i) Să se studieze graficul funcţiei f.

(ii) Să se discute după parametrul $m \in \mathbb{R}$ numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $f(x) = m$.

(iii) Să se arate că pentru orice $a, b \in]0, +\infty[$, avem

$$2a\sqrt{a} \geq \sqrt{b}\left(3a - b\right).$$

În ce caz avem egalitate?

⌈**R:** Când x parcurge intervalul $]0, 1]$, $f(x)$ descreşte strict de la $+\infty$ la 0. Când x parcurge intervalul $[1, +\infty[$, $f(x)$ creşte strict de la 0 la $+\infty$. În particular, $x^\circ = 1$ este punct de minim global pentru f, iar $f_{\min} = f(1) = 0$. Deci graficul lui f se află deasupra axei Ox, intersectând Ox doar în punctul $(1, 0)$, în care axa Ox este tangentă la grafic$\left(f(1) = 0 = f'(1)\right)$.

Pentru $m < 0$, orizontala $y = m$ nu intersectează graficul

Pentru $m = 0$, dreapta $y = m = 0$ (axa Ox) intersectează graficul numai în punctul $(1, 0)$, în care este tangentă la grafic ceea ce înseamnă că ecuaţia $f(x) = 0$ are ca rădăcină dublă pe $x^\circ = 1$.

Dacă $m > 0$, orizontala $y = m$ intersectează graficul lui f exact în două puncte $P_1\left(x_1, f(x_1)\right)$ şi $P_2\left(x_2, f(x_2)\right)$, cu $x_1 \in]0, 1[$ şi respectiv $x_2 \in]1, +\infty[$. Deci ecuaţia $f(x) = 0$ are exact două rădăcini reale x_1, x_2.

Pentru inegalitatea (iii), se împarte cu $b\sqrt{b} > 0$ şi, notând $x := \dfrac{a}{b} \in]0, +\infty[$, inegalitatea respectivă revine la $f\left(\dfrac{a}{b}\right) = f(x) \geq 0$, condiţie care rezultă din cele arătate mai sus. Vom avea egalitate dacă şi numai dacă $\dfrac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b$.⌋

5°.9 Fie $n \in]1, +\infty[$ (nu neapărat număr întreg), $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $e^2 \leq a < b$ şi

$$a^n + b^n = c^n.$$

Fie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = a^x + b^x - c^x$.

(i) Arătaţi că $\varphi(x) > 0$, $\forall x < n$ şi $\varphi(x) < 0$, $\forall x > n$;

(ii) arătaţi că există un unic număr $x_1 \in]0,n[$ astfel încât $\varphi'(x_1)>0, \forall x<x_1, \varphi'(x)<0$, $\forall x > x_1$ şi un unic punct $x_2 \in]0,n[$ cu proprietăţile $\varphi''(x) > 0$, $\forall x < x_2$, $\varphi''(x) < 0$, $\forall x > x_2$, $\varphi''(x_2) = \varphi'(x_1) = 0$. În plus, are loc relaţia $x_2 < x_1$;

(iii) trasaţi graficul funcţiei φ;

(vi) demonstraţi că φ este strict convexă pe $]-\infty, n-1]$.

(v) Arătaţi că $\varphi(x) < c^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5°.10 Fie $n, a, b, c, \varphi, x_1, x_2$ ca în exerciţiul 5°.9. Atunci există o funcţie $f :]-\infty, n[\to]-\infty, n[$ astfel încât

(i) $c^x - a^x - b^x = c^{f(x)} - a^{f(x)} - b^{f(x)}$, $\forall x \in]-\infty, n[$;

(ii) f este strict descrescătoare, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = n$, $\lim\limits_{x\to n} f(x) = -\infty$;

(iii) x_1 este singurul punct fix al funcţiei f;

(iv) $f^{-1} = f$ pe intervalul $]-\infty, n[$;

(v) f este continuă pe $]-\infty, n[$;

