Universitatea de Stat din Tiraspol
Liceul Teoretic „Orizont”

Concursul de Matematică „ORIZONT MATH CUP” Probleme și soluții

Marcel Teleucă, Dionisie Nipomici

Chișinău, 2024

Lucrarea a fost aprobată spre publicare de către Senatul Universității de Stat din Tiraspol.

Autori:

• Marcel Teleucă, doctor în științe fizico-matematice, conferențiar universitar, Universitatea de Stat din Tiraspol, profesor, L.T. „Orizont”

• Dionisie Nipomici, absolvent al Universității Harvard

Recenzenți:

• Iurie Boreico, doctor în matematică, absolvent al Universităților Harvard și Stanford

• Andrei Braicov, doctor în științe fizico-matematice, conferențiar universitar, Universitatea de Stat din Tiraspol

• Liubomir Chiriac, Profesor Asociat, doctor în matematică, Portland State University

• Simion Filip, Profesor Asociat, doctor în matematică, Universitatea din Chicago

$\boxed{Descrierea CIP}$

Tipografia Universității de Stat din Tiraspol

La pregatirea acestui concurs pe parcursul anilor au participat elevii cercului de matematica al Liceului Teoretic Orizont: Dorian Croitoru, Iurie Boreico, Ivan Borsenco, Simion Filip, Andrei Ivanov, Alexandru Grigoroi, Mihai Indricean, Alexandr Zamorzaev-Orleanschii, Cristian Cerneanu, Andrei Frimu, Liubomir Chiriac, Teodor Godina, Mihaela Curmei, Nicolae Şapoval, Cristian Zanoci, Cătălin Rusnac, Vladimir Cucu, Mihail Țarigradschi, Cătălin Gangalic, Daniel Griza, Cezar Port, Valeriu Cojocari, Tudor Șarpe, Alic Ciumeico, Daniel-Nicolae Paraschiv, Alexandru Lopotenco, Chiril Solovei, Daniel Ghenghea, Alexandru Rudi, Mihail Lavric, Dumitru Josu, Mihai Spinei, Valentin Suruceanu, Valeriu Ursu, Victor Purice, Mădălina Griza, Adelina Andrei, Augustin Ploteanu, Dragoş Port, Dan Cernatinschi, Victor Paiu, Constantin Babuc şi alţii.

În memoria Academicianului Mitrofan CIOBAN

Cuprins

Cuvânt înainte de la absolvenții olimpici

Republica Moldova, în trei decenii de existență, a avut și continuă să aibă mulți elevi pasionați de matematică. În fruntea pregătirii competitive s-a aflat cu siguranță Liceul „Orizont” (sub numele „Liceul Moldo-Turc” înainte de 2008). Cercul matematic condus de Marcel Teleucă a produs un număr mare de olimpici de nivel național și internațional, mulți din care au ajuns, cu ajutorul rezultatelor și bazelor matematice obținute, să fie studenți, doctoranzi sau profesori la cele mai prestigioase universități din lume, sau angajați valoroși la companii tehnologice de cel mai înalt nivel. Am avut și eu privilegiul să fac parte din acest cerc, în anii 2002-2007. Îmi aduc aminte cu plăcere și recunoștință de experiența mea în rândul colegilor de liceu, pasionați de matematică și de concursuri.

Această carte reprezintă o mică fereastră în lumea concursurilor matematice, prin probleme compuse și selectate de profesorul Marcel Teleucă și elevii săi. Cea mai bună pregătire de concursuri este de a rezolva probleme. Această selecție este o colecție valoroasă pentru tânărul elev care vrea să devină olimpic. Când eram și eu pici care doar visa la olimpiadele republicane (nemaivorbind de cele internaționale), am căutat așa colecții de probleme cu mare dorință. Din păcate, Republica Moldova fiind o țară mică și tânără, nu are multe concursuri sau colecții de probleme domestice pentru a pregăti elevi. Concursul „Orizont Cup” este deci foarte prețios pentru elevii țării, iar cartea prezentă este un pas important pentru mișcarea olimpică a Republicii Moldova.

Iurie Boreico,
absolvent a universităților Harvard și Stanford,
în prezent cercetător la compania tehnologico-financiară “Jump Trading”

Concursul de matematică „Orizont Cup” are o tradiție strâns legată de istoria Liceului „Orizont”, anterior cunoscut sub numele „Moldo-Turc”. Demararea competiției a fost unul din elementele de bază a pentru identificarea elevilor talentați din întreaga țară și crearea unui program unic de pregătire a viitorilor olimpici în cadrul liceului. Responsabil pentru acest proiect de succes este dl. Marcel Teleucă - un profesor cu un impact deosebit în educația tinerilor matematicieni din Moldova. O bună parte din discipolii lui, care au reușit să facă performanță la multiple ediții ale Olimpiadei Internaționale de Matematică, s-au remarcat mai întâi la probele acestei competiții.

Prezenta lucrare întrunește o colecție de probleme propuse la concurs în perioada 2008-2019. Ea este adresată în principal elevilor din clasele V-VIII, cu deschidere pentru abordări inovative și moduri inedite de gândire. Problemele sunt însoțite de soluții și, în multe cazuri, de diagrame edificatoare. Stilul de scriere este unul colocvial, fapt ce permite parcurgerea conținutului într-o manieră facilă. Cartea poate fi folosită ca instrument de consolidare a cunoștințelor de o gamă largă de rezolvitori și reprezintă o contribuție utilă la Biblioteca Olimpiadelor de Matematică.

Liubomir Chiriac
Doctor în Matematică
Portland State University
Oregon, USA

Lucrarea de față va fi de mare folos elevilor și profesorilor interesați de matematică. Pe parcursul mai multor ani profesorul Marcel Teleucă, ajutat de elevii săi, a organizat olimpiade și a pregătit multe generații de tineri matematicieni din Moldova. În această carte sunt selectate probleme pentru clasele 5-9 date la concursul de matematică din liceul Orizont pe parcursul unui deceniu. Selecția este amplă și sistematică, include probleme care ilustrează tehnici și noțiuni matematice importante, la diverse grade de dificultate.

Problemele, sunt sigur, vor stimula cititorii să gândească și să le resolve, dar o importantă valoare pedagogică a acestei cărți constă și în soluțiile care sunt incluse. Aceste soluții vor ajuta la dezvoltarea capacităților cititorului, care va fi pregătit pentru noi provocări matematice. Recomand cu multă căldură această carte cititorilor interesați de matematică.

Simion Filip
Profesor Asociat
Universitatea din Chicago,
Mai 2022

Introducere

“Lumea este condusă de numere” - Pitagora

Această carte este o reprezentare a problemelor concursului de matematică “Orizont Math Cup”, prima ediție a acestuia fiind organizată în anul 1997. Cartea conține problemele de algebră, combinatorică, geometrie și teoria numerelor din edițiile 2008-2023, culese și alcătuite de către elevii cercului de matematică ai Liceului Teoretic “Orizont”, Durlești, îndrumați de către profesorul Marcel Teleucă, doctor în științe matematice și conducătorul lotului olimpic la această disciplină.

Concursul are ca scop principal pregătirea continuă a elevilor capabili de performanță în matematică, dar și demonstrarea propriilor aptitudini prin intermediul creativității utilizate la soluționarea problemelor. “Orizont Math Cup” este o competiție de matematică cu un format deosebit, întrucât problemele propuse sunt alcătuite de către elevi olimpici la matematică, care ulterior, iau rolul unor profesori constituind juriul și examinatorii lucrărilor participanților. Problemele sunt destinate elevilor pasionați de matematică din clasele V-VIII, care sunt dornici să-și testeze cunoștințele. Pentru clasele V-VI, concursul are la bază proba scrisă, iar pentru clasele VII-VIII, competiția se evaluează în urma probei orale, în care elevii, imediat după rezolvarea unui exercițiu, îl prezintă examinatorului. În caz că problema respectivă este rezolvată corect, elevul primește un punct. În caz contrar, participantului i se mai oferă încă două șanse. Prin această modalitate interactivă, gândirea elevului este scoasă în evidență, ingeniozitatea și creativitatea fiind mereu apreciate.

Sperăm ca cei ce vor parcurge această carte să simtă satisfacția rezolvării unor probleme captivante, să constate progresul pregătirii lor în concursurile viitoare și să descopere frumusețea, și tainele matematicii.

IMPACTUL OLIMPIADELOR CU PROBE ORALE

Una dintre formele de organizare ale întrecerilor școlare la obiectele esențiale este olimpiada, a cărei istorie numără zeci de ani. Cu toate că procesul de învățământ este orientat spre introducerea realizărilor sau, cel puțin, a esențelor gândirii metodice și pedagogice, prin diversitatea programelor școlare, a metodelor de predare sub semnul stagnării, întrecerile matematice sunt dominate de olimpiadele cu probe scrise, atmosfera lor aducându-ne aminte de o probă de evaluare sau de o îndeplinire în colectiv a temelor de acasă. Concursurile matematice pentru clasele VI-XII pot fi organizate însă și sub formă de expunere orală a soluțiilor în fața juriului.

1. Olimpiadele şcolare cu probe orale – eficienţă şi avantaje

În timpul olimpiadei cu probe scrise, activitatea creatoare a participantului este limitată, sau, mai bine zis, „sufocată" de nivelul de cultură scrisă a acestuia, fapt ce-și lasă amprenta atât asupra concursului, cât și asupra elevilor, pedagogilor, organizatorilor. Pe de altă parte, olimpiada cu probe orale, transferând demersul participantului în atmosfera mai puțin obișnuită a prestației discursive, a limbajului gesturilor și a mimicii, limitează manifestarea potențialului creator doar în cazul unui deficit lexical, al unui nivel redus de cultură generală. Astfel, încercările, puțin productive, de a construi și a scrie corect o frază gramaticală sunt înlocuite de tentativa de a realiza un discurs individual cu argumente coerente. Acest lucru ușurează verbalizarea rezolvării, contribuind la dezvoltarea competențelor matematice și comunicative ale participantului.

În cazul olimpiadei cu probe scrise, o lucrare ce lasă de dorit din punctul de vedere al normelor ortografice și de punctuație, eforturile considerabile de structurare a textului, sustrag atenția și demoralizează elevul și, în consecință, duc la scăderea calității matematice a lucrării. În cazul olimpiadei cu probe orale însă, schimburile lexicale sau logice între participant sau juriu, posibilitatea de a adapta discursul și de a opera corectări în detaliere pe parcurs, în funcție de calitatea audierii, permit a evita, a depăși sau camufla erorile comise, a utiliza enunțuri voluminoase, a-și valorifica potențialul la maximum.

Lărgirea ariei de comunicare în afara cercului de participanți, condițiile mai puțin formale, creează o senzație plăcută, alimentând simpatia față de acțiune și interesul față de obiect. Astfel, participarea la o olimpiadă cu probe orale pune în fața elevului o problemă de creație matematico-comunicativă, propune metode alternative de autoexprimare și conține un element pozitiv de orientare profesională.

Olimpiada cu probe orale presupune două etape: etapa eliminatorie și olimpiada propriu-zisă.

1. În prima fază, cea eliminatorie, elevul primește lista cu problemele de rezolvat. De asemenea, se precizează cât timp se alocă soluționării acestora.

- Dacă elevul reușește, în intervalul de timp prevăzut, să realizeze sarcina, atunci el are dreptul să expună soluția membrului liber al juriului (poate să utilizeze și conspectul).
- Juriul cercetează corectitudinea și coerența soluției și, în cazul depistării unor erori, îi adresează întrebări. Acesta poate să răspundă la aceste întrebări chiar în timp ce expune soluția, lichidând astfel erorile. Dacă nu reușește să răspundă, juriul este nevoit să constate o rezolvare greșită a problemei.
- Numărul de erori admise în expunere este limitat. De aceea, în cazul în care elevul nu izbutește să prezinte soluția corectă în intervalul de timp acordat, este lipsit de dreptul de a continua expunerea.
- Dacă membrul juriului consideră soluția corectă, atunci elevul poate prezenta soluțiile celorlalte probleme eliminatorii. În acest caz, nu se recurge la întrebări suplimentare.
- Dacă rezolvă toate problemele eliminatorii, elevul trece la cea de a doua fază – olimpiada propriu-zisă.

2. În faza olimpiadei propriu-zise, elevului i se distribuie o nouă listă cu probleme și i se aduce la cunoștință intervalul de timp alocat. Se admite transferarea elevului în fața altui auditoriu. Modul de expunere a soluțiilor rămâne același.

Numărul de probleme conținute în fiecare set, câte unul pentru fiecare fază, și timpul alocat rezolvării se anunță de juriu la începutul olimpiadei.

La notarea participanților și desemnarea câștigătorilor se ia în considerație numai numărul de probleme soluționate. În cazul unei situații nereglementate prin aceste reguli, juriul o va analiza și va lua decizia potrivită.

Olimpiada cu probe orale este, indiscutabil, cu mult mai atrăgătoare decât cea cu probe scrise, chiar și pentru profesori. Prezentându-se ca excepție de la formele tradiționale, aceasta este percepută ca o acțiune ce exclude o judecată obiectivă (din cauza absenței lucrării) asupra calității activității pedagogului sau a performanțelor participantului. Argumente stereotipe de genul „incapacitatea de a convinge oponentul", „incapacitatea de a lega câteva cuvinte", „pierderea într-o dezbatere" îi permit pedagogului să interpreteze rezultatele drept întâmplătoare și neconcludente. De aceea, ar fi cazul ca profesorul să vadă olimpiada cu probe orale dintr-o perspectivă pozitivă, lipsită de antagonisme cu școala, să-i orienteze pe elevi să participe fără frică, din interes și curiozitate, mai ales că respectivul mod de derulare nu necesită prezența lui personală și este organizată de oameni care nu au nici o legătură cu organizațiile de control.

Olimpiada cu probe orale, este atrăgătoare și pentru membrii juriului, un factor nu mai puțin important. Chiar la o simplă analiză a acesteia putem observa cât de variate pot fi acțiunile membrilor juriului:

1. ignorarea întrebării;
2. răspuns elementar laconic, care însă nu conține informații folositoare;
3. câteva subpuncte ale planului argumentativ ce ar ilustra imposibilitatea criticării cerinței problemei;
4. o descriere mai mult sau mai puțin detaliată, care, de regulă, nu prezintă interes, dar care este indispensabilă pentru înțelegerea corectă a enunțului problemei;
5. o narare succintă, ce permite comentatorului să-și formeze o viziune asupra concepției autorului problemei, privind plasarea întrebării în enunț;
6. o reflecție detaliată, complexă împreună cu analiza problemei, ridicată în întrebarea pedagogului, a caracteristicii multilaterale a autorului întrebării și a concluziilor organizatorice.

Plasticitatea, neconvenționalitatea acțiunilor, chiar până la inadecvare, înțelegerea avantajelor comunicării orale, care conferă prezentării o amprentă personală, apar ca niște factori mult mai atrăgători pentru membrii juriului decât controlul de rutină al lucrărilor, uneori confuze și agramate.

În această situație, este elocventă paralela dintre forma scrisă și forma orală a examenelor. De regulă, alegerea formei de susținere a examenului este dictată atât de scopurile evaluării, cât și de cerințe (locul desfășurării, categoria de vârstă a participanților, modul de organizare a evenimentului, indicatorii influențați de examen etc.). Dacă analizăm și posibilitatea notării independente și obiective a cunoștințelor elevului în cadrul probelor orale, atunci putem pleda pentru înlocuirea reciprocă a acestora.

Comparând olimpiada cu probe orale cu cea cu probe scrise, nici nu poate fi vorba despre înlocuirea reciprocă. Olimpiada cu probe orale este „superioară” celei cu probe scrise, atât din punctul de vedere al accesibilității, cât și din cel al cerințelor complexe de jurizare. Din acest motiv, dacă organizatorii dau dovadă de incompetență, desfășurarea olimpiadelor cu probe orale este inadecvată.

Dacă ar fi să tragem o concluzie, observăm că olimpiada cu probe scrise nu exclude notarea subiectivă, limitează capacitatea elevilor de a-și promova punctul de vedere, iar aspectul neîngrijit al lucrării este un element care poate determina depunctarea concurentului.

Comunicarea vie a juriului cu autorul rezolvării, în cadrul olimpiadei cu probe orale, face posibilă diagnosticarea mai exactă al nivelului intelectual al elevului, depistarea șabloanelor de gândire și a stereotipurilor auditoriului, stabilirea eficienței predării matematicii în școli și a calității programelor școlare. Astfel, chiar în cazul unui eșec, nici elevul, nici pedagogul, nici părinții nu vor percepe acest rezultat drept unul nesatisfăcător și nefericit.

2. Modul interior de soluționare a problemelor olimpiadei

Expunerea în scris, dar și expunerea orală a rezolvărilor (audierea unui discurs calitativ, dar mai ales a unuia necalitativ) reprezintă o muncă intelectual-metodică ce se înscrie organic în concepția unei olimpiade cu probe orale.

Se disting următoarele tipuri de soluții interioare:

1. soluțiile elevilor (forma relaxativă);
2. soluțiile pedagogilor (forma disipativă);
3. soluțiile membrilor juriului (forma distructivă).

Soluțiile elevilor își produc efectul, de regulă, imediat după olimpiadă. Elevul nu vede ca scop principal soluționarea problemei, ci modul de relatare a rezolvării, de aceea aceste momente servesc la reabilitarea elevului, compensarea pagubei morale suferite în urma olimpiadei, capacitatea de a se aprecia critic atât pe sine, cât și olimpiada, de a se pune în locul membrilor juriului. În practică, acest lucru arată că nu este important cât de adânc se rezolvă o problemă, ci cât de bine se menține contactul cu auditoriul.

Trebuie să înțelegem că forța opusă scopurilor numite mai sus, o reprezintă inerția intelectuală și inactivitatea majorității auditoriului, ca formă de manifestare a comportamentului șablonard la olimpiadă. Întrebările-capcană și, într-o oarecare măsură, „agresivitatea”, indică asupra oboselii, accentuând necesitatea de a anima relatarea, de a oferi soluțiilor un caracter mai individual. Acest fapt poate fi atins atât prin comentarii, cât și printr-o „cochetărie” cu auditoriul.

Soluțiile pedagogilor au un scop cu totul diferit. Spre deosebire de elev, care nu are experiență, pedagogul înțelege evenimentele inevitabile olimpiadei.

De aceea, el purcede spre surmontarea acestora, de regulă, cu o dispoziție critică. Profesorul, în principal, nu este interesat de probleme. El este influențat de simțul datoriei față de elevi și atras de posibilitatea de a obține câștiguri prin aplicarea problemelor respective. Aceste scopuri sunt acoperite de „masca socială" a auditoriului, care, pe de o parte, presupune un interes formal, iar, pe de altă parte, un interes critic la adresa organizatorilor.

Soluțiile juriului se deosebesc radical de cele prezentate anterior. În funcție de situație, acțiunile acestuia trebuie orientate spre argumentarea activității auditoriului și spre detectarea defectelor rezolvărilor-șablon.

3. Pregătirea preventivă

Organizatorii olimpiadei cu probe orale trebuie, înainte de toate, să se îngrijească din timp de multitudinea aspectelor legate de desfășurarea acesteia:

- să asigure suficiente locuri;
- să creeze condiții optime pentru a nu periclita munca elevilor;
- să includă în componența juriului un număr cât mai mare de profesioniști înalt calificați;
- să se asigure că fiecare membru al juriului are o viziune adecvată asupra celor ce urmează să se desfășoare, asupra categoriei de vârstă a participanților și asupra materialului în lucru.

4. Activitatea membrului juriului

Olimpiada cu probe orale presupune cerințe specifice pentru activitatea juriului. Obiectivitatea aprecierilor este determinată de relația critică dintre capacitatea elevului de a prezenta soluțiile și capacitatea membrilor juriului de a asculta și a estima expunerea acestuia, și nu o formă „reconstruită" pe baza propriilor idei sau păreri.

Prin urmare, olimpiada cu probe orale reprezintă în esență o nouă metodă de testare și de evaluare a cunoștințelor elevilor, care solicită noi tipuri de aptitudini pentru elevi, pedagogi, membri ai juriului etc.

1

Anul 2008

1.1 Clasa 5

5.1 Aflaţi cel mai mic şi cel mai mare număr natural de 7 cifre nenule cu suma cifrelor 53.
5.2 Demonstraţi inegalitatea:

$$\frac{1}{1005} + \frac{1}{1006} + ... + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2008} > \frac{1}{2}.$$

5.3 Suma a 10 numere naturale nenule este egală cu 54. Demonstraţi că cel puţin 2 numere sunt egale.
5.4 Să se arate că nu există numere naturale x care verifică egalitatea:

$$x^2 + 2008 = 525^{2008}$$

1.2 Clasa 6

6.1 Aflaţi toate numerele naturale de două cifre care sunt de 5 ori mai mari decât suma cifrelor sale.
6.2 Nicolae cu fiul său şi Petru cu fiul său au fost la pescuit. Nicolae a prins acelaşi număr de peşti, ca şi fiul său, dar Petru a prins de 3 trei ori mai mult, decât fiul său. În total au fost prinşi 25 de peştişori. Se poate oare de aflat numele fiului lui Petru?
6.3 Există oare numere, produsul cifrelor cărora este egal cu 2008?

6.4 Rezolvaţi in $\mathbb{N}$ ecuaţia:

$$5^x + 5^y + 5^z = 151$$

1.3 Clasa 7

7.1 Aflaţi $n \in \mathbb{Z}$, pentru care:

$$k = \frac{10n - 4}{2n + 3} \in \mathbb{Z}.$$

7.2 Suma a două numere este egală cu 2, dar suma pătratelor lor este egală cu 3. Găsiţi suma cuburilor şi suma puterilor a patra a acestor două numere.
7.3 Mediana AM şi înălţimea AH a triunghiului ABC împarte $\angle BAC$ în trei unghiuri egale. Găsiţi unghiurile triunghiului ABC.
7.4 Pe tablă sunt scrise numerele 12 şi 4. În fiecare zi elevul de serviciu şterge numerele scrise pe tablă şi în locul lor scrie media lor armonică şi media aritmetică. Găsiţi produsul numerelor scrise pe tablă în ziua 2008 (media aritmetică se defineşte $\frac{a+b}{2}$, iar media armonică $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$).

1.4 Clasa 8

8.1 Arătaţi că pentru orice $x, y, z \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea:

$$(-1)^{xy(x+y)} \cdot (-1)^{xz(x+z)} \cdot (-1)^{yz(y+z)} = 1$$

8.2 Rezolvaţi în $\mathbb{N}$ ecuaţia:

$$xyz + xy + yz + xz + x + y + z = 24$$

8.3 În trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD, AD = AB + CD$. Dacă M este mijlocul lui BC, arătaţi că $AM \perp MD$.
8.4 Putem aranja numerele $1, 2, 3, ..., 11$ pe un cerc astfel încât suma oricăror 2 numere vecine să fie un număr prim?

1.5 Clasa 9

9.1 Să se arate că ecuaţia $x^2 - 3y^2 = -1$ nu are soluţii întregi.
9.2 Determinaţi mulţimea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{2^n - 1} \in \mathbb{N}\}$.
9.3 Fie cercurile Γ_1 şi Γ_2 tangente exterior în punctul F. Dreapta l este

tangentă la cercul Γ_2 în punctul A. Paralela la l este tangentă la cercul Γ_1 în B. Demonstraţi că punctele A, B, F sunt coliniare.
9.4 Numărul 2^n are 30 de cifre. Să se arate că una din cifre se repetă de cel puţin 4 ori.

2008 Soluţii

1.6 Clasa 5 Soluţii

5.1 Cel mai mic număr este 1799999, iar cel mai mare 9999971.
5.2 Avem $\frac{1}{1005} > \frac{1}{2008}, \frac{1}{1006} > \frac{1}{2008}, ..., \frac{1}{2008} = \frac{1}{2008}$. Prin adunare obţinem:

$$\frac{1}{1005}+\frac{1}{1006}+...+\frac{1}{2007}+\frac{1}{2008} > \frac{1}{2008}+\frac{1}{2008}+...+\frac{1}{2008}+\frac{1}{2008} = \frac{1004}{2008} = \frac{1}{2}$$

5.3 Presupunem că toate numerele sunt diferite. Atunci suma lor este cel puţin egală cu suma celor mai mici numere naturale diferite, sau $54 \geq 1+2+3+...+9+10 = 55$, dar $54 < 55$, contradicţie, deci cel puţin 2 numere sunt egale.
5.4 Observăm că numărul din membrul drept al egalităţii va avea ultima cifră 5, dar membrul stâng nu poate avea ultima cifră 5, deoarece x^2 poate avea ultimă cifră doar $0, 1, 4, 5, 6, 9$. Deci nu există x, care îndeplineşte egalitatea.

1.7 Clasa 6 Soluţii

6.1 Avem $\overline{ab} = 5(a+b) \iff 10a + b = 5a + 5b \iff 5a = 4b \iff a = \frac{4}{5}b$. Rezultă că b se divide cu 5, deci $b = 5$, de unde obţinem $a = 4$. Prin urmare, $ab = 45$.
6.2 Fie Nicolae a prins x peştişori, Petru $3y$ peştişori. Avem 3 cazuri:
• La pescuit au fost 4 oameni diferiţi: Nicloae cu fiul său, şi Petru cu fiul său. Atunci în total au fost prinşi $x + x + 3y + y = 25 \Leftrightarrow 2(x + 2y) = 25$. Dar 25 nu este par, deci $x + 2y \notin \mathbb{N}$, contradicţie.
• La pescuit au fost 3 oameni: Nicolae cu fiul său Petru, şi fiul lui Petru. Atunci Nicolae a prins $3y$ peştişori şi în total au fost prinşi $3y + 3y + y = 25 \Leftrightarrow 7y = 25$. Dar 25 nu se divide cu 7, contradicţie.
• La pescuit au fost 3 oameni: Petru cu fiul Nicolae, şi fiul lui Nicolae. Atunci Nicolae a prins y peştişori şi în total au fost prinşi $3y + y + y = 25 \Leftrightarrow y = 5$. Deci numele fiului lui Petru este Nicolae.
6.3 Fie $P(n)$ produsul cifrelor. Atunci $P(n) = 2008 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 251$. Deoarece

251 este prim, el nu poate fi scris ca produs de câteva cifre, contradicţie.
6.4 Putem presupune că $x \leq y \leq z$, deoarece pentru orice soluţie (x, y, z) permutările sale tot sunt soluţii. Fiindcă 151 nu este divizibil cu 5, atunci unul din termeni trebuie să fie egal cu 1, deci $5^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Atunci $5^y + 5^z = 150$ şi $y, z \in \mathbb{N}$. Rezultă $5^y < 150 \Leftrightarrow y \in \{1; 2; 3\}$. Pentru $y = 1 \Rightarrow 5^z = 145 \Rightarrow z \notin \mathbb{N}$. Dacă $y = 2$ atunci $5^z = 125 \Rightarrow z = 3 \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 2, 3)$. Pentru $y = 3$ obţinem $5^z = 25 \Rightarrow z = 2$, dar $z \geq y$. Deci soluţiile sunt $(0, 2, 3), (0, 3, 2), (2, 0, 3), (2, 3, 0), (3, 0, 2)$ şi $(3, 2, 0)$.

1.8 Clasa 7 Soluţii

7.1 Observăm că:

$$k = \frac{10n - 4}{2n + 3} = \frac{10n + 15 - 19}{2n + 3} = \frac{5(2n + 3) - 19}{2n + 3} = 5 - \frac{19}{2n + 3} \Rightarrow \frac{19}{2n + 3} \in \mathbb{Z}$$

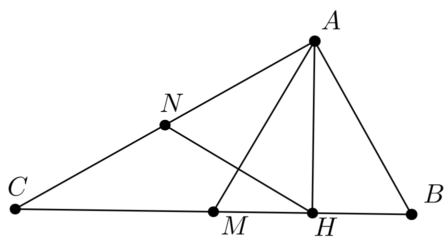
Rezultă că $2n+3 \mid 19$, deci $2n+3 \in \{-1, -19, 1, 19\}$, adică $n \in \{-2, -11, -1, 8\}$.
7.2 Se cunoaşte $a + b = 2$ si $a^2 + b^2 = 3$. Atunci

$$(a + b)^2 = 4 \Leftrightarrow (a^2 + b^2) + 2ab = 4 \Rightarrow ab = 1/2.$$

Prin urmare, $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = 2 \cdot (3 - \frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5$

Si $a^4 + b^4 = (a^4 + b^4 + 2a^2b^2) - 2a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 9 - 2 \cdot \frac{1}{4} = 8,5$

7.3 Cum AH este atât bisectoare cât şi înălţime în $\triangle AMB \Rightarrow \triangle AMB$ este isoscel şi $MH = HB$. Fie $CB = 4a$, atunci cum M este mijlocul lui $CB \Rightarrow CM = 2a$, iar $MH = HB = a$. Din teorema bisectoarei în $\triangle CAH$ obţinem că $\frac{AC}{CH} = \frac{CM}{MH} = \frac{2a}{a} = 2 \Rightarrow AC = 2CH$. Fie N mijlocul segmentului AC, respectiv cum $\triangle CAH$ este dreptunghic rezultă că $HN = CN = NA = AH \Rightarrow \triangle NAH$ este echilateral. După aceasta putem uşor calcula fiecare unghi al $\triangle ABC$ şi obţinem $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 30°$.



7.4 Observăm că $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \cdot \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{2ab(a+b)}{2(a+b)} = ab$, deci produsul numerelor este mereu egal cu produsul mediei armonice şi aritmetice $\Rightarrow$ produsul numerelor scrise pe tablă este constant. Deci şi produsul numerelor scrise pe tablă în ziua 2008 este egal cu $4 \cdot 12 = 48$.

1.9 Clasa 8 Soluţii

8.1 Vom demonstra că pentru orice $p, q \in \mathbb{N}$, $pq(p+q)$ este par. Într-adevăr, dacă cel puţin unul din numerele p, q este par, atunci produsul $pq(p+q)$ este de asemenea par. Dacă ambele p şi q sunt impare atunci $pq(p+q)$ este iarăşi par deoarece $p+q$ par. Prin urmare:

$$(-1)^{xy(x+y)} \cdot (-1)^{xz(x+z)} \cdot (-1)^{yz(y+z)} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

8.2 Avem

$$xyz + xy + yz + xz + x + y + z + 1 = 25$$
$$x(yz + y + z + 1) + (yz + y + z + 1) = 25$$
$$(x+1)(y(z+1) + (z+1)) = 25$$
$$(x+1)(z+1)(y+1) = 25 \cdot 1 \cdot 1 = 5 \cdot 5 \cdot 1$$

Obţinem tripletele $(x, y, z) \in \{(0,0,24); (0,24,0); (24,0,0); (0,4,4); (4,0,4); (4,4,0)\}$

8.3 Ducem linia mijlocie MN, $N \in AD$. $MN = \frac{AB+CD}{2}$ şi $AN = \frac{1}{2}AD = \frac{AB+CD}{2}$, deci $MN = AN = \frac{1}{2}AD \Leftrightarrow \angle AMD = 90°$.

8.4 Observăm că în total avem 5 numere pare, şi 6 impare, deci cum nu vom aranja numerele pe cerc, întotdeauna vom avea 2 numere consecutive impare şi suma lor va fi un număr par, mai mare ca 2, deci nu va prim, contradicţie.

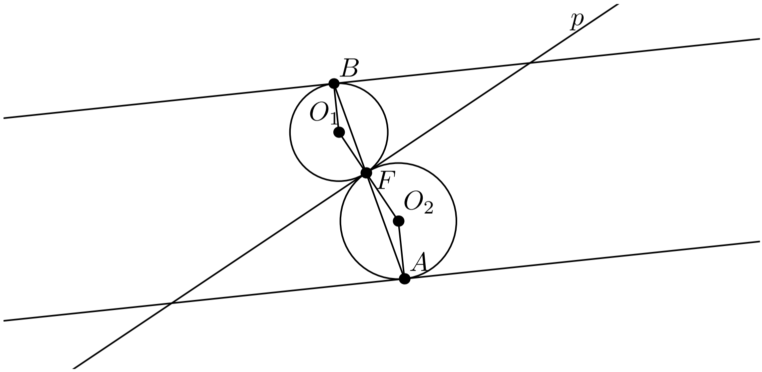
1.10 Clasa 9 Soluţii

9.1 Analizând cazurile $x = 3k,\ 3k \pm 1$ obţinem x^2 poate avea doar forma $3p, 3p+1$. Atunci $x^2 - 3y^2$ poate da doar resturile 0 sau 1 $modulo 3$, dar -1 da restul 2, contradicţie, deci ecuaţia nu are soluţii intregi.

9.2 Avem $2^n - 1 = p^2$. Pentru $n = 0$, $2^n - 1 = 0$. Pentru $n = 1$, $2^n - 1 = 1$. Dacă $n \geq 2$, atunci $4 \mid 2^n$, deci $2^n - 1 = 4k + 3 = p^2$, dar $p^2 \in \{4k, 4k+1\}$. Obţinem $A = \{0, 1\}$

9.3 Fie dreapta p - tangentă la ambele cercuri în F. $\angle O_1FO_2 = 90° + 90° =$

180, deci punctele O_1, F, O_2 sunt coliniare. O_1B si O_2A sunt perpendiculare la două drepte paralele, deci $O_1B \parallel O_2A \Leftrightarrow \angle BO_1F = \angle AO_2F$. Triunghiurile $\triangle BO_1F$ şi $\triangle AO_2F$ sunt isoscele şi au un unghi egal, deci $\triangle BO_1F \sim \triangle AO_2F \Rightarrow \angle O_1FB = \angle AFO_2$. Fiindcă punctele O_1, F, O_2 sunt coliniare, rezultă că şi punctele A, B, F sunt coliniare.



9.4 Presupunem că nici o cifră nu se repetă de cel puţin 4 ori. Atunci fiecare cifră se repetă fix de 3 ori, deci suma cifrelor se divide cu 3, rezultă că şi numărul 2^n se divide cu 3, contradicţie.

2

Anul 2009

2.1 Clasa 5

5.1 Fie a, b, c cifre ale sistemului zecimal. Dacă $\overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc} = 99$, să se demonstreze că numărul $\overline{abc}$ este divizibil cu 9.
5.2 Aflaţi numerele de trei cifre $\overline{abc}$ pentru care $a \cdot b \cdot c = 6$.
5.3 Într-un vas cu fructe sunt de 3 ori mai multe prune decât mere. La masă sunt 4 persoane. Fiecare dintre ele îşi ia pe farfurie câte un măr şi o prună. Ramân în vas de 4 ori mai multe prune decât mere. Câte prune şi câte mere erau la început?
5.4 Aveţi 9 monede, dintre care una este mai uşoară. Dacă dispuneţi de o balanţă, cum puteţi identifica moneda mai uşoară prin cel mult două cântăriri?

2.2 Clasa 6

6.1 Să se arate că pentru orice cifre a şi b numărul $\overline{abaaba}$ este divizibil cu 1001.
6.2 Se divide oare numărul $1000^{2009} + 100^{200} + 10^{9} + 2$ la 9?
6.3 Aveţi 9 monede, dintre care una este mai uşoară. Dacă dispuneţi de o balanţă, cum puteţi identica moneda mai uşoară prin cel mult două cântăriri?
6.4 Găsiţi x, ştiind că toate şirurile verticale sunt scrise după aceeaşi legitate.

Col1	Col2	Col3	Col4	Col5
12	7	2	2	4
18	315	7	2	8
3	x	7	2	4

2.3 Clasa 7

7.1 Există oare numere naturale x, y si z, ce satisfac ecuaţia $28x+30y+31z = 365$?
7.2 Demonstraţi că numărul $2^{10} + 5^{12}$ este compus.
7.3 Să se rezolve în numere prime ecuaţia:

$$11a + 42b + 49c + 525d = 2009$$

7.4 Să se arate cum un patrulater poate fi tăiat în trei trapezuri.
7.5 Fiecare punct al planului este colorat în alb sau negru. Să se arate că există o infinitate de segmente de lungime 2009, vârfurile cărora au aceeaşi culoare.
7.6 Pe tablă este scris numărul 141. În fiecare zi cifrele numărului de pe tablă se înmulţesc şi se adaugă la numărul acesta sau se scad din el (iar rezultatul se scrie în locul numărului iniţial). Demonstraţi că numărul 141 nu va apărea pe tablă niciodată.

2.4 Clasa 8

8.1 Fie $x = \frac{111110}{111111}, y = \frac{222221}{222223}, z = \frac{333331}{333334}$. Să se scrie numerele x, y si z în ordinea crescătoare.
8.2 Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface următoarele condiţii:
(1) $f(2) = f(3) + f(4)$
(2) $f(x-1)+f(x)+f(x+1) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ Să se calculeze $f(2009)$.
8.3 Să se demonstreze că nu există numere naturale nenule a şi b ce satisfac relaţia:

$$a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 = 2009$$

8.4 Fie $ABCD$ un paralelogram şi M, N mijloacele laturilor BC şi CD. Să se demonstreze că semgentele AM şi AN împart diagonala BD în trei părţi congruente.

8.5 Demonstraţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ numerele $n(n+1)$ şi $(n-1)^2$ au diferite sume de cifre.
8.6 Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-y+z-1}{2x-y+z} - \dfrac{1}{x+y+z} + \dfrac{2}{x+y-z} = \dfrac{3}{4} \\[2ex] \dfrac{1}{2x-y+z} - \dfrac{x+y+z+1}{x+y+z} + \dfrac{1}{x+y-z} = \dfrac{1}{4} \\[2ex] \dfrac{2}{2x-y+z} + \dfrac{4}{x+y+z} + \dfrac{x+y-z+2}{x+y-z} = 5 \end{cases}$$

2009 Soluţii

2.5 Clasa 5 Soluţii

5.1 Rescriem egalitatea dată ca

$$(10a+a)+(10b+b)+(10c+c) = 99 \Leftrightarrow 11(a+b+c) = 99.$$

Rezultă că $a+b+c = 9$. Din faptul că $9 \mid a+b+c$, şi obţinem că $9 \mid \overline{abc}$.
5.2 Avem $abc = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 1 \cdot 6$.
Obţinem soluţiile $\overline{abc} \in \{123, 132, 213, 231, 312, 321, 116, 161, 611\}$.
5.3 Notând numărul iniţial de mere cu x, iar numărul iniţial de prune cu y obţinem relaţiile $y = 3x$ şi $y-4 = 4(x-4)$. Rezolvând sistemul obţinem $x = 12, y = 36$.
5.4 Împărţim monedele în trei grupe câte 3 monede în fiecare. În fiecare grup cântărim două din ele. Dacă una este mai uşoară atunci o alegem pe ea, dacă nu, alegem din fiecare grup pe moneda necântărită. Din grupul ales cântărim două monede. Dacă este una mai uşoară atunci ea este falsă, dacă nu, atunci moneda falsă este cea raămasă.

2.6 Clasa 6 Soluţii

6.1 Avem $\overline{abaaba} = 1000 \cdot \overline{aba} + \overline{aba} = 1001 \cdot \overline{aba}$.
6.2 Observăm că $100...00^n - 1 = 9999...99 = 9p$. Deci

$$1000^{2009} + 100^{200} + 10^9 + 2 = (9a+1) + (9b+1) + (9c+1) + 2 = 9(a+b+c) + 5.$$

Evident că numărul acesta nu se divide cu 9.
6.3 Vezi problema 5.4.
6.4 Observăm că numărul din mijloc este egal cu semiprodusul celorlalte două, deci $315 = \frac{7x}{2}$, de unde $x = 90$.

2.7 Clasa 7 Soluţii

7.1 Da. Avem $30(x + y + z) - 2x + z = 365$. Ecuaţia are multe soluţii, noi alegem $x+y+z = 12$, atunci $z-2x = 5$. Un exemplu ar fi $(x, y, z) = (1, 4, 7)$. Notă. Observaţi că x, y, z pot fi tratate ca numărul de luni cu $28, 30, 31$ de zile într-un an cu 365 de zile.
7.2 Avem $2^{10}+5^{12} = (2^5)^2+(5^6)^2+2\cdot2^5\cdot5^6-2^6\cdot2^5 = (2^5+5^6)^2-(2^3\cdot5^3)^2 = (2^5+5^6+2^3\cdot5^3)(2^5+5^6-2^3\cdot5^3)$, care este evident un număr compus.

7.3 Deoarece $42, 49, 525$ şi 2009 se divid cu 7, obţinem că $a \vdots 7$, de unde $a = 7$. Atunci:

$$11 \cdot 7 + 42b + 49c + 525d = 2009 \Leftrightarrow 6b + 7c + 75d = 276$$

Din $6, 75, 276 \vdots 3$, obţinem că $c \vdots 3 \Rightarrow c = 3$, de unde

$$6b + 7 \cdot 3 + 75d = 276 \Leftrightarrow 2b + 25d = 85.$$

Analog, obţinem că $b = 5$, de unde $d = 3$. În final am obţinut soluţia unică $(a, b, c, d) = (7, 5, 3, 3)$
7.4 Fie patrulaterul $ABCD$. Alegem un punct X în interiorul patrulaterului, astfel înc4t $XA \parallel BC$. Considerăm pe laturile BC şi CD punctele Z şi Y, astfel încât $XZ \parallel CD$ şi $XY \parallel AD$. Obţinem trei trapezuri $AXZB, XZCY$ şi $XYDA$.
7.5 Considerăm un triunghi echilateral cu latura 2009. Evident, din trei vârfuri ale triunghiului există două de aceeaşi culoare şi distanţa între ele este egală cu 2009. Rămâne să mai observăm că există o infinitate de triunghiuri echilaterale în plan, deci şi numărul segmentelor este infinit.
7.6 Putem obţine următoarele numere $141 \to \{137, 145\}$. Din 145 niciodată nu vom putea obţine 141 deoarece toate numerele obţinute din 145 vor divizibile cu 5 (şi numărul şi produsul cifrelor sunt divizibile cu 5). Dar $137 \to \{116, 158\}$ şi toate numerele obţinute din aceste două vor pare.

2.8 Clasa 8 Soluţii

8.1

$$x = \frac{111110}{111111} = 1 - \frac{1}{111111}$$

$$y = \frac{222221}{222223} = 1 - \frac{2}{222223} = 1 - \frac{1}{111111 + \frac{1}{2}}$$

$$z = \frac{333331}{333334} = 1 - \frac{3}{333334} = 1 - \frac{1}{111111 + \frac{1}{3}}$$

Deoarece $\frac{1}{111111+\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{111111+\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{111111}$. Obţinem $x \leq z \leq y$.

8.2 Din (2) pentru $x = 3$ obţinem:

$$f(2) + f(3) + f(4) = 0 \Leftrightarrow 2f(2) = 0 \Leftrightarrow f(2) = 0 \ (*)$$

Pentru $x = y$ si $x = y + 1$ din (2) obţinem

$$f(y-1) + f(y) + f(y+1) = 0 \ (3)$$

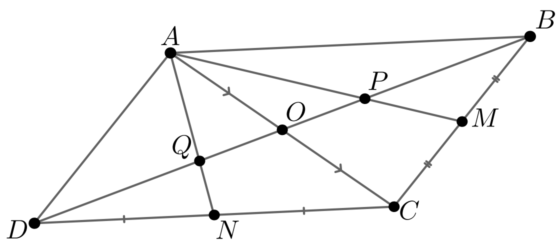
$$f(y) + f(y+1) + f(y+2) = 0 \ (4)$$

Scădem din (4) relaţia (3) şi obţinem $f(y-1) = f(y+2)$, de unde, înlocuind $y-1$ cu z obţinem $f(z) = f(z+3)$. Deci funcţia f este periodică cu perioada 3, de unde

$$0 = f(2) = f(5) = f(8) = ... = f(2 + 1340 \cdot 3) = f(2009)$$

8.3 Avem $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 = a^2(a+b) + b^2(a+b) = (a^2+b^2)(a+b)$. Evident $a^2 + b^2 > a + b$ şi $a + b > 1$. Observăm că $2009 = 287 \cdot 7 = 49 \cdot 41$. Deci $(a^2 + b^2,\ a + b) = (287, 7) = (49, 41)$. Rezolvând în fiecare caz ecuaţiile de gradul doi obţinem că ecuaţia iniţială nu are soluţii naturale.

8.4 Notăm cu P, O şi Q intersecţiile segmentelor AM, AC şi AN cu diagonala BD. În triunghiul ABC, BO şi AM sunt mediane, deci P este centrul de greutate, de unde obţinem $BP = 2PO = \frac{1}{3}BD$. Analog obţinem $QD = \frac{1}{3}BD$. Prin urmare, $BP = PQ = OD = \frac{1}{3}BD$.



8.5 Din numerele $n-1, n$ şi $n+1$ doar unul se divide cu 3, de unde obţinem că din numerele $n(n+1)$ si $(n-1)^2$ unul se divide cu 3, iar celălalt nu, de unde rezultă că aceste numere nu pot avea aceeaşi sumă de cifre, deoarece ele dau resturi diferite *modulo* 3.
8.6 Notăm $a = \frac{1}{2x-y+z}$, $b = \frac{1}{x+y+z}$, $c = \frac{1}{x+y-z}$. Atunci obţinem sistemul echivalent:

$$\begin{cases} (1-a)-b+2c = \frac{3}{4} \\ a-(1+b)+c = \frac{1}{4} \\ 2a+4b+(1+2c) = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 4a+4b-8c = 1 \\ 4a-4b+4c = 5 \\ a+2b+c = 2 \end{cases}$$

Obţinem: $a = 1, b = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{2}$. Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} 2x-y+z = 1 \\ x+y+z = 4 \\ x+y-z = 2 \end{cases}$$

găsim soluţiile $x = 1, y = 2, z = 1$.

3

Anul 2010

3.1 Clasa 5

5.1 Împărţiţi mulţimea $\{1, 2, 9, 25, 49, 64\}$ în două submulţimi, astfel încât suma elementelor din fiecare submulţime să fie egală.
5.2 Arătaţi cum putem aranja 24 de scaune în 6 rânduri câte 5 scaune în fiecare.
5.3 Diferenţa a două numere a fost înmulţită la produsul acestor numere. Putea oare sa se obţină numărul 200920102011 ?
5.4 Să se afle toate numerele de patru cifre $\overline{abcd}$ care satisfac relaţia:

$$\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + \overline{d} = 2010$$

3.2 Clasa 6

6.1 Arătaţi că pentru orice $x, y, z \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea

$$(-1)^{xy(x+y)} \cdot (-1)^{xz(x+z)} \cdot (-1)^{yz(y+z)} = 1$$

6.2 Arătaţi cum putem aranja 24 de scaune în 6 rânduri câte 5 scaune în fiecare.
6.3 Să se afle toate numerele de patru cifre $\overline{abcd}$ care satisfac relaţia:

$$\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + \overline{d} = 2010$$

6.4 Într-o cutie se află 28 de baloane roşii, 20 verzi, 20 albastre, 10 albe, 10 negre şi 12 galbene. Care este numărul minim de baloane ce trebuie scoase, astfel încât cel puţin 15 baloane printre acestea să aibă aceeaşi culoare?

3.3 Clasa 7

7.1 Demonstraţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc inegalitatea:

$$n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right) \geq (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}\right)$$

7.2 Demonstraţi că ecuaţia $x^{2009} = x^{2010} + 1$ nu are soluţii reale.

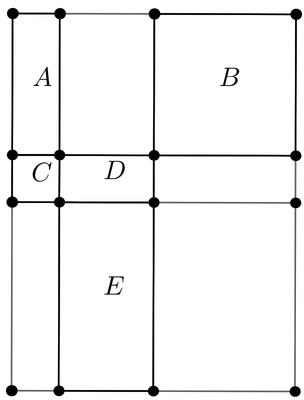
7.3 Demonstraţi că $10^k + 10^l \vdots 11$ $(k, l \in \mathbb{N})$ dacă şi numai dacă k şi l au parităţi diferite.

7.4 Aveţi la dispoziţie o riglă dublă (cu două laturi paralele). Având un unghi dat, construiţi bisectoarea cu ajutorul acestei rigle.

7.5 Într-o şcoală sunt 17 clase. Fiecare elev dintr-o clasă cunoaşte exact câte un elev din celelalte clase. Demonstraţi că numărul elevilor este acelaşi în toate clasele.(Dacă A îl cunoaşte pe B, atunci B îl cunoaşte pe A)

3.4 Clasa 8

8.1 Dreptunghiul X este împărţit în 9 dreptunghiuri ca în desen. Aria dreptunghiului A este egală cu 3, dreptunghiului B cu 9, lui C cu 1, lui D cu 2 şi lui E cu 8. Aflaţi aria dreptunghiului X.



8.2 Se consideră n numere întregi. Produsul oricărui dintre aceste numere cu suma celorlalte mărită cu 1 se divide cu suma tuturor numerelor. Demonstraţi că suma pătratelor a acestor numere se divide cu suma numerelor.
8.3 Putem oare scrie cifrele de la 1 la 9 într-o ordine, astfel încât pentru orice număr natural $K \leq 9$ suma primelor K cifre se divide cu K?
8.4 Pentru orice numere reale x şi y să se demonstreze inegalitatea:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq x + y + xy$$

8.5 Punctele P, Q, R, S sunt mijloacele laturilor AB, BC, CD, AD respectiv ale patrulaterului convex $ABCD$. Punctul M se află în interiorul patrulaterului, astfel încât $APMS$ este paralelogram. Demonstraţi că $CRMQ$ este de asemenea paralelogram.
8.6 Arătaţi că:
(i) *nu putem* pune în vârfurile unui cub 8 numere distincte din mulţimea $\{0, 1, 2, 3, ..., 11, 12\}$ astfel încât suma numerelor din oricare două vârfuri unite printr-o muchie a cubului să fie divizibilă cu 2.
(ii) *putem* pune în vârfurile unui cub 8 numere distincte din mulţimea $\{0, 1, 2, 3, ..., 11, 12\}$ astfel încât suma numerelor din oricare două vârfuri unite printr-o muchie a cubului să fie divizibilă cu 3.

3.5 Clasa 9

9.1 Notăm cu $S(n)$ suma cifrelor unui număr natural n. Să se rezolve în numere naturale:

$$S(2010^0) + S(2010^1) + S(2010^2) + S(2010^3) + ... + S(2010^x) = 3^x$$

9.2 Să se afle toate polinoamele P cu coeficienţi reali, astfel încât pentru orice x pozitiv are loc relaţia:

$$P(3x) + P(4x) = P(5x)$$

9.3 Se consideră n numere întregi. Diferenţa dintre oricare din aceste numere şi produsul celorlalte $n-1$ numere se divide cu n. Arătaţi că suma pătratelor a acestor numere se divide cu n.
9.4 Pe latura AC a triunghiului ascuţitunghic ABC se consideră punctul D. Mediana AM intersecteaza înălţimea CH şi segmentul BD în punctele N, respectiv K. Dacă $AK = BK$, demonstraţi că $AN = 2KM$.

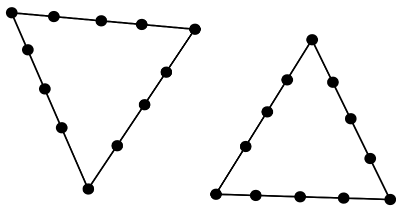
9.5 Se consideră trei numere reale pozitive distincte. Arătaţi că le putem nota a, b şi c astfel încât să aibă loc inegalitatea:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} > \frac{a}{c} + \frac{c}{a}$$

2010 Soluţii

3.6 Clasa 5 Soluţii

5.1 Suma tuturor numerelor este egală cu 150, deci fiecare submulţime trebuie sa aibă suma elementelor egală cu 75. Este uşor de observat că submulţimile $\{2, 9, 64\}$ şi $\{1, 25, 49\}$ satisfac cerinţa.
5.2 Orice configuraţie ce respectă condiţia este corectă. Una dintre soluţii poate fi următoarea:



5.3 Demonstrăm că $ab(a-b)$ este întotdeauna un număr par. Într-adevar, dacă cel puţin unul din numere este par atunci $ab(a-b)$ este de asemenea par; dacă ambele numere sunt impare atunci diferenţa lor este pară, deci $ab(a-b)$ este iarăşi par. Primim contradicţie deoarece numărul 200920102011 este impar. Deci, răspunsul este nu.
5.4 Rescriem egalitatea.

$$(1000a + 100b + 10c + d) + (100b + 10c + d) + (10c + d) + d = 2010 \Rightarrow$$

$$1000a + 200b + 30c + 4d = 2010 \Longleftrightarrow 500a + 100b + 15c + 2d = 1005$$

Dacă $a \geq 3$, atunci $500a \geq 1500$, imposibil. Dacă $a = 2$ atunci $100b + 15c + 2d = 5$, nu sunt soluţii. Dacă $a = 1$ atunci $100b + 15c + 2d = 505$. Analizând cazurile $b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, aflăm soluţia $\overline{abcd} = 1470$.

3.7 Clasa 6 Soluţii

6.1 Dacă cel puţin unul din numerele x, y este par atunci $xy(x+y)$ este de asemenea par; dacă ambele numere sunt impare atunci suma lor este

pară, deci $xy(x+y)$ este iarăşi par. Prin urmare, $(-1)^{xy(x+y)} = 1$. Analog, $(-1)^{yz(y+z)} = 1$ si $(-1)^{zx(z+x)} = 1$. Prin urmare produsul lor este 1.
6.2 Vezi problema 5.2.
6.3 Vezi problema 5.4.
6.4 Să găsim numărul maxim de bile care pot fi scoase astfel încât să nu avem scoase 15 bile de aceeaşi culoare. În aşa caz ar trebui să scoatem câte 14 bile de fiecare culoare, dar sunt culori cu care sunt colorate mai puţin de 14 bile, deci luăm numărul cel mai mare de bile de aceeaşi culoare mai mic sau egal decât 14, şi astfel obţinem că numărul maxim de bile ce pot fi scoase astfel ca să nu avem 15 bile de aceeaşi culoare, şi anume: $14+14+14+10+10+12 = 74$, iar dacă mai scoatem încă o bilă aceasta va fi neapărat sau roşie, sau verde, sau albastră, deci sigur vom avea 15 bile de aceeaşi culoare după ce scoatem $74+1 = 75$ bile.

3.8 Clasa 7 Soluţii

7.1 Avem:

$$n\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\Big) \geq (n+1)\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}\Big) \Longleftrightarrow$$

$$n+n\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\Big) \geq 1+n\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\Big)+\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\Big) \Longleftrightarrow$$

$$n \geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}.$$

Ultima inegalitate se obţine prin adunarea inegalităţilor $1 \geq 1, 1 \geq \frac{1}{2}, ..., 1 \geq \frac{1}{n}$.
7.2 Avem $x^{2009} = x^{2010}+1 > 0$, deci $x > 0$. In plus, $x^{2009} = x^{2010}+1 > x^{2010}$, deci $x < 1$. Atunci $x^{2010}+1 = x^{2009} < 1$, contradicţie.

7.3 Avem $10^k + 10^l = 100..10..0$. Dacă $100..10..0 \vdots 11$, atunci, după criteriul de divizibilitate la 11, suma cifrelor de pe poziţiile impare este egală cu suma cifrelor de pe poziţiile pare; deoarece avem doar zerouri şi doi de 1, aceste două unităţi trebuie să se afle pe poziţii cu parităţi diferite. Dacă k şi l au parităţi diferite, atunci suma cifrelor de pe poziţiile impare este egală cu suma cifrelor de pe poziţiile pare, deci $10^k + 10^l \vdots 11$.
7.4 Fie unghiul $\angle BAC$. Cu ajutorul riglei ducem câte o paralelă la laturile unghiului. Obţinem un paralelogram cu vârful A. Însă, paralelogramul acesta are înălţimi egale, deci este romb. Diagonala dusă din vârful A este bisectoarea unghiului $\angle BAC$.

7.5 Alegem două clase la întâmplare şi le numim clasa A şi clasa B. Presupunem că ele au număr diferit de elevi, fie în clasa A mai puţini elevi. În clasa B sunt mai mulţi elevi, iar fiecăruia trebuie să ii corespundă câte un elev din clasa A. Deoarece în clasa B sunt mai mulţi elevi, obţinem că în clasa A sunt elevi ce cunosc mai mulţi elevi din clasa B, deci am obţinut contradiciţie, de unde obţinem că în aceste clase este acelaşi număr de elevi. Astfel luând o clasă şi comparând numărul de elevi din aceasta cu cel al elevilor din celelalte 16 clase obţinem că în toate clasele trebuie sa fie acelaşi număr de elevi.

3.9 Clasa 8 Soluţii

8.1 Notăm lungimile segmentelor pe orizontală cu a, b, c şi celor pe verticală cu d, e, f. Atunci avem $ad = 3,\ cd = 9,\ ae = 1,\ be = 2,\ bf = 8$.

$$bd = \frac{abde}{ae} = \frac{(ad)\cdot(be)}{ae} = 6 \qquad ce = \frac{bcde}{bd} = \frac{(be)\cdot(cd)}{bd} = 3$$

$$af = \frac{abef}{be} = \frac{(ae)\cdot(bf)}{be} = 4 \qquad cf = \frac{bcef}{be} = \frac{(bf)\cdot(ce)}{be} = 12$$

Aria dreptunghiului X este egală cu $ad+bd+cd+ae+be+ce+af+bf+cf = 3+6+9+1+2+3+4+8+12 = 48$.
8.2 Notăm suma numerelor cu S. Notăm numerele cu a_i pentru toate $i \in \{1, ..., n\}$ Avem:

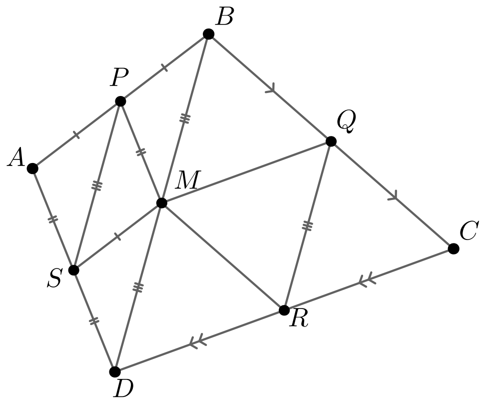
$$a_i(S - a_i + 1) \vdots S \Leftrightarrow a_i \cdot S - (a_i^2 - a_i) \vdots S \Leftrightarrow a_i^2 - a_i \vdots S$$

Sumând aceste relaţii pentru $i \in \{1, ..., n\}$ şi notând cu S_2 suma pătratelor acestor numere, obţinem că $S_2 - S \vdots S$, adică $S_2 \vdots S$.
8.3 Presupunem că răspunsul este da. Începem de la sfârşit. Notăm cifrele cu $a_1, a_2 \dots a_9$. Suma lor este 45. Deci, pentru $K = 9$ adevărat. Pentru $K = 8,\ 45 - a_9 \vdots 8$, unica variantă posibilă $a_9 = 5$. Atunci, pentru $K = 7,\ 45 - 5 - a_8 \vdots 7$. Iarăşi, unica variantă posibilă e $a_8 = 5$, însă $a_9 = 5$, contradicţie.
8.4 Înmulţind cu 2 şi grupând, obţinem o inegalitate echivalentă:

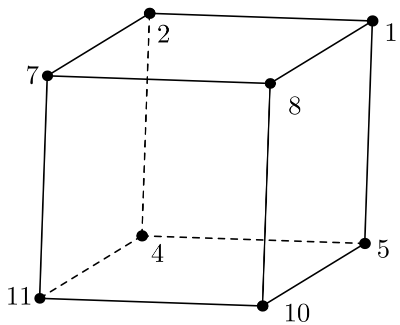
$$(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$$

8.5 Cum $APMS$ - paralelogram, $SD = AS = PM$ şi $PM \parallel SD$, rezultă că

$PSMD$ deasemenea este paralelogram, respectiv $PS \| MD$ şi $PS = MD$ (1). Analog $PSMB$ - paralelogram, iar $PS \| BM$, $PS = BM$ (2). Combinând relaţiile (1) şi (2) obţinem că $MD \| PS \| MB \Rightarrow D, M, B$ - coliniare, iar M e mijlocul segmentului DB. Cum M şi Q - mijloacele segmentelor BD şi BC $\Rightarrow \Rightarrow QM$ - linie mijlocie în $\triangle DBC$, respectiv $QM \| RC$ şi $QM = RC \Rightarrow$ $MQCR$ - paralelogram.



8.6 (i) Ca suma să fie divizibilă cu 2, numerele trebuie să aibă aceeaşi paritate. Astfel, obţinem că toate 8 numere scrise în vârfurile cubului trebuie sa aibă aceeaşi paritate, însă avem 7 numere pare şi 6 impare, contradicţie.
(i) Ca suma să fie divizibilă cu 3 numerele trebuie sa se dividă la 3 sau să aibă resturile 1 şi 2 *modulo* 3. Dacă cel puţin un număr se divide cu 3 atunci toate se divid, însă nu avem 8 numere divizibile cu 3. Deci fiecare număr e congruent sau cu 1 sau cu 2 *modulo* 3.



3.10 Clasa 9 Soluţii

9.1 Pentru $i \geq 1$, 2010^i se divide cu 3, deci şi suma cifrelor se divide cu 3. Pentru $x > 0$, partea stângă dă restul 1 *modulo* 3, iar partea dreaptă se divide cu 3. Deci $x = 0$ unica soluţie.

9.2 Presupunem că gradul polinomului este n.

Scriem $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Atunci pentru orice $x > 0$:

$$a_n x^n(3^n + 4^n) + ... + a_1 x(3 + 4) + a_0(1 + 1) = a_n x^n \cdot 5^n + ... + a_1 x \cdot 5 + a_0$$

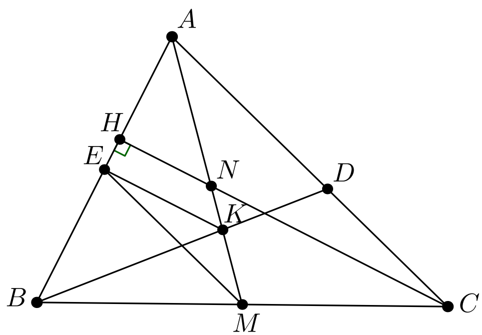
Deoarece relaţia are loc pentru orice x, coeficienţii respectivi pe lângă x^i trebuie să fie egali, deci $a_i(3^i + 4^i) = a_i \cdot 5^i, 0 \leq i \leq n$. Dacă $a_i \neq 0$ atunci $3^i + 4^i = 5^i$. Rescriem ca $\dfrac{3^i}{5^i} + \dfrac{4^i}{5^i} = 1$ Partea stângă este descrescătoare, iar dreapta constantă, deci ecuaţia are o soluţie unică. Observăm că 2 este soluţie. Deci $P(x) = ax^2, \forall a \in \mathbb{R}$

9.3 Notăm produsul numerelor cu P. Notăm numerele cu a_i pentru toate $i \in \{1, ..., n\}$. Avem:

$$\frac{P}{a_i} - a_i \,\vdots\, n \Leftrightarrow \frac{P - a_i^2}{a_i} \,\vdots\, n \Leftrightarrow P - a_i^2 \,\vdots\, n$$

Sumând aceste relaţii pentru $i \in \{1, ..., n\}$ şi notând cu S_2 suma pătratelor acestor numere, obţinem că: $nP - S_2 \,\vdots\, n$, adică $S_2 \,\vdots\, n$.

9.4 Trasăm $KE \perp AB,\ E \in (AB)$. Atunci $KE \parallel CH$ şi $AE = EB$, deoarece triunghiul $\triangle AKB$ este isoscel. Rezultă că EM este linie mijlocie în triunghiul $\triangle ABC$ şi $EM \parallel AC,\ EM = \frac{1}{2}AC$. Cum $EK \| CH \Rightarrow \angle EKM \equiv \angle ANC$ (1), iar cum $EM \| AC \Rightarrow \angle EMK \equiv \angle NAC$. Respectiv din relaţiile (1) şi (2) obţinem că $\triangle CNA \sim \triangle EKM \Rightarrow \dfrac{NA}{KM} = \dfrac{CA}{EM} = 2$.



9.5 Fie numerele x, y, z. Presupunem că oricum nu am nota aceste numere cu a, b şi c inegalitatea cerută nu are loc niciodată. Atunci $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} \leq \frac{a}{c} + \frac{c}{a}$. Scriind toate 6 inegalităţi posibile:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} \leq \frac{x}{z} + \frac{z}{x}, \qquad \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \ldots$$

şi adunând, obţinem:

$$4 \sum_{cyc} \left(\frac{x}{y} + \frac{x}{z} \right) \leq 4 \sum_{cyc} \left(\frac{x}{y} + \frac{x}{z} \right).$$

Deci toate cele 6 inegalităţi sunt de fapt egalităţi, de unde obţinem $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} = \dfrac{z}{y} + \dfrac{y}{x}$, deci $x = z$. Analog $x = y$, contradicţie. Prin urmare nu pot fi toate inegalităţile false.

4

Anul 2011

4.1 Clasa 5

5.1 Un grup de copii s-au dus în pădure la culesul nucilor. Ei s-au împărţit în perechi – câte un băiat şi o fată. După ce au ieşit din pădure s-a dovedit că fiecare băiat a cules sau de 2 ori mai puţin sau de 2 ori mai multe nuci decât fata din perechea sa. Poate oare numărul total de nuci cules de copii să fie egal cu 2011?
5.2 Demonstraţi că numărul $\underbrace{20112011...2011}_{\text{de 999 ori}}$ poate fi scris ca produs de doi factori mai mari decât 6000.
5.3 Arătaţi cum, utilizând toate cifrele $0, 1, 2, ..., 9$ câte o dată, putem obţine numărul 2011 (puteţi folosi toate operaţiile cunoscute).
5.4 De-a lungul unui gard cresc 100 de pomi. Se ştie că numărul de prune care cresc pe 2 pomi vecini diferă cu 1. Demonstraţi că numărul total de prune nu poate fi egal cu 2011.

4.2 Clasa 6

6.1 Să se demonstreze că numărul $2011^9 + 9^{2011}$ se divide cu 10.
6.2 Demonstraţi că numărul 20111...11, unde 1 apare de 2011 de ori, nu este pătrat perfect.
6.3 Folosind bancnote de $1, 3$ şi 5 lei, putem oare schimba 2011 de lei şi să obţinem 666 de bancnote?
6.4 Într-o cutie se află 2011 de bile numerotate de la 1 până la 2011. Mai

întâi se scot bilele cu numerele divizibile cu 2, după aceasta cele divizibile cu 3 şi, în final cele divizibile cu 5. Câte bile au rămas în cutie?

4.3 Clasa 7

7.1 Dacă $a+b=2011$ să se demonstreze că $2011a+b^2=2011b+a^2$.
7.2 În expresia $1*2*3*\ldots*2010*2011=0$ putem oare înlocui toate steluţele cu semnele $+$ sau $-$ astfel încât să obţinem egalitate?
7.3 Să se demonstreze egalitatea:

$$\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{\ldots+\frac{1}{2011}}}}}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{\ldots+\frac{1}{2011}}}}}}=1$$

7.4 Să se demonstreze că numărul $1+2^{2011}$ este compus.
7.5 Fie M un punct în interiorul triunghiului ABC. Dreptele AM şi BM intersectează laturile BC şi AC ale triunghiului în punctele A_1 şi B_1 respectiv. Dacă $AM=2MA_1$ şi $BM=2MB_1$ să se demonstreze că M este centrul de greutate al triunghiului ABC (punctul de intersecţie al medianelor).
7.6 Putem oare scrie în celulele unei tabele 2011×10 câte un număr natural nenul, astfel încât suma numerelor în oricare coloană sau rând să fie număr prim?

4.4 Clasa 8

8.1 Să se demonstreze că, dacă m este o rădăcină pozitivă a ecuaţiei:

$$x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+2010)(x+2011)=1,$$

atunci $m<\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2010\cdot 2011}$.
8.2 Dacă $pqr=2011(p+q+r)$, unde $p,q,r\in\mathbb{N}$, demonstraţi că cel puţin unul din numerele p,q,r este compus.
8.3 Există oare 2011 numere naturale consecutive, suma cărora este cub perfect?
8.4 În expresia $1*2*3*\ldots*2010*2011=0$ putem oare înlocui toate steluţele cu semnele $+$ sau $-$ astfel încât să obţinem egalitate?
8.5 În triunghiul ABC au loc relaţiile $AC=2BC$ şi $\angle ACB=2\angle BAC$. Să se afle unghiurile triunghiului ABC.

8.6 Un număr de patru cifre scris pe tablă poate fi înlocuit cu altul, adăugând câte o unitate la două cifre vecine, dacă ambele sunt diferite de 9 sau scăzând câte o unitate din două cifre vecine, dacă ambele sunt diferite de 0. Se poate, cu un număr finit de astfel de operaţii de obţinut din numărul 1234 numărul 2011?

4.5 Clasa 9

9.1 Să se arate că pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$ impare, ecuaţia $ax^2 + 2011x + b = 0$ nu are soluţii raţionale.
9.2 Să se arate că expresia: $(a + b + 2011)(a + b - 2011)(a - b + 2011)(-a + b + 2011)$, unde $a = \sqrt{1 + x^2}$, $b = \sqrt{1 + y^2}$ şi $x + y = 2011$ este o mărime constantă, şi să se calculeze această mărime.
9.3 Să se compare numerele $2011!$ şi 1006^{2011}.
9.4 Trei cercuri de razele $1, 2, 3$ sunt tangente exterior două câte două. Să se determine aria triunghiului determinat de punctele de tangenţă celor trei cercuri.
9.5 Numerele 2^{2011} şi 5^{2011} sunt scrise unul după altul în baza 10. Câte cifre are numărul obţinut?
9.6 Se consideră un dreptunghi 9×5 împărţit în pătrăţele unitare. Se numeşte *vârf* un punct ce se află la intersecţia a 4 pătraţele. Iniţial toate pătrăţelele sunt colorate în alb. O mutare constă în alegerea unui *vârf* şi schimbarea culorii (din alb în negru sau din negru în alb) a oricăror 3 pătrăţele ce au acest *vârf* în comun. Se poate oare după 2011 de mutări de colorat toate pătratelele dreptunghiului în negru?

2011 Soluţii

4.6 Clasa 5 Soluţii

5.1 Observăm că în orice pereche unul din copii a strâns x nuci, iar celălalt $2x$ nuci. Deci fiecare pereche a strâns un număr de nuci divizibil cu 3. Prin urmare, şi numărul total de nuci strânse trebuie să se divida cu 3, însă $2011 = 3k + 1$, deci răspunsul este nu.
5.2 Observăm că:

$$A\underbrace{20112011...2011}_{\text{de 999 ori}} = 2011 \cdot \underbrace{100010001...10001}_{\text{999 de 1}}.$$

Observăm că al doilea factor are suma cifrelor egală cu 999, deci numărul acesta este divizibil cu 3. Notăm $3b = \underbrace{100010001...10001}_{999 \text{ de } 1}$, evident b este cu mult mai mare decât 6000.

Atunci $A = 2011 \cdot 3b = 6033 \cdot b$.

5.3 Există foarte multe posibilităţi. Iată unele din ele

$$2011 = 2^{10} + 987 + 3 + 6 - 5 - 4,\ \ 2011 = 26143 : (5 + 8 + 7 \cdot 9 \cdot 0).$$

5.4 Numerotăm pomii de la 1 până la 100 şi le împărţim în perechi $(1, 2), (3, 4)$ $\ldots (99, 100)$. Atunci în fiecare pereche de pomi pe unul cresc x prune şi pe altul x + 1, deci suma este impară. Atunci suma numerelor de prune de pe pomi va fi egală cu suma a 50 de numere impare, deci va fi un număr par. Însă 2011 este impar, contradicţie.

4.7 Clasa 6 Soluţii

6.1 Observăm că ultima cifră a numărului 2011^k este întotdeauna 1, iar ultima cifră a numărului 9^m este 1 dacă m este par şi 9 dacă m este impar. Rezultă că

$$2011^9 + 9^{2011} = (10a + 1) + (10b + 9) = 10(a + b + 1),$$

deci ultima cifră este 0.

6.2 Observăm că suma cifrelor numărului dat este egală cu $2+1\cdot 2011 = 2013$. Rezultă că numărul dat este divizibil cu 3. Însă dacă n^2 se divide cu 3, atunci n se divide cu 3, de unde obţinem că n^2 se divide cu 9, deci şi suma cifrelor se divide cu 9, însă 2013 nu este divizibil cu 9, contradicţie.

6.3 Presupunem că putem obţine

$$2011 = \underbrace{1 + 1 + ... + 1 + 3 + ... + 3 + 5 + ... + 5}_{666}.$$

Însă suma unui număr par de numere impare este un număr par, dar 2011 este impar de unde obţinem contradicţie.

6.4 Notăm cu N_k mulţimea numerelor divizibile cu k din mulţimea $A = \{1, 2, ..., 2011\}$. Evident $card(N_k)$ este câtul, obţinut la împărţirea lui 2011 la k. Dacă B este mulţimea numerelor rămase, atunci din diagrama de jos este uşor de observat că

$$B = A - (N_2 + N_3 + N_5 - N_6 - N_{10} - N_{15} + N_{30}).$$

Deci $card(B) = 2011 - (1005 + 670 + 402 - 335 - 201 - 134 + 67) = 537$. Deci, răspunsul este 537 de bile.

4.8 Clasa 7 Soluţii

7.1 Din $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 2011(a-b) = 2011a - 2011b$ rezultă relaţia cerută.
7.2 Observăm că $1+2-3=0$ şi $(k-1)-k-(k+1)+(k+2)=0$. Deoarece $2011 = 3 + 4 \cdot 502$ noi putem împărţi numerele $4, 5, 6, ..., 2011$ în grupe a câte 4 termeni şi folosind relaţia menţionată să obţinem suma 0.
7.3 Notăm:

$$k = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ldots + \frac{1}{2011}}}$$

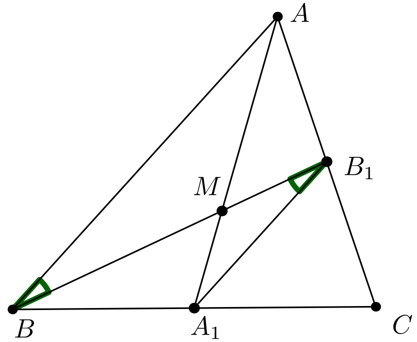
Atunci:

$$\frac{1}{2+\frac{1}{k}} + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{k}}} = \frac{k}{2k+1} + \frac{k+1}{2k+1} = 1$$

7.4 Avem

$$1 + 2^{2011} = 3 + (2^{2011} - 2) = 3 + 2((2^{1005})^2 - 1) = 3 + 2(2^{1005} - 1)(2^{1005} + 1).$$

Rămâne de observat că produsul $(2^{1005}-1)(2^{1005}+1)$ se divide cu 3, deoarece unul din numerele $2^{1005} - 1,\ 2^{1005} + 1$ este divizibil cu 3.
7.5 Cum $\dfrac{AM}{MA_1} = \dfrac{BM}{MB_1} \Rightarrow \dfrac{AM}{BM} = \dfrac{MA_1}{MB_1}$, iar $\angle A_1MB_1 \equiv \angle AMB$, respectiv avem că $\triangle AMB \sim \triangle A_1MB_1$. Din asemănarea acestor două triunghiuri obţinem că $\angle ABM \equiv \angle MB_1A_1 \Rightarrow B_1A_1 \| AB$ si $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AM}{MA_1} = 2 \Rightarrow B_1A_1$ - linie mijlocie în $\triangle CAB$, respectiv B_1 şi A_1 sunt mijloacele segmentelor AC şi $CB \Rightarrow M$ e centrul de greutate al $\triangle ABC$.



7.6 Deoarece suma de pe o verticală sau orizontală este un număr prim mai mare că 2, acesta este un număr impar. Atunci suma numerelor din tabel va fi egală cu suma a 10 numere impare (sumele de pe orizontale), deci va fi un număr par. Pe de altă ea va fi egală cu suma a 2011 numere impare (sumele de pe verticale) şi va fi un număr impar, contradicţie. Deci răspunsul este nu.

4.9 Clasa 8 Soluţii

8.1 Din $m > 0$ obţinem:

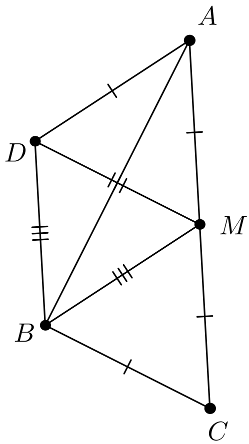
$$1 = m(m+1)(m+2)\cdot ... \cdot (m+2011) > m(0+1)(0+2)\cdot ... \cdot (0+2011) =$$

$$= m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2011$$

de unde şi obţinem inegalitatea cerută.
8.2 Presupunem că toate numerele sunt prime. Demonstrăm atunci ecuaţia dată nu are soluţii. Din $2011 \mid pqr$ şi faptul că 2011 este prim obţinem că unul din numere este egal cu 2011, fie $r = 2011$. Atunci ecuaţia devine $pq = p + q + 2011$, ceea ce este echivalent cu $(p-1)(q-1) = 2012 = 1 \cdot 2012 = 2 \cdot 1006 = 4 \cdot 503$. Presupunem că $p \leq q$, atunci obţinem soluţiile $(p, q) \in \{(2, 2013),\ (3, 1007),\ (5, 504)\}$, însă printre acestea nu există nici o pereche de numere prime, deci presupunerea facută la început este falsă, şi cel puţin un număr este compus.
8.3 Încercăm să găsim un număr k, pentru care există n, astfel încât:

$$n^3 = (k+1)+(k+2)+...+(k+2011) = 2011k+2011\cdot 1006 = 2011(k+1006).$$

Există mai multe soluţii, de exemplu pentru $k = 2011^2 - 1006$ obţinem $2011(2011^2 - 1006 + 1006) = 2011^3$. Deci, răspunsul este da.
8.4 Vezi problema 7.2.
8.5 Fie M - mijlocul segmentului AC. Cum $AC = 2BC \Rightarrow AM = MC = BC$, respectiv $\triangle MCB$ este isoscel. Fie punctul D, astfel încât D şi B sunt de aceiaşi parte a dreptei AC, iar $AD = AM$ şi $\angle DAB = \angle BAM$. Obţinem că $\triangle DAM \sim \triangle MCB$ şi AB este mediatoarea segmentului $DM \Rightarrow \triangle BDM$ este de asemenea isoscel, respectiv $BD = BM$. Cum $\triangle DAM \sim \triangle MCB$ şi $AD = AM = MC = CB \Rightarrow DM = MB \Rightarrow \triangle DMB$ - echilateral $\Rightarrow 60° = \angle BMD = 180° - 2\angle BMC \Rightarrow \angle BMC = 60° \Rightarrow \angle MCB = 60°$, $\angle BAC = 30°$ şi $\angle ABC = 90°$



8.6 Considerăm $M(\overline{abcd}) = (b+d) - (a+c)$. Observăm că după operaţiile descrise numărul M nu se schimbă, deoarece fiecare paranteză sau se măreşte cu 1 sau scade. Deci, pentru ca să putem obţine din numărul 1234 numărul 2011 trebuie 2 avem $M(1234) = M(2011)$. Însă $M(1234) = 2$ şi $M(2011) = -2$. Prin urmare, răspunsul este nu.

4.10 Clasa 9 Soluţii

9.1 Presupunem că ecuaţia are soluţii raţionale. Atunci discriminantul $D = 2011^2 - 4ab$ este un pătrat perfect impar. Atunci

$$2011^2 - 4ab = (2k+1)^2 \Leftrightarrow (2010-2k)(2012+2k) =$$

$$= 4ab \Leftrightarrow (1005-k)(1006+k) = ab.$$

Însa unul din numerele $1005-k, 1006+k$ este par, de unde rezultă că ab este par, contradicţie.

9.2 Abordarea directă prin deschiderea tuturor parantezelor va duce la soluţie, însă noi prezentăm o altă metodă:

Notăm mărimea expresiei cerute cu X. Considerăm un punct D în plan şi o dreaptă prin D. Pe această dreaptă mai considerăm două puncte A şi B însă în dependenţă de două căzuri. Dacă ambele x şi y sunt pozitive, atunci punctele A, D, B se află pe dreapta în această ordine şi $AD = x,\ BD = y$. Observăm că $AB = 2011$. Dacă y este negativ, atunci punctele D, A, B se află pe dreapta în această ordine şi $AD = x,\ BD = -y$. Observăm că

$$AB = AD - BD = x - (-y) = x + y = 2011.$$

În punctul D considerăm un segment DC perdendicular pe dreapta dată, astfel încât $DC = 1$. Atunci

$$AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{1 + x^2} = a$$

$$\text{si } CB = \sqrt{1 + y^2} = b.$$

Observăm că aria triunghiului ABC este egală cu

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{2011}{2}$$

Dar pe de altă parte, utilizând $formula\ lui\ Heron$ obţinem:

$$\frac{2011}{2} = A_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-2011)} = \frac{1}{4}\sqrt{X}$$

Deci $X = 4 \cdot 2011^2$.

9.3 Vom folosi inegalitatea Media Geometrică $\leq$ Media Pătratică:

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Longleftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$$

Atunci:

$$2011! = (1 \cdot 2011) \cdot (2 \cdot 2010) \cdot ... \cdot (1005 \cdot 1007) \cdot 1006 <$$

$$< \left(\frac{1+2011}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2+2010}{2}\right)^2 \cdot ... \cdot \left(\frac{1005+1007}{2}\right)^2 \cdot 1006 = 1006^{2011}$$

Deci, $2011! < 1006^{2011}$.

9.4 Fie O_1, O_2, O_3 centrele cercurilor, iar A, B, C punctele de tangenţă. Uşor se arată că tripletele de puncte (O_1, A, O_2), (O_2BO_3), (O_3CO_1) sunt coliniare. Atunci:

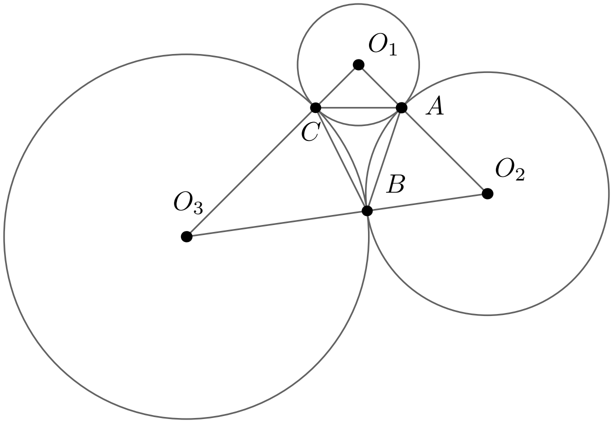
$$O_1O_2 = 1 + 2 = 3,\ O_1O_3 = 1 + 3 = 4, \text{si } O_2O_3 = 2 + 3 = 5.$$

Observăm că triunghiul $\triangle O_1O_2O_3$ este dreptunghic în O_1, deci

$$sin(\angle CO_3B) = \frac{3}{5},\ sin(\angle AO_2B) = \frac{4}{5}.$$

Atunci:

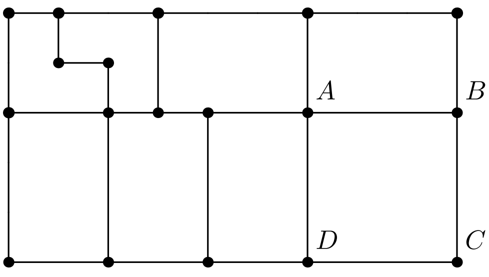
$$S_{ABC} = S_{O_1O_2O_3} - S_{ACO_1} - S_{ABO_2} - S_{BCO_3} = \frac{1}{2}(3 \cdot 4 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5} - 3 \cdot 3 \cdot \frac{3}{5}) = \frac{6}{5}$$



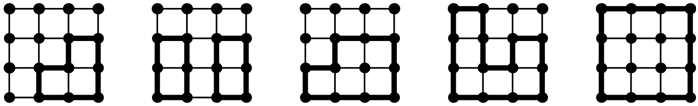
9.5 Fie 2^{2011} are m cifre, iar 5^{2011} are n cifre. Atunci $10^{m-1} < 2^{2011} < 10^m$ si $10^{n-1} < 5^{2011} < 10^n$. Înmulţind obţinem:

$$10^{m+n-2} < 10^{2011} < 10^{m+n} \Longleftrightarrow m+n-2 < 2011 < m+n$$

Prin urmare, $m+n=2012$, adică numărul obţinut are 2012 de cifre.
9.6 Răspunsul este da. În 17 mutări putem obţine dreptunghi negru. In 2 mutări putem transforma un dreptunghi alb de dimensiunea 2×3 sau 3×2 în unul negru de aceiaşi dimensiune, respectiv în 12 mutări putem face dreptughiul total în negru, mai puţin patrulaterul $ABCD$ ce are dimensiunea 3×3.



În continuare observaţi cum puteţi colora patrulaterul $ABCD$ în 5 mişcări:



După aceasta luăm orice vârf şi efectuăm o mutare oarecare şi obţinem 3 pătratele albe. Mai aplicăm aceeaşi mutare şi obţinem din nou un dreptunghi negru deja în 19 mutări. Tot aşa putem obţine un dreptunghi negru şi în $21, 23, ...2009, 2011$ mutări efectuând de fiecare dată cele 2 mutări descrise.

5

Anul 2012

5.1 Clasa 5

5.1 Fie $N = \overline{aabb}$ un număr natural de patru cifre. Aflaţi pentru ce valori ale lui a şi b sunt corecte următoarele afirmaţii:

a)$N \vdots 121$;
b)N este pătrat perfect.

5.2 Fie X_i numere de forma $X_i = 1\underbrace{22\ldots2}_{i\ ori}1$. Aflaţi câte din numerele $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ sunt divizibile la 3.

5.3 Pe 15 cartonaşe sunt scrise numerele de la 1 până la 15. Este oare posibil de împărţit cartonaşele la 2 elevi în aşa mod încât sumele numerelor de pe cartonaşe la ambii elevi să fie egale?

5.4 Pe o tablă sunt scrise 6 numere. Andrei, Vasile şi Petru spun câte două afirmaţii. Se ştie că fiecare copil spune numai adevărul, sau minte mereu.

Andrei spune:
1) toate numerele sunt consecutive;
2) suma numerelor este pară;

Vasile spune:
1) numerele sunt 1,2,3,4,5,6;
2) Petru minte;

Petru spune:
1) toate numerele sunt mai mici ca 20;
2) toate numerele se divid la 3.

Aflaţi numerele scrise iniţial pe tablă.