(vi) f este indefinit derivabilă pe $]-\infty, n[\setminus\{x_1\}$;

(vii) dacă există $\rho_1 := \lim\limits_{x\to x_1} f'(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci f este derivabilă în x_1 şi $f'(x_1) = \rho_1 = -1$;

$(viii)$ următoarele formule de "*construire*" a funcţiei f au loc:

$$f(x^\circ) = \sup\{x \in [x_1, n[;\ c^x - a^x - b^x \le c^{x^\circ} - a^{x^\circ} - b^{x^\circ}\}, \qquad \text{dacă} \quad x^\circ \le x_1,$$
$$f(x^\circ) = \inf\{x \in]-\infty, x_1];\ c^x - a^x - b^x \le c^{x^\circ} - a^{x^\circ} - b^{x^\circ}\}, \quad \text{dacă} \quad x^\circ \in [x_1, n[;$$

(ix) avem $n-1 < f(x) < n$, $\forall x \in]-\infty, x_1]$ (în particular, dacă $n \in \mathbb{N}^*$, $n \ge 2$, $f(x) \notin \mathbb{Z}$, $\forall x \le x_1$);

(x) fie $\lambda := -\big[c^n \ln c - a^n \ln a - b^n \ln b\big]^{-1} < 0$; dacă limitele ce apar mai jos există, atunci avem:

$$\lambda := \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)-n}{a^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{a^x\big(\ln a\big)^k},\ \forall k \in \mathbb{N}^*$$

(în particular, întrucât $\lambda < 0$, rezultă că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $\exists M_k > 0$ astfel încât $f^{(k)}$ este strict descrescătoare şi strict concavă pe $]-\infty, -M_k[$;

(xi) există $M > 0$ suficient de mare astfel încât

$$x^2 f''(x) > 4\big[xf'(x) - 2f(x) + 2f\big(\frac{x}{2}\big)\big],\ \forall x < -M;$$

în particular, avem $xf'(x) < 2\big[f(x) - f\big(\frac{x}{2}\big)\big]$, $\forall x < -M$.

⌈**R:** Se aplică teorema 4.1 funcţiei

$$g(x) := -\varphi(x) = c^x - a^x - b^x,\ \forall x \in]-\infty, n[.$$

Ipotezele teoremei sunt îndeplinite, conform exerciţiului anterior 5°.9.⌋

5°.11 Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$. Atunci există o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât:

(i) $x^{2p+1}(x-1)^{2q+1} = \big[f(x)\big]^{2p+1}\big[f(x)-1\big]^{2q+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

(ii) f este strict descrescştoare, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;

(iii) $b := \dfrac{2p+1}{2(p+q+1)}$ este unicul punct fix al lui f;

(iv) $f^{-1} = f$ pe $\mathbb{R}$;
(v) f este continuă pe $\mathbb{R}$;
(vi) f este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{b\}$;
(vii) dacă există $\rho_1 := \lim\limits_{x \to b} f'(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci f este derivabilă în b şi $f'(b) = \rho_1 = -1$;
$(viii)$ dacă există $\rho_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ şi $\lim\limits_{x \to b} f''(x) \in \mathbb{R}$, atunci f este de două ori derivabilă în b şi

$$f''(b) = \frac{16}{3} \cdot \frac{(p+q+1)(q-p)}{(2p+1)(2q+1)};$$

(ix) dacă $p > q$, atunci există $\delta > 0$ suficient de mic astfel încât

$$f(x) + x \leq 2b, \ \forall x \in]b - \delta, b + \delta[$$

şi inegalitatea este strictă pentru $x \neq b$, iar
dacă $p < q$, atunci are loc inegalitatea contrară;
(x) avem:

$$f(x^\circ) = \sup\{x \geq b;\ x^{2p+1}(x-1)^{2q+1} \leq (x^\circ)^{2p+1}(x^\circ - 1)^{2q+1}\}, \quad \text{dacă} \quad x^\circ \leq b,$$
$$f(x^\circ) = \inf\{x \leq b;\ x^{2p+1}(x-1)^{2q+1} \leq (x^\circ)^{2p+1}(x^\circ - 1)^{2q+1}\}, \quad \text{dacă} \quad x^\circ \geq b;$$