5.2 Clasa 6

6.1 Aflaţi numerele de 3 cifre care se micşorează de 9 ori dacă ştergem cifra din mijloc.
6.2 Într-o ladă sunt 100 de bile multicolore: 28 roşii, 20 verzi, 12 galbene, 20 albastre, 10 albe şi 10 negre. Care este numărul minim de bile ce trebuiesc extrase, făra a privi în ladă, astfel încît printre ele să fie 15 bile de aceeaşi culoare?
6.3 Avem 6 lăzi cu prune, mere şi pere. Se ştie că în fiecare ladă sunt toate cele 3 tipuri de fructe. Numărul prunelor din fiecare ladă este egal cu numărul total de mere din celelalte lăzi, iar numărul merelor din fiecare ladă este egal cu numărul total de pere din celelalte lăzi. Demonstraţi că numărul total de fructe se divide cu 31.
6.4 Dacă ultima cifră a numărului $n^2 + 2n$ este egală cu 4, aflaţi penultima cifră a acestui număr.

5.3 Clasa 7

7.1 Avem un număr format din 2012 cifre, 12 dintre care sunt zerouri, iar restul sunt toate cifrele impare de la 1 pâna la 9. Numărul de apariţii al fiecărei cifre în scrierea numărului este direct proporţional cu ea însăşi.

a) Aflaţi suma cifrelor numărului dat;

b) Poate fi acest număr un pătrat perfect?

7.2 Rezolvaţi ecuaţia, unde a, b, c, d, e sunt cifre :

$$\overline{abcd} + \overline{cd} + \overline{dc} = a^{11} - e.$$

7.3 Pe laturile BC şi DC ale pătratului $ABCD$ se consideră punctele M şi N, astfel încât $\angle BAM \equiv \angle MAN$. Să se demostreze că $BM + ND = AN$.
7.4 Fie $A = \{y \in \mathbb{N} \,|\, y = 2a + 5b;\ a, b = 0, 1, 2, \ldots 100\}$. Aflaţi suma elementelor din A.
7.5 Andrei se află în centrul unui cerc cu raza 100m. O dată pe minut Andrei alege direcţia în care vrea să se mişte. Mihai poate lăsa această direcţie neschimbată sau să o schimbe cu una în direcţia opusă. Apoi Andrei face un pas de 1 metru în direcţia aleasă de Mihai. Determinaţi dacă Andrei are o strategie, care îi garantează ieşirea din cerc, indiferent de alegerile lui Mihai.
7.6 Rezolvaţi în numere naturale ecuaţia:

$$n + S(n) + S(S(n)) = 2012$$

unde cu $S(n)$ este notată suma cifrelor numărului n.

5.4 Clasa 8

8.1 Găsiţi numărul soluţiilor întregi pozitive ale ecuaţiei : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2012}$.
8.2 Fie ABC un triunghi arbitrar şi BB', CC', AA' înălţimile lui. H este ortocentrul triunghiului. Demostraţi relaţia :

$$AH \cdot AA' + BH \cdot BB' + CH \cdot CC' = \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + AC^2).$$

8.3 Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, demonstraţi inegalitatea şi determinaţi cazurile de egalitate :

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a}+\frac{2}{b}-\frac{2}{c}.$$

8.4 Pe o tablă sunt scrise numerele $14, 4, 6$. Se pot şterge oricare două numere, a şi b, iar în locul lor se scriu numerele $\frac{3a-4b}{5}$ şi $\frac{3b+4a}{5}$. Putem oare obţine numerele $7, 9, 12$ după un număr finit de operaţii?
8.5 Fie ABC un triunghi echilateral cu latura 2012 şi P un punct arbitrar în interiorul triunghiului. Aflaţi suma distanţelor de la P pâna la laturile triunghiului.
8.6 Pe o tablă de şah 8×8 se amplasează dame astfel încât în fiecare rând şi coloană numărul de dame albe este de două ori mai mare decât numărul de dame negre. Determinaţi numărul maxim de dame pe tablă şi daţi un exemplu de configuraţie în care el se obţine.

5.5 Clasa 9

9.1 Dacă numerele $2n+1$ şi $3n+1$ sunt pătrate perfecte şi $n \in \mathbb{N}^*$, demonstraţi că numărul $5n+3$ nu poate fi prim.
9.2 Fie $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ şi $\sqrt{a^2+2012}+\sqrt{b^2+2012} = 2\sqrt{c^2+2012}$. Demonstraţi că ecuaţia $x^2 - 2\sqrt{a^2+b^2}x + 2c^2 = 0$ are soluţii în numere reale.
9.3 Fie ABC un triunghi şi P un punct arbitrar în interiorul lui. Punctele A_1, B_1, C_1 sunt simetricele lui P faţa de laturile BC, AC, AB. Tangentele la

cercul circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ în A_1 şi B_1 se intersectează în D, în A_1 şi C_1 se intersectează în E, în C_1 şi B_1 se intersectează în F. Demostraţi că dreptele DC, EB, AF sunt concurente.

9.4 Determinaţi toate tripletele de numere prime (a, b, c) care satisfac inegalitatea :

$$ab + bc + ac > abc.$$

9.5 Fie ABC un triunghi şi AB cea mai mare latură a sa. Pe latura AB se aleg punctele P şi Q astfel încât $AQ = AC$ şi $BP = BC$. Demonstraţi că centrul cercului înscris în triunghiul ABC coincide cu centrul cercului circumscris triunghiului PQC.

9.6 Pe tablă sunt scrise numerele 2012^{2011} şi 2012. La fiecare mutare se alege cel mai mic număr de pe tablă şi pătratul lui se scrie pe o foaie, apoi numerele (x, y), $x > y$, scrise iniţial pe tablă, sunt şterse şi înlocuite cu $(x-y, y)$. După un număr finit de paşi, unul din numerele scrise pe tablă este 0. Cu ce este egală suma numerelor scrise pe foaie până în acest moment?

2012 Soluţii

5.6 Clasa 5 Soluţii

5.1 *a*) $N = 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11(100a + b)$. Acum din:

$$N \vdots 121 \Leftrightarrow 11(100a + b) \vdots (11 \cdot 11) \Leftrightarrow 100a + b \vdots 11 \Leftrightarrow a + b \vdots 11$$

Deci $(a, b) \in \{(2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6), (6, 5), (7, 4), (8, 3), (9, 2)\} \Longleftrightarrow$

$$\overline{aabb} \in \{2299, 3388, 4477, 5566, 6655, 7744, 8833, 9922\}.$$

b) Dacă N este pătrat perfect, din (a) cunoaştem că $N \vdots 11$, deci $N \vdots 11^2$, prin urmare verificăm toate soluţiile din (a) şi alegem pe cele care sunt pătrate perfecte, şi obţinem: $\overline{aabb} = 7744$.

5.2 Un număr este divizibil cu 3 dacă suma cifrelor sale se divide cu 3. Fie $S_i = S(X_i)$, suma cifrelor lui X_i. Atunci $S_i = 1 + 2 \cdot i + 1 = 2(i + 1)$. Deci:

$$3 \mid X_i \Longleftrightarrow 3 \mid S_i \Longleftrightarrow 3 \mid 2(i + 1) \Longleftrightarrow 3 \mid i + 1.$$

Deci $1 \leq i = 3k + 2 \leq 100 \Rightarrow 0 \leq k \leq 32$.
În acest caz toate X_{3k+2}, pentru $0 \leq k \leq 32$ sunt divizibile cu 3.
5.3 Observăm că suma tuturor numerelor este $1 + 2 + 3 + ... + 15 = 120$, deci rămâne să aflăm dacă putem împărţi cartonaşele în 2 grupe fiecare cu suma 60. Răspunsul este da, spre exemplu o partiţie este: $\{15, 14, 13, 12, 6\}$ şi $\{1, 2, 3, 4, 5$ $7, 8, 9, 10, 11\}$ fiecare cu suma 60.
5.4 Presupunem că Andrei spune adevărul. Atunci 6 numere consecutive conţin 3 numere pare şi 3 impare, deci şi suma lor este impară. Prin urmare Andrei minte, nu putem avea concomitent 6 numere consecutive cu suma lor pară. Deci numerele **nu sunt** consecutive, iar suma lor este impară.
Prin urmare Vasile minte şi el, întrucât nu putem avea numerele $1, 2, 3, 4, 5, 6$ deoarece afirmaţiile lui Andrei sunt false. Deci a 2-a afirmaţie a lui Vasile e falsă, rezultă că Petru spune adevărul.
Deci avem 6 numere mai mici ca 20, ce se divid la 3. Deci numerele scrise iniţial pe tablă sunt: $\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$.

5.7 Clasa 6 Soluţii

6.1 Avem:

$$\overline{abc} = 9 \cdot \overline{ac} \iff 100a + 10b + c = 90a + 9c \iff 10a + 10b = 8c \iff 5(a+b) = 4c.$$

Rezultă $c \vdots 5 \Rightarrow c = 5$ deci $\Rightarrow a+b = 4$, prin urmare $(a, b) \in \{(1, 3); (2, 2); (3, 1); (4, 0)\}$. Deci $\overline{abc} \in \{135,\ 225,\ 315,\ 405\}$.
6.2 În cel mai rău caz vom avea extrase toate 10 bile negre, toate 10 bile albe, toate 12 bile galbene, şi câte 14 bile roşii, verzi, albastre. Deci putem extrage în total $10 + 10 + 12 + 14 + 14 + 14 = 74$ de bile şi să nu avem nici un grup de 15 bile. Mai extrăgând o bilă putem garanta că cel puţin 15 bile sunt toate de aceeaşi culoare roşie, verde sau albastră, deci numărul minim de bile necesare este 75.
6.3 Numărul prunelor în fiecare ladă este egal cu numărul de mere în toate celelalte 5 lăzi rămase. Prin urmare numărul de prune în toate 6 lăzi este egal cu 5 inmulţit la numărul total de mere, întrucât fiecare ladă de mere se adună de 5 ori pentru fiecare din cele 5 lăzi diferite de prune. Deci $N_{prune} = 5 \cdot N_{mere}$. Analog se obţine că $N_{mere} = 5 \cdot N_{pere}$. De unde rezultă:

$$N_{total} = N_{prune} + N_{mere} + N_{pere} = 5N_{mere} + N_{mere} + N_{pere} =$$

$$= 25N_{pere} + 5N_{pere} + N_{pere} = 31N_{pere}.$$

Deci numărul total de fructe se divide cu 31.
6.4 Tabelul de mai jos arată ultima cifră modulo 10 în dependenţa de expresia $E(n)$:

$E(n)$	Ultima cifră modulo 10									
n	0	1	2	3	$\underline{4}$	5	6	7	8	9
n^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$2n$	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
n^2+2n	0	3	8	5	$\underline{4}$	5	8	3	0	9

Observăm că n^2+2n are ultima cifră 4 doar atunci când n are ultima cifră 4. Atunci n are forma $n = 10k+4$. Deci:

$$n^2+2n = (10k+4)^2+2(10k+4) = 100k^2+80k+16+20k+8 = 100(k^2+k)+24.$$

Prin urmare ultimele 2 cifre ale expresiei $E(n) = n^2+2n$ sunt 24, deci penultima cifră e 2.

5.8 Clasa 7 Soluţii

7.1 (a) Fie că avem n apariţii de 1, atunci vom avea $3n$ apariţii de 3, $5n$ apariţii de 5, $7n$ apariţii de 7 şi $9n$ apariţii de 9. Atunci 12 cifre sunt zerouri deci restul 2000 de cifre rămase sunt numere impare de la 1 pâna la 9. Prin urmare $n+3n+5n+7n+9n = 25n = 2000 \Rightarrow n = 80$. Deci suma cifrelor numărului dat este:

$$S = 80\cdot 1 + 240\cdot 3 + 400\cdot 5 + 560\cdot 7 + 810\cdot 9 + 12\cdot 0 = 13200$$

(b) Numărul nu poate fi pătrat perfect deoarece suma cifrelor sale se divide la 3 dar nu se divide la 9.
7.2 Ecuaţia se rescrie ca:

$$1000a + 100b + 21c + 12d = a^{11} - e \Leftrightarrow 100b + 21c + 12d + e = a(a^{10} - 1000)$$

• Dacă $a \geq 3$, atunci partea dreaptă a ecuaţiei este cu mult mai mare decât partea stângă a ecuaţiei deoarece:

$$\underline{100b+21c+12d+e} \leq 100\cdot 9+21\cdot 9+12\cdot 9+9 \leq 3(3^{10}-1000) \leq \underline{a(a^{10}-1000)}$$

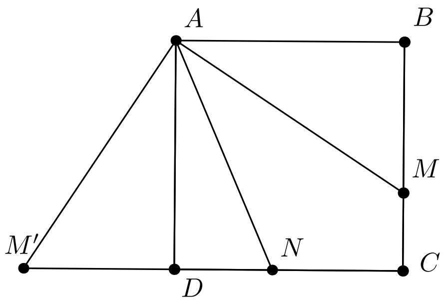
• Dacă $a = 1$ partea dreaptă e negativă deoarece $1^{10} - 1000 < 0$.
• Dacă $a = 2 \Rightarrow$

$$100b + 21c + 12d + e = 2(1024 - 1000) = 48 \Longrightarrow b = 0 \Longrightarrow 21c + 12d + e = 48$$

Deci $c \leq 2$: Dacă $c = 2 \Rightarrow 12d + e = 48 - 42 = 6 \Rightarrow d = 0$, contrazicere.
Dacă $c = 1 \Rightarrow 12d + e = 48 - 21 = 27 \Rightarrow d = 2, e = 3 \Rightarrow (a, b, c, d, e) = \boxed{(2, 0, 1, 2, 3)}$

Răspuns: $(2, 0, 1, 2, 3)$.

7.3 Rotim $\triangle ABM$ cu $90°$ în jurul punctului A dupa acele de ceasornic ca în desenul alăturat. Prin urmare $B \to D$ şi fie $M \to M'$. Deci $\triangle ABM \equiv \triangle ADM'$ deci $\angle BAM \equiv \angle DAM'$, iar $BM = DM'$. Fie $\angle BAM = \angle MAN = \angle DAM' = \alpha$. Atunci $\angle AM'D = 90° - \angle DAM' = 90° - \alpha$, iar $\angle NAM' = \angle DAM' + \angle NAD = \alpha + (90° - 2\alpha) = 90° - \alpha = \angle AM'D$. Prin urmare $\triangle ANM'$ isoscel, deci $AN = M'N = M'D + DN = BM + DN$ ceea ce trebuia de demonstrat.



7.4 Fiind dat un număr $x \in A$, $x = 2a + 5b$ a.i. $a \leq 95$ sau $b \leq 98$ rezultă că şi $x + 10 \in A$ întrucât putem mări $a \to a + 5$ sau $b \to b + 2$, echivalentul a $x = 2a + 5b \to 2a + 5b + 2 \cdot 5 = x + 10$. Acum observăm că $\{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\} \in A$ (toate pot fi scrise sub forma $2a + 5b$). Acum deoarece A conţine 10 numere consecutive $\{4, 5, ..., 13\} \in A$ rezultă că şi următoarele 10 numere $\{14, 15, 16, ...23\} \in A$ după procedura de mai sus. Prin urmare crescând fiecare din aceste numere cu 10 de multiple ori, A va conţine toate numerele consecutive de la 0 la 700, cu excepţia numerelor $\{1, 3, 697, 699\}$. Prin urmare suma elementelor din A este:

$$S(A) = 0+1+2+...+700-(1+3+697+699) = \frac{700 \cdot (700 + 1)}{2} - 700 \cdot 2 = 243950.$$

7.5 Vom demonstra că Andrei are o strategie care îi garantează ieşirea din cerc. Fie d_k distanţa între origine şi Andrei după minutul k, iar $q_k = d_k^2$, pătratul acestei distanţe. Prin urmare vrem să arătăm că există n, pentru care $d_n > 100$, sau $q_n > 100^2$. Iniţial avem $q_0 = d_0 = 0$. Strategia este următoarea, vom arăta că Andrei poate creşte q_k cu 1 metru în fiecare pas,

adică poate garanta $q_{k+1} = q_k + 1$. Pentru $k = 1$ este evident, Andrei face 1 pas de 1 metru faţă de origine indiferent de alegerea lui Mihai. Acum, fie P poziţia lui Andrei după minutul k. Atunci la următorul pas Andrei va alege o direcţie perpediculară pe OP, şi indiferent dacă Mihai reversează direcţia sau nu, la următorul pas Andrei va face un pas de 1m perpedicular cu OP. Fie R noua sa poziţie, atunci $PR = 1$ iar $\triangle OPR$ este dreptunghic cu $OP = d_k$, şi $OR = \sqrt{d_k^2 + 1}$, din teorema lui Pitagora. Prin urmare vom avea $q_{k+1} = OR^2 = OP^2 + PR^2 = d_k^2 + 1 = q_k + 1$. Deci după $n = 10001 = 100^2 + 1$ paşi, Andrei se va afla la o distanţă de $d_{10001}^2 = q_{10001} = 10001 > 100^2$, deci $d_{10001} > 100$, şi Andrei se află în afara cercului.
7.6 Vom demonstra că dacă n dă restul $x \in \{0, 1, -1\}$ la împărţirea la 3, atunci $S(n)$ dă restul x la împărţirea la 3. Fie $n = \overline{abcd}$ şi fie $R(n)$ - restul lui n la 3. Atunci: $R(n) = R(\overline{abcd}) = R(1000a + 100b + 10c + d) = R(1000) \cdot R(a) + R(100) \cdot R(b) + R(10) \cdot R(c) + R(d) = R(a) + R(b) + R(c) + R(d) = R(a + b + c + d) = R(S(n))$. Prin urmare şi $S(S(n))$ dă acelaşi rest ca $S(n)$ care dă acelaşi rest ca n la împărţirea la 3. Atunci deoarece toţi termenii au acelaşi rest modulo 3 rezultă:

$$3 \mid n + S(n) + S(S(n)) = 2012 \text{ însă } 3 \nmid 2012.$$

Prin urmare nu există soluţii în $\mathbb{N}$.

5.9 Clasa 8 Soluţii

8.1 Ecuaţia se rescrie ca $2012(a+b) = ab$. Acum fie $(a, b) = d$, atunci există p, q astfel încât $a = pd$ şi $b = qd$ iar $(p, q) = 1$ reciproc prime. Atunci înlocuind în ecuaţia iniţială obţinem: $2012(pd + qd) = pd \cdot qd \iff 2012p + 2012q = pqd \implies 2012p = q(pd - 2012)$ $(*)$. Prin urmare $q \mid 2012p$, însă $(p, q) = 1$ deci $q \mid 2012$. Analog se obţine şi $p \mid 2012$. Fie $2012 = qx$, atunci înlocuind în $(*) \implies qxp = q(pd - qx) \iff qx = p(d - x)$. Deci $p \mid x$, şi fie $x = py$ atunci $q \cdot qpy = p(d - py) \impliedby d = y(q + p)$. Deci $2012 = qx = qpy$, iar d este definit în funcţie de p, q, y. Prin urmare numărul total de soluţii al ecuaţiei iniţiale este egal cu numărul total de soluţii al $2012 = p \cdot q \cdot y$, a.i. $(p, q) = 1$. Observăm divizorii lui 2012 sunt $\{1, 2, 4, 503, 1006, 2012\}$. Dacă $p = 1$ avem 6 soluţii pentru $q \in \{1, 2, 4, 503, 1006, 2012\}$. Dacă $p = 2$ avem 2 soluţii $q \in \{1, 503\}$. Dacă $p = 4$ avem 2 soluţii $q \in \{1, 503\}$. Dacă $p = 503$ avem 3 soluţii $q \in \{1, 2, 4\}$. Dacă $p = 1006$ avem 1 soluţie $q \in \{1\}$, şi dacă $p = 2012$ la fel avem o soluţie $q \in \{1\}$. Prin urmare numărul total de soluţii este $6 + 2 + 2 + 3 + 1 + 1 = 15$ soluţii.
8.2 Observaţi că patrulaterele $HB'CA'$ şi $HC'BA'$ sunt circumscriptibile,

prin urmare din puterea punctului A faţă de aceste 2 cercuri avem:

$$AH \cdot AA' = AB' \cdot AC = AC' \cdot AB = \frac{1}{2}(AB' \cdot AC + AC' \cdot AB).$$

Analog se obţin expresiile pentru B şi C:

$$BH \cdot BB' = BC' \cdot AB = BA' \cdot BC = \frac{1}{2}(BC' \cdot AB + BA' \cdot BC).$$

$$CH \cdot CC' = CB' \cdot AC = CA' \cdot CB = \frac{1}{2}(CB' \cdot AC + CA' \cdot CB).$$

Sumând ultimele 3 expresii, şi grupând termenii din partea dreaptă obţinem egalitatea dorită.

8.3 Înmulţind ambele părţi la abc obţinem $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2bc + 2ac - 2ab$ sau

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ac + 2ab \geq 0 \Longleftrightarrow (a + b - c)^2 \geq 0.$$

Ultima inegalitate fiind evidentă. Iar cazul de egalitate se atinge pentru $a + b = c$.

8.4 Răspuns : Nu este posibil. Explicaţie: Fie pe tablă sunt numerele a, b şi c. Dacă alegem să înlocuim numerele a şi b cu numerele $\frac{3a-4b}{5}$ şi $\frac{3b+4a}{5}$ atunci putem să observăm că media pătratică a celor 3 numere rămâne neschimbată. Media pătratică iniţială este $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$. Media pătratică finală va fi $\sqrt{\frac{\frac{3a-4b}{5}^2+\frac{3b+4a}{5}^2+c^2}{3}} = \sqrt{\frac{\frac{25a^2+25b^2}{25}+c^2}{3}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$. Deci media pătratică iniţială a numerelor $14, 4, 6$ ar trebui să fie egală cu media pătratică a numerelor $7, 9, 12$. Media pătratică a numerelor $14, 4, 6$ este egală cu $\sqrt{\frac{248}{3}}$, iar cealaltă este egală cu $\sqrt{\frac{274}{3}}$ care evident că sunt diferite.

8.5 Fie h şi l înălţimea şi lungimea laturii triunghiului echilateral ABC, atunci $A_{ABC} = \frac{1}{2}l \cdot h$. Notăm prin $d_{P,AB}$ - distanţa (sau înalţimea) de la P la latura AB, atunci $A_{APB} = \frac{1}{2}l \cdot d_{P,AB}$, analog definim şi $d_{P,BC}$ şi $d_{P,CA}$. Atunci pentru orice punct P în interiorul triunghiului avem: $A_{ABC} = A_{APB} + A_{BPC} + A_{CPA} \Longrightarrow$

$$\frac{1}{2}l \cdot h = \frac{1}{2}l \cdot d_{P,AB} + \frac{1}{2}l \cdot d_{P,BC} + \frac{1}{2}l \cdot d_{P,CA} \text{ (simplificăm prin } \frac{1}{2}l) \Longrightarrow$$

$$d_{P,AB} + d_{P,BC} + d_{P,CA} = h.$$

Deci suma distanţelor de la P la laturile triunghiului este egală cu înalţimea triunghiului h. Iar din teorema lui Pitagora: $h = \sqrt{l^2 - (\frac{l}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}l = 1006\sqrt{3}$.

8.6 Pentru fiecare coloană putem avea maxim 2 dame negre şi 4 dame albe iar în total 6 dame. Dacă există o coloană cu cel puţin 3 dame negre, coloana va avea şi cel puţin 6 dame albe iar în total 9 dame, însa o coloana are doar 8 pătrate. Prin urmare fiecare coloană are maxim 6 dame, iar în total fiecare tablă 8×8 va avea maxim $6 \cdot 8 = 48$ de dame. O configuraţie posibilă este reprezentată mai jos.

●	●	○	○	○	○		
	●	●	○	○	○	○	
		●	●	○	○	○	○
○			●	●	○	○	○
○	○			●	●	○	○
○	○	○			●	●	○
○	○	○	○			●	●
●	○	○	○	○			●

5.10 Clasa 9 Soluţii

9.1 Presupunem că $5n+3$ - *prim.* Fie $2n+1 = a^2$ iar $3n+1 = b^2$, observăm:

$$3a^2 - 2b^2 = 3 \cdot (2n+1) - 2 \cdot (3n+1) = 1 \implies$$

$$5n+3 = 2n+1+3n+1+1 = a^2+b^2+1 = a^2+b^2+(3a^2-2b^2) =$$
$$= 4a^2 - b^2 = (2a-b) \cdot (2a+b).$$

Dacă $5n+3$ *prim*, atunci $2a-b=1$ sau $b = 2a-1$. Însă:

$$1 = 3a^2 - 2b^2 = 3a^2 - 2(2a-1)^2 = 3a^2 - 8a^2 + 8a - 2 = -5a^2 + 8a - 2 < 0,$$

$$\text{pentru } a \geq 3$$

Deci $2a - b \neq 1$, prin urmare $5n+3 = (2a-b) \cdot (2a+b)$ este *compus.*

9.2 Pentru a demonstra că există soluţii reale trebuie de demonstrat că $\Delta \geq 0$, sau $4(a^2+b^2) - 4 \cdot 2c^2 \geq 0 \iff a^2+b^2 \geq 2c^2$. Pentru aceasta vom utiliza inegalitatea

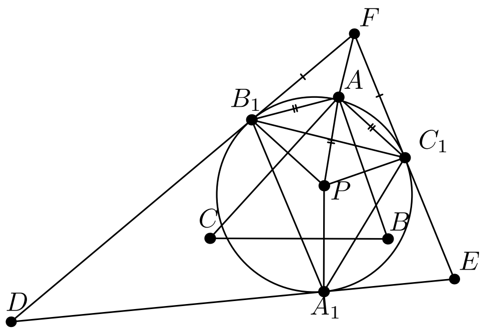
$$(x+y)^2 \geq 2(x^2+y^2)\ (*) \iff x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geq 0.$$

Atunci înlocuind $x = \sqrt{a^2+2012}$ şi $y = \sqrt{b^2+2012}$ în inegalitatea de mai sus obţinem:

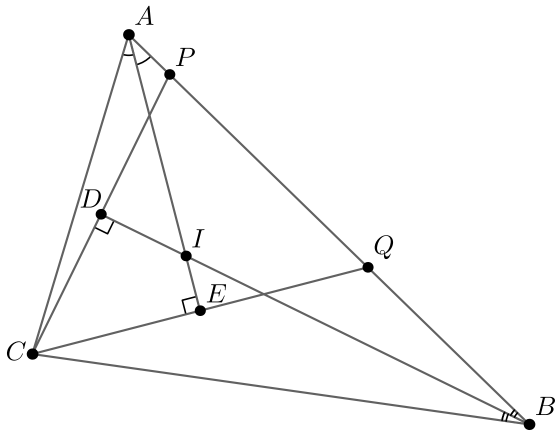
$$(2\sqrt{c^2+2012})^2 = (\sqrt{a^2+2012} + \sqrt{b^2+2012})^2 \leq 2(a^2+2012+b^2+2012) \iff$$

$$4c^2 + 4 \cdot 2012 \leq 2(a^2 + b^2) + 4 \cdot 2012 \Longleftrightarrow 2c^2 \leq a^2 + b^2 \Longleftrightarrow \Delta \geq 0.$$

Prin urmare ecuaţia are soluţii reale.
9.3 Vom demonstra că FA, EB şi DC sunt bisectoare în $\triangle DEF$, şi prin urmare sunt concurente în centrul cercului înscris în $\triangle DEF$. Observaţi că $AC_1 = AP = AB_1$, şi $FC_1 = FB_1$ întrucât sunt tangente, iar FA este latura comună, prin urmare dupa criteriul LLL avem $\triangle FAC_1 \equiv \triangle FAB_1$. Deci $\angle C_1FA = \angle B_1FA$, şi FA bisectă $\angle C_1FB_1$. Analog se demonstrează că EB şi DC sunt bisectoare în $\triangle DEF$, deci toate 3 drepte sunt concurente.



9.4 Din simetrie fie $a \geq b \geq c$. Avem: $abc < ab + bc + ca \leq ab + ab + ab = 3ab \Rightarrow c < 3 \Rightarrow c = 2$. Rezultă $ab + 2b + 2a > 2ab \Longleftrightarrow 2a + 2b > ab$. Deci $ab < 2a + 2b \leq 2a + 2a = 4a \Rightarrow b < 4$. Dacă $b = 3 \Longrightarrow 2a + 6 > 3a \Longrightarrow a \leq 6$ însă $a \geq b = 3$ deci $a \in \{3, 5\}$. Prin urmare $(a, b, c) \in \{(3, 3, 2), (5, 3, 2)\}$. Dacă $b = 2 \Longrightarrow 2a + 4 > 2a$ care este adevărată pentru orice $a - prim$. Deci pentru $p - prim$ avem soluţiile $(p, 2, 2), (5, 3, 2), (3, 3, 2)$ şi permutările lor.
9.5 Fie l_A şi l_B bisectoarele din A şi din B în $\triangle ABC$, atunci $l_A \cap l_B = \{I\}$ centrul cercului înscris în $\triangle ABC$. Însă, observaţi că l_A este mediatoarea segmentului CQ întrucât l_A este bisectoare în $\triangle ACQ$ isoscel. Analog l_B este mediatoarea segmentului CP, prin urmare $l_A \cap l_B = \{X\}$ centrul cercului circumscris $\triangle PQC$. Deci $X \equiv I$ coincid.



9.6 Observăm că 2012^{2011} se împarte fără rest la 2012, prin urmare la fiecare pas primul număr 2012^{2011} va scădea cu 2012 până se ajunge la 0, iar cel mai mic număr va fi mereu 2012. Deci numărul total de paşi este $2012^{2011} \div 2012 = 2012^{2010}$ paşi, iar la fiecare pas pe foaie se va scrie 2012^2. Respectiv, suma numerelor de pe foaie va fi $2012^2 \cdot 2012^{2010} = 2012^{2012}$.

6

Anul 2013

6.1 Clasa 5

5.1 Un sportiv se antrenează urcând pe o scară în modul următor: el urcă 9 trepte, coboară 7 şi urcă 2, apoi repetă acelaşi exerciţiu. Considerând că iniţial sportivul este la treapta 0, aflaţi pe ce treaptă se află sportivul după 2013 mişcări (o mişcare fiind o coborâre sau o urcare a treptei).
5.2 Avem o foaie dreptunghiulară 3×4 împărţită în pătrăţele 1×1. Doi elevi joacă după următoarele reguli: la fiecare mişcare un elev taie unul din fragmente după o linie. Câştigă acel elev care face ultima tăietură (vor rămâne 12 pătrăţele separate 1×1). Cine va câştiga?
5.3 Demonstraţi că suma resturilor la împărţire cu a, b şi c a numărului $\overline{abc}$ nu poate fi egală cu 23.
5.4 Sunteţi pe malul unui râu şi aveţi la dispoziţie trei vase, dintre care două cu volumul de 7 litri, şi unul cu volumul de 4 litri. Vasele nu sunt gradate. Cum veţi proceda pentru a turna câte 6 litri de apă în fiecare din vasele de 7 litri?

6.2 Clasa 6

6.1 Demonstraţi că nu există nici un număr de trei cifre $\overline{abc}$, astfel încât suma $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ să fie pătrat perfect.
6.2 În 2014 Nicolae împlineşte o vârstă egală cu suma cifrelor anului în care el s-a născut. În ce an ar putea fi născut Nicolae?

6.3 Demonstraţi că numărul $1 + 4^{\overline{20132013\ldots2013}}$ (exponentul este alcătuit din numărul 2013 repetat de 2013 ori) este compus.
6.4 Unui greieraş îi place să sară pe axa numerelor. El începe din punctul 0 iar la fiecare săritură el sare pe rând numere impare consecutive de unităţi (1,3,5...) în orice direcţie. Poate oare după 2013 sărituri greieraşul să se afle în poziţia iniţială?

6.3 Clasa 7

7.1 Petru alege trei cifre a, b, c şi îi propune lui Vasile să le ghicească. Condiţia este însă că Vasile trebuie să-i spună trei numere x, y, z, iar Petru să raspundă cu suma $ax + by + cz$. Ce numere x, y, z trebuie să aleagă Vasile pentru a determina cifrele selectate de Petru.
7.2 Demonstraţi că numerele $2013^{2013} + 2014^{2014}$ şi $2013 \cdot 2014$ sunt reciproc prime.
7.3 În paralelogramul $ABCD$ pe semidreapta $(BC$ se consideră un punct M, astfel încât $BC = CM$. Dacă se ştie că $CM = MD$, aflaţi măsura unghiului $\angle BAM$.
7.4 Pe o masă sunt 2013 chibrituri. Doi elevi joacă după următoarele reguli: la fiecare mişcare poate fi luat de pe masă orice număr de chibrituri de la 1 până la 10, iar pierde acel elev care nu mai poate efectua vreo mişcare. Într-un joc corect (ambii elevi efectuează mişcările optime), cine va câştiga?
7.5 Calculaţi suma:

$$\frac{2 \cdot 1 + 1}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{2 \cdot 2 + 1}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{2 \cdot 3 + 1}{3^2 \cdot 4^2} + \cdots + \frac{2 \cdot 2011 + 1}{2011^2 \cdot 2012^2} + \frac{2 \cdot 2012 + 1}{2012^2 \cdot 2013^2}$$

7.6 Demonstraţi că printre oricare trei numere prime mai mari ca 3, există cel puţin două a căror sumă sau diferenţă se divide la 12.

6.4 Clasa 8

8.1 Găsiţi toate valorile parametrului întreg a, astfel încât ambele soluţii ale ecuaţiei $11x^2 - 2013x + a = 0$ să fie numere prime.
8.2 Dacă a, b sunt numere reale pozitive nenule, demonstraţi inegalitatea :

$$\frac{1}{a^2 + a} + \frac{1}{b^2 + b} \geq \frac{1}{a^2 + b} + \frac{1}{b^2 + a}$$

8.3 Fie $\triangle ABC$ cu $AB = AC$. Fie punctele D şi E astfel încât $D \in [AC]$, $B \in [AE]$ şi $BE = CD$. Demonstraţi că mijlocul segmentului DE aparţine segmentului BC.
8.4 Aflaţi pentru care valori ale lui $n \in \mathbb{N}$ numărul $2^{2010} + 2^{2013} + 2^n$ este pătrat perfect.
8.5 Rezolvaţi în $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+1}{x+y-1} + \dfrac{z+y+2}{z+y-3} - \dfrac{x+z+3}{x+z-2} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{x+y-1} + \dfrac{1}{z+y-3} - \dfrac{1}{x+z-2} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{x+y-1} - \dfrac{2}{z+y-3} + \dfrac{1}{x+z-2} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

8.6 O tablă 10×10 este completată cu numerele $\{1, 2, 3, ..., 100\}$. Putem oare mereu alege două pătrate ce au în comun o latură sau un vârf, astfel încât suma numerelor scrise în ele să fie divizibilă cu 4?

6.5 Clasa 9

9.1 Fie triunghiul echilateral ABC cu latura de lungime a. Pe laturile triunghiului se consideră punctele $P \in (AB), M \in (BC), N \in (AC)$ astfel încât $MP \perp AB, NM \perp BC$ şi $PN \perp AC$. Determinaţi lungimea segmentului MN.
9.2 Pentru care valori ale parametrului $n \in \mathbb{N}$ ecuaţia $4x^2 - (4n+48)x + 52 + 17n = 0$ are ambele soluţii numere întregi?
9.3 Avem o tablă dreptunghiulară $n \times 1$ împărţită în n pătrăţele 1×1. Colorăm vârfurile pătrăţelelor în una din cele două culori, roşu sau albastru, astfel încât în fiecare pătrăţel să fie exact două vârfuri de aceeaşi culoare. În câte moduri distincte putem efectua această colorare?
9.4 Găsiţi toate soluţiile reale x ale ecuaţiei

$$\frac{x}{x+a} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+x}} = \frac{b}{a}.$$

9.5 Fie H ortocentrul triughiului ascuţitunghic $\triangle ABC$. Dreptele BH şi CH intersectează cercul circumscris triunghiului în punctele B' şi C' respectiv. Fie M mijlocul segmentului $B'C'$. Demonstraţi că $\angle MAB = \angle CAH$.

9.6 Demonstraţi că printre oricare $n+1$ elemente ale mulţimii $\{1, 2, 3, ..., 2n\}$ există cel puţin două reciproc prime.

2013 Soluţii

6.6 Clasa 5 Soluţii

5.1 După fiecare set de $9+7+2=18$ mişcări consecutive sportivul va urca $9-7+2=4$ trepte. Iar $2013 = 111 \cdot 18 + 15$. Prin urmare în 2013 mişcări sportivul va efectua 111 seturi şi încă 15 mişcări la sfârşit dintre care 9 în sus şi 6 în jos. Deci la sfârşit sportivul se va afla pe treapta $111 \cdot 4 + 9 - 6 = 447$.
5.2 Fie A primul elev, şi B al doilea elev. Atunci A mereu va câştiga, el are următoarea strategie: la prima mişcare taie foaia la jumătate, în 2 dreptunghiuri simetrice cu dimensiunile 3×2. Astfel A va împarţi dreptunghiul iniţial în 2 seturi simetrice. Iar în următorii paşi, indiferent de tăietura efectuată de B în unul din seturi, A va efectua mereu fix aceiaşi tăietură în celălalt set simetric. Deci A îşi poate garanta ultima tăietură, prin urmare el va câştiga.
5.3 Presupunem că putem avea suma resturilor 23 şi vom obţine contradicţie. Fie x, y şi z resturile împărţirii lui $\overline{abc}$ la a, b şi c. Atunci $x < a \leq 9$, $y < b \leq 9$ şi $z < c \leq 9$, deci $x, y, z \leq 8$ şi $x + y + z = 23$. Dacă cel puţin 2 numere sunt < 8 atunci $x + y + z < 7 + 7 + 8 = 22 < 23$ şi nu avem soluţii. Prin urmare cel puţin 2 numere sunt 8, iar celălalt $23 - 16 = 7$, şi avem soluţia $(7, 8, 8)$ şi permutările sale pentru resturi. Şi prin urmare 2 din cifrele a, b, c sunt 9 şi una sau 8, sau 9. Însă 999 evident nu satisface condiţia problemei. Deci rămâne $\overline{abc} \in \{899, 989, 998\}$. Dar la împărţirea la 8 nici unul nu dă restul 7, prin urmare nu există $\overline{abc}$ cu suma resturilor la a, b, c egală cu 23.
5.4 Fie A primul vas de 7 litri, B al doilea vas de 7 litri, şi C vasul de 4 litri. Atunci umplem B cu 7 litri, turnăm din B 4 litri în C, vărsăm C. Atunci $(A, B, C) = (0, 3, 0)$.
Acum umplem A cu 7 litri, turnăm din A 4 litri în C, apoi turnăm din A restul 3 litri în B, şi vărsăm C. Obţinem $(A, B, C) = (0, 6, 0)$.
Apoi umplem A cu 7 litri, turnăm din A 4 litri în C, vărsăm C şi turnăm din A restul 3 litri în C. Obţinem $(A, B, C) = (0, 6, 3)$.
Acum umplem A cu 7 litri, şi turnăm un litru în C, vărsăm C. Obţinem $(A, B, C) = (6, 6, 0)$.

6.7 Clasa 6 Soluţii

6.1 Fie S suma celor 3 numere, atunci avem:

$$S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = (100a + 10b + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) =$$

$$= 111(a + b + c) = 3 \cdot 37 \cdot (a + b + c)$$

Deci $S \vdots 37$, iar 37 este prim, prin urmare dacă S ar fi pătrat perfect atunci are loc şi relaţia:

$$S \vdots 37^2 \Longrightarrow 3 \cdot 37 \cdot (a + b + c) \vdots 37^2 \Longrightarrow a + b + c \vdots 37,$$

însă ultima relaţie nu poate avea loc întrucât $max(a + b + c) = 27 < 37 \Rightarrow$

$(a + b + c) \not\vdots 37$, deci S nu poate fi pătrat perfect.

6.2 Presupunem că Nicolae are < 114 ani. Atunci Nicolae s-a născut în anul $\overline{19ab}$ sau $\overline{20cd}$. Fie s-a născut în $\overline{19ab}$, atunci în 2014 el împlineşte $2014 - \overline{19ab} = 1 + 9 + a + b \Longleftrightarrow 114 - 10a - b = 10 + a + b \Longleftrightarrow 104 = 11a + 2b \leq 11a + 18 \Rightarrow a \geq \frac{104-18}{11} > 7 \Rightarrow a \in \{8, 9\}$. Dacă $a = 8$ atunci $2b = 104 - 11a = 104 - 88 = 16 \Rightarrow b = 8$, deci $\overline{19ab} = \boxed{1988}$. Dacă $a = 9$ atunci $2b = 104 - 99 = 5$ nu are soluţii în $\mathbb{N}$.
Dacă s-a născut în $\overline{20cd}$, atunci în 2014 el împlineşte $2014 - \overline{20cd} = 2 + 0 + c + d \Longleftrightarrow 14 - 10c - d = 2 + c + d \Longleftrightarrow 12 = 11c + 2d$, $c \geq 2$ prea mare, dacă $c = 1$ nu avem soluţii în $\mathbb{N}$ şi dacă $c = 0$ avem $d = 6$ deci $\overline{20cd} = 2006$. Deci Nicolae s-a născut în 1988 sau 2006.

6.3 Vom demonstra că numărul se divide la 5. Deoarece $\overline{20132013...2013}$ este impar, expresia se rescrie ca:

$$1 + 4^{\overline{20132013...2013}} = 1 + 4^{2k+1} = 1 + 4 \cdot (4^2)^k = 1 + 4 \cdot 16^k = 1 + 4 \cdot (5a + 1)^k$$

Pentru că orice număr ce dă restul 1 la împărţirea la 5, adică de forma $5a + 1$ (inclusiv 16), indiferent de putere sa mereu va da restul 1 la împărţirea la 5, adică $(5a + 1)^k$ are forma $5x + 1 \Rightarrow$

$$1 + 4^{\overline{20132013...2013}} = 1 + 4 \cdot (5x + 1) = 20x + 5 = 5 \cdot (4x + 1) \vdots 5.$$

6.4 În 2013 sărituri greieraşul va parcurge o distanţă totală de:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2013 \cdot 2 - 1) = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 2013) \underbrace{-1 - 1 - ... - 1}_{\text{de 2013 ori}} =$$

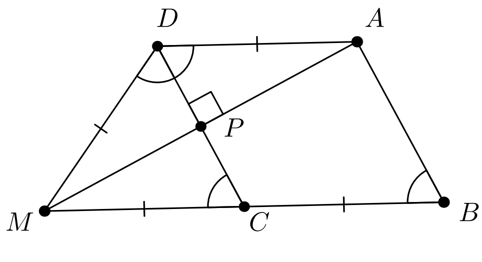
$$= 2 \cdot \frac{2013(2013+1)}{2} - 2013 = 2013 \cdot 2014 - 2013 = 2013^2 \text{ de unităţi.}$$

Deci în 2013 sărituri greieraşul parcurge o distanţă de 2013^2 unităţi, iar dacă ar fi posibil ca greieraşul să se întoarcă înapoi la poziţia 0, atunci el trebuie să parcurgă jumătate de distanţă sau $\frac{2013^2}{2}$ unităţi la dreapta şi cealaltă jumătate $\frac{2013^2}{2}$ unităţi la stânga, însa 2013^2 este impar, deci nu putem împărţi numerele $1, 3, 5...$ în două seturi drepta şi stânga cu sume egale.

6.8 Clasa 7 Soluţii

7.1 Vasile trebuie să aleagă $x = 1, y = 10$ şi $z = 100$, atunci întrucât a, b, c sunt cifre, Petru va răspunde cu $100a + 10b + c = \overline{abc}$. Prin urmare în numărul de 3 cifre oferit de Petru, prima este a, a doua b, şi ultima c.
7.2 Rescriem $2013 \cdot 2014 = 3 \cdot 11 \cdot 61 \cdot 2 \cdot 19 \cdot 53 = A$. Fie $2013^{2013} + 2014^{2014} = B$. Acum pentru a arăta că $(A, B) = 1$ sunt reciproc prime demonstrăm că B nu divide nici unul din factorii primi $\{2, 3, 11, 19, 53, 61\}$ a lui A.
Lema: Dacă $d \mid x$ şi $d \nmid y$ atunci $\Longrightarrow d \nmid x + y$, în caz contrar dacă $d \mid x + y$ şi se cunoaşte că $d \mid x$ va rezulta că $d \mid y$, contradicţie cu condiţia iniţială.
Prin urmare $2 \mid 2014^{2014}$ însă $2 \nmid 2013^{2013} \Rightarrow 2 \nmid B$. Şi $3 \mid 2013^{2013}$ însă $3 \nmid 2014^{2014} \Rightarrow 3 \nmid B$. Analog $11, 19, 53, 61 \nmid B$. Deci A şi B sunt reciproc prime.

7.3 Avem $AD = BC = CM = DM \Longrightarrow \triangle ADM$ - isoscel. Iar $\angle ADC \overset{(1)}{\equiv} \angle DCM \overset{(2)}{\equiv} \angle CDM$, (1) - unghiuri alterne interne, (2) - deoarece $\triangle CMD$ isoscel. Prin urmare DC este bisectoare în triunghiul isoscel $\triangle ADM$, deci DC de asemenea înălţime în $\triangle ADM$. Fie $DC \cap AM = \{P\}$, atunci $\angle BAM = \angle APD = 90°$, întrucât $\angle BAM$ şi $\angle APD$ unghiuri alterne interne. Deci $\angle BAM = 90°$.



7.4 Fie A primul şi B al doilea elev. Observăm $2013 = 11 \times 183$. Atunci B are următoarea strategie de câştig: la fiecare pas dupa ce A ia un număr a de

chibrituri, B va lua un număr $11-a$ astfel încât după fiecare set de 2 mişcări de pe masă se iau 11 chibrituri. Iar întrucât 2013 se divide la 11, B va câştiga jocul după $\frac{2013}{11}=183$ de paşi efectuaţi de fiecare jucător.
7.5 Observăm:

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2}=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Prin urmare suma se rescrie ca:

$$\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+...+\left(\frac{1}{2012^2}-\frac{1}{2013^2}\right)=1-\frac{1}{2013^2}.$$

7.6 Analizăm numerele după restul lor la 12. Toate numerele au una din formele $\{12k, 12k\pm1, 12k\pm2, 12k\pm3, 12k\pm4, 12k\pm5, 12k+6\}$. Iar $\{12k, 12k\pm 2, 12k\pm3, 12k\pm4, 12k+6\}$ se divid sau la 2 sau la 3, deci nu pot fi prime. Prin urmare toate numerele prime $p>3$ au forma $p\in\{12k\pm1, 12k\pm5\}$. Acum avem 3 numere şi 2 seturi $12k\pm1$ sau $12k\pm5$, prin urmare unul din seturi va conţine cel puţin 2 numere. Fie $12k\pm a$ conţine 2 numere. Dacă ele au acelaşi semn pentru a atunci diferenţa se divide la 12, iar dacă semne diferite pentru a atunci suma se divide la 12.

6.9 Clasa 8 Soluţii

8.1 Fie $p_1\le p_2$ cele 2 soluţii prime. Din formula lui Vieta avem:

$$p_1+p_2=\frac{2013}{11}=183,\ \text{si}\ p_1\cdot p_2=\frac{a}{11}.$$

Dacă $p_1,p_2>2$ sunt prime, atunci p_1,p_2 sunt impare, şi deci $183=p_1+p_2=$ *impar* + *impar* = *par*, contradicţie. Dacă $p_1=2$ atunci $p_2=181$, care este la fel prim. Iar din formula lui Vieta avem: $a=11\cdot p_1p_2=11\cdot2\cdot181=3982$.
8.2 Inegalitatea este echivalentă cu:

$$\frac{1}{a^2+a}+\frac{1}{b^2+b}\ge\frac{1}{a^2+b}+\frac{1}{b^2+a}\Longleftrightarrow\frac{a^2+a+b^2+b}{(a^2+a)(b^2+b)}\ge\frac{a^2+a+b^2+b}{(a^2+b)(b^2+a)}\Longleftrightarrow$$

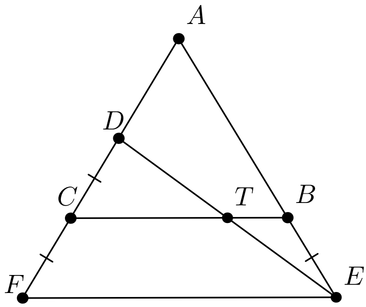
$$(a^2+b)(b^2+a)\ge(a^2+a)(b^2+b)\Longleftrightarrow$$

$$a^2b^2+ab+a^3+b^3\ge a^2b^2+ab+a^2b+b^2a\Longleftrightarrow a^3+b^3\ge a^2b+b^2a$$

Iar ultima inegalitate se rescrie ca Media Aritmetică > Media Geometrică pentru:

$$\tfrac{1}{3}(a^3+a^3+b^3)\ge a^2b\ \text{ şi }\ \tfrac{1}{3}(a^3+b^3+b^3)\ge b^2a.$$

8.3 Fie $T \in BC \cap DE$. Fie punctul F astfel încât $C \in [AF]$, iar $CF = BE = CD$. Atunci $AE = AF$, deci $\triangle AEF$ isoscel, iar $BC \parallel EF$. Atunci în triunghiul $\triangle DEF$ avem $TC \parallel EF$ iar C mijlocul DF, deci TC linie mijlocie în $\triangle DEF$ deci T mijlocul la segmentul DE.



8.4 Avem:

$$k^2 = 2^{2010} + 2^{2013} + 2^n = 9 \cdot 2^{2010} + 2^n = (3 \cdot 2^{1005})^2 \Longleftrightarrow$$

$$2^n = k^2 - (3 \cdot 2^{1005})^2 = (k - 3 \cdot 2^{1005})(k + 3 \cdot 2^{1005}).$$

Prin urmare fie $2^a = k - 3 \cdot 2^{1005}$, iar $2^b = k + 3 \cdot 2^{1005}$ unde $b > a$. Atunci avem

$$2^b - 2^a = 3 \cdot 2^{1006} \Longleftrightarrow 2^a \cdot (2^{b-a} - 1) = 3 \cdot 2^{1006}.$$

Iar $(2^{b-a} - 1)$ este impar, deci $(2^{b-a} - 1) = 3 \Longleftrightarrow b - a = 2$, sau $b = a + 2$. Însă atunci $2^a = 2^{1006} \Longrightarrow a = 1006$, deci $b = 1008 \Longrightarrow n = a + b = 2014$. Iar $2^a + 2^b = 2k \Longleftrightarrow k = 2^{1005} + 2^{1007}$.

8.5 Notăm $a = \frac{1}{x+y-1}$, $b = \frac{1}{z+y-3}$, $c = \frac{1}{x+z-2}$. Atunci obţinem sistemul echivalent:

$$\begin{cases} (1+2a) + (1+5b) - (1+5c) = \frac{3}{2} \\ a + b - c = \frac{3}{2} \\ a - 2b + c = \frac{3}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2a + 5b - 5c = \frac{1}{2} \\ a + b - c = \frac{3}{2} \\ a - 2b + c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Obţinem: $a = \frac{7}{3}, b = \frac{5}{3}, c = \frac{5}{2}$. Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x + y - 1 = \frac{3}{7} \\ z + y - 3 = \frac{3}{5} \\ x + z - 2 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

găsim soluţiile $x = \frac{4}{35}, y = \frac{46}{35}, z = \frac{16}{7}$.
8.6 Nu. Misiunea noastră este să arătăm un caz în care oricare 2 pătrate adiacente printr-un punct sau printr-o latură să nu fie divizibile cu 4. Fie împărţim pătratul nostru în pătraţele 2 × 2. Deoarece numerele noastre nu contează, ci doar restul lor la împărţirea cu 4, putem să le înlocuim cu numerele { 1 , 2 , 3 , 0 , 1 . . . 0 }, în total 25 de 0 , 25 de 1 , 25 de 2 şi 25 de 3. Deci în fiecare din cele 25 pătrăţele 2 × 2 trebuie să fie un 2, un 0, şi doi de 1 sau doi de 3, deoarece nu pot fi mai mult de un 2 într-un pătrăţel sau mai mult de un 0 într-un pătrăţel 2×2, iar numarul total de pătrăţele este 25. O colorare potrivită ar fi:

$$1,1,1,1,1\ldots1,1,1$$

$$2,0,2,0,2\ldots0,2,0$$

$$3,3,3,3,3\ldots3,3,3$$

$$2,0,2,0,2\ldots0,2,0$$

$$1,1,1,1,1\ldots1,1,1$$

$$\vdots$$

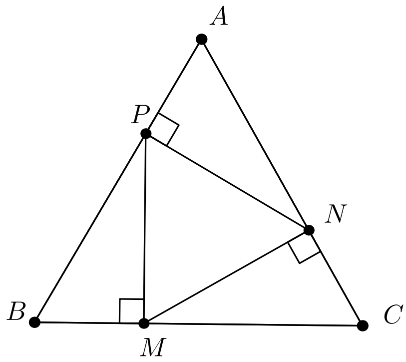
$$2,0,2,0,2\ldots0,2,0$$

observăm că oricum nu am alege 2 pătrate adiacente într-un punct sau într-o latură suma lor va fi divizibilă cu 4.

6.10 Clasa 9 Soluţii

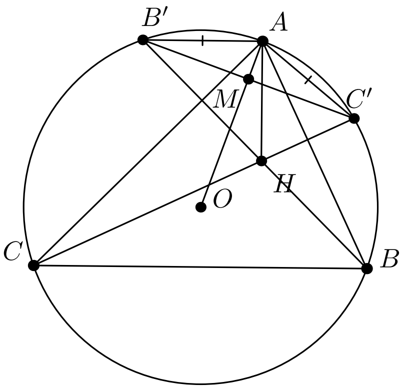
9.1 Calculăm $\angle APM = 180° - \angle PNA - \angle PAN = 180° - 90° - 60° = 30°$. Analog se obţine $\angle BMP = 30°$ şi $\angle CNM = 30°$. Acum $\angle PMN = 180° - \angle BMP - \angle NMC = 180° - 30° - 90° = 60°$. Analog $\angle MNP = 60°$ si $\angle NPM = 60°$. Deci $\triangle MNP$ este echilateral. Atunci după criteriul ULU avem $\triangle ANP \equiv \triangle BPM \equiv \triangle CMN$. Fie $MC = x$, atunci în triunghiul dreptunghic $\triangle CMN$, cateta MC opusă unghiului de 30° este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei NC, deci $NC = 2x$. Totodată $MC = AN = BP = x$. Prin urmare $a = AC = AN + NC = x + 2x = 3x$, sau $x = \frac{1}{3}a$. Atunci din teorema lui Pitagora :

$$MN = \sqrt{NC^2 - MC^2} = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



9.2 În primul rând vedem că soluţiile au forma $x_{1,2} = \frac{4n+48\pm\sqrt{\Delta}}{8}$. Evident pentru ca acest număr să fie pozitiv avem nevoie ca Δ să fie pătrat perfect. $\Delta = 16n^2 + 384n + 2304 - 832 - 272n = 16n^2 + 112n + 1472$. Dacă Δ este pătrat perfect atunci şi $4n^2 + 28n + 368$ trebuie să fie pătrat perfect. Fie $4n^2+28n+368 = k^2$. Adică $k^2-(2n+7)^2 = 319$. 319 se descompune ca $11 \cdot 29$ sau $319 \cdot 1$.
Primul caz: $(k-2n-7)(k+2n+7) = 11 \cdot 29$, respectiv $2k = 40$ şi $k = 20$, iar $n = 1$, făcând verificarea obţinem că o soluţie din cele 2 nu este întreagă.
Al doilea caz: $(k-2n-7)(k+2n+7) = 1 \cdot 319$, respectiv $2k = 320$ şi $k = 160$ iar $n = 76$. făcând verificarea obţinem soluţiile $x_1 = 4$ şi $x_2 = 84$.
9.3 În figura dată $n \times 1$ există $n+1$ muchii paralele. Dacă pe prima o colorăm în roşu, pe a doua va trebui să o colorăm în albastru, pe a treia în roşu ş,a,m,d, deci respectiv avem un mod de a colora tabla. Dacă pe prima o colorăm în albastru, pe a 2 va trebui să o colorăm în roşu, pe a 3 în albastru ş,a,m,d, şi mai avem o modalitate în plus de a colora tabla. Iar acum avem 2 moduri de a colora prima muchie în 2 culori diferite, 2 moduri de a colora a 2 muchie în 2 culori diferite ... in total 2^{n+1} moduri. Deci răspunsul nostru este egal cu $2 + 2^{n+1}$ moduri diferite.
9.4 $\dfrac{x}{x+a} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+x}} = \dfrac{x+a-a}{x+a} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+x}} = 1 - \dfrac{a}{x+a} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+x}}$. Fie notăm $k = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+x}}$. Obţinem că $1 - k^2 - k = \dfrac{b}{a}$. $k^2 + k + (\dfrac{b}{a} - 1)$. Vom rezolva ecuaţia de gradul 2 pentru k. $\Delta = 1 - 4 \cdot (\dfrac{b}{a} - 1) = 5 - 4\dfrac{b}{a}$. Deci $k = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+x}} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5 - 4\dfrac{b}{a}}}{2}$. Dar deoarece radicalul este mereu

pozitiv obţinem că $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+x}} = \dfrac{-1+\sqrt{5-4\dfrac{b}{a}}}{2}$. Ridicând totul la puterea a doua obţinem că $\dfrac{a}{a+x} = \dfrac{1-2\sqrt{5-4\dfrac{b}{a}}+5-4\dfrac{b}{a}}{4} = \dfrac{6-2\sqrt{5-4\dfrac{b}{a}}-4\dfrac{b}{a}}{4}$.
$\dfrac{a+x}{a} = 1+\dfrac{x}{a} = \dfrac{6-2\sqrt{5-4\dfrac{b}{a}}-4\dfrac{b}{a}}{4}$, sau $\dfrac{x}{a} = \dfrac{2-2\sqrt{5-4\dfrac{b}{a}}-4\dfrac{b}{a}}{4}$ de unde rezultă că $x = \dfrac{2a-2a\sqrt{5-4\dfrac{b}{a}}-4b}{4} = \dfrac{a-a\sqrt{5-4\dfrac{b}{a}}-2b}{2}$. **9.5** Fie $\angle A = \alpha$ şi $\angle C = \gamma$ Trebuie să demonstrăm că AH şi AM sunt simetrice faţă de l_A- bisectoarea din A. Însă este binecunoscut faptul că pentru orice triunghi cu ortocentrul H şi centrul cercului circumscris O avem că AH şi AO sunt simetrice faţă de l_A. Deci e necesar să demonstrăm că $A-M-O$ sunt coliniare. Însă observaţi că $\angle C'CA = 90-\alpha = \angle B'BA$, prin urmare arcul $\widehat{C'A} \equiv \widehat{AB'}$. Deci A este mijlocul arcului $\widehat{C'B'}$, iar M este mijlocul segmentului $C'B'$, prin urmare $A-M-O$ sunt coliniare. Acum demonstrăm că AO şi AH sunt simetrice faţă de bisectoare. Observaţi că $\angle CAH = 90^{\circ} - \gamma$. Iar în $\triangle AOB$ isoscel avem $\angle BAO = \angle ABO = 90 - \frac{1}{2}\angle AOB = 90^{\circ} - \frac{1}{2}\cdot 2\angle ACB = 90^{\circ} - \gamma$. Deci AH şi $A-M-O$ sunt simetrice în l_A.



9.6 Împărţim mulţimea dată în n perechi în felul următor $(1,2),(3,4),...,(2n-1,2n)$, astfel încât fiecare pereche $(k,k+1)$ este reciproc primă. Acum din principiul cutiei indiferent cum vom alege $n+1$ elemente din n perechi, vom avea 2 elemente din aceeaşi pereche care vor fi reciproc prime.

7

Anul 2014

7.1 Clasa 5

5.1 Demonstraţi că numărul $N = \underbrace{44...4}_{2014 \text{ ori}} - \underbrace{88...8}_{1007 \text{ ori}}$ este pătrat perfect.

5.2 Rezolvaţi următoarea ecuaţie

$$(x - 2014) + (2x + 2013) + ... + (2013x - 2) + (2014x + 1) = \frac{2014^2}{2}$$

5.3 Găsiţi toate numerele naturale n ce satisfac relaţia $n + S(n) = 2014$. Cu $S(n)$ este notată suma cifrelor numărului n.

5.4 Aduceţi următoarea expresie la cea mai simplă formă

$$\frac{2 + 4 + 6 + ... + 2014}{1 + 3 + 5 + ... + 2013} + \frac{1 + 3 + 5 + ... + 2013}{2 + 4 + 6 + ... + 2014}.$$

7.2 Clasa 6

6.1 Rezolvaţi următoarea ecuaţie, dacă se ştie că $a \neq 0$, $c \neq 0$ şi $\overline{ab}$ denotă scrierea zecimală a numărului.

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{cd} + 16}{41 - \overline{ab}} = \frac{64 - \overline{cd}}{\overline{ab} + 15}$$

6.2 Pătratul se numeşte magic dacă suma numerelor în orice rând, coloană şi cele două diagonale principale este egală. Aflaţi toate numerele x pentru care următorul pătrat poate fi completat ca să fie magic.

x	20	14
4		

6.3 Calculatorul magic efectuează următoarea operaţie: el sumează numărul introdus cu restul lui la împărţire cu 9. Luăm un număr a şi facem la rând trei operaţii cu calculatorul magic după care adunăm numărul primit cu a. Demonstraţi că rezultatul este divizibil cu 9.
6.4 Determinaţi valoarea minimă a numărului

$$E = (a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4), b(b+1)(b+2)(b+3)(b+5))$$

pentru $a, b \in \mathbb{N}^*$. Cu (a, b) am notat cel mai mare divizor comun.

7.3 Clasa 7

7.1 Fie tabelul $\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 0 \\ \hline 5 & 1 \\ \hline \end{array}$. Putem alege numerele adiacente a, b şi să le înlocuim cu $a-1, b-1$ sau $a+1, b+1$ (numerele se consideră adiacente dacă au o latură în comun). Este posibil după un număr finit de mişcări să obţinem tabelul completat numai cu zerouri?
7.2 Demonstraţi că ecuaţia $x^2 - 2y^2 + 8z = 3$ nu are soluţii în numere întregi.
7.3 În triunghiul $\triangle ABC$ pe laturile AB şi AC sunt construite pătratele $ABDE$ şi $ACFK$ (punctul D şi punctul C se află în semiplane diferite faţă de dreapta AB). Dacă AM este mediana triunghiului $\triangle ABC$ demonstraţi că $2AM = EK$.
7.4 Avem 10 clase de elevi cu proprietatea că fiecare elev dintr-o clasă cunoaşte exact câte un elev din celelalte nouă clase. Demonstraţi că în fiecare clasă este acelaşi număr de elevi. Cunoştinţa este reciprocă.
7.5 Fie E mijlocul laturii AD în paralelogramul $ABCD$. Dacă punctul F este piciorul înălţimii duse din B pe EC, demonstraţi că triunghiul $\triangle ABF$ este isoscel.
7.6 Piastru este o valută imaginară a statului ABC-land. O monedă de valoarea un piastru cântăreşte 6 grame, o monedă de valoarea doi piastre

cântăreşte 17 grame, iar o monedă de valoarea cinci piastre cântăreşte 30 grame. Băncile ABC-landului pot schimba orice combinaţie de monede în orice altă combinaţie cu aceeaţi masă. Spre exemplu 30 de monede de doi piastre pot fi schimbate în 17 monede de 5 piastre. Nicolae are un set de monede cu valoarea totală 1995 de piastre. Poate el oare sa obţină un set de monede cu valoare 2014 de piastre efectuând operţii bancare?

7.4 Clasa 8

8.1 Aflaţi toate numerele prime p şi toate numerele naturale nenule n pentru care $p^n + 1$ este puterea a 7-a a unui număr natural.
8.2 Fie x, y, z numere reale pozitive care satisfac relaţia $x + y + z = 1$. Demonstraţi următoarea inegalitate

$$\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1} \leq 3\sqrt{3}$$

8.3 În pentagonul $ABCDE$, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 120°$ şi $BC = 2014$. Dacă se ştie că lungimele a tuturor laturilor pentagonului sunt numere întregi, demonstraţi că perimetrul pentagonului este un număr par.
8.4 Fie şirul $a_i \in \{-1, 1\}$. Demonstraţi că $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 + ... + a_{2013} \cdot a_{2014} \cdot a_1 \cdot a_2 + a_{2014} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \neq 0$
8.5 Fie un tabel 5×2014. Demonstraţi că oricum nu am colora fiecare celulă în una din cele 4 culori, mereu va exista un dreptungi cu laturile paralele la tabel şi vârfurile în celule de aceeaşi culoare.
8.6 Fie A o mulţime de 2014 numere întregi. Demonstraţi că A este o submulţime având suma elementelor divizibilă cu 2014.

7.5 Clasa 9

9.1 În triughiul $\triangle ABC$, punctele X, Y sunt mijloacele laturilor AB şi AC respectiv. Pe segmentul BC se consideră un punct D diferit de mijlocul segemntului BC. Demonstraţi că dacă $\angle XDY = \angle BAC$, atunci $AD \perp BC$
9.2 Fie un tabel 5×2014. Demonstraţi că oricum nu am colora fiecare celulă în una din cele 4 culori, mereu va exista un dreptungi cu laturile paralele la tabel şi vârfurile în celule de aceeaşi culoare.
9.3 Aflaţi toate numere reale x care satisfac ecuaţia $x^{x^{2014}} = 2014$.
9.4 Fie $x_1, x_2, ..., x_{2014} \in \mathbb{R}_+$ astfel încât $\frac{x_1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2 \cdot 3}} + ... + \frac{x_{2014}}{\sqrt{2014 \cdot 2015}} =$

2014. Aflaţi valoarea minimă a expresiei $E = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{2014}^2$.
9.5 Demonstraţi că numărul $a^{4025} + (a-1)^{2014}$ se divide la $a^2 - a + 1$ pentru orice $a \in \mathbb{N}^*$.
9.6 Demonstraţi că în orice poligon convex cu 2014 laturi, există o diagonală ce nu este paralelă la nici o latură.

2014 Soluţii

7.6 Clasa 5 Soluţii

5.1 Observăm:

$$\underbrace{44...4}_{2014 \text{ ori}} = \frac{4}{9} \cdot \underbrace{99...9}_{2014 \text{ ori}} = \boxed{\frac{4}{9}(10^{2014} - 1)}, \text{ analog obţinem:}$$

$$\underbrace{88...8}_{1007 \text{ ori}} = \frac{8}{9} \cdot \underbrace{99...9}_{1007 \text{ ori}} = \frac{8}{9} \cdot (10^{1007} - 1) = \boxed{\frac{4}{9}(2 \cdot 10^{1007} - 2)} \Longrightarrow$$

$$\underbrace{44...4}_{2014 \text{ ori}} - \underbrace{88...8}_{1007 \text{ ori}} = \frac{4}{9} \cdot (10^{2014} - 1) - \frac{4}{9} \cdot (2 \cdot 10^{1007} - 2) = \frac{4}{9} \cdot (10^{2014} - 2 \cdot 10^{1007} + 1) =$$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot (10^{1007} - 1)\right)^2 = \left(\frac{6}{9} \cdot \underbrace{99...9}_{1007 ori}\right)^2 = \left(\underbrace{66...6}_{1007 ori}\right)^2$$

Deci numărul dat este pătrat perfect.
5.2 Descompunem ecuaţia în felul următor:

$$(x + 2x + 3x + ... + 2014x) + \big((1-2) + (3-4) + ... + (2013 - 2014)\big) =$$

$$= x\frac{2014 \cdot 2015}{2} - 1007 = \frac{2014^2}{2} \Longleftrightarrow$$

$$1007 \cdot 2015x - 1007 \cdot 1 = 1007 \cdot 2014 \Longleftrightarrow 2015x - 1 = 2014 \Longrightarrow x = 1.$$

5.3 Evident $n \leq 2014$, atunci fie $n = \overline{abcd}$. Iar $S(n) = S(\overline{abcd}) \leq 1+9+9+9 = 28$. Deci:

$$2014 = n + S(n) \leq n + 28 \Rightarrow n \geq 2014 - 28 = 1986.$$

Acum din criteriul de divizibilitate la 9 observaţi că n şi $S(n)$ au acelaşi rest la împărţire la 9. Fie acest rest x, cu $0 \leq x \leq 8$, atunci $n + S(n)$ are restul $0 \leq 2x \leq 16$, însă 2014 are restul 7 sau 16 la împărţirea la 9. Prin urmare $2x = 16$, sau $x = 8$. Acum inspectăm toate n de forma $9k + 8$, cu $1986 \leq n \leq 2014$. Deci $n \in \{1988, 1997, 2006\}$. Observaţi că $n \in \{1988, 2006\}$ satisfac relaţia.

5.4 Avem: $1007 + (1 + 3 + ... + 2013) = (1 + 1) + (3 + 1) + ... + (2013 + 1) =$

$$= 2 + 4 + ... + 2014 = 2(1 + 2 + ... + 1007) = 2\frac{1007(1007 + 1)}{2} = 1007 \cdot 1008.$$

Deci $1 + 3 + ... + 2013 = 1007 \cdot 1008 - 1007 = 1007^2$. Deci expresia iniţială se rescrie ca:

$$\frac{2 + 4 + 6 + ... + 2014}{1 + 3 + 5 + ... + 2013} + \frac{1 + 3 + 5 + ... + 2013}{2 + 4 + 6 + ... + 2014} =$$

$$= \frac{1007 \cdot 1008}{1007^2} + \frac{1007^2}{1007 \cdot 1008} = \frac{1008}{1007} + \frac{1007}{1008} = 2 + \frac{1}{1007 \cdot 1008}.$$

7.7 Clasa 6 Soluţii

6.1 Fie $\overline{ab} = x$ şi $\overline{cd} = y$, atunci ecuaţia se rescrie ca:

$$\frac{x}{y} = \frac{y + 16}{41 - x} = \frac{64 - y}{x + 15} = \frac{(y + 16) + (64 - y)}{(41 - x) + (x + 15)} = \frac{80}{56} = \frac{10}{7} \Longrightarrow x = \frac{10}{7}y.$$

Iar din prima ecuaţie avem:

$$x(41 - x) = y(y + 16) \Longleftrightarrow \frac{10}{7}y(41 - \frac{10}{7}y) = y(y + 16) \Longleftrightarrow$$

$$\frac{10}{7}(41 - \frac{10}{7}y) = y + 16 \overset{\cdot 49}{\Longleftrightarrow}$$

$$10 \cdot 41 \cdot 7 - 16 \cdot 49 = 49y + 100y \Longleftrightarrow 2086 = 149y \Longrightarrow y = 14 \Longrightarrow x = 20.$$

Prin urmare $\overline{ab} = 20$ şi $\overline{cd} = 14$.

6.2 Din prima linie obţinem că suma numerelor în orice coloană, linie şi cele 2 diagonale principale este $x + 20 + 14 = x + 34$. Acum notăm cu $p_{i,j}$ pătratul în linia i şi

x	20	14
4	$x - 10$	40
30	24	$x - 20$

coloana j. Atunci pentru prima coloană avem: $x + 4 + p_{3,1} = 34 + x \Rightarrow p_{3,1} = 30$. Acum pentru diagonala principală '/' avem: $14 + p_{2,2} + 30 = 34 + x \Rightarrow p_{2,2} = x - 10$. Iar pentru a 2-a coloană avem: $20+x-10+p_{3,2} = x+34 \Rightarrow p_{3,2} = 24$. Pentru a 2-a linie avem: $4 + x - 10 + p_{2,3} = x + 34 \Rightarrow p_{2,3} = 40$. Iar pentru ultima linie avem $30 + 24 + p_{3,3} = 34 + x \Rightarrow p_{3,3} = x - 20$ şi obţinem tabelul alăturat. Acum pentru a 2-a diagonală principală '\' avem: $x + (x - 10) + (x - 20) = x + 34 \Longleftrightarrow 2x = 64 \Longrightarrow \boxed{x = 32}$.

6.3 Notăm prin $R(x)$ restul împărţirii lui x la 9. Iniţial avem a.
După primul pas avem $a_1 = a + R(a)$.
După pasul 2 avem $a_2 = a_1 + R(a_1) = a + R(a) + R\big(a + R(a)\big)$.
După pasul 3 avem $a_3 = a_2 + R(a_2) = a + R(a) + R\big(a + R(a)\big) + R\Big(a + R(a) + R\big(a + R(a)\big)\Big)$.
Iar după ce mai adăugăm un a, numărul final va fi $n = a + a_3$.
Acum pentru a demonstra că $9 \mid n$ vom demonstra că $R(n) = 0$. Pentru aceasta vom folosi proprietatea că $R\big(x+R(y)\big) = R(x+y)$, care este adevărată deoarece notând $y = 9k + m$ avem

$$R\big(x+R(y)\big) = R\big(x+R(9k+m)\big) = R(x+m) = R(x+9k+m) = R(x+y). \Longrightarrow$$

$$R(n) = R(a + a_3) = R(a + a_2 + R(a_2)) = R(a + a_2 + a_2) = R(a + 2a_2) =$$

$$= R(a + 2a_1 + 2R(a_1)) =$$

$$= R(a + 2a_1 + 2a_1) = R(a + 4a_1) = R(a + 4a + 4R(a)) = R(a + 4a + 4a) =$$

$$= R(9a) = 0.$$

Prin urmare $9 \mid n$.

6.4 Observăm că primul termen $x = a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)$ este format din 5 factori consecutivi, deci: cel puţin 2 factori se divid la 2, cel puţin 1 factor se divide la 3, cel puţin 1 factor se divide la 4, şi cel puţin 1 factor se divide la 5.
Prin urmare x se divide cel puţin la $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, deci $24|120|x$.
Anolog al doilea termen $y = b(b+1)(b+2)(b+3)(b+5)$ are 4 factori consecutivi, deci cel puţin 2 factori se divid la 2, cel puţin 1 factor se divide la 3, şi cel puţin 1 factor se divide la 4.
Prin urmare y se divide cel puţin la $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, adică $24|y$, deci $E = (x, y) \geq 24$. Iar pentru $a = b = 1$ avem $E = (120, 144) = 24$. Deci $min(E) = 24$.

7.8 Clasa 7 Soluţii

7.1 Observăm că un tabel de forma $\begin{array}{|c|c|}\hline \text{a} & \text{b} \\ \hline \text{c} & \text{d} \\ \hline \end{array}$ mereu va avea diferenţa diagonalelor constantă $(a+d)-(c+b)=const$, deoarece dacă adunăm $+1$ la doua pătrate adiacente se aduna câte $+1$ la fiecare diagonala, şi dacă scădem (-1) la două pătrate adiacente, se scade câte (-1) la ambele diagonale. Prin urmare în tabelul iniţial diferenţa diagonalelor mereu va fi $(2+1)-(5+0)=(-2)$, însă un tabel completat numai cu zerouri va avea diferenţa $0 \neq 3$. Deci este imposibil să obţinem un tabel doar cu zerouri.

7.2 Avem $x^2 = 3 + 2y^2 - 8z$, deci x - impar. Fie $x = 2k+1$, atunci rezultă:

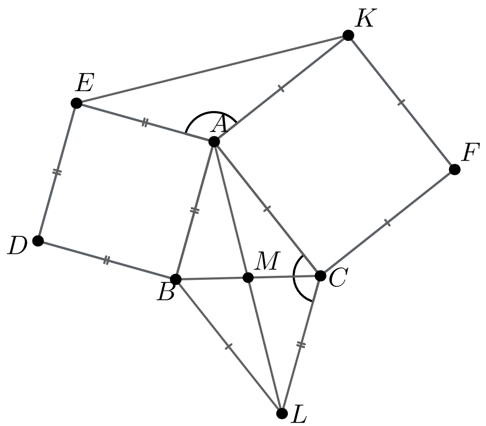
$$(2k+1)^2 - 2y^2 + 8z = 3 \Longleftrightarrow 2k(k+1) - y^2 + 4z = 1.$$

Prin urmare y la fel este impar, fie $y = 2m+1$, obţinem:

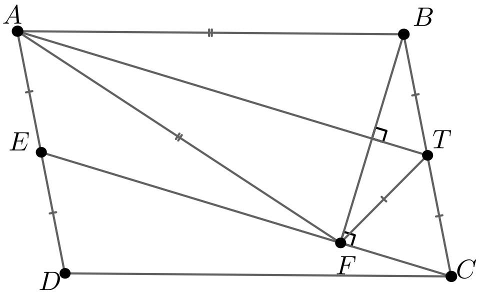
$$2k(k+1) - (2m+1)^2 + 4z = 1 \Longleftrightarrow k(k+1) - 2m(m+1) + 2z = 1.$$

Însă $k(k+1)$ este par, deci şi expresia: $k(k+1) - 2m(m+1) + 2z$ este pară, însă 1 este impar. Prin urmare ecuaţia nu are soluţii în numere întregi.

7.3 Fie L simetricul lui A faţă de M, atunci vrem să demonstrăm că $2AM = AL = EK$. Observaţi că $ABLC$ este paralelogram, prin urmare $CL = AB = AE$, iar $BL = AC = AK$. Prin urmare vrem să demonstrăm că $\triangle EAK \equiv \triangle LCA \equiv \triangle ABL$. Însă $\angle EAK = 360 - 90 - 90 - \alpha = 180 - \alpha$, iar în paralelogramul $ABLC$ avem $\angle ABL = \angle LCA = 180 - \alpha$. Deci după criteriul LUL avem $\triangle EAK \equiv \triangle LCA \equiv \triangle ABL$. Deci $EK = AL = 2AM$.



7.4 Presupunem că există 2 clase, A şi B cu un număr diferit de elevi fiecare. Fie clasa A cu n elevi şi B cu m elevi, iar $n \neq m$. Atunci fiecare din cei n elevi din A cunoaşte exact câte un elev din B. Dacă a_1, a_2- doi elevi din A cunosc acelaşi elev b_i din B atunci b_i îi cunoaşte pe ambii a_1 şi a_2, contradicţie. Deci fiecare din cei n elevi din A cunoaşte exact un elev diferit din B. Deci B are cel puţin n elevi $\Longrightarrow m \geq n$.
Analog se obţine că fiecare din cei m elevi în B cunoaşte un elev diferit în A, deci A are cel puţin m elevi, $\Longrightarrow n \geq m$. Prin urmare $n = m$, contradicţie cu presupunerea iniţială.
7.5 Fie T mijlocul laturii BC, vom demonstra că AT este mediatoarea segmentului BF. Observaţi că $ATCE$ este paralelogram, prin urmare $AT \parallel EC$, iar $EC \perp BF$, deci $AT \perp BF$. Mai departe în triunghiul dreptubghic $\triangle BFC$, FT este mediană, prin urmare $\triangle BTF$ este isoscel, iar TA este înălţime în el, deci TA este mediatoarea segmentului BF. Prin urmare $\triangle BAF$ isoscel.



7.6 Observăm că un set cu o monedă de 5 piastri care cântăreşte 30 $grame = 5 \cdot 6$ $grame$, poate fi schimbat într-un set de 5 monede de 1 piastru şi cu masa de 6 grame fiecare, care au la fel voloarea totală de 5 piastri. Deci putem presupune că avem doar monede de 1 piastru, şi monede de 2 piastri (toate monedele de 5 piastri sunt schimbate liber în monede de 1 piastru, cu aceeaşi masă şi valoare totală). Deci fie că avem x monede de un piastru, y monede de 2 piastri, cu voaloarea totală de $x + 2y = 1995$ piastri, şi masa totală $6x + 17y = M$ grame. Şi acum vrem să schimbăm aceste monede în a monede de 1 piastru, şi b monede de 2 piastri, cu valoarea totală $a + 2b = 2014$ şi aceeaşi masă totală $6a + 17b = M$. Atunci avem:

$$6x + 17y = M = 6a + 17b, \text{ iar } x = 1995 - 2y, \ a = 2014 - 2b \Longrightarrow$$

$$6(1995 - 2y) + 17y = 6(2014 - 2b) + 17b \Longleftrightarrow 6 \cdot 1995 + 5y = 6 \cdot 2014 + 5b \Longleftrightarrow$$

$$5(y - b) = 6(2014 - 1995) = 6 \cdot 19 \Longleftrightarrow y - b = \frac{6 \cdot 19}{5} \notin \mathbb{Z}.$$

Dacă schimbul ar fi posibil, atunci am avea că diferenţă dintre numărul final b şi cel iniţial y de monede de 2 piastri nu va fi un număr întreg, contradicţie, întrucât b şi y sunt întregi. Deci nu este posibil de efectuat operaţiile bancare.

7.9 Clasa 8 Soluţii

8.1 $p^n = x^7 - 1 = (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$, clar $(x-1) \neq 0$. Evident $x - 1 < x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Dacă $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$, $p^n = 127$ - prim $\Rightarrow \boxed{n = 1, p = 127}$.
Cazul 2: $x - 1 > 1$. Fie $x - 1 = p^a$, $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = p^b$, cu $0 < a < b$. Obţinem că $p \mid x - 1$, $x = pk + 1$. Atunci x^i cu i de la 1 la 6 sunt de forma $pk_i + 1$. Atunci $p^b = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (pk_6+1)+(pk_5+1)+(pk_4+1)+(pk_3+1)+(pk_2+1)+(pk_1+1)+1 = pm+7$. Deci $p^b = pm + 7 \Rightarrow p \mid 7 \Rightarrow p = 7$.
Acum $x^6 = (7k + 1)^6 = 49t_6 + 7 \cdot 6k + 1$, $x^5 = (7k + 1)^5 = 49t_5 + 7 \cdot 5k + 1$ $\ldots$ $x = (7k + 1)$. Sumând aceste relaţii obţinem că $7^b = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 49t + 7k \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} + 7 = 49(t + 3k) + 7$.
Deci $7 \mid 7^b$ dar $49 \nmid 7^b$ deoarece $49 \mid 49(t+3k)$, deci obţinem contradicţie, deci singura soluţie este $\boxed{n = 1, p = 127}$.
8.2 Lema Media Aritmetică $\leq$ Media Pătratică:

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2)}{3}} \Longleftrightarrow a+b+c \leq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}.$$

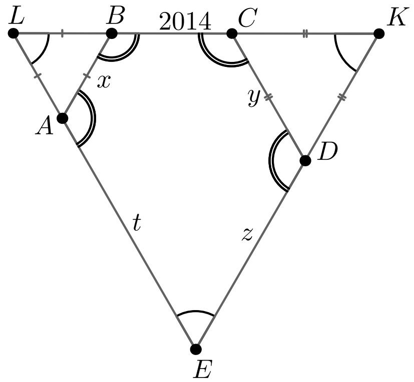
Acum inlocuim $a = \sqrt{6x+1}$, $b = \sqrt{6y+1}$ si $c = \sqrt{6z+1}$ in inegalitatea de mai sus, si obtinem:

$$\sqrt{6x+1} + \sqrt{6y+1} + \sqrt{6z+1} \leq \sqrt{3\Big((6x+1) + (6y+1) + (6z+1)\Big)} =$$

$$= \sqrt{3\Big(6(x+y+z)+1\Big)} = 3\sqrt{3}.$$

8.3 Suma unghiurilor intr-un pentagon este $180^\circ \cdot (5-2) = 540^\circ$. Prin urmare $\angle E = 540^\circ - 4 \cdot 120^\circ = 60^\circ$. Acum completam pentagonul, prelungim toate laturile acestuia, si notam intersectiile. Fie $AE \cap BC = \{L\}$, si $ED \cap BC = \{K\}$. Observati ca $DC \parallel AE$ si $AB \parallel ED$. Avem $\angle LAB = 60^\circ = \angle LBA$, deci $\triangle ABL$ echilateral iar $\angle ALB = 60^\circ$. Analog $\angle KDC = 60^\circ = \angle KCD$, deci $\triangle DCK$ echilateral iar $\angle DKC = 60^\circ$. Acum fie $AB = x$, $CD = y$, $DE = z$ si $AE = t$, unde $x, y, z, t \in \mathbb{N}$. Atunci in $\triangle ELK$, echilateral avem $EL = LK =$

KE, sau $x+t=x+2014+y=y+z$. Deci $z=x+2014$, iar $t=y+2014$, iar perimetrul pentagonului este $x+y+z+t+2014=2(x+y)+3\cdot 2014$, care este un numar par.



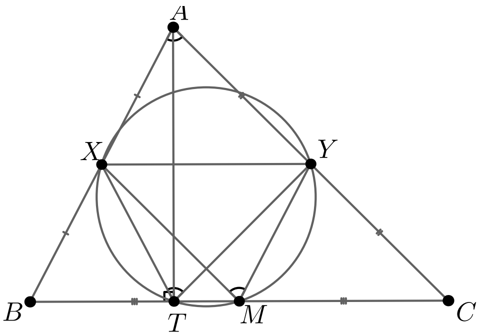
8.4 Presupunem că suma respectivă este egală cu 0, şi obţinem următoarea contradicţie: Deoarece suma respectivă are 2014 termeni,putem să deducem ca 1007 dintre ei sunt egali cu 1 si 1007 dintre ei sunt egali cu -1. Avem că produsul termenilor ar trebui să fie egal cu $\underbrace{1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1}_{1007}\cdot\underbrace{-1\cdot -1\cdot \ldots \cdot -1}_{1007}=-1$ $\cdot\, 1=-1$. Pe de altă parte produsul termenilor este egal cu ${a_1}^4\cdot {a_2}^4\ldots {a_{2014}}^4$ care este evident, pozitiv, deci avem contradictie.

8.5 Există 4^5 moduri de a colora un rând de 5 pătrăţele în 4 culori. Evident că fiecare rând va avea cel puţin 2 pătrăţele de aceiaşi culoare. $4^5=1024<2014$ deci cel puţin 2 rânduri sunt colorate în acelaşi mod,deci putem să le selectam pe ele şi luând cele 4 puncte care sunt paralele 2 cate 2 şi au aceiasi culoare obţinem dreptunghiul dorit.

8.6 Fie $A=\{x_1,x_2\ldots x_{2014}\}$. Dacă cel puţin un număr din A este divizibil cu 2014 atunci problema este rezolvată. Presupunem contrariul. Luăm numerele $p_1=x_1, p_2=x_1+x_2,\ldots,p_{2014}=x_1+x_2+\ldots x_{2014}$. Dacă cel puţin un număr p_x este divizibil cu 2014 atunci problema este rezolvată. Presupunem contrariul. Deci sunt 2014 numere p_x şi 2013 resturi posibile care sunt $\{1,2,3\ldots 2013\}$. Deci avem că cel puţin două numere p_x au acelaşi rest la împărţirea cu 2014, şi scazându-le obţinem ca o sumă din A este divizibilă cu 2014.

7.10 Clasa 9 Soluţii

9.1 Notăm $\angle ABC = \beta$, şi $\angle ACB = \gamma$. Fie M mijlocul BC. Observati ca $\triangle ABC \sim \triangle MYX$, iar $\angle XMY = \angle BAC = \alpha$. Fie T piciorul inaltimii din A, vom demonstra ca $T \in C(XMY)-$ cercul circumscris $\triangle XMY$. Deoarece TX mediana in $\triangle ABT$ avem $XB = XA = XT$, prin urmare $\angle XTA = \angle TAX = 90^{\circ} - \beta$. Analog $\angle YTA = 90^{\circ} - \gamma$. Deci $\angle XTY = 180 - \beta - \gamma = \alpha = \angle XMY$. Deci $T \in C(XMY)$. Acum deoarece $\angle XDY = \alpha$, rezulta ca $D \in C(TXMY)$, insa cercul are doar 2 intersectii cu segmentul BC, si deoarece $D \neq M$ rezulta ca $D \equiv T$, piciorul inaltimii din A.