(xi) dreapta $y = -x + \dfrac{2q+1}{p+q+1}$ este asimptotă la $+\infty$ şi la $-\infty$ pentru graficul funcţiei f;
(xii) dacă $\dfrac{2q+1}{p+q+1} \notin \mathbb{Z}$ (în particular dacă $p > q$), atunci există $M > 0$ suficient de mare astfel încât $(m \in \mathbb{Z},\ |m| > M) \Rightarrow f(m) \notin \mathbb{Z}$;
$(xiii)$ avem $f(0) = 1,\ f(1) = 0$ şi $f(2) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow p = q$ şi în acest caz $f(x) = 1 - x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (deci $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$).

$\lceil$**I:** Se aplică teorema 4.1 funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := x^{2p+1}(x-1)^{2q+1}$. Apoi se exploatează roprietăţile particulare ale acestei funcţii concrete g pentru a obţine proprietăţile speciale ale funcţiei $f\rfloor$

5°.12 Să se afle toate rădăcinile pozitive ale ecuaţiei

$$2^x + 3^x + x = 6^x.$$

$\lceil$**I - R:** Se pune ecuaţia sub forma $6^x - 2^x - 3^x = x$ ceea ce reduce problema la aflarea tuturor punctelor fixe ale funcţiei $f(x) := 6^x - 2^x - 3^x$.

Evident, $x = 1$ este soluţie a ecuaţiei.

Pe de altă parte, un calcul arată că $f''(x) > 0,\ \forall x \geq 0$, deci f este strict convexă pe $[0, +\infty[$. Obsrvând şi că $f'(1) > 1$, din convexitatea lui f, rezultă că $f(x) > x,\ \forall x > 1$, deci nu există puncte fixe ale lui f în $]1, +\infty[$. Apoi, folosind convexitatea (strictă) a funcţiei f pe intervalul $[0, 1[$, se arată că $f(x) < x,\ \forall x \in [0, 1[$. În concluzie, singura soluţie pozitivă a ecuaţiei în cauză este $x^\circ = 1.\rfloor$

5.13 Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (x+1)^{100} - ax - 1$. Să se determine numărul real a pentru care avem $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$\lceil$**I - R:** Se observă că $f(0) = 0$. Deci condiţia din enunţ revine la $f(x) \geq f(0),\ \forall x \in \mathbb{R}$, adică $x^\circ = 0$ este punct de minim global pentru f. În particular, $x^\circ = 0$ este punct staţionar (critic) pentru f, adică $f'(0) = 0$, ceea ce implică $a = 100$. Deci $a = 100$ este o condiţie necesară pentru $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Această condiţie este şi suficientă $(a = 100 \Rightarrow f'(x) = 0 \geq x = 0$ este punct de minim global pentru f

ultima implicaţie având loc în virtutea convexităţii funcţiei f (o funcţie convexă pe un interval deschis I, derivabilă în $x^\circ \in I$, cu $f'(x^\circ) = 0$ are un minim blobal în x°)).$\rfloor$

5.14 Fie $a \in]0, \infty[$ şi $f :]0, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = a \ln a - a \ln x$. Să se determine $a > 0$ astfel încât $f(x) \geq 0,\ \forall x \in]0, \infty[$.