9.2 Vezi 2014.8.5.
9.3 Observaţi că $x = \sqrt[2014]{2014}$ satisface ecuaţia deoarece:

$$x^{x^{2014}} = \sqrt[2014]{2014}^{\sqrt[2014]{2014}^{2014}} = \sqrt[2014]{2014}^{2014} = 2014.$$

Acum observaţi că funcţia $f(x) = x^{x^{2014}}$, este strict crescătoare, prin urmare $f(x) = 2014$, are o soluţie unică. Şi deoarece $x = \sqrt[2014]{2014}$ satisface ecuaţia, aceasta este unica soluţie.
9.4 Din inegalitatea lui Cauchy-Schwartz:

$$(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{2014}^2)\Big(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{2014\cdot 2015}\Big) \geq$$

$$\geq \frac{x_1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2\cdot 3}} + ... + \frac{x_{2014}}{\sqrt{2014\cdot 2015}} = 2014, \text{ însă}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{2014\cdot 2015} = \Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + ... + \Big(\frac{1}{2014} - \frac{1}{2015}\Big) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2015} = \frac{2014}{2015} \Longrightarrow$$

$$(x_1^2+x_2^2+...+x_{2014}^2)\left(\frac{2014}{2015}\right) \geq 2014 \Longleftrightarrow (x_1^2+x_2^2+...+x_{2014}^2) \geq 2015.$$

Cu egalitate când raportul perechilor este constant. Adică $x_i/\frac{1}{\sqrt{i(i+1)}} = \lambda$.

9.5 Vom demonstra problema folosind congruenţa modulo. Deoarece $a^2 \equiv a-1 \pmod{a^2-a+1}$ putem înlocui în ecuaţia noastră iniţială şi obţinem că $a^{4025}+(a-1)^{2014} \equiv a^{4025}+(a^2)^{2014} \equiv a^{4025}+a^{4028} \equiv a^{4025}(a^3+1) \equiv a^{4025}(a+1)(a^2-a+1) \vdots (a^2-a+1)$. Deci am demonstrat ce se cerea în condiţie.

9.6 Într-un poligon cu n laturi sunt $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ diagonale, respectiv în poligonul nostru cu 2014 laturi sunt $\frac{2014\cdot 2011}{2}$. Presupunem că toate diagonalele sunt paralele la cel puţin o latură. Din principiul cutiei avem că există o latură care are cel puţin 1006 diagonale parelele cu ea. Demonstrarea este simplă: dacă am avea că toate 2014 laturi ale poligonului au $\leq$ 1005 diagonale paralele atunci numărul de diagonale va fi $\leq \frac{2014\cdot 2010}{2}$ care este mai mic decât numărul total de diagonale. Deci există o latura care are cel puţin 1006 de diagonale paralele. Dar la orice latura poţi să construiesti maxim 1005 diagonale paralele(deoarece dacă ducem o diagonala paralelă prin 2 vârfuri la o anumită latură, nici o altă diagonala paralelă nu mai poate trece prin acele 2 varfuri, deoarece astfel am avea 3 puncte coliniare într-un poligon convex, iar în total obţinem maxim 1005 perechi de vârfuri), deci avem o contradicţie.

8

Anul 2015

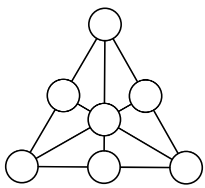
8.1 Clasa 5

5.1 Se consideră numerele naturale consecutive $1, 2, 3, ..., 2015$.La fiecare pas se aleg două numere şi se scrie diferenţa lor. În final va rămâne un singur număr. Care va fi paritatea lui?

5.2 Aflaţi toate numerele de forma $\overline{abc}$ ce satisfac următoarea egalitate:

$$(4a + 7) * 25 + 2015 = \overline{20bc} + \overline{abc}$$

5.3 Figura alăturată se consideră completată daca suma numerelor de pe fiecare linie este aceeaşi. Este posibil să folosim cel puţin 3 numere distincte pentru a completa figura?



5.4 Iepurele Urechilă a ajuns în ţara minunilor unde a găsit 2 copaci magici. Conform legendei, noaptea, un copac dublează suma de bani îngropată, iar celălalt-triplează. Cu părere de rău el nu ştie care copac dublează şi care triplează. La moment, Urechilă are 100 de monede şi doreşte peste noapte să obţină exact 175 de monede. El vă întreabă pe voi cum să repartizeze monedele pentru a obţine suma dorită.

El poate îngropa o suma sub primul copac, altă sumă sub al doilea, iar restul să nu o îngroape deloc.

8.2 Clasa 6

6.1 Dintre toate dreptunghiurile cu perimetrul de 2016 cm şi laturile exprimate prin numere naturale, să se determine dreptunghiul cu aria cea mai mare.
6.2 Ali-Baba a cumpărat 30 de animale cu 30 de monede identice. El a putut cumpăra câte 5 maimuţe cu 3 monede, un şarpe cu 2 monede, şi câte 2 papagali cu o moneda. Câte animale de fiecare fel a cumpărat Ali-Baba?
6.3 Aveţi 100 monede de aur, dintre care 99 sunt adevarate(având aceeaşi greutate) iar una este falsă (fiind mai uşoară). Dispuneţi de o balanţă. Pe fiecare talger puteţi plasa câte o monedă, iar balanţa arată unul dintre cele 3 rezultate posibile: "talgerul drept e mai greu" , "talgerul stâng e mai greu" sau "avem echilibru". Cu părere de rău balanţa este defectă: ea mereu arată un rezultat greşit din cele 3 posibile. Cum putem, cu ajutorul balanţei, să găsim 98 de monede adevărate?
6.4 Se consideră 300 puncte pe cerc. Iniţial un greier se află în punctul 1. La fiecare mişcare el sare o anumită distanţă şi mai apoi măreşte distanţa cu 1. La primul pas, el sare din punctul 1 în punctul 2, apoi din punctul 2 în punctul 4, apoi din punctul 4 în 7. (El sare doar în direcţia acelor ceasornicului)
Arătaţi că există un punct în care el nu va ajunge niciodată.

8.3 Clasa 7

7.1 Considerăm numerele naturale a, b astfel încât $a > 2b$. Se dă faptul că $3|a-2b$ şi $a+2b|127$, găsiţi valoarea maximă a produsului ab.
7.2 Este dat triunghiul $\triangle ABC$ cu mediana BD, D aparţine lui AC. Se iau punctele E, F pe BD astfel încât $BE = EF = FD$. Dacă $AD = AF$ şi $AB = 1$ găsiţi lungimea segmentului CE.
7.3 Este posibil de împărţit numerele $\underbrace{2, 2, ..., 2}_{403 \text{ ori}}, \underbrace{3, 3, ..., 3}_{403 \text{ ori}}$ în două grupe astfel încât suma numerelor din fiecare grup să fie pătrat perfect?
7.4 Fie punctele D, E şi F pe laturile AC, AB şi respectiv BC a triunghiului isoscel $\triangle ABC$ $(AB = BC)$. Dacă avem că $DE = DF$ şi $AE + FC = AC$, demonstraţi că unghiurile $\angle BAC$ şi $\angle FDE$ sunt congruente.
7.5 Se dă o tablă de şah $(2015)\times(2015)$. Este oare posibil ca un cal(de şah)

să se pornească dintr-un pătrăţel, după care să sară pe fiecare celulă a tablei (numai o singură dată), şi să se întoarcă de unde s-a pornit?
7.6 Pe tablă sunt scrise 5 numere reale diferite. La o mişcare putem alege două numere (x, y) şi să le înlocuim cu numerele $(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2})$. Arătaţi că putem alege cele 5 numere iniţiale, astfel încât indiferent de prima mişcare, la un anumit pas să obţinem toate numerele egale.

8.4 Clasa 8

8.1 Demonstraţi că ecuaţia $x^3 + y^3 = 2^{2015}$ nu are soluţii în numerele naturale.
8.2 Fie M mijlocul laturii AB a triunghiului $\triangle ABC$. Considerăm pe segmentul CM punctele P şi Q astfel încât $CQ = 2PM$. Demonstraţi că dacă $\angle APM = 90$ atunci $BQ = AC$.
8.3 Se dau numerele întregi nenule a, b astfel încât $a|b$. Putem găsi un numar întreg nenul c astfel încât $b|c$ şi ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ să aibă doua soluţii în numerele întregi?
8.4 Este posibil de împărţit numerele $\underbrace{2, 2, ..., 2}_{403 \text{ ori}}, \underbrace{3, 3, ..., 3}_{403 \text{ ori}}$ în trei grupuri astfel încât suma numerelor din fiecare grup sa fie pătrat perfect?
8.5 Considerăm un şir de numere întregi $a_1, ..., a_7$, cu proprietatea: dacă excludem oricare număr, restul numerelor pot fi împărţită în doua grupuri a câte 3, astfel încât suma numerelor din ambele grupuri să fie egale.
Demonstraţi că toate numerele sunt egale.
8.6 Se dă triunghiul isoscel $\triangle ABC$ cu $AB = AC$ şi $\angle BAC = 90$, considerăm punctele D, E pe segmentul BC astfel încât D este între B şi E , $\angle DAE = 45$. Demonstraţi că segmentele BD,DE,EC pot fi laturile unui triunghi.

2015 Soluţii

8.5 Clasa 5 Soluţii

5.1 Observăm că după fiecare pas numărul de numere impare rămase pe tablă sau ***scade cu 2*** în cazul $(impar, impar) \to par$, sau ***rămâne acelaşi*** în cazurile: $(par,\ par) \to par$, $(par, impar) \to impar$. Iniţial avem pe tablă $\frac{2014}{2} + 1 = 1008$ - un număr par de numere impare. Deci indiferent de mişcările efectuate, pe tablă va ramâne mereu un număr par de numere impare. Deci când vom avea un singur număr rămas, el va fi ***par***, deoarece nu putem avea un număr impar de numere impare.

5.2 Avem:

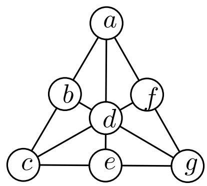
$$100a + 175 + 2015 = 2000 + 10b + c + 100a + 10b + c \Longleftrightarrow$$

$$190 = 20b + 2c \Longleftrightarrow 95 = 10b + c = \overline{bc} \Longleftrightarrow b = 9,\ c = 5.$$

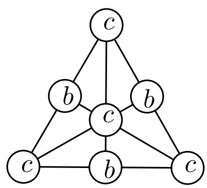
Întrucât $100a$ se simplifică, şi nu are nici o restricţie avem $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Deci obţinem: $\overline{abc} \in \{195, 295, 395, 495, 595, 695, 795, 895, 995\}$.

5.3 Fie a, b, c, d, e, f, g - numerele care satisfac relaţia ,fiind aranjate ca în imagine:



Cum suma de pe fiecare dreaptă este constantă $\Rightarrow a+b+c = a+d+e = a+f+g \Rightarrow b+c = d+e = f+g$ (1). Analog $c+f = b+g = a+e$ (2). Din aceste 2 relaţii obţinem: (1) : $b-f = g-c$, (2) : $b-f = c-g \Rightarrow c-g = g-c \Rightarrow c = g$ si respectiv $b = f$, $d+e = b+c = c+f = a+e \Rightarrow a = d$ insa $2 \cdot a = a+d = c+g = 2 \cdot c \Rightarrow a = c$. Din relaţiile $c+e = a+e = c+b$, deducem că $e = b$, şi respectiv imaginea finală va fi următoarea :



Observăm că acesta are maxim 2 numere distincte deci răpsunsul va fi Nu.

5.4 Întrucât Urechila nu ştie care copac dubleaza şi care triplează suma de bani, el nu poate pune câte un număr diferit sub fiecare, deci el va pune acelaşi număr sub fiecare copac. Fie Urechila îngroapă x sub primul, x sub al doilea iar $100-2x$ le păstrează cu el. Atunci peste noapte urechila va strânge $2x$ şi $3x$ de sub ambii copaci iar împreună cu cele $100-2x$ monede ne-îngropate va avea:

$$2x + 3x + (100 - 2x) = 100 + 3x = 175 \Longrightarrow 3x = 75 \Longrightarrow x = 25.$$

Prin urmare Urechila îngroapă câte 25 de monede sub ambii copaci, iar restul 50 le păstrează, iar peste noapte el va avea: $25 \cdot 2 + 25 \cdot 3 + 50 = 175$ de monede.

8.6 Clasa 6 Soluţii

6.1 Fie laturile dreptunghiului $a, b \in \mathbb{N}$. Atunci pentru perimetru avem: $2a + 2b = 2016 \Longrightarrow a + b = 1008$. Fie $a \geq b$, atunci $a = 504 + x$, $b = 504 - x$ pentru careva $x \in \mathbb{N}$ iar $a + b = 1008$ se întreţine. Atunci aria maximă a dreptunghiului este:

$$max(A) = max(a \cdot b) = max(504 + x) \cdot (504 - x) = max(504^2 - x^2) =$$

$$= 504^2, \text{ max pentru } x = 0.$$

Deci aria maxima se obtine cand figura este un pătrat cu latura 504, sau $a = b = 504$.
6.2 Fie Ali-Baba a cumpărat a seturi de 5 maimuţe cu 3 monede/set, b seturi de câte un şarpe cu 2 monede/set, şi c seturi de 2 papagali cu 1 monede/set. Pentru numarul total de monede platite avem: $3a + 2b + c = 30$ monede $(*)$. Pentru numarul total de animale cumparate: $5a + b + 2c = 30$ animale $(**)$. Scadem $(**) - (*) \Longrightarrow 2a - b + c = 0 \Longrightarrow b = 2a + c$. Atunci avem:

$$5a + b + 2c = 5a + (2a + c) + 2c = 7a + 3c = 30 \ (!) \implies a \leq 4.$$

Observăm că în relaţia (!): $3c$ si 30 se divid la 3, atunci avem şi $a \ \vdots \ 3$ la fel, însă $a \leq 4$, deci $a = 3$, sau $a = 0$.
Daca $a = 0$ avem că $3c = 30 \to c = 10$, iar $b = 2a + c$, deci $b = 10$. În acest caz Ali-baba are 0 maimuţe, 10 şerpi ş 20 de papagali.
Daca $a = 3$, din (!) $\Longrightarrow 3c = 30 - 7a = 30 - 21 = 9 \Longrightarrow c = 3$. Deci $b = 2a + c = 2 \cdot 3 + 3 = 9$. Prin urmare Ali-Baba are 3 seturi de maimuţe, adică $3 \cdot 5 = 15$ maimuţe, 9 seturi de şarpe, adică 9 şerpi şi 3 seturi de papagali adică $3 \cdot 2 = 6$ papagali.
6.3 Întrucât balanţa mereu arată un rezultat greşit, dacă la un anumit pas ea va arăta egalitate între 2 monede, atunci cunoaştem că din aceste 2 monede una este falsă şi una adevărată. Atunci le putem pune deoparte, şi luăm pe restul 98 care sigur sunt adevărate. Deci putem presupune că balanţa niciodată nu va arăta egalitate, întrucât dacă va fi o egalitate problema e finisată. Atunci oricare 2 monede a, b pot fi ordonate, întrucât dacă balanţa arată $b > a$, se cunoaşte că defapt $a \leq b$. Acum luăm 2 monede aleatorii, le

cântărim iar pe cea mai *"mic egal"* o numim *"numărător"*, iar moneda mai *"mare egal"* o sortăm ca adevărată, întrucât nu e cea mai uşoară. Acum la fiecare pas cântărim *"numărătorul"* cu o moneda nouă, dacă moneda noua e mai *"mare egal"* atunci ea este adevărată, şi dacă moneda nouă e mai *"mic egal"* ea devine noul *"numarator"*, iar numărătorul vechi îl sortăm ca moneda adevărată. Prin urmare la fiecare pas numărul de monede creşte cu 1, iar dupa 98 de cântăriri vom avea 98 de monede adevărate.

6.4 Vom încerca să demonstrăm că broasca nu va vizita niciodată nici un punct divizibil cu 3. În momentul în care el este în punctul 1, prima mutare o duce pe broasca în punctul 2, care dă restul 2 la împărţirea cu 3. Următoarea mutare o duce pe broască în punctul 4 care dă restul 1 la împărţirea cu 3, iar urmatoarea mutare o duce pe broasca in punctul 7 care da restul 1 la împărţirea cu 3. Luăm modulul 3 obţinem şirul de numere $\underbrace{1,2,1}_{3}, \underbrace{1,2,1}_{3}, \underbrace{1,2,1}_{3}, \underbrace{1,2,1}_{3} \ldots$, deci broasca nu va vizita poziţiile divizibile cu 3.

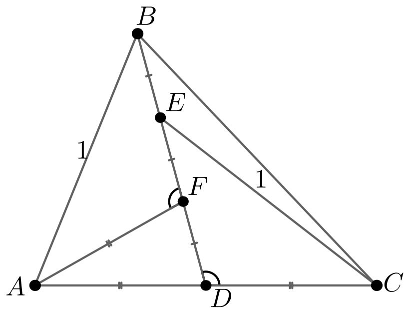
8.7 Clasa 7 Soluţii

7.1 Avem $3 \mid a - 2b$ deci $a - 2b = 3k$. Acum $a + 2b \mid 127$, insa 127 este prim deci $a + 2b = 1$ sau $a + 2b = 127$. Presupunem că a, b sunt diferite de 0, pentru a nu avea $\max(ab) = 0$. Deci $a + 2b \geq 3$, deci $a + 2b = 127$. Iar cu $a - 2b = 3k$ rezultă: $2a = 127 + 3k$, deci k impar, iar $a = \frac{1}{2}(127 + 3k)$. Analog $4b = 127 - 3k \iff b = \frac{1}{4}(127 - 3k)$. Prin urmare:

$$ab = \frac{1}{2}(127 + 3k) \cdot \frac{1}{4}(127 - 3k) = \frac{1}{8}(127^2 - 9k^2).$$

Deci $\max(ab)$ se atinge pentru $\min(k)$, insa k impar deci $k = 1$. Atunci $a - 2b = 3$ si $a + 2b = 127$ sau $a = 65$ si $b = 31$. Deci $max(ab) = 65 \cdot 31 = \frac{1}{8}(127^2 - 9) = 2015$.

7.2 Vom demonstra că $\triangle BAF \equiv \triangle ECD$. Observaţi că $AF = AD = DC$, si $BF = ED$. Iar $\angle BFA = 180 - \angle AFD = 180 - \angle ADF = \angle EDC$. Prin urmare din criteriul LUL, avem $\triangle BAF \equiv \triangle ECD$. Deci $CE = AB = 1$.



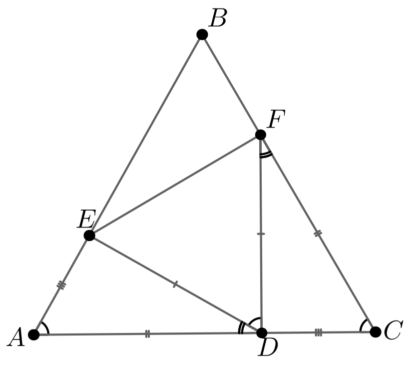
7.3 Presupunem că este posibil. Fie suma numerelor din prima grupă n^2, iar celor din a doua grupă m^2, unde $n, m \in \mathbb{N}$. Atunci avem:

$$n^2 + m^2 = 403 \cdot 2 + 403 \cdot 3 = 2015.$$

Prin urmare unul din numere este par iar altul impar. Fie $n = 2k + 1$, iar $m = 2l$, atunci

$$2015 = (2k+1)^2 + (2l)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 \Longleftrightarrow 4(k^2 + k + l^2) = 2014,$$

Însă $4 \nmid 2014$, prin urmare nu este posibil de împărţit numerele în 2 grupe.
7.4 Observaţi că punctul D este unic pe segmentul AC, pentru orice pereche de puncte (E, F). Într-adevăr, deoarece $DE = DF$, rezultă că D se află pe intersecţia lui AC cu mediatoarea l a segmentului EF. Astfel dacă găsim un alt punct T care satisface $TE = TF$, vom avea $T \equiv D$. Acum fie T pe segmentul AC astfel incât $TA = FC$, atunci $TC = EA$. Prin urmare $\triangle AET \equiv \triangle CTF \implies TE = TF \implies T \equiv D$. Acum $\angle EDF = \angle ETF = 180 - \angle EDA - \angle FDC = 180 - \angle EDA - \angle AED = \angle BAC$.



7.5 Nu este posibil. Observăm că la fiecare mutare calul îşi schimbă culoarea de pe un pătrat alb pe unul negru, şi de pe unul negru pe unul alb. Tabla 2015×2015 are un număr impar de pătrate, deci pentru a vizita toate pătratele o singura dată şi a se întoarce înapoi calul va efectua $2015 \cdot 2015$ mutări, însă după un număr impar de mutari calul îşi va schimba culoarea, deci el nu poate termina pe aceeaşi culoare de unde a pornit.
7.6 Încercăm oricare şir de forma $(a, -a, b, -b, 0)$. Atunci indiferent de prima mişcare dorim sa obţinem şirul $(0, 0, 0, 0, 0)$. Dacă prima mişcare cu (x, y) nu conţine 0, atunci în următoarea mişcare putem efectua conjugata cu perechea $(-x, -y)$, şi vom obţine şirul $(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, -\frac{x+y}{2}, -\frac{x+y}{2}, 0)$, şi evident putem grupa termenul 1 cu 3 şi 2 cu 4 pentru a obţine şirul $(0, 0, 0, 0, 0)$.

Dacă prima mişcare conţine un 0, atunci fără a pierde din generalitate fie aceasta $(a, 0)$. Observaţi că cazul $(-a, 0)$, $(b, 0)$, şi $(-b, 0)$ prin simetrie se rezolvă asemănător cu a înlocuit cu $-a, b$, sau $-b$ peste tot.

Acum fie prima mişcare $(a, 0)$. Atunci efectuăm următorii paşi:

$(a, 0) \longrightarrow (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -a, b, -b)$.

$(b, -b) \longrightarrow (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -a, 0, 0)$.

$(-a, 0) \longrightarrow (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, 0)$.

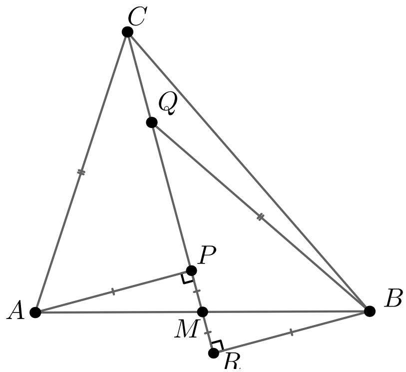
$(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}) \longrightarrow (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, 0, 0, 0)$.

$(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}) \longrightarrow (0, 0, 0, 0, 0)$.

Prin urmare orice şir de forma $(a, -a, b, -b, 0)$ poate fi transformat în $(0, 0, 0, 0, 0)$ indiferent de prima mişcare.

8.8 Clasa 8 Soluţii

8.1 Din congruenţa modulo avem că un număr natural la puterea a 3 poate avea resturile $0, 1, 6$ la împarţirea cu 7, iar $2^{2015} \equiv 2^2 \cdot 2^{2013} \equiv 2^2 \cdot (2^3)^{671} \equiv 2^2 \cdot 1 \equiv 4 \pmod 7$. Evident nu putem forma 4 dacă sumăm 2 din numerele $0, 1, 6$.
8.2 Fie R simetricul lui P faţă de M. V-om demonstra că $\triangle CAP \equiv \triangle QBR$. Observaţi că $\triangle APM \equiv \triangle BRM$. Deci $BR = AP$, si $\angle BRM = \angle APM = 90 = \angle APC$. Iar $CP = CQ + QP = 2PM + QP = PR + QP = QR$. Deci după criteriul LUL, avem $\triangle CAP \equiv \triangle QBR$, deci $BQ = AC$.



8.3 Avem $a \mid b$, deci putem scrie $b = ka$. Dacă $b \mid c$ atunci putem găsi m astfel încât $c = mb = mka$. Discriminantul ecuaţiei de gradul 2 va fi: $(ak)^2 - 4a^2mk$, iar soluţiile $\dfrac{-ak \pm \sqrt{(ak)^2 - 4a^2mk}}{2a} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4mk}}{2}$. $\sqrt{(ak)^2 - 4a^2mk}$ trebuie să fie număr întreg. Dacă acesta este întreg este uşor de demonstrat că $k + \sqrt{k^2 - 4mk}$ este un număr par.
$k^2 - 4km = k(k - 4m)$ Dacă luăm $m = -2k$, obţinem că $k(k + 8k) = 9k^2$, care este pătrat perfect, deci putem alege un c ca să avem 2 soluţii întregi.
8.4 Presupunem că este posibil de împărţit numerele în 3 grupe. Atunci există $a, b, c \in \mathbb{N}$ a.i. $a^2 + b^2 + c^2 = 403 \cdot 2 + 403 \cdot 3 = 2015$. Întrucât 2015 e impar, avem 2 variante. Din cele 3 numere a, b, c unul este impar şi restul pare, sau toate 3 sunt impare.
Daca unul impar şi 2 pare avem:

$$2015 = a^2 + b^2 + c^2 = (2k+1)^2 + (2m)^2 + (2n^2) = 4(k^2 + k + m^2 + n^2) + 1 \Longleftrightarrow$$

$$2014 = 4 \cdot (k^2 + k + m^2 + n^2), \text{ insa } 4 \nmid 2014 \text{ deci nu exista solutii.}$$

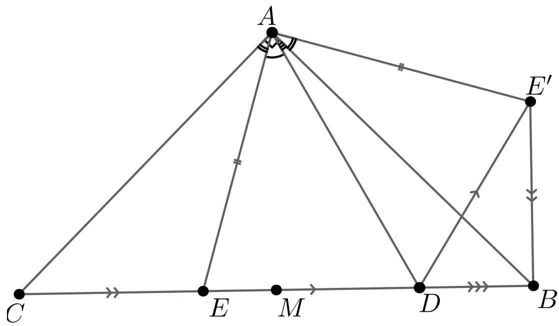
Dacă toate 3 sunt impare atunci avem:

$$2015 = (2k+1)^2 + (2m+1)^2 + (2k+1)^2 = 4(k^2 + k + m^2 + m + n^2 + n) + 3 \Longleftrightarrow$$

$$2012 = 4(k^2 + k + m^2 + m + n^2 + n) \Longleftrightarrow 403 = k(k+1) + m(m+1) + n(n+1).$$

Acum 403 este impar, însă fiecare din termenii din partea dreaptă sunt pari deci şi suma lor este pară. Prin urmare nu este posibil de împărţit şirul în 3 grupe fiecare cu suma pătrat perfect.
8.5 Fie S suma celor 7 numere din şir. Atunci deoarece oricare 6 numere pot fi împărţite în 2 grupe egale, rezultă că suma oricăror 6 numere este pară. Acum fie a_7 este exclus din şir, atunci pentru restul 6 avem $S - a_7 =$

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 = 2k$. Prin urmare a_7 şi S au aceeaşi paritate. Analog toate numerele au aceeaşi paritate ca şi S. Acum fie a_k cel mai mic număr, şi vom forma un nou şir b_i scăzând din fiecare element a_i valoarea celui mai mic element a_k. Astfel definim $b_i = a_i - a_k$, atunci b_i are aceeaşi proprietate ca şi a_i, iar $b_k = 0$. Deoarece toate b_i au aceeaşi paritate, şi $b_k = 0$, rezultă toate b_i sunt pare. Acum dacă există $b_j \neq 0$, şi cunoaştem că toate b_i sunt pare, putem forma un nou sir $c_i = \frac{1}{2}b_i$ care iarăşi va avea aceeaşi proprietate ca şi a_i. Tot aşa la fiecare pas vom împărţi şirul b_i la 2 de multiple ori pănâ vom obţine un element impar, însă deoarece toate elementele au aceeaşi paritate rezultă că toate sunt pare. Dar $b_k = 0$ este mereu par, indiferent de câte ori se împarte la 2. Prin urmare contradicţie, deci toate b_i sunt iniţial egale cu 0. Iar $a_i = b_i + a_k = a_k$, prin urmare toate a_i sunt egale.
8.6 Fie M mijlocul BC, atunci avem $\angle DAE = 45 = \angle BAM = \angle MAC$. Fie $\angle BAD = x \implies \angle DAM = 45 - x \implies \angle MAE = x \implies \angle EAC = 45 - x$. V-om încerca să construim direct un triunghi din segmentele BD, DE si EC. Observaţi că dacă efectuăm o rotaţie a $\triangle AEC$ cu $90°$ în jurul punctului A, atunci $C \to B$, şi fie $E \to E'$. Observaţi că $\triangle AE'D \equiv \triangle ADE$ dupa criteriul LUL. Deci $E'D = ED$, insa $E'B = EC$, prin urmare $\triangle E'BD$ este triunghiul căutat cu laturile BD, DE si EC.



9

Anul 2016

9.1 Clasa 5

5.1 Se consideră cifrele a, b, c astfel încât $\overline{aa} + \overline{bb} + \overline{cc} = 99$. Demonstraţi că $9 \mid \overline{abc}$.
5.2 Suma a 64 numere naturale nenule este egală cu 2016. Demonstraţi că cel puţin două dintre aceste numere sunt identice.
5.3 Se consideră şirul $1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 20...$
a) Determinaţi următorii doi termeni ai şirului.
b) Determinaţi al 2016-lea termen al şirului.
c) Calculaţi suma termenilor mai mici sau egali cu 80.
5.4 Un grup de copii s-a dus în pădure la culesul nucilor. Ei s-au împărţit în perechi. Fiecare pereche este formataă dintr-un băiat şi o fată. După ce au ieşit din pădure s-a adeverit că fiecare băiat a cules sau de 2 ori mai puţine sau de 2 ori mai multe nuci decât fata din perechea sa. Poate oare numărul total de nuci cules de copii sa fie egal cu 2017?

9.2 Clasa 6

6.1 Fie S un număr natural astfel încât $S = \overline{1234567891011.....20152016}$
Demonstraţi că $3 \mid S$.
6.2 Determinaţi cel mai mic număr natural de 5 cifre care împărţit la 7 dă restul 4 , împărţit la 11 dă restul 8 şi împărţit la 13 dă restul 10.
6.3 Fie x produsul primelor 2016 numere naturale nenule consecutive. Găsiţi

ultima cifră a numărului 7^x.
6.4 Aflaţi toate numerele de două cifre care sunt de 5 ori mai mari decât suma cifrelor lor.

9.3 Clasa 7

7.1 Găsiţi toate numerele naturale a, b, c, d astfel încât $\overline{abcd} + a + b + c + d = 2016$.
7.2 Este posibil oare de scris toate numerele de la 1 la 2016 într-un rând, astfel încât oricare două numere vecine si oricare două numere situate peste unul să fie reciproc prime între ele?
7.3 Fie $\triangle ABC$ un triunghi echilateral. Construim în exteriorul acestuia triunghiurile echilaterale $\triangle ABE, \triangle CBF, \triangle ACG$. Demonstraţi că BG, AF şi CE sunt concurente într-un punct.
7.4 Determinaţi numerele întregi x, y, z care satisfac relaţia

$$\frac{2x+3}{3} = \frac{2}{3y-1} = \frac{5}{4z-3}$$

7.5 Demonstraţi că suma cifrelor numărului natural $\overline{ab}$ este egală cu suma cifrelor numărului $5 \times \overline{ab}$ doar dacă $\overline{ab}$ se divide cu 9.
7.6 Prezentatorul şi fiecare dintre cei 30 de concurenţi scriu numerele de la 1 la 30 într-o anumită ordine. Apoi secvenţele numerice se compară: dacă la un participant şi la prezentator pe aceeaşi poziţie se află acelaşi număr, participantul primeşte un punct. Se ştie că toţi participanţii au obţinut punctaje diferite. Demonstraţi că secvenţa numerică (scrierea celor 30 de numere) a unuia dintre concurenţi coincide cu cea a prezentatorului.
7.7 Fie triunghiul isoscel $\triangle ABC$ cu $|AB| = |AC|$, M mijlocul laturii BC, P este un punct pe segmentul AM, iar E, F sunt punctele simetrice lui P faţă de laturile AB, AC. Arătaţi că triunghiul $\triangle MEF$ este isoscel şi că $AM \perp EF$.

9.4 Clasa 8

8.1 În triunghiul $\triangle ABC$, M este mijlocul lui AB, iar N este mijlocul lui AC. Dacă $|CM| = |BN|$, demonstraţi că $|AB| = |AC|$.
8.2 În expresia $1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 4 \bullet ... \bullet 2016 = 0$, putem oare înlocui toate cerculeţele cu semnele $+$ sau $-$ astfel încât să obţinem egalitate?
8.3 Aflaţi toate numerele naturale nenule x, p, q unde p şi q sunt numere prime şi satisfac relaţia $p^2 + q^2 + 4x = 2016$.

8.4 Fie $\triangle ABC$ şi $\triangle DEF$ triunghiuri cu laturile respective paralele (AB la DE, AC la DF, BC la EF). Demonstraţi că AD, BE, CF sunt concurente într-un punct.
8.5 Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface următoarele condiţii:
(i) $f(3) = f(4) + f(5)$
(ii) $f(x-1) + f(x) + f(x+1) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
Să se calculeze valoarea lui $f(2016)$.
8.6 Să se arate că oricum am aşeza 37 puncte în interiorul unui triunghi echilateral cu latura de lungime 1, există cel puţin două puncte astfel încât distanţa dintre ele nu depăşeşte $0,1(6)$.
8.7 Se dă un şir de 2016 numere reale pozitive cu suma 1. Fie aceste numere $x_1, x_2, ..., x_{2016}$. Se ştie că $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = ... = \frac{x_{2015}}{x_{2016}} = \frac{1}{2}$.
Găsiţi valoarea numărului x_1.

2016 Soluţii

9.5 Clasa 5 Soluţii

5.1 Avem: $10a + a + 10b + b + 10c + c = 11(a+b+c) = 99 \Rightarrow a+b+c = 9$.

Deoarece suma cifrelor $\overline{abc}$ se imparte la 9 rezultă că şi $\overline{abc} \,\vdots\, 9$.
5.2 Presupunem că toate numerele sunt diferite. Atunci suma lor este cel puţin egală cu suma celor mai mici 64 numere naturale nenule diferite, sau $2016 \geq 1+2+3+...+63+64 = \frac{64\cdot(64+1)}{2} = 2080$, dar $2016 < 2080$, contradicţie, deci cel puţin 2 numere sunt egale.
5.3 a) Observaţi că şirul creşte cu $+1$ (din poziţii impare), şi cu $+3$ (din poziţii pare) pe rând. Prin urmare următorii doi termeni vor fi: 21, 24.
b) Observaţi că la fiecare doi paşi suma creşte cu $+4$. Atunci deoarece $2016 = 2 + 1007 * 2$ rezultă că al $2016-lea$ termen se află la 1007 paşi dubli faţă de al $2-lea$ termen, respectiv acesta o sa fie egal cu $4 + 1007 * 4 = 4032$.
c)De asemenea o observaţie bună este faptul că acest şir conţine toate numerele naturale ce se divid cu 4 şi toate numerele naturale ce dau restul 1 la împărţirea cu 4. Respectiv putem calcula uşor suma tuturor numerelor divizibile cu 4 si celora ce dau restul 1 la împărţirea la 4 cu ajutorul sumei lui Gauss. Răspunsul final este 1620. O abordare directă ca adunarea termenilor tot duce la fel la soluţie.
5.4 Observăm că în orice pereche unul din copii a strâns x nuci, iar celălalt $2x$ nuci. Deci fiecare pereche a strâns un număr de nuci divizil cu 3. Prin urmare,

şi numărul total de nuci strânse trebuie să se dividă cu 3, însă $2017 = 3k+1$, deci răspunsul este nu.

9.6 Clasa 6 Soluţii

6.1 Fie S are n cifre, atunci $S = \overline{1234567891011.....20152016}$ se rescrie ca:

$$S = 2016 + 2015 \cdot 10^4 + 2014 \cdot 10^8 + ... + 2 \cdot 10^{n-2} + 1 \cdot 10^{n-1}$$

Observăm că $10^k = 1 + \underbrace{99...99}_{k-1 \text{ ori}}$, iar $3 \mid \underbrace{99...99}_{k-1 \text{ ori}}$. Atunci S se rescrie ca:

$$S = 2016 + 2015 \cdot (1 + 9999) + 2014 \cdot (1 + \underbrace{99...99}_{\text{8 ori}}) + ... + 2 \cdot (1 + \underbrace{99...99}_{\text{n-2 ori}}) +$$

$$+1 \cdot (1 + \underbrace{99...99}_{\text{n-1 ori}}) =$$

$$= 2016 + 2015 + 2014 + ... + 2 + 1 + \Big(2015 \cdot 9999 + 2014 \cdot \underbrace{99...99}_{\text{8 ori}} +$$

$$+ \ ... \ + 2 \cdot \underbrace{99...99}_{\text{n-2 ori}} + 1 \cdot \underbrace{99...99}_{\text{n-1 ori}}\Big).$$

Evident partea dreaptă din paranteze se divide la 3, iar din formula lui Gauss şi

$$2016 + 2015 + ... + 2 + 1 = \frac{2016(2016+1)}{2} = 1008 \cdot 2017 \ \vdots \ 3,$$

deoarece $3 \mid 1008$. Prin urmare $3 \mid S$.

6.2 Iniţial vom găsi forma tuturor numerelor cu restul $4, 8, 10$ la împărţirea cu $7, 11, 13$. Numerele date au forma $n = 7a + 4 = 11b + 8 = 13c + 10$. Pentru început găsim cel mai mic număr de forma $m = 7a+4 = 11b+8$ care dă restul 4 şi 8 la împărtirea cu 7 şi 11. Avem $7a = 7b + 4b + 4$. Deci $4b + 4$ se divide la 7, iar prin metoda încercării $b = 0, 1, 2, ...$ găsim cel mai mic $b = 6$. Iar cel mai mic $m = 11 \cdot 6 + 8 = 74$. Întrucât 7 şi 11 sunt reciproc prime, rezultă toate m au forma $m = 7 \cdot 11 \cdot k + 74 = 77k + 74$ şi dau restul 4 şi 8 la împărţirea cu 7 şi 11. Acum găsim toate n de forma $n = 77k + 74 = 13c + 10$. Ultima egalitate se rescrie ca $13c = 77k + 64 = 13 \cdot (5k + 4) + 12k + 12$. Deci $12k + 12$ se divide la 13. Prin metoda încercării $k = 0, 1, 2, ...$ găsim cel mai mic $k = 12$. Iar cel mai mic $n = 77 \cdot 12 + 74 = 998$. Întrucât 77 şi 13 sunt reciproc prime, rezultă toate n au forma $n = 77 \cdot 13 \cdot t + 998 = 1001t + 998$. Iar cel mai mic număr cu proprietăţile dorite se atinge pentru $t = 9$, sau $n = 1001 \cdot 9 + 998 = 10007$.

6.3 Observaţi că $4 \mid x$, atunci fie $x = 4k \Rightarrow$
$7^x = 7^{4k} = (7^4)^k = (2401)^k$ care mereu va avea ultima cifră 1.
6.4 Căutăm $\overline{ab}$ astfel încât: $\overline{ab} = 5(a+b) \Leftrightarrow 10a + b = 5a + 5b \Leftrightarrow 5a = 4b \Leftrightarrow$
$a = 4, b = 5$.
Deci unica soluţie $\overline{ab} = 45$.

9.7 Clasa 7 Soluţii

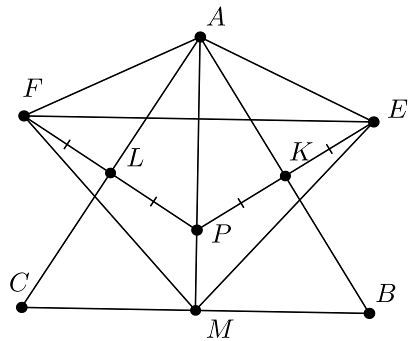
7.1 Rescriem ca:

$$1000a + 100b + 10c + d + a + b + c + d = 1001a + 101b + 11c + 2d = 2016$$

Pentru $a \geq 3$ nu există soluţii, rezultă $a \in \{1, 2\}$.
• Dacă $a = 2 \Rightarrow 101b + 11c + 2d = 2016 - 1001 \cdot 2 = 14$, deci $b = 0 \Rightarrow$ $11c + 2d = 14 \Rightarrow c \in \{0, 1\}$. Dacă $c = 0 \Rightarrow d = 7$, dacă $c = 1 \Rightarrow 2d = 3$ nu există soluţii. Deci $\overline{abcd} = 2007$
• Dacă $a = 1 \Rightarrow 101b + 11c + 2d = 2016 - 1001 = 1015$, unica posibilitate: $b = 9 \Rightarrow 11c + 2d = 1015 - 909 = 106$. De unde $c \in \{8, 9\}$, dacă $c = 8 \Rightarrow d = 8$, dacă $c = 9 \Rightarrow 2d = 7$ nu există soluţii. Deci $\overline{abcd} = 1988$.
Deci $\overline{abcd} \in \{1988;\ 2007\}$.
7.2 Avem 1008 numere pare şi 1008 impare. Observăm că nu putem avea 2 numere pare la rând, întrucât ele trebuie să fie reciproc prime. Deoarece jumate din numere sunt pare rezultă că ele sunt repartizate peste unul, însă atunci vom avea 2 numere peste unul, care sunt pare şi nu vor fi reciproc prime. Prin urmare nu este posibil.
7.3 Observaţi că $\triangle EFG$ este echilateral, iar A, B, C sunt mijloacele laturilor. Prin urmare BG, AF şi CE sunt mediane în $\triangle EFG$, deci sunt concurente în centrul de greutate al $\triangle EFG$.
7.4 Evident că dacă $y \geq 2$ atunci $\frac{2}{3y-1}$ este mai mic decât 1 şi pentru $y \leq -1$ este mai mare decât -1. Pentru $x \geq 1$,$\frac{2x+3}{3}$ este mai mare ca 1 şi pentru $x \leq -4$,$\frac{2x+3}{3}$ este mai mică decât -1, deci valorile fracţiilor pot să coincidă doar când $y \in \{0, 1\}$ şi $x \in \{-3, -2, -1, 0\}$. Făcând verificarea obţinem soluţia $x = 0, y = 1, z = 2$.
7.5 Numărul $\overline{ab}$ dă acelaşi rest la împarţirea cu 9 ca şi numărul $(a + b)$, şi numărul $5 \cdot \overline{ab}$ va avea acelaşi rest la împărţirea cu 9 ca şi numărul $5 \cdot (a + b)$. Deci evident ele vor fi egale când $(a + b)$ va fi divizibil cu 9, adică am demonstrat ce trebuia.
7.6 Fiecare participant poate obtine un scor de la 0 la 30 în dependenţă de numărul de numere care coincid pe aceiaşi poziţie cu cele ale prezentatorului. Daca presupunem că nici o secvenţă nu coincide cu cea a prezentatorului,

atunci nimeni nu poate avea un scor de 30. La fel nimeni nu poate avea un scor de 29, întrucât dacă 29 de poziţii coincid cu cele ale prezentatorului atunci şi ultima va coincide. Prin urmare vom avea 30 de participanţi şi 29 de scoruri diferite posibile $0, 1, 2, 3, ..., 28$. Prin urmare vor exista 2 participanţi care vor avea acelasi scor, contradicţie cu afirmaţia că fiecare are un scor diferit. Prin urmare va exista un participant cu o secvenţa ce coincide cu cea a prezentatorului.