$\lceil$**I - R:** Se procedează ca la exerciţiul precedent; condiţia necesară şi suficientă este $f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = e$.$\rfloor$

BIBLIOGRAFIE

1. Apostol T. T., *Calculus*, Vol II, Blaisdell Publishing Company, 1969.

2. Aramă Lia, Moroza T., *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1964.

3. Banach S., *Calcul diferenţial şi integral*, Ed. Nauka, Moscova, 1972.

4. Berman G. N., *Sbornik zadaci po cursa matematicescogo analiza*, Ed. Nauka, Moscova, 1971.

5. Boboc N., *Analiză matematică*, I. Editura Universităţii din Bucureşti, 1990.

6. Bonoc N., Colojoară I., *Matematică. Elemente de analiză matematică. Manual pentru clasa XII-a.* Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 2000.

7. Bourbaki N., *Éléments de mathématique. Topologie générale*, Hermann, Paris (Livre III).

8. Brînzănescu V., şi col., *Probleme de matematică pentru concursurile studenţeşti Traian Lalescu*, IPB, 1985.

9. Brînzănescu V., Stănăşilă O., *Matematici speciale. Teorie, exemple, aplicaăţii*, Ed. ALL, Bucureşti, 1994.

10. Bucur Gh., Câmpu E., Găină S., *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral*, III, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1967.

11. Budianu Gh., *Analiză matematică, exerciţii şi probleme*, IPB, 1979.

12. Cartan H., *Calcul differentiel. Formes differentielles,* Hermann, Paris, 1967.

13. Ciorănescu N., *Tratat de matematici speciale*, Ed. de Stat Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962.

14. Ciorănescu N., Roşculeţ M., *Culegere de probleme de algebră şi analiză matematică*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1959.

15. Colojoară I., *Analiză matematică*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

16. Costinescu Olga, *Elemente de topologie generală*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1969.

17. Courant R., *Differentiel and Integral Calculus,* Vol. I, II, Ed. Nauka, Moscova, 1967, 1970.

18. Cristescu R., *Matematici generale*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1969.

19. Danko P., Popov A., Kopevnikova T., *Exercises et problèmes des mathématiques supérieurs*, I, II, Ed. Mir, 1985.

20. Demidovici B. P., *Culegere de probleme şi exerciţii de analiză matematică*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1956.

21. Demidovici B. P. şi col., *Problems in mathematical analysis*, Ed. Mir, Moscova.

22. Dincă Şt., *Lecţii de algebră şi ecuaţii diferenţiale*, IPB, 1997.

23. Dobrescu E. V., *Analiză matematică*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974.

24. Donciu N., Flondor D., *Algebră şi analiză matematică, culegere de probleme*, Vol. I, II, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978, 1979.

25. Donciu N., Flondor D., *Analiză matematică*, Ed. ALL, Bucureşti, 1993.

26. Drăguşin C., *Culegere de exerciţii şi probleme de analiză matematică*, IPB, 1981.

27. Drăguşin C., *Analiză matematică*, Partea I, IPB, 1989.

28. Drăguşin C., Drăguşin Lucia, Câşlaru C., *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Ed. TEORA, Bucureşti, 1993.

29. Drăguşin C., Drăguşin Lucia, *Analiză matematică*, Vol. I, Ed. MATRIX ROM, Bucureşti, 1997.

30. Drăguşin C., Drăguşin Lucia, *Analiză matematică*, Vol. II, Ed. MATRIX ROM, Bucureşti, 1999.

31. Drăguşin Lucia, *Matematici superioare pentru subingineri - profil electric*, IPB, 1983

32. Fihtenholţ G. M., *Curs de calcul diferenţial şi integral*, Vol. III, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1965.

33. Flondor P., Stănăşilă O., *Lecţii de analiză matematică*, Ed. ALL, Bucureşti, 1993.

34. Gavrilă, M., *Analiză matematică. Calcul Diferenţial*, U.T.C.B., 1996.

35. Gavrilă, M., *Operatori convecsi pe spaţii liniare σ - reticulate.* Studii şi Cercetări Matematice, Vol. 45, nr. 5, pp 415-422, 1993.

36. Gavrilă, M., Gavrilă, C., Matei, P., Costinescu, C., Ariciuc, M., *Culegere de probleme de analiză matematică*, Ed. MATRIX-ROM, Bucureşti, 2002.

37. Găină S., Câmpu E., Bucur Gh., *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral*, II, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1964.

38. Gelbaum B. R., Olmsted J. M. H., *Contraexemple n analiză*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1973.

39 Gheorghiu Gh. Th., *Probleme de algebră şi analiză matematică*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1953.

40. Gheorghiu N., Precupanu T., *Analiză matematică*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

41. Grecu E., *Analiză matematică*, Vol. I, Calcul diferenţial, Ed, PRINTECH, 1997.

42. Grecu E., *Probleme de algebră şi calcul diferenţial*, UPB, 1999.

43. Gnter N.M., Cuzmin R. O., *Culegere de probleme de matematici superioare*, Vol. I, II, III, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1950.

44. Gussi Gh., *Itinerar în analiza matematică,* Lyceum 95, Ed. Albatros, Bucureşti, 1970.

45. Gussi Gh., Stănăşilă)., Stoica T., *Elemente de analiză matematică. Manual pentru clasa a XI-a.* Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1997.

46. Halanay A., Gologan R., Timotin D., *Elemente de analiză matematică*, Vol. I, Ed. MATRIX ROM, 1997.

47. Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G., *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, 1934.

48. Hardy G.H., Wright E.M., *An Intoductions to the Theory of Numbers,* Fifth Edition, Oxford University Press Inc. New York, 1979.

49. Jaye D., Simion Gh., & If., Stănăşilă T. & O., *Probleme şi teste de analiză matematică [Calculus],* Ed. MATRIX ROM, Bucureşti, 2001.

50. Jeffrey A., *Mathematics for Engineering and Scientists*, V. N. R. International Eds. 1989.

51. Kelley I., *General Topology*, D. Van Nostrand Co., Princeton, 1955.

52. Kreyszig E., *Advanced Engineering Mathematics*, J. Wiley & Sons, New York, 1962.

53. Martin Olga, *Probleme de analiză matematică*, Ed. MATRIX ROM, Bucureşti, 1998.

54. Meghea C., *Introducere n analiză matematică. Calcul diferenţial şi integral.* Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1968.

55. Meghea C., *Bazele analizei matematice*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1977.

56. Mihăilescu V., *Analiză matematică*, II, UPB, 1998.

57. Mihăilescu V., *Elemente de analiză matematică*, UPB, 1999.

58. Mititelu Şt. *Analiză matematică*, Institutul de Construcţii Bucureşti, 1988.

59. Mocică Gh., *Probleme de funcţii speciale*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1988.

60. Natanson I. P. *Teoria funcţiilor de variabilă reală*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1957.

61. Nicolescu Lilly Jeanne, Stoka M. I., *Matematici pentru ingineri*, Vol. I, II, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1969, 1971.

62. Nicolescu M., *Analiză matematică*, Vol. I, II, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1957, 1958.

63. Nicolescu M., *Funcţii reale şi elemente de topologie*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.

64. Nicolescu M., Dinculeanu N., Marcus S., *Analiză matematică*, Vol. I, II, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966, 1964.

65 Nicolescu M., Postolache M., *Introducere în calculul diferenţial prin aplicaţii*, UPB, 1995.

66. Nicolescu M., Olteanu O., *Calcul diferenţial. Analiză matematică (partea nti)*, Ed. PRINTECH, Bucureşti, 1999.

67. Olariu V., *Analiză matematică*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

68. Olariu V., *Calcul diferenţial şi integral*, Vol. I, UPB, 1993.

69. Olariu V., Halanay A., Turbatu S., *Analiză matematică*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

70. Olariu V., Drăguşin Lucia, Drăguşin C., Câşlaru C., *Probleme de analiză matematică* (I, II), IPB, 1983.

71. Olariu V., Prepeliţă V., *Matematici speciale*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.

72. Olariu V., Nicolescu M., Olteanu O., *Calcul diferenţial şi integral*, Vol. II, UPB, 1994.

73. Olariu V., Olteanu O., *Analiză matematică*, Ed. SEMNE, 1998.

74. Olteanu O., *Analiză matematică*, Partea I, IPB, 1991.

75. Olteanu Alina, Olteanu O., *Some exponential-type functiomal equations solved by a geometrical general method,* U.P.B. Sci. Bull (în curs de publicare).