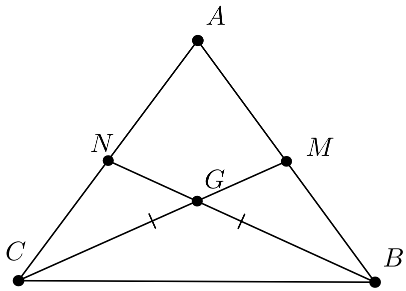
7.7 Fie K şi L proiecţia lui P pe AB şi AC. Întrucât P aparţine bisectoarei AM în triungiul isoscel $\triangle ABC$ rezultă $PK = PL$. Prin urmare $PE = 2PK = 2PL = PF$, deci $\triangle PEF$ isoscel. Acum $\angle FPA = \angle LPA = 90^\circ - \frac{\angle A}{2} = \angle KPA = \angle EPA$. Deci PA bisectoare în triunghiul isoscel $\triangle EPF$, deci PA mediatoarea segmentului EF. Iar M aparţine mediatoarei segmentului EF, deci $AM \perp EF$ şi $\triangle MEF$ isoscel.



9.8 Clasa 8 Soluţii

8.1 Fie $BN \cap CM = \{G\}$, centrul de greutate al triunghiului. Deoarece G împarte medianele în raport de 2:1, avem $CG = \frac{2}{3}CM = \frac{2}{3}BN = BG$. Deci $\triangle GBC$, isoscel, iar $\angle GBC = \angle GCB$. Prin urmare $\triangle MBC \equiv \triangle NCB$. Deci $BM = CN$, sau $AB = AC$. Prin urmare $\triangle ABC$ este isoscel.

Soluţie Alternativă: Fie D simetricul lui B faţă de N. Observaţi că $ABCD$ este paralelogram, întrucât N este mijlocul segmentului AC şi BD. Analog se defineşte E simetricul lui C faţă de M. Atunci $ACBE$ la fel este paralelogram, iar E, A, D sunt coliniare întrucât $EA \parallel BC \parallel AD$. Dacă $BN = CM$, atunci $BD = CE$, iar $EDCB$ este trapez isoscel. Prin urmare $AB = DC = EB = AC$. Deci $\triangle ABC$ este isoscel.



8.2 Observăm că pentru oricare 4 numere consecutive avem: $k-(k+1)-(k+2)+(k+3)=0$. Iar $2016=4\cdot 504$ poate fi împărţit în 504 grupe a câte 4 numere consecutive, iar fiecare grupă are valoarea 0. Deci putem înlocui toate $\bullet$ cu $+$ sau $-$ astfel încât suma sa fie 0.

8.3 Observăm că p, q au aceiaşi paritate. Dacă $p, q \geq 3$, atunci p, q sunt impare. Notăm $p=2k+1$ şi $q=2l+1$, $\Longrightarrow$

$$p^2+q^2=4\cdot(504-x) \Longleftrightarrow (2k+1)^2+(2l+1)^2=4\cdot(504-x) \Longleftrightarrow$$

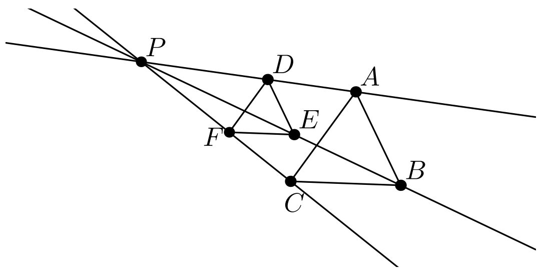
$$4(k^2+k+l^2+l)+2=4\cdot(504-x)$$

Însă partea dreaptă se divide la 4, iar partea stangă nu, prin urmare $p.q$ nu pot fi ambele impare. Dacă p, q pare, atunci $p=q=2 \Longrightarrow 2^2+2^2+4x=2016$, iar $x=502$. Prin urmare $(p,q,x)=(2,2,502)$

8.4 Fie CF intersectează AD în P, iar BE intersectează AD, în P', v-om demonstra că $P \equiv P'$. Din asemanarea triunghiurilor avem $\dfrac{PD}{PA}=\dfrac{DF}{AC}=\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{P'D}{P'A}$. Deci

$$\frac{PA}{PD}=\frac{P'A}{P'D} \Longleftrightarrow \frac{DA}{PD}=\frac{DA}{P'D} \Longleftrightarrow PD=P'D \Longleftrightarrow P=P'.$$

Deci FC, BE şi AD sunt toate concurente în P.



8.5 Punem $x = 4$ în (ii), rezultă: $f(3) + f(4) + f(5) = 0 \Rightarrow$, aplicând (i) rezultă:

$$f(3) + f(3) = 0 \Rightarrow f(3) = 0. \text{ Fie } f(4) = a, \text{atunci } f(5) = -a.$$

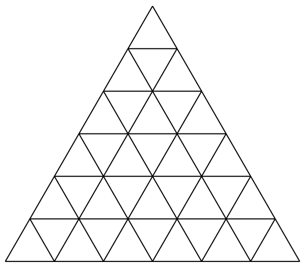
Din $(ii) \Rightarrow f(n+1) = -f(n) - f(n-1)$ rezultă $f(6) = 0,\ f(7) = a,\ f(8) = -a.$ Prin inducţie rezultă:

$$f(3k) = 0,\ f(3k+1) = a,\ f(3k+2) = -a.$$

Prin urmare $f(2016) = f(3 \cdot 672) = 0.$

8.6 Împarţim triunghiul cu latura 1 în 36 de triunghiuri mai mici, cu latura $\frac{1}{6}$ ca în desenul alăturat. Din principiul cutiei, avem 37 de puncte în 36 de triughiuri mici, deci va exista un triunghi mic cu cel puţin 2 puncte A şi B în el. Prin urmare distanţa dintre aceste 2 puncte va fi cel mult egală cu latura triungiului:

$$d_{AB} \leq \frac{1}{6} = 0,1(6).$$



8.7 Avem prin inducţie:

$$(x_2 = 2x_1),\ (x_3 = 2x_2 = 2^2x_1),\ ...,\ (x_{2016} = 2x_{2015} = ... = 2^{2015}x_1) \Longrightarrow$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{2016} = x_1 + 2^1x_1 + 2^2x_1 + ... + 2^{2015}x_1 =$$
$$= x_1(1 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{2015}),\ \text{iar}$$

$$1 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{2015} = (1 + 1 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{2015}) - 1 = 2^{2016} - 1,\ \text{deci}$$

$$1 = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{2016} = x_1 \cdot (2^{2016} - 1) \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{1}{2^{2016} - 1}}$$

10

Anul 2017

10.1 Clasa 5

5.1 Aflaţi cifrele nenule x şi y pentru care are loc relaţia:

$$\overline{xx} - \overline{yy} = x + y.$$

5.2 (a). Completaţi căsuţele de mai jos:

$$\begin{array}{ccccc} \square & + & \square & = 7 \\ - & & - & \\ \square & - & \square & = 1 \\ =2 & & =0 & \end{array}$$

(b). Avem numărul $A = 2001200220032004...2999$. Să se afle a $2017 - a$ cifră a numărului dat.

5.3 Erau 100 de baieţi şi 100 de fete. Ei s-au împerecheat fată cu băiat şi au plecat în pădure la cules ciuperci. Se ştie că în fiecare pereche sau băiatul a cules de 5 ori mai mult decât fata, sau fata a cules de 5 ori mai mult decât băiatul. Demonstraţi că numărul total de ciuperci culese nu poate fi 2017.

5.4 Rebeca, Monica şi Alexa au fiecare câte o carte, dintre care, o carte e albă, una e neagră şi una e gri. Se ştie că din următoarele afirmaţii, 2 sunt adevărate şi una este falsă:

1. Alexa are cartea neagră şi Rebeca nu are cartea gri
2. Monica are cartea neagră
3. Rebeca are cartea albă şi Monica nu are cartea neagră.

Aflaţi cine şi ce carte are.

10.2 Clasa 6

6.1 Avem un lac de formă dreptunghiulară de dimensiunile 37×27 m. Pe suprafaţa lui plutesc 1000 de nuferi. Demonstraţi că cel puţin 2 nuferi se află pe un $1m^2$.
6.2 Poate oare numărul $2016^{2017} + 2017^{2016}$ fi pătrat perfect?
6.3 Aflaţi $n \in \mathbb{N}$ pentru care are loc relaţia:

$$\sqrt{\frac{40n + 1993}{5n - 3}} \in \mathbb{N}$$

6.4 Pe 2017 fişe sunt scrise numerele $1, 2, 3, 4, ..., 2017$, apoi fişele sunt amestecate şi puse cu partea curată (care nu are număr scris pe ea) în sus. Pe părţile curate sunt iaraşi scrise numerele $1, 2, 3, 4, ..., 2017$. Pentru orice fişă adunăm cele două numere scrise pe ea. Apoi înmulţim cele 2017 sume formate. Demonstraţi că produsul lor este par.

10.3 Clasa 7

7.1 Adăugaţi la dreapta numărului 2017 trei cifre astfel încât numărul obţinut să se dividă cu $7, 8, 9$.
7.2 Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Demonstraţi inegalitatea:

$$16ab \cdot (1 - 3ab) \leq (1 + a^2) \cdot (1 + b^2).$$

7.3 În exteriorul triunghiului ABC sunt construite triunghiurile echilaterale ABD şi ACE. Fie M, N, P mijloacele laturilor DB, BC, CE respectiv. Demonstraţi că triunghiul MNP este isoscel.
7.4 Un grup de copii la gradiniţă s-au aliniat într-o coloană câte doi. În fiecare din cele 2 coloane formate numărul de baieţi este egal cu numărul de fete. Totodată, numărul de perechi în care au stat un băiat şi o fată este egal cu numărul celorlalte perechi. Demonstraţi că numărul de copii în grup se divide cu 8.
7.5 Dintre numerele naturale de la 1 până la 100 s-au şters k numere. Putem oare găsi printre numerele rămase, k numere distincte cu suma 100, dacă:
$a)$ $k = 9$
$b)$ $k = 8$
7.6 Un trapez $ABCD$ cu bazele AD şi BC este astfel încât $AB = BD$. Fie M mijlocul segmentului DC. Demonstraţi că $\angle MBC = \angle BCA$.

10.4 Clasa 8

8.1 Fie ABC un triunghi isoscel cu baza BC. Pe arcul mic AB al cercului circumscris triunghiului dat se ia un punct D. Pe prelungirea laturii AD după D, se ia punctul E astfel încât A şi E se află pe acelaşi semiplan determinat de dreapta BC. Cercul circumscris triunghiului BDE intersectează latura AB în F. Demonstraţi că $EF \parallel BC$.
8.2 Fie numerele $a, b \in \mathbb{Q}$, ce satisfac egalitatea:

$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0.$$

Demonstraţi că numărul $1 - ab$ este pătratul unui număr rational.
8.3 Demonstraţi că există o infinitate de numere $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ ce satisfac relaţia:

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = z^2 + 1.$$

8.4 Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$, rezolvaţi ecuaţia:

$$x^2 - y^2 + 3x - 2y + 4 = 0.$$

8.5 Avem dat un triunghi. Fie S o mulţime de 10 drepte în planul acestui triunghi, cu proprietatea că oricare două drepte nu sunt paralele şi fiecare dreaptă este egal departată de două vârfuri ale triunghiului dat. Demonstraţi că în S există minim 3 drepte concurente.
8.6 Putem oare împărţi numerele $1, 2, ..., 33$ în 11 grupe a câte trei numere fiecare astfel încât în fiecare grupă să existe un număr care este egal cu suma celorlalte două?

2017 Soluţii

10.5 Clasa 5 Soluţii

5.1 Ecuaţia se rescrie ca:

$$\overline{xx} - \overline{yy} = 10x + x - (10y + y) = 11x - 11y \Rightarrow x + y = 11x - 11y$$

$$10x = 12y \Leftrightarrow 5x = 6y$$

Deoarece x, y sunt numere cu o singură cifră, rezultă $x = 6$ şi $y = 5$.
5.2 (a). Fie soluţia (a, b, c, d):

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{a} & + & \boxed{b} & = 7 \\ - & & - & \\ \boxed{c} & - & \boxed{d} & = 1 \\ = & & = & \\ 2 & & 0 & \end{array}$$

Avem $b - d = 0$ deci $b = d$, şi deci $c - b = c - d = 1$. Iar adunând $a + b = 7$ şi $c - b = 1$, rezultă $a + c = 8$ $(*)$. Însă $a - c = 2$ $(**)$. Adunăm $(*)$ şi $(**)$ şi obţinem $2a = 10 \Rightarrow \boxed{a = 5}$. Iar din $(**)$ avem $c = a - 2 \Rightarrow \boxed{c = 3}$. Iar din $a + b = 7 \Rightarrow b = 7 - a$, deci $\boxed{b = d = 2}$.
Răspuns: $(a, b, c, d) = (5, 2, 3, 2)$.

(b). Fie a 2017 – a cifră x. Observăm că putem împărţi cifrele lui A în grupe de câte 4, şi ele sunt de la 2001 până la 2999. Respectiv $2017 \div 4 = 504$, mod 1, deci înainte de x sunt exact 504 grupe, iar x este primul element din grupa 505. Cum toate grupele se încep cu cifra 2, $x = 2$.

5.3 În fiecare pereche o persoană culege x ciuperci, iar alta $5x$ ciuperci, iar în total $6x$ ciuperci. Prin urmare fiecare pereche culege un multiplu de 6, deci şi suma tuturor ciupercilor culese se divide la 6, dar 2017 nu se divide la 6.

5.4 Dacă (2) ar fi adevărată, atunci Monica are cartea neagră, şi atunci (1) este falsă deoarece spune că Alexa are cartea neagră, şi (3) la fel este falsă deoarece spune că Monica nu are cartea neagră. Şi în final am obţine că $(1), (3)$ sunt false, însă din condiţie cunoaştem că doar o afirmaţie e falsă, deci presupunerea iniţială că *"(2) ar fi adevărata"* este falsă. Deci (2) este falsă, şi prin urmare $(1), (3)$ sunt adevărate. Dacă (1) adevărat, atunci *Alexa – cartea neagră*, Rebeca nu are cartea gri, deci *Rebeca – cartea albă*, şi deci *Monica – cartea gri*. Atunci (2) este fals, deoarece Monica nu are cartea neagră. Iar (3) este adevărată deoarece Rebeca are alb, iar Monica nu are negru.
Deci avem unica soluţie: *Alexa – negru*, *Rebeca – alb*, şi *Monica – gri*.

10.6 Clasa 6 Soluţii

6.1 Împărţim lacul, ca un tabel, cu linii verticale şi orizontale în pătrăţele cu latura $1m$. Obţinem în total $27 \cdot 37 = 999$ pătrăţele, dar avem în total 1000 de nuferi. Prin urmare se va găsi un pătrăţel care conţine 2 nuferi pe 1 m^2.

6.2 Nu poate. Fie $U(x)$ – ultima cifra a numărului x. Observaţi că un pătrat perfect va avea mereu $U(x^2) \in \{0, 1, 4, 9, 6, 5\}$. Acum $U(2016^{2017}) = U(6^{2017}) = 6$ (un număr ce se termină în 6 mereu va aveam ultima cifră 6 indiferent de putere). Iar:

$$U(2017^{2016}) = U(7^{2016}) = U((7^4)^{504}) = U(2401^{504}) = U(1^{504}) = 1.$$

Prin urmare:

$$U(2016^{2017}+2017^{2016})=U(6+1)=7\notin\{0,1,4,9,6,5\}.$$

Deci numărul nu poate fi pătrat perfect.
6.3
$$\frac{40n+1993}{5n-3}=\frac{8(5n-3)+24+1993}{5n-3}=8+\frac{2017}{5n-3}\in\mathbb{N}$$

Deci $5n-3\mid 2017$, iar 2017 este *prim*, prin urmare $5n-3=1$ nu are soluţii, sau $5n-3=2017\Rightarrow n=404$. Atunci:

$$\sqrt{\frac{40n+1993}{5n-3}}=\sqrt{8+\frac{2017}{5n-3}}=\sqrt{8+\frac{2017}{2017}}=\sqrt{9}=3\in\mathbb{N}\Rightarrow\boxed{n=404}.$$

6.4 Presupunem că produsul este impar. Prin urmare toţi 2017 factori din produs sunt impari. Rezultă că pentru orice fişă, suma celor 2 numere scrise pe ea este impară, deci numerele au parităţi diferite. Deci fiecare fişă conţine 1 număr par şi 1 număr impar, iar în total 2017 numere pare şi 2017 impare. Însă setul $\{1,2,3,...,2017,1,2,3,...,2017\}$ conţine 2018 numere impare şi 2016 pare. Contradicţie.

10.7 Clasa 7 Soluţii

7.1 Deoarece $7,8,9$ sunt reciproc prime atunci numărul căutat divide şi produsul lor $7\cdot8\cdot9=504$. Atunci căutăm toate numerele $\overline{abc}$ astfel încât:

$$\overline{2017abc}\,\vdots\,504\iff 2016000+\overline{1abc}\,\vdots\,504\iff\overline{1abc}\,\vdots\,504,\ (\text{deoarece } 2016=4\cdot504),$$

prin urmare căutăm toate numerele $\overline{1abc}$ de 4 cifre care încep cu 1 şi sunt multiple de 504. Observăm că doar: $504\cdot2=1008$ şi $504\cdot3=1512$ satisfac condiţiile, deci ultimile 3 cifre sunt: $\overline{abc}\in\{008,512\}$.
7.2 Inegalitatea se rescrie ca:

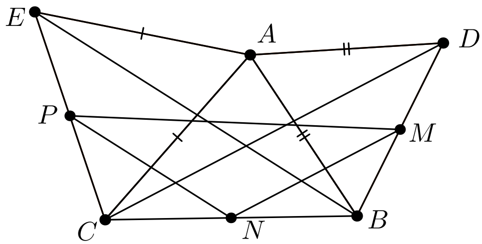
$$16ab(1-3ab)\leq(1+a^2)(1+b^2)\iff 16ab-48a^2b^2\leq a^2b^2+1+a^2+b^2\iff$$

$$(49a^2b^2-14ab+1)+(a^2-2ab+b^2)\geq0\iff(7ab-1)^2+(a-b)^2\geq0.$$

Iar ultima inegalitatea este evidentă.
7.3 Întrucât $AD=AB$, $AC=AE$ şi $\angle DAC=\angle A+60^\circ=\angle BAE$, după criteriul LUL avem că $\triangle DAC\equiv\triangle BAE$, aceste 2 triunghiuri sunt o rotaţie

cu $60°$ în jurul lui A. Prin urmare $DC = BE$. Iar NM şi NP sunt linii mijlocii în $\triangle DBC$ şi $\triangle ECB \Rightarrow$

$$NM = \frac{CD}{2} = \frac{BE}{2} = NP \Longrightarrow \triangle MNP \text{ este isoscel.}$$



7.4 Deoarece în fiecare coloană numărul de băieţi este egal cu numărul de fete, atunci numărul total de băieţi în grup este egal cu numărul total de fete. Acum fie numărul de perechi în care au stat un băiat şi o fată y, numărul de perechi în care au stat 2 băieţi b, şi numărul de perechi în care au stat 2 fete f. Cunoaştem $y = f + b$ (numărul de perechi cu un băiat şi o fată este egal cu numărul celorlalte perechi). Atunci, deoarece numărul total de baieţi în grup $(y + 2b)$ este egal cu numărul total de fete $(y + 2f)$, rezultă că $f = b$. Şi deci numărul total de perechi este

$$y + f + b = (f + b) + f + b = b + b + b + b = 4b.$$

Iar $4b$ perechi conţin $8b$ copii, un numar ce se divide cu 8.

7.5 a) Nu neapărat. Daca ştergem primele 9 numere $\{1, 2, 3, ..., 9\}$, atunci chiar şi suma celor mai mici 9 numere rămase $10 + 11 + 12 + 13 + ... + 18 = 126 > 100$.

b) Da, putem mereu. Alegem 12 perechi de numere fiecare cu suma 25: $\{(1, 24), (2, 23), (3, 22), ..., (12, 13)\}$. Indiferent care 8 numere sunt şterse, putem găsi cel puţin 4 perechi din cele 12 din care nu a fost şters nici un număr. Iar suma acestor 4 perechi va fi $4 \cdot 25 = 100$.

7.6 Fie $P = BM \cap AD$. Atunci deoarece $BC \parallel PD \Rightarrow \triangle MBC \sim \triangle MPD$ (întrucât BP şi CD formează perechi de unghiuri egale). Iar din M mijlocul CD rezultă:

$$MC = MD,\ \triangle MBC \sim \triangle MPD \longrightarrow \triangle MBC \equiv \triangle MPD \Longrightarrow MB = MP \Longrightarrow$$

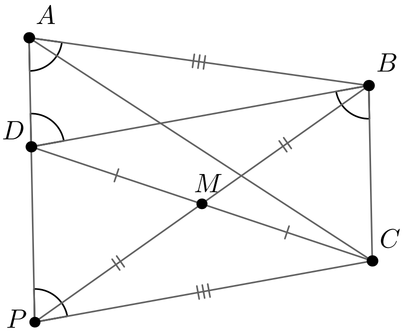
$$BCPD \text{ paralelogram } \Longrightarrow \angle \boldsymbol{CPA} \overset{(1)}{\equiv} \angle CBD \overset{(2)}{\equiv} \angle BDA \overset{(3)}{\equiv}$$

$$\equiv \angle \boldsymbol{BAP} \Longrightarrow ABCP \text{ trapez isoscel,}$$

(1) deoarece $BCPD$ paralelogram, (2) deoarece $BC \parallel AD$, (3) deoarece $BA = BD$. Iar din:

$$ABCP \text{ trapez isoscel} \Longrightarrow \angle ABC \equiv \angle PCB,\ AB = PC \Longrightarrow \triangle BCA \equiv$$

$$\equiv \triangle CBP \Longrightarrow \angle \boldsymbol{MBC} \equiv \angle \boldsymbol{BCA}.$$

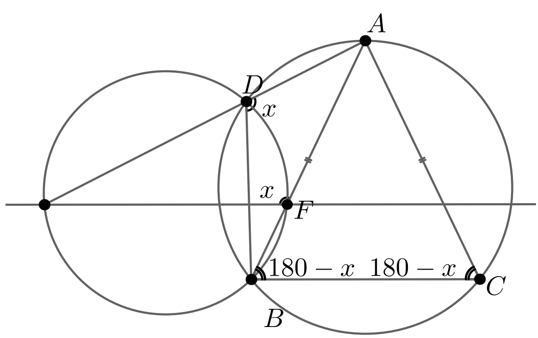


10.8 Clasa 8 Soluţii

8.1 Pentru a demonstra că $EF \parallel BC$ demonstrăm că $\angle AFE \equiv 180° - \angle ABC$. Dar:

$$\angle AFE \equiv 180° - \angle BDE \equiv \angle BDA \equiv \angle 180° - \angle BCA \equiv \angle 180° - \angle ABC$$

Prima egalitate rezultă din faptul că patrulaterul $FBDE$ inscriptibil, a treia din faptul că $ABDC$ inscriptibil, şi ultima din faptul că $\triangle ABC$ isoscel în A.



8.2 Egalitatea se rescrie ca:

$$ab(a^2+b^2+2ab)+2(a+b)+1 = ab(a+b)^2+2(a+b)+1 = 0$$

Notăm $a+b=x$, rezultă:

$$abx^2+2x+1=0 \Rightarrow ab = -\Big(\frac{1+2x}{x^2}\Big) \Rightarrow$$

$$1-ab = 1+\frac{1+2x}{x^2} = \frac{1+2x+x^2}{x^2} = \frac{(x+1)^2}{x^2} = \Big(\frac{a+b+1}{a+b}\Big)^2.$$

8.3 Deschidem parantezele şi obţinem:

$$x^2+y^2+x^2y^2+1 = z^2+1 \iff x^2+x^2y^2 = z^2-y^2 \iff x^2(y^2+1) = (z+y)(z-y)$$

Încercăm: $x^2 = z+y$ şi $y^2+1 = z-y \Leftrightarrow z = y^2+y+1$, atunci:

$$x^2 = z+y = y^2+2y+1 = (y+1)^2 \ \Rightarrow \ x = y+1$$

Deci obţinem o infinitate de soluţii de forma $(x,y,z) = (y+1,\ y,\ y^2+y+1)$ în numere naturale.

8.4 Prin completarea pătratelor ecuaţia se rescrie ca:

$$x^2+3x+\Big(\frac{3}{2}\Big)^2-\Big(\frac{3}{2}\Big)^2-y^2-2y-1+1+4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Big(x+\frac{3}{2}\Big)^2-\frac{9}{4}-(y+1)^2+1+4=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{11}{4} = (y+1)^2-\Big(x+\frac{3}{2}\Big)^2 = \Big(y+1-x-\frac{3}{2}\Big)\Big(y+1+x+\frac{3}{2}\Big) \Leftrightarrow$$

$$11 = (2y-2x-1)(2y+2x+5)$$

Acum deoarece x,y întregi pozitive, rezultă $(2y+2x+5)$ pozitiv, deci şi $(2y-2x-1)$ pozitiv. Iar $2y+2x+5 > 2y-2x-1$, deci unica soluţie $2y+2x+5 = 11$ şi $2y-2x-1 = 1$, de unde rezultă $x=1, y=2$.

8.5 Observăm că o dreaptă l este egal departată de 2 puncte M, N doar dacă $l \parallel MN$ sau l trece prin mijlocul MN. Acum fie dat $\triangle ABC$, avem *10 drepte* şi *3 perechi* de 2 vârfuri $\{(A,B);(B,C);(C,A)\}$. Atunci din pricipiul cutiei va exista *o pereche* de vârfuri fie A,B care va avea *4 drepte* egal depărtate de A,B. Întrucât doar o dreaptâ poate fi paralelâ la AB, rezultâ câ celelalte 3 drepte trec prin mijlocul AB, deci avem 3 drepte concurente.

Sol 8.6 Nu. Presupunem că putem, atunci fiecare grupă conţine 3 numere de forma $a+b=c$. Prin urmare suma din fiecare grupă este pară $a+b+c=2c$, deci şi suma tuturor 33 de numere este pară, însă $1+2+3+...+33 = \frac{33\cdot(33+1)}{2} = 33\cdot 17 = 561$ impară, contradicţie.

11

Anul 2018

11.1 Clasa 5

5.1 Iniţial, numărul 1 este scris pe tablă. Sunt permise următoarele operaţii: să înmulţim numărul cu 3 sau să rearanjăm cifrele numărului. Este posibil ca după câteva asemenea operaţii să obţinem numărul 999?
5.2 Determinaţi numerele de forma $\overline{abc}$ care verifică relaţia:

$$b \cdot \overline{ac} = c \cdot \overline{ab} + 10$$

.
5.3 Distanţa dintre două localităţi aflate pe malul unui râu este de 60 km. Două corăbii se pornesc simultan, cu aceeaşi viteză, din cele două localităţi, una în întâmpinarea alteia. Dacă ele se întâlnesc după 2 ore şi raportul vitezelor pe înaintare este egal cu 2, găsiţi viteza apei.
5.4 Se dau două grămezi de pietre. Într-una se află 30 de pietre, iar în cealaltă - 20 de pietre. La o mişcare se pot lua oricâte pietre din una şi aceeaşi grămadă. Pierde cel ce nu mai poate muta. Cine pierde?

11.2 Clasa 6

6.1 La un concurs de matematică, la care participă 50 de elevi, se oferă spre rezolvare 3 probleme. Ştiind că fiecare elev a rezolvat cel puţin o problemă şi că numărul de soluţii corecte ale tuturor concurenţilor este 100, arătaţi că

numărul celor care au rezolvat corect toate cele trei probleme este cel mult 25.
6.2 Fie a, b, c numere raţionale pozitive astfel încât $a + 2b, b + 2c, c + 2a$ sunt direct proporţionale cu c, a, b. Demonstraţi că $a = b = c$.
6.3 Două numere naturale x şi y au proprietatea că $\frac{2016}{2017} < \frac{x}{y} < \frac{2017}{2018}$. Determinaţi valoarea minimă a sumei $x + y$.
6.4 Într-o cutie sunt 2018 bile. Doi copii extrag, pe rând, cel puţin 10 bile şi cel mult 49 de bile. Câştigă cel care scoate ultimul bile din cutie. Cum trebuie să procedeze primul copil pentru a fi sigur că este câştigător?

11.3 Clasa 7

7.1 Numerele reale a şi b satisfac relaţia $a + \frac{b^2}{a} = b + \frac{a^2}{b}$. Este neapărat ca numerele să fie egale?
7.2 Pe o fâşie de lungime infinită sunt scrise în ordine crescătoare toate numerele cu suma cifrelor 2018. Ce număr se află pe poziţia 225?
7.3 Avem două segmente paralele, care nu sunt egale. Utilizând doar o riglă negradată, împărţiţi unul dintre segmentele date în 8 părţi egale.
7.4 Fie a, b, c trei numere reale. Demonstraţi inegalitatea

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq \frac{3}{4}(b - c)^2.$$

7.5 În interiorul paralelogramului $ABCD$ este luat un punct E astfel încât $AE = DE$ şi $\angle ABE = 90°$. Punctul M este mijlocul segmentului BC. Determinaţi măsura unghiului $\angle DME$.
7.6 Pe un cerc sunt scrise 2017 numere naturale. Dacă numerele a, b sunt vecine, atunci diferenţa $a - b$ este egală cu 1 sau 2, sau $\frac{a}{b} = 2$. Demonstraţi că printre numerele scrise există un număr care este divizibil cu 3.

11.4 Clasa 8

8.1 Pe o fâşie de lungime infinită sunt scrise în ordine crescătoare toate numerele cu suma cifrelor 2018. Ce număr se află pe poziţia 225?

8.2 Este posibil să reprezentăm numărul 11^{2018} ca suma a două cuburi perfecte de numere naturale?
8.3 Pe cercul circumscris al triunghiului ABC se ia un punct $A^{'}$ pentru care $AA^{'} \parallel BC$. Notăm cu G centrul de greutate al triunghiului ABC. Fie H_A piciorul perpendicularei din A pe dreaptă BC. Arătaţi că punctele H_A, G si $A^{'}$ sunt coliniare.
8.4 Fie numerele $x, y \geq 0$. Demonstraţi că $x^2 + xy + y^2 \leq 3 \cdot (x - \sqrt{xy} + y)^2$.
8.5 Fie ABC un triunghi scalen ascuţitunghic cu circumcentrul O. Luăm M mijlocul lui BC şi notăm cu N a doua intersecţie a dreptei AM cu cercul circumscris al $\triangle ABC$. Punctul de intersecţie al dreptei BC cu tangenta din A la cercul circumscris $\triangle ABC$ este D. În final, fie X un punct pentru care patrulaterul $ADMX$ este paralelogram. Demonstraţi că $\triangle XAN$ este isoscel.
8.6 În plan sunt date câteva puncte, fiecare fiind colorat cu una din culorile galben, albastru sau verde. Pe orice segment care uneşte 2 puncte de aceeaşi culoare, nu există puncte colorate la fel, dar există cel puţin un punct de culoare diferită. Care este cel mai mare număr de puncte posibil?

2018 Soluţii

11.5 Clasa 5 Soluţii

5.1 Putem să vedem dacă am putea după câteva operaţii sa ajungem de la 999 la 1, împărţind numărul la 3, sau rearanjând cifrele numărului de pe tablă.
Este evident că dacă rearanjăm cifrele lui 999 obţinem tot 999, deci trebuie neapărat să îl împărţim la 3. Acum pe tablă este scris 333. Deasemenea dacă rearanjăm cifrele tot 333 obţinem deci trebuie sa îl împărţim din nou la 3.
Acum pe tablă este 111. Analog trebuie să îl împărţim la 3, şi obţinem numărul 37.
Numărul 37 nu este divizibil cu 3, şi nici 73 nu este, deci nu putem ajunge de la 999 la 1 folosind împartirea numărului la 3 şi rearanjarea cifrelor numărului, deci respectiv nu putem ajunge nici de la 1 la 999, folosind înmultirea cu 3 şi rearanjarea cifrelor, deci răspunsul este **Nu**.
5.2 Deoarece $\overline{ac} = 10a + c$ şi $\overline{ab} = 10a + b$ ecuaţia se mai poate scrie şi sub forma:

$$b(10a + c) = c(10a + b) + 10$$

sau

$$10ab + bc = 10ac + bc + 10$$

Simplificând bc, iar apoi împărţind ambele părţi la 10 obţinem că:

$$ab = ac + 1$$

Trecând ac în partea stângă a ecuaţiei obţinem că $a(b - c) = 1$, şi evident deoarece a, b, c sunt cifre de la 0 până la 9 singurele soluţii ale ecuaţiei sunt $a = 1$ şi $b - c = 1$, adică

$$\overline{abc} \in \{121, 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198\}$$

5.3 Deoarece distanţa dintre localităţi este de 60 de kilometrii şi corăbiile merg 2 ore, viteza totală cu care corăbiile se apropie este egală cu $\frac{60km}{2h} = 30\frac{km}{h}$. Deoarece raportul vitezelor de înaintare este egal cu 2 putem scrie că $\frac{v + v_{apa}}{v - v_{apa}} = 2 \Rightarrow v + v_{apa} = 2v - 2v_{apa} \Rightarrow v = 3v_{apa}$. Viteza cu care se apropie cele 2 corăbii una de alta este egală cu $(v - v_{apa}) + (v + v_{apa}) = 2v = 30\frac{km}{h} \Rightarrow v = 15\frac{km}{h}$, iar $v_{apa} = \frac{v}{3} = \frac{15km}{3h} = 5km/h$

5.4 Răspuns: al doilea (Primul are o strategie care îi garantează câştigul) Strategia este următoarea: în primul rând acesta egalează numărul de pietre din ambele grămezi, adică scoate din prima grămada 10 pietre. Acum vine rândul celui de-al doilea jucator. Dacă el scoate dintr-o grămadă x pietre strategia primului jucător este să scoată din cealaltă grămadă deasemenea x pietre astfel egalând numarul de pietre din ambele grămezi. Şi respectiv va fi un moment în care al doilea jucător va scoate toate pietrile rămase într-o grămada, şi respectiv primul jucător va scoate toate pietrele rămase în cealaltă grămadă, şi astfel el va câştiga jocul.

11.6 Clasa 6 Soluţii

6.1 Deoarece fiecare elev a rezolvat cel puţin o problemă, numărul soluţiilor totale rămase înafară de cele 50 trimise pentru a rezolva o problemă este $100 - 50 = 50$. Acum avem 50 de soluţii pe care trebuie să le distribuim cum vrem noi astfel încât numărul de elevi care au rezolvat 3 probleme este maxim. Deoarece deja fiecare elev are o soluţie corectă, mai convenabil pentru noi este să începem de la primul şi să adaugăm câte 2 soluţii drepte la fiecare pentru a face maxim numărul de elevi cu 3 probleme rezolvate. Deoarece fiecare elev mai are nevoie de 2 probleme rezolvate numărul maxim va fi $\dfrac{50}{2} = 25$ elevi.

6.2 Deoarece $a+2b$ este direct proporţional cu c, $b+2c$ este direct proporţional cu a, iar $c+2a$ este direct proporţional cu b putem scrie următoarea relaţie:

$$\frac{a+2b}{c} = \frac{b+2c}{a} = \frac{c+2a}{b} = const.$$

Din cauza faptului că $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = \dfrac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$, putem să deducem faptul că:

$$\frac{a+2b}{c} = \frac{b+2c}{a} = \frac{c+2a}{b} =$$

$$= \frac{(a+2b)+(b+2c)}{a+c} = \frac{(a+2b)+(b+2c)+(c+2a)}{a+b+c} = 3$$

adică:

$$a+2b = 3c$$

$$b+2c = 3a$$

$$c+2a = 3b.$$

Din prima ecuaţie obţinem că $c = \dfrac{a+2b}{3}$. Înlocuind c cu $\dfrac{a+2b}{3}$ în a 3 ecuatie obţinem că:

$$\frac{a+2b}{3} + 2a = 3b \Rightarrow 7a + 2b = 9b \Rightarrow a = b.$$

Analog obţinem că $a = b = c$.

6.3 Dacă inversăm fracţiile avem: $\frac{2017}{2016} > \frac{y}{x} > \frac{2018}{2017} > 1$. Prin urmare $y > x$, deci fie $y = x + k$, unde k este un număr natural pozitiv. Atunci sistemul se reduce la:

$$1+\frac{1}{2016} > 1+\frac{k}{x} > 1+\frac{1}{2017} \iff \frac{1}{2016} > \frac{k}{x} > \frac{1}{2017} \iff 2017k > x > 2016k.$$

Acum deoarece x, k sunt numere naturale pozitive, avem că $k \geq 2$, deoarece sistemul nu are soluţii pentru $k = 1$. Deci dorim valoarea minimă pentru $x+y = 2x+k > 2 \cdot 2016k + k = 4033k$. Pentru $k = 2$, avem $4034 > x > 4032$, sau $x = 4033$, iar $y = 4033 + 2 = 4035$. Prin urmare pentru $k = 2$, avem $x+y = 8068$. Dacă $k \geq 3$, observăm că $x+y > 4033k \geq 12099$. Deci valoarea minimă este 8068, pentru $x = 4033$ şi $y = 4035$.

6.4 Strategia primului copil este următoarea: mai întâi el scoate din cutie 12 bile, iar în urnă rămân 2006 de bile. Acum dacă al doilea jucător scoate x bile cu $10 \leq x \leq 49$, primul jucător la rândul lui va scoate $59 - x$ bile din cutie. Este garantat că $10 = 59 - 49 \leq 59 - x \leq 59 - 10 = 49$, adică primul jucător va putea scoate numărul necesar de bile din cutie. Acum deoarece la fiecare 2 numărul de bile se micşoreaza cu 59, iar 2006 este divizibil cu 59, după fiecare pas numărul de bile se va micşora cu 59 şi la sfarşit în cutie v-or rămâne 59 de bile, şi oricâte nu ar scoate al doilea jucător, primul îl poate completa şi poate scoate numărul necesar de bile.

11.7 Clasa 7 Soluţii

7.1 După ce trecem b în partea stângă şi $\frac{b^2}{a}$ în partea dreaptă obţinem că

$$a - b = \frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 - b^3}{ab} = \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{ab}.$$

Ultimul pas l-am obţinut deoarece $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. Iar acum presupunem că $a \neq b$ şi putem simplifica din ambele parţi $(a-b)$ deoarece acum $(a-b)$ este diferit de 0.

Deci $\frac{a^2+ab+b^2}{ab} = 1$ adică $a^2 + ab + b^2 = ab$ deci $a^2 + b^2 = 0$.

Dar deoarece $a \geq 0$ şi $b \geq 0$ singura soluţie este când $a = b = 0$, dar avem contrazicere cu presupunerea noastră deci răspunsul este că a şi b sunt mereu egale.

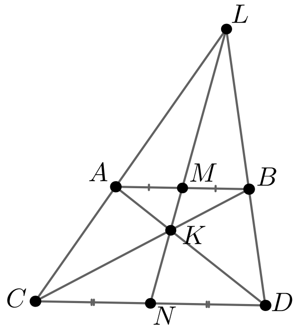
7.2 Este evident că cel mai mic număr care are suma cifrelor 2018 este un număr care are cât mai puţine cifre, adică conţine cât mai multe cifre de 9 în el. $2018 = 224 \cdot 9 + 2$. Deci cel mai mic număr care are suma cifrelor 2018 este $2\underbrace{999\cdots9}_{224}$. Al doilea cel mai mic număr număr de pe tablă va fi $38\underbrace{999\cdots99}_{223}$. Mai departe cele mai mici numere de pe tablă le v-om obţine cînd îl trecem pe 8 în dreapta, respectiv al 3 număr va fi $398\underbrace{999\cdots99}_{222}$ şi aşa mai departe. Respectiv al 225 număr de pe tablă va fi $3\underbrace{999\cdots99}_{223}8$.

7.3 Fie AB şi CD segmentele paralele, dacă $AB \neq CD$ atunci $ABDC$ este un trapez. Fie K intersecţia diagonalelor, iar L intersecţia laturilor neparalelele. Fie M şi N intersecţia lui LK cu AB şi CD. Atunci M şi N sunt mijloacele AB şi respective CD. Demonstraţie: fie AB se află între L şi CD, atunci din teorema lui Ceva în $\triangle LCD$ avem

$$1 = \frac{DB}{BL} \cdot \frac{LA}{AC} \cdot \frac{CN}{ND} = \frac{CN}{ND},$$

unde ultima egalitate are loc deoarece $\frac{LA}{AC} = \frac{LB}{LD}$ din $AB \parallel CD$. Prin urmare $CN = ND$. Iar

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AM/CN}{MB/ND} = \frac{LM/LN}{LM/LN} = 1.$$



Deci M si N sunt mijloacele segmentelor initiale. Repetând acest proces din nou de 2 ori putem împarţi fiecare jumătate în alte două jumătăţi, adică în 4 parţi egale. Efectuând procesul încă de 4 ori pe fiecare sfert de segment, v-om obţine 8 segmente egale.

7.4 Inegalitatea noastră este echivalentă cu

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 - 4ab - 4bc - 4ac \geq 3(b-c)^2 = 3b^2 + 3c^2 - 6bc$$

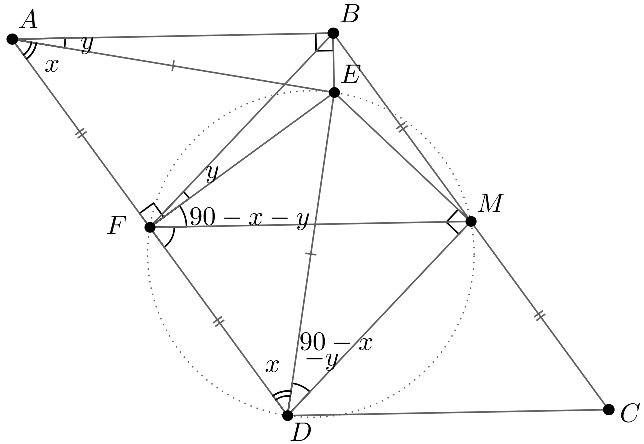
Dacă trecem totul în partea stângă ne rămâne să demonstrăm că

$$4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab - 4ac + 2bc \geq 0$$

Dar $4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab - 4ac + 2bc = (2a - b - c)^2$ care este evident, mereu mai mare sau egal ca 0, deci inegalitatea este demonstrată.

7.5 Fie F mijlocul segmentului AD, observaţi că $EF \perp AD$. În continuare v-om demonstra că patrulaterul $MEFD$ se află pe cerc şi prin urmare $\angle EMD = 180^\circ - \angle EFD = 90^\circ$. Pentru aceasta v-om demonstra că

$\angle EFM \equiv \angle EDM$. Acum fie $\angle EAF = x = \angle EDF$. Observaţi că $EBAF$ pe cerc cu diametrul AE. Deci fie $\angle BAE = y = \angle BFE$. Iar $BFDM$ şi $MFDC$ sunt paralelograme, prin urmare $\angle BAF = x + y = \angle MFD$. Deci $\angle MFE = 90^{\circ} - x - y$. Acum $\angle MDF = \angle BFA = \angle EFA - \angle EFB = 90 - y$. Prin urmare $\angle MDE = \angle MDF - \angle EDF = 90 - y - x$. Deci $EMDF$ inscriptibil cu diametrul ED, iar $\angle DME = 90^{\circ}$.



7.6 Fie $a_1, a_2, \cdots, a_{2017}$ cele 2017 numere consecutive pe cerc. Apoi înlocuim fiecare număr a_i cu b_i, restul împărţirii lui la 3. Prin urmare v-om obţine şirul $b_1, b_2, \cdots, b_{2017}$ cu $b_i \in \{0, 1, 2\}$, şi trebuie să demonstrăm că şirul v-a conţine cel puţin un 0. Presupunem că 0 nu este prezent în şir, deci $b_i \neq 0$, pentru orice $i \in \{1, 2, \cdots, 2017\}$. Dacă inspectăm puţin şirul observăm că nu putem avea 2 termeni consecutivi egali. Întradevăr, dacă $b_i = b_{i+1}$ unde $b_{2018} \equiv b_1$ se consideră acelaşi element, atunci diferenţa dintre numerele consecutive $a_i = 3k + b_i$ şi $a_{i+1} = 3l + b_{i+1}$ va fi un multiplu de 3 şi nu poate fi egală cu 1 sau 2. Prin urmare v-om avea $a_i = 2a_{i+1}$ sau $a_{i+1} = 2a_i$. Dacă $a_i = 2a_{i+1}$, obţinem

$$3k + b_i = 2(3l + b_{i+1}) \Longrightarrow b_{i+1} = 3(k - 2l) \notin \{1, 2\}.$$

Deci obţinem contradicţie deoarece $b = \{1, 2\}$ nu este multiplu de 3. Analog se obţine contradicţie şi în cazul $a_{i+1} = 2a_i$. Prin urmare oricare 2 termeni consecutivi avem $b_i \neq b_{i+1}$. Fară a pierde din generalitate fie $b_1 = 1$, cazul $b_1 = 2$ se rezolvă analog. Prin urmare şirul $b_1, b_2, \cdots, b_{2017}$ este de forma $1, 2, 1, 2, 1, \cdots, 1$. Atunci observaţi că $b_{2017} = 1 = b_1$, care sunt vecine pe cerc, prin urmare obţine contradicţie cu $b_i \neq b_{i+1}$. Prin urmare şirul b_i, va conţine cel puţin un 0, şi deci va exista cel puţin un multiplu de 3.

11.8 Clasa 8 Soluţii

8.1 Este evident că cel mai mic număr care are suma cifrelor 2018 este un număr care are cât mai puţine cifre, adică conţine cât mai multe cifre de 9 în el. $2018 = 224 \cdot 9 + 2$. Deci cel mai mic număr care are suma cifrelor 2018 este $2\underbrace{999\cdots 9}_{224}$. Al doilea cel mai mic număr de pe tablă va fi $38\underbrace{999\cdots 99}_{223}$. Mai departe cele mai mici numere de pe tablă le vom obţine cînd îl trecem pe 8 în dreapta respectiv al 3 număr va fi $398\underbrace{999\cdots 99}_{222}$ şi aşa mai departe. Respectiv al 225 număr de pe tablă va fi $3\underbrace{999\cdots 99}_{223}8$.

8.2 Nu este posibil. Dacă ar fi posibil am avea

$$11^{2018} = a^3 + b^3 = \underbrace{(a+b)}_{11^k}\underbrace{(a^2 - ab + b^2)}_{11^{2018-k}}.$$

Observaţi că $a + b \geq 2$ deci $k \geq 1$, iar $a^2 + b^2 - ab \geq 1$, deci $2018 - k \geq 1$. Acum fie $b = 11^k - a$. Atunci ecuaţia se rescrie ca

$$11^{2018} = 11^k(a^2 - a(a - 11^k) + (a - 11^k)^2) = 11^k(3a^2 - 3a11^k + 11^{2k}).$$

Prin urmare observaţi că $3a^2 - 3a11^k + 11^{2k} = 11^{2018-k} \vdots 11$ deci $\Longrightarrow 3a^2 \vdots 11 \Longrightarrow a \vdots 11 \Longrightarrow b = 11^k - a \vdots 11$. Deci fie $a = 11a_1$, si $b = 11b_1$, atunci ecuaţia devine

$$11^{2018} = 11^3(a_1^3 + b_1^3) \Longrightarrow 11^{2015} = a_1^3 + b_1^3.$$

Folosind aceeasi strategie din nou vom avea

$$a_1 = 11a_2, b_1 = 11b_2, \Longrightarrow 11^{2012} = a_2^3 + b_2^3.$$

Folosind aceast/2 strategie de 672 ori vom obţine

$$\begin{cases} a = 11a_1 = 11^2a_2 = \cdots = 11^{672}a_{672} = 11^{672}x \\ b = 11b_1 = 11^2b_2 = \cdots = 11^{672}b_{672} = 11^{672}y \end{cases}$$

Cu $x, y \geq 1$, prin urmare:

$$11^{2018} = 11^{672\cdot 3}(x^3 + y^3) \Longrightarrow 11^2 = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2).$$

Însa ambii factori în partea dreaptă sunt ≥ 1, prin urmare ambii factori sunt 11. Urmând aceeasi strategie vom obtine $11 \mid x$ si $11 \mid y$, însă aceasta este în contradicţie deoarece $11 \geq x, y \geq 1$. Prin urmare ecuaţia nu are soluţii, iar 11^{2018} nu poate fi scris ca suma de 2 cuburi perfecte.

8.3

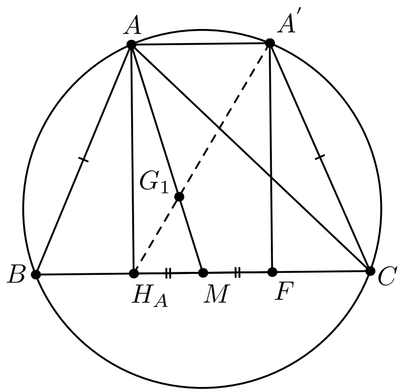
Fie M mijlocul segmentului BC, iar fie G_1 intersecţia segmentului AM cu segmentul $A^{'}H_A$. Vrem să demonstrăm că $G = G_1$. $AA^{'} \parallel BC$, deci $AA^{'}CB$ este un trapez inscriptibil deci este un trapez isoscel, adică $AB = A^{'}C$.

Fie F piciorul perpendicularei din $A^{'}$ pe BC. Deoarece $AA^{'}CB$ este un trapez isoscel $\Rightarrow M$ este mijlocul laturii H_AF, adică $H_AM = \dfrac{AA^{'}}{2}$.

$$\text{Deoarece } AA^{'} \parallel H_AM \Rightarrow \angle H_AMG_1 = \angle G_1AA^{'} \text{ şi } \angle G_1H_AM = \angle G_1A^{'}A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle AA^{'}G_1 \sim G_1H_AM.$$

Deci $\dfrac{G_1M}{G_1A} = \dfrac{1}{2}$, Dar singurul punct care împarte mediana în raportul $\dfrac{2}{1}$ este centrul de greutate al triunghiului respectiv deci $G = G_1$.



8.4 După deschiderea parantezelor şi simplificarea tuturor termenilor inegalitatea se reduce la:

$$x^2 + y^2 + 4xy - 3\sqrt{xy}(x + y) \geq 0.$$

Observăm că are loc egalitatea pentru $x = y$, deci încercăm să factorizăm expresia de mai sus astfel încât să scoatem $(x-y)$ în faţa parantezei. Încercăm:

$$(x - y)^2 + 6xy - 3\sqrt{xy}(x + y) = (x - y)^2 - 3\sqrt{xy}(x + y - 2\sqrt{xy}) =$$

$$= (x - y)^2 - 3\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0.$$

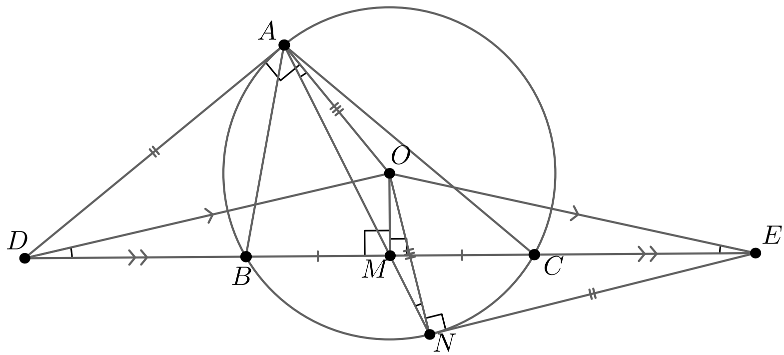
Deci inegalitatea se reduce la:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 - 3\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0.$$

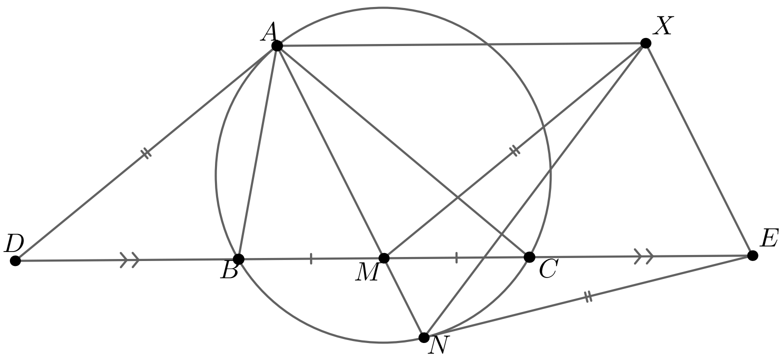
Deci am reuşit factorizarea, iar dacă $x \neq y$, simplificăm inegalitatea prin $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 > 0$, şi rămâne să demonstrăm:

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 - 3\sqrt{xy} \geq 0 \Longleftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + \sqrt{xy} \geq 0,$$

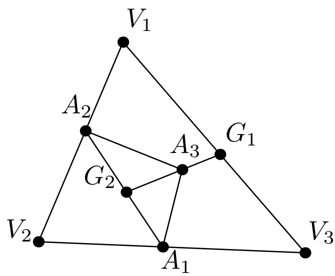
ceea ce este evident.
8.5 Lemmă: Fie $\triangle ABC$(cu $AB < AC$), şi punctul M - mijlocul laturii BC, iar punctul N este intersecţia dreptei AM cu cercul circumscris al $\triangle ABC$. Dacă ducem tangentele din A şi N la cercul $\odot ABC$, şi acestea intersectează BC în D şi E, atunci avem că $AD = NE$, şi $EC = AD$.
Demonstraţie : Fie O centrul cercului circumscris al $\triangle ABC$. Este evident că $OM \perp BC$, $ON \perp NE$ şi $OA \perp AD$. Din cauza faptului că $\angle OMD = \angle OAD = 90°$, obţinem că $OADM$ este un patrulater inscriptibil cu $\angle OAM = \angle ODM$. Analog $\angle OEM = \angle ONM$, dar deoarece $OA = ON$, obţinem că $\angle OAN = \angle ONA$, deci $\triangle ODE$ este isoscel, şi $DB = CE$. Din congruenţa $\triangle ADO$ şi $\triangle ONE$ avem că $AD = NE$, şi lemma este demonstrată.



Acum folosind această lemmă problema noastră este aproape rezolvată. Ducem tangenta din punctul N la cercul circumscris al $\triangle ABC$, şi fie E punctul de intersecţie a acesteia cu BC. Din cauza că $AXMD$ paralelogram obţinem că $AX = DM$ şi $AX \| DM$. De asemenea deoarece $AX = ME$ şi $AX \| ME$ avem că $AXME$ este un paralelgram, deci $MN \| XE$, iar $DA = MX = NE$, deci $MNEX$ este un trapez isoscel cu $NX = ME = AX$, deci $\triangle AXN$ este isoscel.

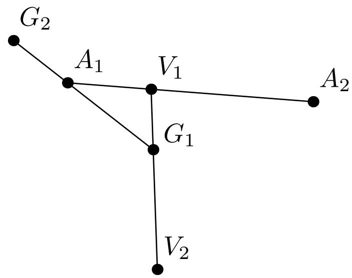


8.6 Răspuns corect: 6
Explicaţie: Presupunem că există 3 vârfuri de aceeaşi culoare. Fie luăm triunghiul monocolor(cu vârfurile de aceeaşi culoare) de arie minimă. Fără a pierde generalitatea presupunem că vârfurile acestuia au culoarea verde, şi notăm vârfurile prin V_1, V_2 şi respectiv, V_3. Iar acum, din condiţie fie luăm segmentele V_1V_2, V_2V_3 şi respectiv, V_1V_3. Pe aceste 3 segmente se află 3 puncte de culorile galben sau albastru. Din principiul cutiei există 2 puncte de aceeaşi culoare(nu pot exista 3 de aceeaşi culoare pentru că astfel triunghiul $V_1V_2V_3$ nu ar mai fi triunghiul monocolor cu aria minimă). Fără a pierde din generalitate putem presupune că această culoare este albastră. Deci punctele respective sunt A_1 şi respectiv A_2, şi al treilea punct este G_1 de culoarea galbenă. Pe segmentul A_1A_2 se află neapărat un punct, fie galben, sau verde, dar deoarece am spus că triunghiul $V_1V_2V_3$ este triunghiul monocolor cu arie minimă, înseamnă că pe segmentul A_1A_2 se află un punct galben.



Acum dacă luăm segmentul G_1G_2 pe el se află sau un punct albastru sau un punct verde. Dacă acest punct este albastru atunci aria triunghiului $A_1A_2A_3$ este mai mică decât aria triunghiului $V_1V_2V_3$ (contradicţie). Dacă acest punct este verde atunci analog obţinem că $V_1V_2V_3$ nu mai este triunghiul monocolor de arie minimă. Deci nu putem avea mai mult de 2 puncte de aceeaşi culoare.

Pentru 6 puncte (2 albastre, 2 galbene şi 2 verzi) putem da un exemplu care satisface condiţia noastră:



12

Anul 2019

12.1 Clasa 5

5.1 Dragoş a trimis soluţii la cele toate 50 de probleme care i-au fost propuse. Pentru o soluţie corectă acesta primeşte 40 de puncte, iar pentru una greşită el pierde 10 puncte. La sfârsit, Dragoş constată că a acumulat 0 puncte. La câte probleme Dragoş a răspuns corect şi la câte probleme a răspuns greşit?
5.2 Mai multe numere naturale consecutive sunt scrise în ordine crescătoare. Diferenţa dintre cel mai mare şi cel mai mic dintre aceste numere este 2019. Determinaţi suma celor mai mari 4 elemente ale şirului ştiind că suma celor mai mici 4 elemente este 54.
5.3 Într-o urnă sunt 100 de bile numerotate de la 1 la 100. Care este numărul minim de bile ce trebuie să le scoată Mihai din urnă, pentru ca să fie sigur că a scos cel puţin 2 bile a căror sumă, sau diferenţă se divide cu 5.
5.4 Un brutar, când s-a uitat în cămară, a observat că mai are în rezerva sa 1504 kilograme de făină şi 904 kilograme de zahăr. Brutarul a decis să coacă pâine şi prăjituri. O pâine este făcută din 3 kilograme de faină şi 1 kilogram de zahăr, iar o prăjitură din 4 kilograme de faină şi 4 kilograme de zahăr. După aceasta s-a uitat în cămara brutarul a observat că nu i-au mai rămas deloc rezerve. Aflaţi câte prăjituri a copt brutarul.
5.5 Numărul natural n se numeşte ş*mecher* dacă suma cifrelor lui este mai mare decât suma cifrelor numărului $n + 2$. Aflaţi suma tuturor numerelor ş*mechere* de la 1 pâna la 100.

12.2 Clasa 6

6.1 Valentin, încercând să sumeze fracţiile $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$, unde a, b, c şi d sunt numere diferite de 0, din greşeală, a efectuat înmulţirea. Însă, mai târziu, acesta a observat că a obţinut răspunsul corect. Aflaţi valoarea $\frac{b}{a} + \frac{d}{c}$.
6.2 Suma a 112 numere naturale distincte este 6327. Determinaţi produsul lor.
6.3 În şcoala lui Dumitru învaţă 16 clase care au fiecare între 19 şi 33 de elevi. Demonstraţi că există cel puţin 2 clase care au acelaşi număr de elevi.
6.4 Câte soluţii are ecuaţia $6 \cdot x^2 + 49 \cdot y^2 = 98784$ în mulţimea numerelor naturale şi care sunt acestea?
6.5 Fie $n \geq 3$ un număr natural. Arătaţi că numărul fracţiilor ireductibile din $\frac{1}{n}, \frac{2}{n} \ldots \frac{n-1}{n}$ este mereu par.

12.3 Clasa 7

7.1 Pe tablă sunt scrise câteva numere. Se ştie că pătratul oricărui număr scris este mai mare decât produsul oricăror alte 2 numere scrise. Care este numărul maxim de numere scrise pe tablă?
7.2 Punctul K este mijlocul ipotenuzei AB a triunghiului dreptunghic isoscel ABC. Punctele L şi M aparţin laturilor BC şi AC, respectiv astfel încât $BL = CM$. Demonstraţi că triunghiul LMK este deasemenea dreptunghic isoscel.
7.3 Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale sistemul:

$$\begin{cases} (x-1)(y-1)(z-1) = xyz - 1, \\ (x-2)(y-2)(z-2) = xyz - 2. \end{cases}$$

7.4 Am introdus 100 de mingi în 100 de cutii şi nu am pus toate mingile într-o singura cutie (dar este posibil ca unele cutii să fi rămas goale). Demonstraţi că există un număr natural k, cu $1 \leq k < 100$, astfel încât să putem alege k cutii care să conţină, împreună, exact k mingi.
7.5 În triunghiul ABC punctul I este centrul cercului înscris. Punctele M şi N sunt mijloacele laturilor AC şi BC. Se cunoaşte că $\angle AIN = 90°$. Arătaţi că $\angle BIM = 90°$.

12.4 Clasa 8

8.1 Există oare numere întregi a, b cu proprietatea că ecuaţia $\lfloor x^2 \rfloor + 2ax + b = 0$ are soluţii reale, însă ecuaţia $x^2 + 2ax + b = 0$ nu are? (Prin $\lfloor x \rfloor$ am notat partea întreagă a numarului x).
8.2 Fie x, y numere reale pozitive, diferite de zero. Demonstraţi că

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}.$$

8.3 Fie S o mulţime finită de puncte în plan astfel încât oricare trei puncte din S formează un triunghi dreptunghic. Determinaţi numărul maxim de elemente din S.
8.4 Fie P un punct arbitrar pe înălţimea BH a triunghiului ascuţitunghic ABC. Notăm cu C_1, A_1 mijloacele laturilor AB şi BC, respectiv. Perpendiculara din C_1 pe AP intersectează perpendiculara din A_1 pe CP în punctul K. Demonstraţi că K este situat pe mediatoarea laturii AC.
8.5 Arătaţi că orice număr natural poate fi reprezentat ca diferenţa a două numere naturale care au acelaşi număr de divizori primi.

12.5 Clasa 9

9.1 Fie x, y, z numere reale pozitive astfel încât $xyz \geq xy + yz + zx$. Demonstraţi că:

$$\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

.
9.2 Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia:

$$(x+1)^{2019} + (x+1)^{2018}(x-1) + (x+1)^{2017}(x-1)^2 + \ldots + (x-1)^{2019} = 0$$

.
9.3 Sunt date câteva numere naturale, consecutive, fiecare fiind colorat cu una din culorile albastru şi rosu (ambele culori sunt folosite). Este posibil ca suma celui mai mic multiplu comun al numerelor albastre şi celui mai mic multiplu comun al numerelor roşii să fie egală cu o putere de 2?
9.4 În triunghiul scalen ABC se construieşte bisectoarea BL. Mediana din B intersectază pentru a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC în punctul $D \neq B$. Prin centrul cercului circumscris triunghiului BDL se construieşte dreapta l, care este paralelă dreptei AC. Demonstraţi că l este tangenta cercului circumscris al triunghiului ABC.

9.5 Notăm cu $S(n)$ suma cifrelor numărului natural n. Există oare trei numere naturale distincte m, n, p cu proprietatea că :

$$m + S(m) = n + S(n) = p + S(p).$$

2019 Soluţii

12.6 Clasa 5 Soluţii

5.1 Fie x - numărul de probleme corecte, iar y - numărul de probleme greşite. Din condiţie avem că numărul total de probleme trimise este 50, adică $x+y=50$. De asemenea pentru fiecare problema corecta acesta primeşte 40 de puncte iar pentru una greşită acesta pierde 10, deci deoarece acesta a acumulat până la urmă 0 puncte, avem ecuaţia $40x - 10y = 0$. Deci trebuie să rezolvăm următorul sistem de ecuaţii :

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 40x - 10y = 0 \end{cases}$$

$40x - 10y = 0$ deci $40x = 10y$, sau $4x = y$. Înlocuind în prima ecuaţie obţinem: $5x = 50$ deci $x = 10$, şi $y = 4 \cdot 10 = 40$.

5.2 Fie cel mai mic element al acestei mulţimi: x.
Mulţimea va fi următoarea :

$$x, x + 1, x + 2 \ldots x + 2019.$$

Deci deoarece diferenţa dintre cel mai mare element şi cel mai mic element este 2019 în total sunt 2020 de elemente.
Suma celor mai mici 4 elemente este 54, deci $x+(x+1)+(x+2)+(x+3) = 54$, deci $4x + 6 = 54 \Rightarrow x = 12$.
Şi respectiv suma celor mai mari 4 elemente va fi:

$$(x + 2016) + (x + 2017) + (x + 2018) + (x + 2019) = 8118.$$

5.3 Răspuns: 4.
Logica este următoarea: fie avem o configuraţie în care *Mihai* a scos nişte bile astfel încât nu există 2 bile a căror suma sau diferenţă să se dividă cu 5 şi această configuraţie conţine numărul maxim posibil de bile.
Atunci răspunsul la problema noastră va fi mărimea acestei configuraţii +1.
Dacă luăm restul numerelor scrise pe aceste bile la împărţirea cu 5 avem 5 resturi posibile: $0, 1, 2, 3, 4$. Ca să se îndeplinească condiţia că diferenţa a 2 bile să nu se dividă cu 5 nu putem scoate 2 bile care să aibă acelaşi rest la împărţirea cu 5 deci nu putem extrage mai mult de 5 bile. Pentru că nici suma să nu se dividă cu 5 putem extrage doar o bilă din perechea 1 sau 4, şi o bilă cu restul 2 sau 3, deci putem în total în această configuraţie doar maxim 3 bile, o bilă cu restul 0, o bilă cu restul între $(1, 4)$ şi o bilă cu restul între $(2, 3)$.

5.4 Fie x - numărul de pâini, şi y - numărul de prăjituri.
Deoarece pe o pâine se foloseşte 3 kilograme de făină, iar pentru o prăjitură 4 kilograme de făină: $3x + 4y = 1504$.
De asemenea folosind aceeaşi logică obţnem că $x + 4y = 904$, deci trebuie să rezolvăm următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1504 \\ x + 4y = 904 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 4y = 1504 \\ 3x + 12y = 2712 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(3x + 12y) - (3x + 4y) = 8y = 1208.$$

Deci $y = \dfrac{1208}{8} = 151$ (numărul de prăjituri coapte de către brutar).

5.5 Dacă ultima cifră a numărului n este una dintre $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ atunci este evident că suma cifrelor lui n este mai mică decât suma cifrelor numărului $n + 2$ (deoarece doar numărul unităţilor se schimbă). Acum ne rămân doar numerele care au ultima cifra 8 sau 9. Dacă ultima cifră este 8 atunci adunând 2 la nivelul unităţilor suma scade cu 8, iar la un nivel mai sus decât cel al unităţilor (zecilor, sutelor etc.) suma poate creşte maxim cu o unitate. Analog şi dacă ultima cifră este 9. Deci fiecare număr care se termină cu 8 sau cu 9 satisface condiţia noastră. Deci suma totală este:

$$8 + 9 + 18 + 19 + 28 + 29 + \ldots + 98 + 99 = 1070$$

12.7 Clasa 6 Soluţii

6.1

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}=\frac{ac}{bd}\Rightarrow ac=ad+cb\Rightarrow\frac{ad+cb}{ac}=\frac{d}{c}+\frac{b}{a}=1.$$

6.2 Presupunem că toate numerele sunt mai mari decât 0, în acest caz suma minimă va fi egală cu

$$1+2+3+\ldots+112=\frac{112\cdot 113}{2}=6328>6327$$

Deci un număr trebuie să fie egal cu 0, deci produsul numerelor este egal cu 0.

6.3 În intervalul între 19 şi 33 de elevi sunt în total 15 posibilităţi, iar numărul total de clase este 16. Deci din principiul cutiei, exista cel puţin 2 clase care au acelaşi număr de elevi.

6.4 98784 se descompune ca $49\cdot 36\cdot 56$. Deci avem ecuaţia:

$$6\cdot x^2+49\cdot y^2=49\cdot 36\cdot 56\Rightarrow 6x^2=49(36\cdot 56-y^2)$$

Deci $6x^2$ trebuie să se dividă cu 49, deci $x=7x_0$. Înlocuim rezultatul acesta în ecuaţia noastră iniţială, şi simplificăm 49:

$$6x_0^2+y^2=36\cdot 56$$

Analog ca şi în pasul precedent obţinem că y trebuie să se dividă cu 6 deci $y=6y_0$. Iarăşi înlocuim totul în ecuaţia noastră şi obţinem:

$$6x_0^2+36y_0^2=36\cdot 56\Rightarrow x_0^2+6y_0^2=6\cdot 56\Rightarrow x_0^2=6(56-y_0^2)$$

Deci x_0 trebuie să se dividă cu 6 deci $x_0=6x_1$. Înlocuim din nou în ecuaţia noastră:

$$36x_1^2+6y_0^2=6\cdot 56\Rightarrow 6x_1^2+y_0^2=56$$

$6x_1^2$ este par şi 56 este par, deci y_0 de asemenea este par, deci $y_0=2y_1$.

$$6x_1^2+4y_1^2=56\Rightarrow 3x_1^2+2y_1^2=28$$

Analog x_1-par deci $x_1 = 2x_2$ şi obţinem:

$$6x_2^2 + y_1^2 = 14 \Rightarrow y_1 - par \Rightarrow y_1 = 2y_2 \Rightarrow 3x_2^2 + 2y_2^2 = 7$$

Ultima ecuaţie nu are soluţie (se poate verifica), deci ecuaţia iniţială de asemenea nu are soluţii.

6.5 Vom încerca să demonstrăm următorul lucru: dacă $\frac{k}{n}$ este ireductibilă, atunci şi $\frac{n-k}{n}$ este ireductibilă.
Deoarece $\frac{k}{n}$ este ireductibilă $\iff$ $(k,n) = 1$, unde (a,b) este cel mai mare divizor comun al lui a şi a lui b. Presupunem că $\frac{n-k}{n}$ este reductibilă adică $(n-k,n) = d$ cu $d > 1$. Putem afirma că $n - k = dx$, şi $n = dy$, adică $n - k = dy - k = dx \Rightarrow k = d(y - x)$, deci k se divide cu d şi n se divide cu d ceea ce este greşit din faptul că $(k,n) = 1$.
Analog demonstrăm că dacă $\frac{n-k}{n}$ este ireductibilă atunci $\frac{k}{n}$ este ireductibilă.
Acum ne ramâne cazul special când $\frac{k}{n} = \frac{n-k}{n}$, dar deoarece

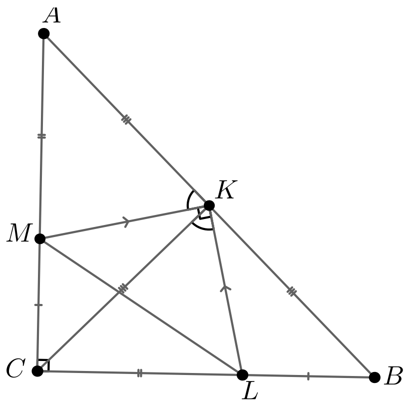
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \Rightarrow \frac{k}{n} = \frac{n-k}{n} = \frac{n}{2 \cdot n} = \frac{1}{2}.$$

Adică $k = \frac{n}{2}$, când n este par. Dar,evident în acest caz fracţia noastră este reductibilă cu $\frac{n}{2}$ care este un număr întreg.
Deci numărul de fracţii ireductibile este par, deoarece numărul total de fracţii este format din perechi de fracţii de forma $\left(\frac{k}{n}, \frac{n-k}{n}\right)$.

12.8 Clasa 7 Soluţii

7.1 Fie m cel mai mic număr. Atunci pentru oricare alte numere a, b scrise pe tablă avem $a > m$ şi $b > m$. Însă se cunoaşte $m^2 > ab \geq m \cdot m = m^2$, prin urmare contradicţie, deci putem avea maxim 2 numere scrise pe tablă.
7.2 Este evident că $AM = CL$. Deoarece K este mijlocul ipotenuzei, obţinem că $AK = KB = CK$ şi $CK \perp AB$. Avem că $\angle KAM = \angle KCL = 45°$, deci $\triangle AKM \equiv \triangle KCL$ din criteriul (LUL). Deci $\triangle MKL$ este isoscel, cu

$KM = KL$. Acum trebuie să demonstrăm că $\angle MKL = 90^\circ$. Dar $\angle MKL = \angle CKL + \angle MKC = \angle CKL + 90^\circ - \angle AKM = 90^\circ$.



7.3 Dacă deschidem parantezele obţinem

$$\begin{cases} x+y+z = xy+xz+yz, \\ 2(x+y+z) = xy+xz+yz+3. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z = xy+xz+yz, \\ x+y+z = 3 \end{cases}$$

Prin urmare vom avea:

$$9 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz) = x^2+y^2+z^2+6.$$

Deci $x^2+y^2+z^2 = 3$. Însă:

$$0 = x^2+y^2+z^2-(xy+xz+yz) = \frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2+\frac{1}{2}(z-x)^2.$$

Prin urmare $x = y = z$, însă $x+y+z = 3$, deci $x = y = z = 1$.

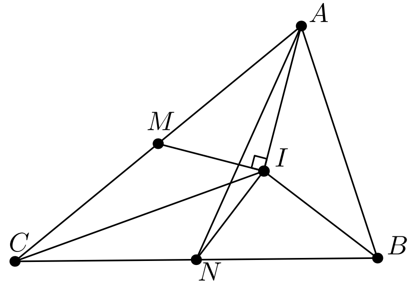
7.4 În primul rând, dacă toate cutiile conţin exact 1 bilă, atunci dacă luăm $k = 1$, în orice cutie se află fix o bilă. Deci presupunem că există o cutie în care numărul de bile diferă de 1. Acum demonstrăm că există o cutie în care numărul de bile este 0 (cutia este goală). Presupunem contrariul: toate cutiile conţin un număr pozitiv de bile, dar în acest caz, deoarece există o cutie în care este mai mult de o bilă, rezultă că numărul total minim de bile va fi $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{99}+3 = 99+3 = 101$, contradicţie, deci există cel puţin o cutie goală.

Acum, dacă există o cutie care conţine 2 bile, atunci selectând cutia cu 0 bile şi cutie cu 2 bile atunci avem 2 cutii care conţin împreună 2 bile şi,

astfel, problema este rezolvată. Presupunem că nu avem nici o cutie cu 2 bile. Deoarece presupunerea a fost că există doar o cutie goală, în acest caz numărul minim de bile va fi $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{98}+3 = 98+3 = 101$, deci mai există o cutie goală.
Folosind acest raţionament în continuare, ajungem la cazul în care avem 99 de cutii goale şi o cutie care conţine 100 de bile, dar din condiţie ştim că acest caz nu este posibil, deci problemă este rezolvată.
7.5 Iniţial vom demonstra că MN este tangentă la cercul înscris. Observaţi că $\angle BAI = \angle IAC = \alpha/2$, iar $\angle AMI = 180 - \alpha/2 - 90 = 90 - \alpha/2$. Însă $\angle CMN = \alpha$, prin urmare

$$\angle NMI = 180 - \angle AMI - \angle CMN = 180 - 90 + \alpha/2 - \alpha = 90 - \alpha/2 = \angle IMA.$$

Deci IM este bisectoarea $\angle AMN$, iar MA este tangentă la cercul înscris ,prin urmare şi MN este tangentă la cercul înscris. Acum observaţi că NM şi NB sunt tangente la cercul înscris, deci NI este bisectoarea $\angle MNB$. Prin urmare $\angle INB = \frac{1}{2}\angle MNB = \frac{1}{2}(180 - \angle MNC) = 90 - \beta/2$. Deci vom avea $\angle BIN = 180 - \angle IBN - \angle INB = 180 - \frac{1}{2}\beta - (90 - \frac{1}{2}\beta) = 90^{\circ}$.



12.9 Clasa 8 Soluţii

8.1 Dacă $x^2 + 2ax + b = 0$ nu are soluţii, atunci avem

$$\Delta = 4a^2 - 4b < 0 \Longleftrightarrow b > a^2 \Longrightarrow b \geq a^2 + 1,$$

unde ultima relaţie are loc deoarece b şi a^2 sunt numere întregi. Acum observaţi că $x^2 \geq \lfloor x^2 \rfloor > x^2 - 1$. Prin urmare

$$\lfloor x^2 \rfloor + 2ax + b \geq x^2 - 1 + 2ax + a^2 + 1 = (x-a)^2 \geq 0$$

Însă observaţi că inegalitatea este strictă, prin urmare $\lfloor x^2 \rfloor + 2ax + b = 0$, nu va avea soluţii.

8.2 După deschiderea parantezelor şi simplificare inegalitatea se rescrie că

$$x^6 + y^6 + x^4y^4 + x^2y^2 \geq x^5y^2 + y^5x^2 + x^4y + y^4x.$$

Acum observaţi din media aritmetică $\geq$ media geometrică avem:

$$\frac{x^6 + x^4y^4}{2} \geq \sqrt{x^6 \cdot x^4y^4} = x^5y^2, \text{ şi } \frac{y^6 + x^4y^4}{2} \geq \sqrt{y^6 \cdot x^4y^4} = y^5x^2.$$

Iar

$$\frac{x^6 + x^2y^2}{2} \geq \sqrt{x^6 \cdot x^2y^2} = x^4y \text{ şi } \frac{y^6 + x^2y^2}{2} \geq \sqrt{y^6 \cdot x^2y^2} = y^4x^2.$$

Acum, sumând ultimele 4 inegalităţi obţinem inegalitatea dorită.

8.3 Evident putem avea cel puţin 3 puncte în S. Fie A, B, C aceste puncte. Fără a pierde din generalitate, fie $\triangle ABC$ dreptunghic în $\angle C$. Atunci C se află pe cercul Γ cu diametrul AB. Acum fie D oricare alt punct în S. vom demonstra că $D \in \Gamma$, cercul cu diametrul AB. Dacă $\triangle ADB$ este dreptunghic în $\angle D$ atunci concluzia este evidentă. Altfel, fără a pierde din generalitate fie $\triangle ADB$ dreptunghic în A, cazul dreptunghic în $\angle B$ se rezolvă analog. Prin urmare $\angle DAB = 90^{\circ}$, deci D se află pe tangenta în A la cercul Γ cu diametrul AB. Acum ne uităm la triunghiul dreptunghic $\triangle ADC$. Avem 3 cazuri.

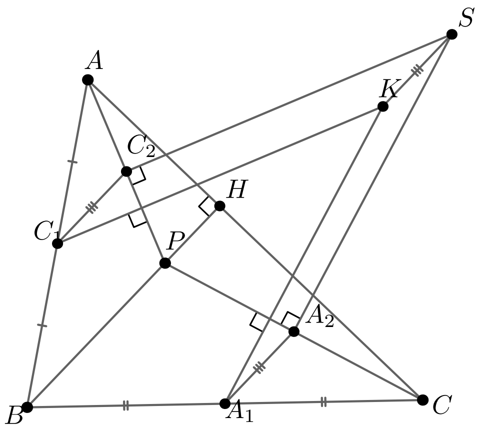
Dacă $\angle CAD = 90^{\circ} = \angle BAD$, avem că $C - A - D$ coliniare iar $\triangle CAD$ nu este dreptunghic.

Dacă $\angle ACD = 90^{\circ} = \angle ACB$, avem că $D - C - B$ coliniare iar $\triangle DCB$ nu este dreptunghic.

Dacă $\angle CDA = 90^{\circ} = \angle DAB$, avem că D este piciorul înălţimii din C pe tangenta din A la Γ, iar $CDAB$ este un trapez dreptunghic cu $CD \parallel AB$. Deoarece $\triangle ABC$ este dreptunghic că $\angle ACB = 90^\circ$ avem că $\angle ABC < 90^\circ$, deci $\angle DCB = 180^\circ - > 90^\circ$ dar orice triunghi dreptunghic nu poate avea măsura unghiului mai mare de 90 de grade, contradicţie.

Prin urmare unica posibilitate e ca D se află pe Γ, cercul cu diametrul AB. Acum dacă ne uităm la $\triangle CAD$, triunghiul dreptunghic înscris în Γ, vom avea că una din laturile sale va fi diametrul cercului. Însă se cunoaste că nici AD nici AC nu sunt diametru, deci prin urmare D este punctul diametral opus al lui C în Γ. Acum fie E alt punct în S. Atunci din concluziile de mai sus rezultă $E \in \Gamma$, şi prin urmare E este diametral opus lui C în Γ. Prin urmare E coincide cu D. Deci putem să avem maxim 4 puncte în S.

8.4 Fie A_2, C_2 mijloacele segmentelor CP şi AP. Avem că $C_1C_2 = A_1A_2 = \frac{1}{2}BP$. Fie ducem paralela prin A_2 la A_1K şi luăm punctul S astfel încât $A_2S = A_1K$. Este evident că KSA_1A_2 este paralelogram şi deci $A_1A_2 \| KS$, dar $A_1A_2 \| C_1C_2$ deci C_1C_2KS de asemenea este paralelogram, şi respectiv S este intersecţia mediatoarelor al triunghiului APC. De asemenea deoarece $SK \| BP$ obţinem că $SK \perp AC$, dar există o singură dreaptă perpendiculară cu AC care trece prin S, şi aceea este mediatoarea segmentului AC.



8.5 Fie n are k divizori primi. Dacă n este par, atunci n se poate rescrie ca $n = 2n - n$, unde $2n, n$ au ambii k divizori primi. Dacă n este impar, fie $p \neq 2$ cel mai mic divizor prim care nu divide n. Atunci n se poate rescrie ca $n = p \cdot n - (p-1) \cdot n$. Atunci observaţi că $p \cdot n$ are exact $k+1$ divizori primi. Iar $p-1$ e format din 2 şi din factori primi mai mici ca p, care deja se conţin în n, întrucât p este cel mai mic prim care nu divide n. Prin urmare $(p-1) \cdot n$, conţine k divizori ai lui n şi pe 2, prin urmare tot conţine $k+1$ divizori primi.

12.10 Clasa 9 Soluţii

9.1 Deoarece $xyz \geq xy + yz + xz$ împarţind totul cu xyz obţinem $1 \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Analog împărţind expresia $\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ cu $\sqrt{xyz}$ obţinem că $1 \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}}$. Deci noi ştim că $1 \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

şi trebuie să demonstrăm că$1 \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}}$ deci dacă demonstrăm că $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}}$ atunci problema este rezolvată.
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} \Leftrightarrow \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{2}{\sqrt{yz}} + \frac{2}{\sqrt{xz}}$.
$(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) + (\frac{1}{y} + \frac{1}{z}) + (\frac{1}{x} + \frac{1}{z}) \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{2}{\sqrt{yz}} + \frac{2}{\sqrt{xz}}$ (din inegalitatea Aritmetică-Geometrică).

9.2 Fie $x - 1 = y$, atunci ecuaţia se rescrie ca:

$$(y+2)^{2019} + y(y+2)^{2018} + \cdots y^{2019} = 0.$$

Evident $y = 0$, sau $y = 2$ nu este solutie. Prin urmare împarţim ecuaţia la y^{2019}, şi obţinem

$$(\frac{y+2}{y})^{2019} + (\frac{y+2}{y})^{2018} + \cdots + (\frac{y+2}{y})^{1} + (\frac{y+2}{y})^{0} = 0$$

Fie $a = \frac{y+2}{y}$, atunci obţinem:

$$0 = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{2019} = \frac{1 - a^{2020}}{1 - a}.$$

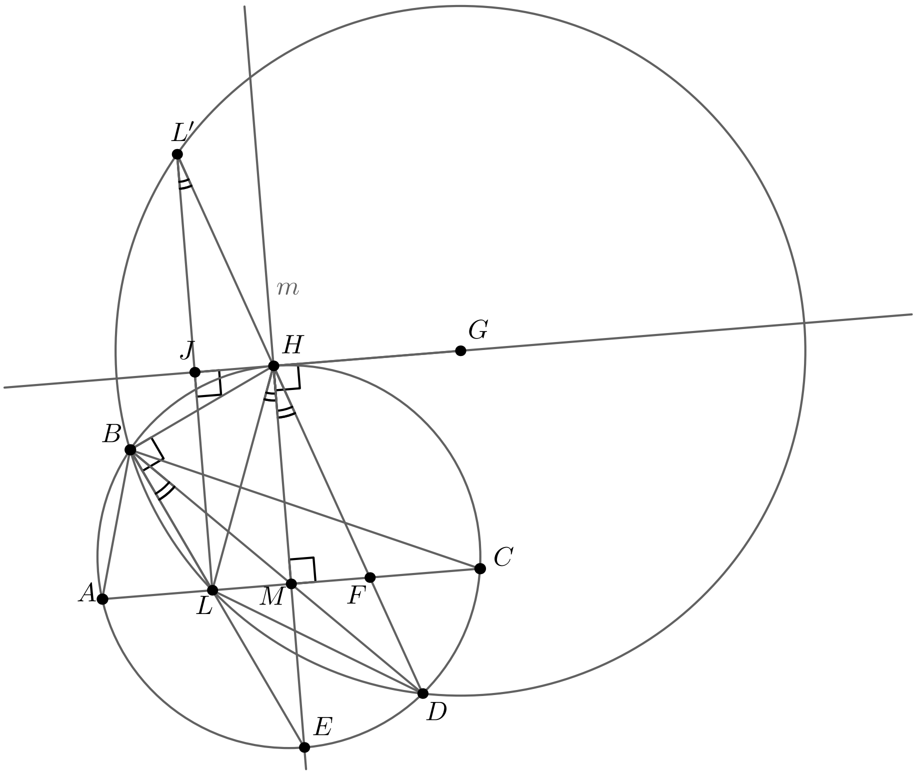
Prin urmare $1 - a^{2020} = 0$. Deoarece a este real avem $a = 1$, sau $a = -1$, însă $a \neq 1$. Deci obţinem $a = \frac{y+2}{y} = -1$, sau $y + 2 = -y$, sau $y = -1$, deci $x = y + 1 = 0$.
9.3 Răspuns corect: Nu
Cel mai mic multiplu comun al unei mulţimi de numere naturale se defineşte ca cel mai mic număr natural nenul astfel încât acesta este multiplu al tuturor numerelor din mulţime. Este evident că singurul multiplu al lui 0 este 0, dar deoarece cel mai mic multiplu comun este mereu nenul, 0 nu poate exista în mulţimea noastră iniţială.
Din condiţie avem că va exista cel puţin un număr par în secvenţa. Fie luăm un număr care are puterea maximă a lui 2 în descompunerea sa. Fie acest număr x şi puterea să fie k astfel încât $2^k \mid x$ şi $2^{k+1} \nmid x$. Vrem să demonstrăm că există un singur număr în şir care se divide cu 2^k, şi anume după cum am spus mai sus, doar x. Presupunem contrariul şi anume că există 2 numere x şi y care să se dividă cu 2^k. Avem că $x = 2^k \cdot x_1$ şi $y = 2^k \cdot y_1$, unde x_1 şi y_1 sunt impare diferite. Presupunem fără a pierde din generalitate că $x_1 < y_1$. Deoarece ele sunt diferite va exista un număr impar z_1 astfel încât

$x_1 < z_1 < y_1$. Înmulţind totul cu 2^k obţinem ą $2^k \cdot x_1 < 2^k \cdot z_1 < 2^k \cdot y_1$, deci $2^k \cdot z_1$ tot este un element din mulţimea noastră consecutivă, fie acesta z. Dar noi avem că $2^{k+1}|z$, contradicţie cu faptul că k este puterea maximă al lui 2 care divide un element din mulţime. Fie numărul cu puterea maximă 2 în descompunerea sa x. x va fi inclus sau în mulţimea roşie sau în cea albastră. Suma celor mai mici multiplii comuni ale celor 2 mulţimi va fi $2^y \cdot M_1 + 2^k \cdot M_2$, unde M_1 şi M_2 sunt impare unde $y < k$, $2^y M_1 + 2^k M_2 = 2^y(M_1 + 2^{k-y} M_2)$. $M_1 + 2^{k-y} M_2$ este impar, deci acest produs nu poate fi o putere de 2.