76. Olteanu Alina, Olteanu O., *Algebraic functional equations solved by a geometrical general method*, Proceedings of 3-rd International Qolloquim "Mathematics in Engineering and Numerical Physics", 7-9 October, Bucharest, 2004 (în curs de publicare).

77. Olteanu Alina, Olteanu O., *Solving some special functional equations by a general geometrical method*, Annals of University of Craiova (în curs de publicare).

78. Olteanu Alina, Olteanu O., *Solving some special functional equations by a general "geometrical" method, and an approach of the complex case*, International Conference on Complex Analysis and Related Topics "The X^{th} Romanian-Finnish Seminar", August 14-19, 2005, Cluj-Napoca, România

79. Olteanu O., Simion Gh., *A new geometric aspect of thr implicit function principle and Newton's method for operators*, Math. Reports, 5(55), 1(2003), 61-84.

80. Oprişan Gh., Toma Antonela, *Probleme de analiză matematică*, Ed. BREN, Bucureşti, 1999.

81. Otlăcan P., Mocănescu A., *Matematici superioare. Culegere de probleme*, Partea a II-a, Acad. Militară, 1977.

82. Păltineanu, G., *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Editura AGIR, 2002.

83. Păltineanu G., Matei P., Trandafir R., *Analiză matematică*, Ed. Conspress, Bucureşti, 1998.

84. Pisot Ch., Zamansky M., *Mathématiques Generales. Algébre-Analyse*, Dunod, Paris, 1966.

85. Popa Irina *Analiză matematică*, Vol I, *Calcul diferenţial* Ed. MATRIX ROM, Bucureşti, 2000.

86. Postolache M., *Analiză matematică şi numerică*, Geometry Balkan Press, Bucureşti, 1997.

87. Postolache M., *Analiză matematică* (*Teorie şi aplicaţii*), Ed. Fair Partners Ltd., Bucureşti, 1998.

88. Postolache M., *Analiză matematică* (*Teorie şi aplicaţii*), Ed. Fair Partners., Bucureşti, 2000.

89. Postolache M., Bontaş Silvia, Gîrţu Manuela, Cristescu I., *Calcul diferenţial cu elemente de analiză numerică*, Ed. Fair Partners, Bucureşti, 1999.

90. Prepeliţă V., Stănăşilă Tatiana, *Capitole de analiză numerică*, I.P.B., 1975

91. Radu C., Drăguşin C., Drăguşin Lucia., *Aplicaţii de algebră, geometrie şi matematici speciale*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991.

92. Radu C., Drăguşin C., Drăguşin Lucia., *Algebră liniară, analiză matematică, geometrie analitică şi diferenţială - culegere de probleme.* Ed. Fair Partners, 2000.

93. Radu C., Cioară Ecaterina, *Programarea n FORTRAN, Metode numerice de calcul*, IPB, 1979.

94. Roşculeţ M., şi col., *Culegere de probleme de analiză matematică*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1968.

95. Schwartz L., *Analyse Mathématique I, II,* Hermann Paris, 1967.

96. Scott D. B., Tims S. R., *Mathematical Analysis*, Cambridge University Press, 1966.

97. Sireţchi Gh. *Calcul diferenţial şi integral. Vol. 1 Noţiuni fundamentale*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

98. Sireţchi Gh., *Calcul diferenţial şi integral*, Vol. II, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

99. Smirnov V. I., *Curs de matematici superioare*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1953.

100. Spivak M., *Calculus on Manifolds*, W. A. Benjamin, Inc. New York, Amsterdam, 1965.

101. Stănăşilă O., *Analiză matematică*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

102. Stoian Z., *Curs de analiză matematică*, Partea II, IPB, 1970.

103. Şabac I., *Matematici speciale*, Vol. I, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

104. Şilov G., *Analyse mathmatique* (Tom. I, II), Ed. Mir, Moscova, 1973.

105. Şilov G., *Analiză matematică. Spaţii finit dimensionalš*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1983.

106. Şilov G., *Analiză matematică. Funcţii de o variabilă,* Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

107. Şilov G., *Analiză matematică. Curs special*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1989.

108. Târcolea C., *Analiză matematică, Partea I, Calcul diferenţial*, IPB, 1983.

109. Trandafir Rodica, *Matematici pentru ingineri. Culegere de probleme*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1969.

110. Udrişte C., *Analiză matematică*, IPB, 1978.

111. Udrişte C., *Geometric Dynamics, Mathematics and Its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2000.

112. Udrişte C., Balan V., *Linear Algebra and Analysis*, Geometry Balkan Press, Bucureşti, 2001.

113. Udrişte C., Tănăsescu Elena, *Minime şi maxime ale funcţiilor reale de variabile reale*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1980.

114. Udrişte C., Bodnariu M., *Analiză matematică. Modele de probleme pentru examene.* U.P.B., 1993.

115. Udrişte C., Dogaru O., Ţevy I., *Extrema with Nonholonomic Constraints*, Monographs and Textbooks 4, Geometry Balkan Press, 2002.

116. Vasilache S., *Elemente de teoria mulţimilor şi a structurilor algebrice*, Ed. Acad. RPR, 1956.

117. Young E., *Vector and Tensor Analysis*, M. Dekker, 1993.

118. Zorici V. A., *Matematiceskii analiz*, Vol. II, Ed. Nauka, Moscova, 1984.

119. *Dicţionar de analiză matematică*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1989.

120. *Dicţionar de matematici generale*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1974.

121. *Mică enciclopedie matematică*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1980.

Index

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Teorie şi aplicaţii

Volumul I

Prof. univ. dr. Constantin Drăguşin, U.P.B.
Prof. univ. dr. Octav Olteanu, U.P.B.
Conf. univ. dr. Marinică Gavrilă, U.T.C.B.

Cele şase capitole ale cărţii acoperă - prin problematică şi prin aplicaţii - o parte din noţiunile de bază ale analizei matematice predate în universităţi şi în ultimii doi ani de liceu.

Fiecare capitol conţine teoria de bază şi problemele aferente, unele dintre ele având scopul să "fixeze" şi să aplice partea teoretică, altele, mai complexe, conducând la aplicaţii interesante, care se rezolvă greu prin alte metode. O parte dintre probleme sunt rezolvate în extenso (ca model), iar restul problemelor sunt însoţite de răspunsuri şi indicaţii. Lucrarea cuprinde şi probleme mai dificile care se adresează cercurilor profesionale de studenţi, precum şi aplicaţii ale unei metode recente de rezolvare constructivă a unor ecuaţii în care necunoscuta este o funcţie continuă strict descrescătoare.

Cartea se adresează studenţilor din universităţile tehnice, din facultăţile de matematică-mecanică şi de profil economic, elevilor din clasele superioare de liceu, cadrelor didactice din învăţământul superior şi mediu, tuturor celor interesaţi de analiza matematică şi aplicaţiile ei.

Prezentul volum va fi urmat de alte volume care să cuprindă, între altele, dezvoltarea teoriei şi aplicaţii ale calculului diferenţial pentru funcţii de mai multe variabile, calculului integral pentru funcţii de o variabilă reală (integrale improprii, integrale curbilinii) şi de mai multe variabile (integrale multiple), etc.

Lucrarea încearcă să pună în evidenţă, încă odată, eficienţa metodelor analizei matematice, în care se îmbină în mod armonios, intuiţia geometrică şi calculul.