9.4 În primul rând, dacă avem un triunghi ABC, avem că mediatoarea segmentului BC şi bisectoarea unghiului A se intersectează pe cercul circumscris al triunghiului ABC.

Demonstraţie: bisectoarea unghiului A împarte arcul BC în jumătate, iar mediatoarea laturii BC, de asemenea înjumătăţeste arcul BC, deci ele intersectează cercul circumscris al triunghiului ABC în acelaşi punct.

Fie în problema noastră dreapta m să fie mediatoarea laturii BC, iar $m \cap AL = E$. Fie H mijlocul arcului BC care îl conţine şi pe A. Evident că $H \in m$. Fie $HD \cap BC = F$. Deoarece HE este diametru avem că $\angle HBE = 90°$, deci $BHML$ este un patrulater inscriptibil cu $\angle HBL = \angle HML = 90°$. Deci $\angle LBM = \angle LHM$, dar deoarece $BHDE$ este un patrulater inscriptibil avem că $\angle EHD = \angle EBD$ deci $\triangle LHF$ este isoscel. Fie $L^{'}$ reflecţia punctului L peste tangenta prin punctul H la cercul circumscris al triunghiului ABC. Fie J punctul de intersecţie a dreptei $LL^{'}$ cu tangenta dusă din punctul H.



Deoarece $HM \parallel JL$ si $HJ \parallel LM$ avem că $HM = JL = JL^{'}$ dar M este mijlocul segmentului LF, deci HM este linie mijlocie şi $L^{'} - H - F$ sunt coliniare. Deoarece $HM \parallel LL^{'} \Rightarrow \angle HL^{'}L = \angle FHM$, astfel $BLDL^{'}$ este un patrulater inscriptibil cu $\angle HL^{'}L = \angle LBD$. În acest caz centru cercului al triunghiului BLD se află pe mediatoarea laturii $L^{'}L$ care este exact tangenta din H la cercul triunghiului ABC, care este paralelă la latura AC.

9.5 Da, vor exista m, n şi p ce satisfac relaţia. Spre exemplu $10^{13}+91, 10^{13}+100$ şi $10^{13}-8$ satisfac relaţia. Observaţi că este relativ uşor să găsim 2 numere $m \leq n$ ce satisfac relaţia. Deoarece n şi $S(n)$ au acelaşi rest $0 \leq x \leq 8$ la împărţirea la 9, rezultă că $f(n) = n + S(n)$ are restul $0 \leq 2x \leq 16$. Analog dacă m are rezultat $0 \leq y \leq 8$ la împărţirea la 9, vom avea că $f(m) = m + S(m)$ are restul $0 \leq 2y \leq 16$. Prin urmare $x = y$, iar $n - m = 9k$. Vom inspectă soluţiile cele mai simple pentru care $n - m = 9$. Observaţi că, deoarece $m \leq n$ implică $S(m) \geq S(n)$, rezultă că $S(t)$ scade când trecem de la m la un număr mai mare n, deci dorim să inspectăm numerele în apropiere de 10^k. Spre exemplu $91+S(91)=101=10+S(100)$, sau $92+S(92)=103=101+S(101)$, şi tot aşa. Acum observaţi că dacă $f(\overline{abc})=f(\overline{def})$, vom avea şi $f(\overline{10\cdots 0abc})=f(\overline{10\cdots 0def})$, cu oricare număr de 0-uri în faţă, şi încercăm să găsim şi $f(\overline{9\cdots 9g})$ care va avea aceeaşi valoare. Deci dacă $f(091)=f(100)$, vom avea şi $f(10^k+91)=f(10^k+100)$, pentru $k\geq 3$, şi dorim să găsim un p de forma $f(p)=f(\underbrace{9\cdots 9}_{l \text{ ori}}g)$ care are aceeaşi valoare. Observaţi că m,n şi p trebuie să aibă acelaşi rest la împărţirea la 9, şi deoarece $m=10^k+91$ are rezultatul 2, iar p are restul g, rezultă că $g=2$. Acum observaţi că

$$f(p)=f(\underbrace{9\cdots 9}_{l \text{ ori}}2)=(10^{l+1}-8)+(9\cdot l+2)=10^{l+1}+9l-6.$$

$$f(m)=f(10^k+91)=10^k+91+11=10^k+102.$$

Deci dorim $k=l+1$ şi $9l-6=102$, sau $l=12$, iar $k=13$, de unde rezultă soluţia iniţială.

Notă. Soluţia poate fi generalizată pentru oricare număr de elemente. Fiind date $a_1,a_2\cdots a_t$ cu $f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_t)$, vom avea $f(10^k+a_1)=f(10^k+a_2)=\cdots=f(10^k+a_t)$ pentru k suficient de mare. Deci urmând acelaşi procedeu, putem găsi încă un element a_{t+1} cu $f(a_{t+1})=f(a_1)=\cdots=f(a_t)$.

13

Anul 2022

13.1 Clasa 5

5.1 Aflaţi suma tuturor numerelor impare de la 1 la 2023.
5.2 Se dă numărul 12345678910...20212022, din care se şterg 20 de cifre. Care este metoda de eliminare a cifrelor pentru a ajunge la a) cel mai mare, şi b) cel mai mic număr posibil?
5.3 Dacă adăugăm 9 la dreapta unui număr de 5 cifre, rezultatul va fi de 4 ori mai mic decât dacă adăugăm 9 la stânga acestuia. Aflați numărul.
5.4 Un joc pe calculator funcţionează astfel: pe ecran se afişează un tabel 3×3, unde fiecare celulă are valoarea 0. La o mişcare, Dana alege un pătrat format din patru căsuţe alăturate ce formează un tabel 2×2, şi măreşte cu o unitate numerele din interior. Astfel după un pas s-ar putea obţine de exemplu:

1	1	0
1	1	0
0	0	0

După 2022 de mişcări, se cunoaşte o parte din tabelul final:

505	b	e
a	c	f
500	d	468

Aflaţi valorile lipsă.

13.2 Clasa 6

6.1 Având un volum infinit de ulei şi doar două căldări, de 3 şi 5 litri respectiv, cum putem obţine exact 4 litri de ulei?

6.2 a) Găsiţi numerele de forma $\overline{a0b0a}$ care sunt pătrate perfecte, ştiind că are loc relaţia $b = 2 \cdot a$.
b) Găsiţi numerele de forma $\overline{abcdab}$ care sunt pătrate perfecte, ştiind că are loc relaţia $\overline{cd} = 2 \cdot \overline{ab}$.
6.3 Avem 2022 de bile numerotate de la 1 la 2022. Întâi scoatem bilele divizibile la 4, apoi cele divizibile la 5. Câte bile rămân?
6.4 Pe tablă sunt scrise numerele de la 1 la 22. Petru Parker şi Maria Jane concurează într-un joc, în care şterg pe rând, de pe tablă câte trei numere. Petru începe jocul. Dacă ultimul număr pe tablă este unul par, câştigă el, iar în caz contrar câştigă Maria. Se consideră că ambii participanţi joacă optim (adică folosesc cea mai bună metodă). Cine va câştiga, şi prin ce mod?

13.3 Clasa 7

7.1 Aflați toate numerele a de două cifre astfel încât a^a are ultima cifră 3.
7.2 Calculaţi valoarea expresiei:

$$110 \cdot \left(\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \cdots + \frac{1}{10^2-1}\right).$$

7.3 Fie numerele $A = \overline{a_1a_2a_3\ldots a_{2022}}, B = \overline{b_1b_2b_3\ldots b_{2022}}, C = \overline{c_1c_2c_3\ldots c_{2022}}$. Demonstraţi că există 3 numere x, y, z astfel încât cifrele de pe aceste poziţii sunt egale pentru fiecare număr ($a_x = a_y = a_z$, $b_x = b_y = b_z$, $c_x = c_y = c_z$).
7.4 Fie segmentul AB şi punctul C pe segment. Fie punctul D care respectă condiția că pentru orice punct M în plan, $MA + MB \geq MC + MD$. Demonstrați că D aparține segmentului AB și că mijloacele segmentelor AB și CD coincid.
7.5 Fie numerele reale a, b cu $a + b = 1$. Demonstrați că:

$$\sqrt{1+5a^2} + 5 \cdot \sqrt{2+b^2} \geq 9$$

13.4 Clasa 8

8.1 Arătaţi că dacă x, y sunt numere reale astfel încât $xy \geq 1$, atunci :

$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} \geq \frac{2}{xy+1}$$

8.2 Aflaţi:

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2021^2}+\frac{1}{2022^2}}$$

8.3 Fie $\triangle ABC$ unde $\angle BAC = 60^o$. Înălţimile din vârfurile B şi C intersectează dreptele AC şi AB în punctele E şi F. Dacă D e mijlocul segmentului BC, arătaţi că $\triangle DEF$ e echilateral.
8.4 Fie x, y şi z numere întregi astfel încât:

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = xyz.$$

Demonstraţi că $(x+y+z+6)$ divide $(x^3+y^3+z^3)$.
8.5 În plan se consideră 2022 de puncte, astfel încât să nu existe 3 puncte coliniare. Iniţial, acestea sunt împărţite în 1011 perechi, şi fiecare pereche de puncte se uneşte cu un segment. Ana efectuează următoarea operaţie: aceasta alege o pereche de segmente care se intersectează AB şi CD, le şterge cu radieră şi desenează o nouă pereche de segmente AC şi BD. Demonstraţi că secvenţa de mişcări a Anei este finită.

13.5 Clasa 9

9.1 Fie $a, b \in \mathbb{N}$. Arătaţi că dacă $2^n a + b$ este pătrat perfect pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $a = 0$.
9.2 Pe tablă sunt scrise numerele $1, 2 \ldots 2n$, iar Ion alege $n+1$ dintre ele. Arătaţi că indiferent de alegerea facută de Ion, printre aceste $n+1$ numere se găsesc 2 numere astfel încat unul îl divide pe celălalt.
9.3 Fie ω cercul circumscris al triunghiului ascuţitunghic $\triangle ABC$, iar M - mijlocul lui BC şi respectiv H - ortocentrul acestui triunghi. Dreapta HM intersectează ω în punctul R, unde A şi R se află de aceiaşi parte a dreptei BC. AR intersectează BC în T, iar TH intersectează AM în Q. Demonstraţi că punctele A, Q, H, R se află pe un cerc.
9.4 Fie x, y şi z numere reale pozitive ce satisfac relaţia $xyz = 1$. Demonstraţi că :

$$\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y} \geq x+y+z$$

9.5 Se dă o tablă de mărimea 100×100. Iniţial 99 de pătrăţele de mărimea 1×1 sunt infectate. Dacă un pătrăţel de mărimea 1×1 se învecineaza cu cel

puţin alte 2 pătrăţele infectate, atunci acesta devine la fel infectat. Există oare o configuraţie pentru care după un anumit timp toată tabla să devină infectată?
(Pătrăţelele se consideră vecine dacă acestea au o latură comună.)

2022 Soluţii

13.6 Clasa 5 Soluţii

5.1 Scriem suma numerelor impare ca o diferenţă: $1+3+5+...+2021+2023$ $= (1+2+...+2022+2023) - (2+4+6+...+2020+2022) = (1+2+...+2023) - 2\cdot(1+2+...+1011)$. Astfel obţinem două sume Gauss: $\frac{2023\cdot 2024}{2} - 2\cdot\frac{1011\cdot 1012}{2} = 2023\cdot 1012 - 1011\cdot 1012 = 1012\cdot(2023-1012) = 1012\cdot 1012$.

5.2 Pentru a obţine cel mai mare număr posibil după ştergere, avem nevoie ca cifrele de pe primele poziţii să fie cât mai mari, începând de la stânga la dreapta. Astfel, pe prima poziţie maxim poate fi cifra 9. Pentru a ajunge la 9 trebuie să ştergem primele 8 pozitţii. Numărul devine $910111213\ldots 2022$, şi mai putem şterge 12 cifre. Pentru ca în a două poziţie să fie o cifră maximă, putem obţine acest lucru prin ştergerea perechilor $\overline{1x}$, şi a unităţilor care rămân. Astfel putem şterge primele 5 perechi: $10, 11, 12, 13, 14$, prima cifră din 15 şi prima cifră din 16. În 20 de mişcări am obţinut numărul $9561718\ldots 2022$.
Similar ideii precedente, pentru numărul minim avem nevoie ca primele poziţii să conţină numere mici, respectiv începem cu 1. Următoarea cifră poate fi de la 0 la 9, dar pentru a avea numărul minim avem nevoie ca poziţia să fie 0. Pentru aceasta vom şterge cifrele $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, âi 1 fiind rămase 11 mişcări. Având numărul $1001112\ldots 20212022$, deoarece nu ne ajung mişcări destule ca să ajungem până la 0, următoarele poziţii vor fi cu cifra 1. Eliminăm, din perechile $\overline{1x}$ numerele x, dacă $x > 1$. Astfel vom elimina 8 cifre, ne rămân 3 mişcări. La moment numărul este $101111111111202122\ldots 2022$. Acum avem nevoie ca să âtergem 3 poziţii, pentru ca 0 să ajungă cât mai spre stănga. Astfel vom şterge $2 \times 1 si 1 \times 2$. Numărul minim final este $10111111110212223\ldots 20212022$.

5.3 Se obţine relaţia $\overline{9abcde} = 4\cdot\overline{abcde9}$, iar dacă descompunem reieise $900000 + \overline{abcde} = 4\cdot(10\cdot\overline{abcde} + 9) \Leftrightarrow 900000 - 36 = \overline{abcde}\cdot(40-1) \Longleftrightarrow$ $899964 = 39\cdot\overline{abcde}$. Astfel obţinem că $\overline{abcde} = 23076$.

5.4 Indiferent de alegerea regiunilor, unul din pătrate va cădea mereu pe centru, respectiv $c = 2022$. Deoarece numărul total de ori când s-au ales colţurile coincide cu numărul din centru, $e = 2022 - 505 - 468 - 500 = 549$. a va fi ales doar când colţurile din stânga sus şi stânga jos vor fi alese în pătrăţele, deci $a = 505 + 500 = 1005$, similar $b = 505 + 549 = 1054$, $d = 500 + 468 = 968$ şi $f = 549 + 468 = 1017$.

13.7 Clasa 6 Soluţii

6.1 Umplem căldarea de 5 litri, vărsăm 3 litri din căldarea cu volum de 5 litri în căldarea de 3 litri. În căldarea de 5 litri rămân 2 litri. Vărsăm tot uleiul din căldarea de 3 litri, respectiv ea rămâne goală. Turnăm uleiul rămas în volum de 2 litri din căldarea de 5 litri în căldarea de 3 litri. În căldarea cu volum de 3 litri sunt 2 litri de ulei. Căldarea de 5 litri este goală. Umplem căldarea de 5 litri. Turnăm 1 litru de ulei din căldarea cu volum de 5 litri în căldarea de 3 litri, care are deja 2 litri de ulei. Astfel, în căldarea de 5 litri rămân 4 litri.

6.2 a) Observăm, după ultima cifră şi din faptul că a este dublul lui b, a poate avea numai valorile 1 şi 4. Pentru $a = 1, 10201 = 101^2$, iar pentru $a = 4, 40804 = 202^2$.
b) $\overline{abcdab} = 10000\cdot\overline{ab}+100\cdot\overline{cd}+\overline{ab} = 10001\cdot\overline{ab}+200\cdot\overline{ab} = 10201\cdot\overline{ab} = 101^2\cdot\overline{ab}$ este pătrat perfect, rezultă că $\overline{ab}$ - pătrat perfect și $ab < 50$. Astfel, $\overline{ab}$ poate fi $16, 25, 36, 49$.

6.3 Fie $A = \{4n|n \in \mathbb{N}, 4n \leq 2022\}$, $B = \{5n|n \in \mathbb{N}, 5n \leq 2022\}$.Ultimul multiplu al lui 4 este 2020, deci de la 1 la 2022 sunt $\frac{2020}{4} = 505$ multipli pe care îi scoatem, fiind rămase 1517 numere. Uitându-ne, la multiplii lui 4 şi 5, observăm că ei se găsesc în ambele mulţimi. Astfel, dacă am elimina toţi multiplii lui 5 de la $1 \ldots 2022$, multiplii lui 20 ar fi scoşi de exact două ori. Astfel, pentru a găsi numărul final rămas, vom avea nevoie să scădem multiplii lui 5 şi să adunăm cei ale lui 20. Astfel vom avea: $1517 - \frac{2020}{5} + \frac{2020}{20} = 1214$ bile.

6.4 De la 1 la 22 sunt 11 numere pare şi 11 numere impare. Petru începe prin scoaterea a două numere impare şi a unui număr par. Astfel vom avea 10 numere pare şi 9 numere impare. Apoi, el îi va urmări mişcările Mariei, şi va face inversul acestora. Dacă Maria scoate 2 numere pare şi 1 număr impar, acesta va scoate 2 numere impare şi 1 număr par, şi invers. Iar dacă Maria scoate 3 numere pare, el va scoate 3 numere impare, şi viceversa. Observăm că după ce merg Petru şi Maria mereu vor fi scoase 3 numere pare şi 3 impare. După 7 runde va rămâne pe tablă un singur număr par. Respectiv, Petru va fi câştigător.

13.8 Clasa 7 Soluţii

7.1 Observăm că dacă a este par, atunci ultima cifră a lui a^a va fi şi ea pară. Dacă ultima cifră a lui a este 1 sau 5, atunci ultima cifră a lui a^a va fi 1 sau 5 respectiv. Dacă ultima cifră a lui a este 9, atunci ultima cifră a lui a^a va fi 9 sau 1. Rămâne să investigăm cazurile când ultima cifră a lui a este 3 sau 7.
Dacă ultima cifră a lui a este 3:
Ultima cifră a lui a^n parcurge ciclul 3, 9, 7, 1 atunci când creşte n, de unde obţinem că a dă restul 1 la împărţire la 4. Valorile lui a care corespund sunt 13, 33, 53, 73, 93.
Dacă ultima cifră a lui a este 7:
Ultima cifră a lui a^n parcurge ciclul 7, 9, 3, 1 atunci când creşte n, de unde obţinem că a dă restul 3 la împărţire la 4. Valorile lui a care corespund sunt 27, 47, 67, 87.
7.2 $110 \cdot \left(\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \cdots + \frac{1}{10^2-1}\right) =$
$= 110 \cdot \left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{9\cdot 11}\right) =$
$= 110 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) =$
$= 110 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) = 72.$
7.3 Construim numerele $N_1 = \overline{a_1b_1c_1}, N_2 = \overline{a_2b_2c_2}, N_3 = \overline{a_3b_3c_3}, \cdots,$ $N_{2022} = \overline{a_{2022}b_{2022}c_{2022}}$. Numerele N pot lua 1000 de valori (de la 0 la 999) şi conform principiului cutiei vor exista trei numere dintre acestea care vor fi egale, adică mereu vor exista $N_x = N_y = N_z$ şi numerele x, y şi z satisfac condiţia.
7.4 Fixăm $M = A$ şi avem $AB \geq AC + AD$. Analog fixăm $M = B$ şi avem $AB \geq BC + BD$. Sumând obţinem $2AB \geq AC + AD + BC + BD \geq 2AB$, unde ultima relaţie vine din inegalitatea triunghiului. Inegalitatea devine egalitate şi conform cazului de egalitate în inegalitatea triunghiului obţinem că D aparţine segmentului AB. Acum $AB = AC + AD$, de unde $BC = AD$ şi similar $AC = BD$, din ce rezultă că segmentele CD şi AB au mijloc comun.
7.5 Grupând şi folosind inegalitatea dintre media pătratică şi cea aritmetică obţinem:

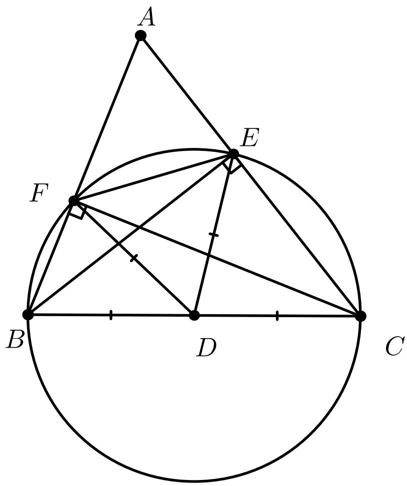
$\sqrt{1+5a^2}+5\cdot\sqrt{2+b^2}=$
$=\sqrt{9}\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+a^2+a^2+a^2+a^2+a^2}{9}}+5\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+b^2}{9}}\geq$
$\geq 3\cdot\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+a+a+a+a+a}{9}+15\cdot\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+b}{9}=\frac{6+15a+60+15b}{9}=$
$\frac{81}{9}=9.$
Egalitatea va avea loc pentru $\frac{1}{4}=a^2=b^2$, deci, deoarece $a+b=1$, $a=b=\frac{1}{2}$

13.9 Clasa 8 Soluţii

8.1 Problema este echivalentă cu expresia:

$$(y^2+x^2+2)(xy+1)\geq 2(x^2+1)(y^2+1).$$

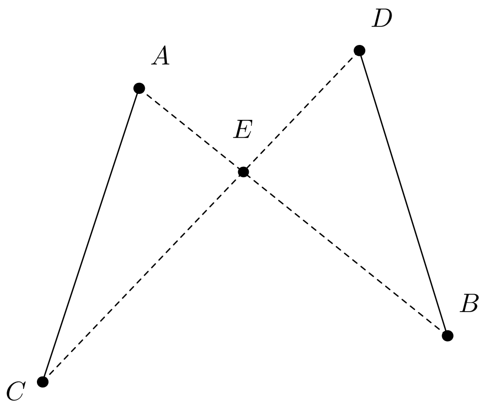
Deschizând parantezele obţinem $xy^3+x^3y+2xy+y^2+x^2+2\geq 2x^2y^2+2x^2+2y^2+2$. Simplificând termenii comuni obţinem : $x^3y+y^3x-2x^2y^2\geq x^2+y^2-2xy$, adică $xy(x-y)^2\geq(x-y)^2\Rightarrow(xy-1)(x-y)^2\geq 0$, ceea ce este evident adevărat.
8.2 Fie termenul general
$\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=\sqrt{\frac{(k^2+k+1)^2}{(k(k+1))^2}}=\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}=1+\frac{1}{k(k+1)}=1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$
Atunci expresia iniţială va fi egală cu
$1+1-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+1+\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}=2022-\frac{1}{2022}=\frac{2021\cdot2023}{2022}.$
8.3



Deoarece $\angle CFB = \angle BEC = 90$, patrulaterul $BFEC$ este inscriptibil. Deoarece triunghiurile BFC şi CEB sunt dreuptunghice avem că $DB = DC = DE = DF \Rightarrow$ triunghiul DEF este isoscel şi D este centrul cercului circumscris lui $BFEC$. $\angle ABE = 180 - \angle AEB - \angle BAE = 30$. Deoarece D este centrul cercului avem $\angle FDE = 2\angle FBE = 60$. Cum triunghiul FDE este isoscel şi are un unghi de 60 de grade, acesta este echilateral.

8.4 Expresia iniţială este echivalentă cu $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{xyz}{2}$. Din factorizarea $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ avem $x^3 + y^3 + z^3 = \frac{xyz}{2}(x + y + z + 6) \Rightarrow x + y + z + 6 \mid x^3 + y^3 + z^3$.

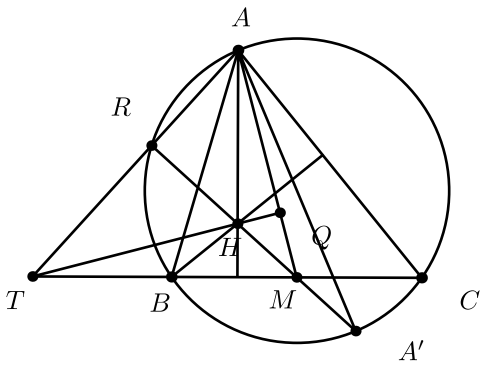
8.5 Pentru orice configuraţie ţinem cont de suma lungimilor tuturor segmentelor desenate. Analizăm cum se schimbă această valoare după o mişcare a Anei.



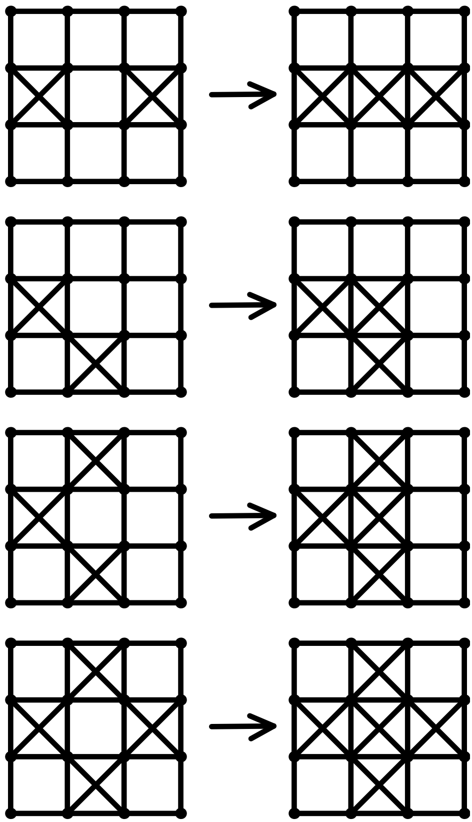
Fie E - intersecţia dreptelor AB şi CD. Din inegalitatea triunghiului avem că $AE + EC > AC$ şi $ED + EB > DB$, deci $AB + CD > AC + DB$. Asta înseamnă că suma lungimilor după o mişcare a Anei descreşte. Numărul total de configuraţii este limitat. Iată cum se calculează valoarea exactă a numărului total de configuraţii : pentru un vârf putem să îl împerechem cu alte 2021. Scoţândule pe acestea 2 şi repetând procesul avem că numărul total de configuraţii este $2021 \cdot 2019 \cdot \ldots \cdot 1$. Deci numărul de configuraţii este finit. Fie luăm configuraţia cu suma lungimii segmentelor minimă. Dacă această configuraţie are o intersecţie, atunci Ana poate aplica o mişcare asupra acestei configuraţii, şi obţinem alta cu suma mai mică, ceea ce înseamnă că configuraţia luată de noi nu ar avea suma lungimii segmentelor minimă. Deci configuraţia cu suma lungimii segmentelor minimă nu are intersecţii. Dar, Ana daca aplică de mai multe ori operaţia ei, ea va ajunge eventual la configuraţia cu suma lungimilor minimă, deci secvenţa de mişcări este finită.

13.10 Clasa 9 Soluţii

9.1 Presupunem că $a \neq 0$. Fie $b \neq 0$. Luăm $n = t$ şi $n = t + 2$, atunci avem $2^t a + b = k_1^2 \Leftrightarrow 2^{t+2}a + 4b = 4k_1^2$ şi $2^{t+2}a + b = k_2^2$. Scăzând a doua expresie din prima avem $3b = 4k_1^2 - k_2^2 \geq 4k_1^2 - (2k_1 - 1)^2 = 4k_1 - 1$. Deoarece $2^n a + b$ este crescătoare şi b este un număr fixat, putem lua un n suficient de mare care va contrazice inegalitatea. Deci $b = 0$. Atunci pentru un n par avem $a = x^2$, iar pentru un n impar avem $a = 2x^2$, deci obţinem contradicţie.
9.2 Grupăm numerele în n perechi: $(1, 2), (2, 4), \ldots, (n, 2n)$, fiecare pereche având un număr care îl divide pe celălalt. Conform principiului lui Dirichlet vom avea cel puţin o pereche din care ambele numere au fost alese.
9.3



Fie A' a doua intersecţie lui HM cu cercul ω. Din Hamilton avem că $HM = MA'$, şi deoarece $BM = MC$ avem că $BHCA'$ este un paralelogram $\Rightarrow A'C \parallel BH \Rightarrow \angle ACA' = 90 \Rightarrow AA'$ este diametrul cercului $\omega \Rightarrow \angle ARM = 90$. Atunci MH şi AH sunt înălţimi în triunghiul $ATM \Rightarrow TH$ de asemenea este înălţime în ATM. Deci $\angle HQA = \angle HRA = 90 \Rightarrow AQHR$ este un patrulater inscriptibil.
9.4 Din inegalitatea aritmetică geometrică avem $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$.
Din inegalitatea lui Sedrakyan (Cauchy-Schwarz) avem
$\frac{(x+y-1)^2}{z} + \frac{(y+z-1)^2}{x} + \frac{(z+x-1)^2}{y} \geq \frac{(2(x+y+z)-3)^2}{x+y+z} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z} = x + y + z.$
9.5 Răspunsul este **NU**. Dacă ne uităm la perimetrul iniţial al figurii infectate, avem că acesta este maxim egal cu $99 \cdot 4 = 396$. Pe de altă parte, dacă figura finală este infectată în totalitate, atunci perimetrul acesteia este egal cu $4 \cdot 100 = 400 > 396$. Deci ne rămâne să demonstrăm că după o procedură de infectare a unei celule neinfectate perimetrul figurii nu poate creşte. Se desting 4 cazuri :



Observăm că în toate 4 cazuri perimetrul figurii infectate sau scade, sau rămâne constant, deci acesta nu va putea ajunge niciodata la valoarea 400.

14

Anul 2023

14.1 Clasa 5

5.1 Determinaţi ultima cifră a numărului $A = 2023^{2023^2}$.
5.2 Distanţa dintre Soroca şi Stăuceni este de 150 de km. Doi biciclişti merg pe un drum drept dintre aceste localităţi. Ei pornesc simultan, primul având viteza constantă de 20 km/h, iar celălalt de 30 km/h. În momentul în care cei doi pornesc, o muscă îşi ia zborul de pe roata primului biciclist şi se mişcă cu viteza de 100 km/h până ajunge pe roata celui de-al doilea biciclist, după care se întoarce din nou către primul biciclist. Ea repetă acţiunea până când bicicliştii se intâlnesc. Care este distanţa parcursă de către muscă?
5.3 Aranjaţi semnele $" + "," - "," : "," \times ","(",")"$ şi 8 dintre cifrele de la 1 la 9, unind unele dintre acestea, ca să obţineţi rezultatul 2023.
Exemplu: $12 \times (5 + 6) : 7 + 34 - 8$.
5.4 Dacă 3 adulţi şi 5 copii vopsesc un gard în 24 de ore, iar 4 adulţi şi 7 copii vopsesc două garduri în 36 de ore, în câte ore vor vopsi 3 garduri 2 adulţi şi 11 copii?

14.2 Clasa 6

6.1 Fie un număr format din 3 cifre diferite. Cea mai mare cifră a lui este înlocuită cu 1. De exemplu, 263 va deveni 213, iar 761 va deveni 161. Se ştie că numărul obţinut este divizibl cu 50. Aflaţi toate numerele care îndeplinesc această condiţie.

6.2 Determinaţi ultima cifră a numărului

$$A = 1^{2023} + 2^{2023} + 3^{2023} + \ldots + 2022^{2023} + 2023^{2023}.$$

6.3 Fie S mulţimea numerelor naturale de la 1 la 2023. Dacă din S se elimină numărul X, atunci media aritmetică a numerelor rămase devine X. Aflaţi valoarea lui X.

6.4 Un pătrat cu latura care este un număr natural are aria $2023t$, unde t este un număr natural. Care este cel mai mic perimetru posibil al acestui pătrat?

14.3 Clasa 7

7.1 Fie p, q, r nişte numere prime. Știind că numărul

$$M = \frac{2}{p} + \frac{3}{q} + \frac{5}{r}$$

este un număr natural, arătaţi că el este prim.

7.2 Determinaţi numerele de două cifre $\overline{ab}$, cu $a < b$, care satisfac relaţia

$$\overline{ab} = a + (a+1) + \ldots + (b-1) + b.$$

7.3 Marius mănâncă fructe dintr-un copac magic cu 2023 de mere, 2023 de pere şi 2023 de gutui. Dacă manâncă un măr, cade o pară şi creşte o gutuie. Dacă mănâncă o pară, cad 2 gutui şi creşte un măr. Dacă mănâncă o gutuie, creşte o pară şi cad 3 mere. La un moment dat pe copac a rămas doar un fruct. Care este acest fruct?

7.4 Fie ABC un triunghi dreptunghic cu $m(\angle BAC) = 90°$. Demonstraţi că lungimea înălţimii din vârful A este o pătrime din lungimea laturii BC dacă şi numai dacă măsura unui unghi al triunghiului ABC este de 15 grade.

7.5 Numerele reale pozitive x, y, z satisfac relaţia $x + y + z = 3$. Arătaţi că

$$\frac{x^2+y^2}{x+y} + \frac{y^2+z^2}{y+z} + \frac{z^2+x^2}{z+x} \geq 3.$$

7.6 Dintr-o tablă de dimensiuni 8×8 sunt tăiate două colţuri opuse. Putem acoperi complet tabla cu dominouri de dimensiuni 1×2 astfel încât ele să nu se suprapună sau să depăşească suprafaţa tablei? Dominourile pot fi plasate orizontal şi vertical.

14.4 Clasa 8

8.1 Fie x, y, z nişte numere reale pozitive. Arătaţi că

$$\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} \geq x + y + z.$$

8.2 Aflaţi numerele întregi x şi y care îndeplinesc relaţia $x^2y + y^2 = x^3$.
8.3 Fie a, b, c nişte numerele naturale nenule. Demonstraţi că numerele

$$a^2 + b + c, \qquad b^2 + c + a, \qquad c^2 + a + b$$

nu pot fi pătrate perfecte simultan.
8.4 Fie n un număr natural nenul şi un poligon regulat (cu toate laturile egale) cu $2n$ laturi. Keta şi Slavic joacă un joc. Pe rând ei desenează câte o diagonală în poligon care nu intersectează alte diagonale în interiorul poligonului (pot avea vârfuri comune). Cel care la un moment dat nu poate desena o diagonală pierde. Cine câştigă dacă Keta desenează prima diagonală şi ambii joacă optimal?
8.5 Fie ABC un triunghi în care punctele E şi F sunt punctele tangenţă ale cercului înscris triunghiului cu laturile AB şi AC, respectiv. Bisectoarea unghiului $\angle BCA$ intersectează EF în punctul T. Arătaţi că $m(\angle BTC) = 90°$.
8.6 Fie m şi n două numere naturale. Produsul divizorilor lui m este egal cu produsul divizorilor lui n. Este necesar ca m şi n să fie egale?

14.5 Clasa 9

9.1 Fie a, b, c nişte numerele naturale nenule. Demonstraţi că numerele

$$a^2 + b + c, \qquad b^2 + c + a, \qquad c^2 + a + b$$

nu pot fi pătrate perfecte simultan.
9.2 Numerele reale pozitive x, y, z satisfac relaţiile

$$x \leq 9, \qquad x + y \leq 25, \qquad x + y + z \leq 169.$$

Arătaţi că

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 19.$$

9.3 Fie ABC un triunghi ascuţitunghic cu centrul cercului circumscris O. Fie K un punct astfel încât linia KA este tangentă cercului circumscris triunghiului şi $m(\angle KCB) = 90°$. Punctul D se află pe latura BC astfel încât $KD \parallel AB$. Arătaţi că linia DO trece prin A.
9.4 Fie n un număr natural nenul şi un poligon regulat (cu toate laturile egale) cu $2n$ laturi. Mihai şi Slavic joacă un joc. Pe rând ei desenează câte o diagonală în poligon care nu intersectează alte diagonale în interiorul poligonului (pot avea vârfuri comune). Cel care la un moment dat nu poate desena o diagonală pierde. Cine câştigă dacă Mihai desenează prima diagonală şi ambii joacă optimal?
9.5 Fie a_n cel mai mare divizor impar al numărului natural n. Calculaţi

$$N = a_{2023} + a_{2024} + a_{2025} + \ldots + a_{4044} + a_{4045}.$$

9.6 Aflaţi numărul prim p şi numerele naturale a şi b care satisfac relaţia

$$a^p + b^p = p!$$

2023 Soluţii

14.6 Clasa 5 Soluţii

5.1 $2023^2 = 4092529 = 4 \times 1023132 + 1$. Deci 2023^2 este un număr de forma $4k+1$. Un număr cu ultima cifră 3 ridicat la o putere de forma $4k+1$ va avea ultima cifră 3, deci ultima cifră a lui A este 3.
5.2 Bicicliştii se vor întâlni în $\dfrac{150}{20+30} = 3$ ore. Atunci distanţa parcursă de muscă va fi $3 \cdot 100 = 300$ km.
5.3 $17 \times 34 \times (9-2) : (8-6) = 2023$.
5.4 Notăm adulţi - a, copii - c, garduri - g, ore - h. Din condiţie avem

$$\begin{cases} 3 \text{ a şi } 5 \text{ c} \ldots 1 \text{ g} \ldots 24 \text{ h} \\ 4 \text{ a şi } 7 \text{ c} \ldots 2 \text{ g} \ldots 36 \text{ h} \\ 2 \text{ a şi } 11 \text{ c} \ldots 3 \text{ g} \ldots ? \text{ h} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \text{ a şi } 5 \text{ c} \ldots 1 \text{ g} \ldots 24 \text{ h} \\ 4 \text{ aşi } 7 \text{ c} \ldots 1 \text{ g} \ldots 18 \text{ h} \\ 2 \text{ a şi } 11 \text{ c} \ldots 3 \text{ g} \ldots ? \text{ h} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \text{ a şi } 5 \text{ c} \ldots 1 \text{ g} \ldots 24 \text{ h} \\ 4 \text{ a şi } 7 \text{ c} \ldots 1 \text{ g} \ldots 18 \text{ h} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 \text{ a şi } 20 \text{ c} \ldots 1 \text{ g} \ldots 6 \text{ h} \\ 12 \text{ a şi } 21 \text{ c} \ldots 1 \text{ g} \ldots 6 \text{ h} \end{cases} \Rightarrow$$

copiii nu fac nimic.

$$\begin{cases} 4 \text{ a şi } 7 \text{ c} \ldots 2 \text{ g} \ldots 36 \text{ h} \\ 2 \text{ a şi } 11 \text{ c} \ldots 3 \text{ g} \ldots ? \text{ h} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \text{ a} \ldots 2 \text{ g} \ldots 36 \text{ h} \\ 2 \text{ a} \ldots 3 \text{ g} \ldots ? \text{ h} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2 \text{ a} \ldots 2 \text{ g} \ldots 72 \text{ h} \\ 2 \text{ a} \ldots 3 \text{ g} \ldots ? \text{ h} \end{cases} \Rightarrow$$

numărul de ore este $\dfrac{72 \cdot 3}{2} = 108.$

14.7 Clasa 6 Soluţii

6.1 Ca numărul să fie divizibil cu 50 ultimele cifre trebuie să fie $\overline{00}$ sau $\overline{50}$. 0 este cea mai mică cifră, deci aceasta nu va fi înlocuită. Deoarece cifrele numărului sunt distincte, ultimele două cifre vor fi $\overline{50}$. Ca 5 să nu fie înlocuit, prima cifră trebuie să fie mai mare decât 5. Deci numerele sunt $650, 750, 850, 950$.

6.2 Notăm cu $u(x)$ ultima cifră a numărului natural x. 2023 este un număr de forma $2k+1$ sau $4k+3$. Ştiind că toate puterile cu baza care are ultima cifră $0, 1, 5, 6$ mereu vor avea aceaşi ultimă cifră şi că $u(2^{4k+3}) = 8, u(3^{4k+3}) = 7, u(4^{2k+1}) = 4, u(7^{4k+3}) = 3, u(8^{4k+3}) = 2, u(9^{2k+1}) = 9$, avem

$$\begin{aligned} u(A) &= u(1^{2023} + 2^{2023} + 3^{2023} + \ldots + 2022^{2023} + 2023^{2023}) \\ &= u(1^{2023} + 2^{2023} + 3^{2023} + \ldots + 2^{2023} + 3^{2023}) \\ &= u(202 \cdot (4+5+6+3+2+9) + 203 \cdot (0+1+8+7)) \\ &= 6. \end{aligned}$$

6.3 Din condiţie avem relaţia $\dfrac{\frac{2023 \cdot 2024}{2} - X}{2022} = X \Leftrightarrow X = 1012.$

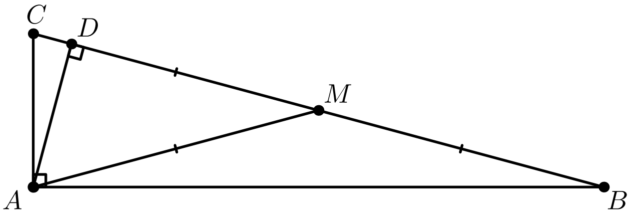
6.4 Notăm cu a latura pătratului. Din condiţie avem $a^2 = 2023t = 17^2 \cdot 7t$. Atunci numărul $7t$ este un pătrat perfect. Cel mai mic perimetru a pătratului va fi atunci când lungimea laturii este cea mai mică, adică când t este cel mai mic posibil, deci $t = 7$ şi $P = 4a = 4 \cdot 7 \cdot 17 = 476$.

14.8 Clasa 7 Soluţii

7.1 $M=\frac{2}{p}+\frac{3}{q}+\frac{5}{r}=\frac{5pq+2qr+3rp}{pqr}\Rightarrow pqr|5pq+2qr+3rp$
$\Rightarrow p|5pq+2qr+3rp\Rightarrow p|2qr\Rightarrow p=2$ sau $p=q$ sau $p=r$.
1)$p=2\Rightarrow M=1+\frac{5q+3r}{qr}\Rightarrow qr|5q+3r\Rightarrow q|5q+3r\Rightarrow q|3r\Rightarrow q=3$ sau $q=r$
1.1)$q=3\Rightarrow M=2+\frac{5}{r}\Rightarrow r|5\Rightarrow r=5\Rightarrow M=3$.
1.2)$q=r\Rightarrow M=1+\frac{8}{r}\Rightarrow r|8\Rightarrow r=2\Rightarrow M=5$.
2)$p=q\Rightarrow M=\frac{5q+5r}{qr}\Rightarrow qr|5q+5r\Rightarrow q|5q+5r\Rightarrow q|5r\Rightarrow q=5$ sau $q=r$.
2.1)$q=5\Rightarrow M=1+\frac{5}{r}\Rightarrow r|5\Rightarrow r=5\Rightarrow M=2$.
2.2)$q=r\Rightarrow M=\frac{10}{r}\Rightarrow r|10\Rightarrow r=2$ sau $r=5\Rightarrow M=5$ sau $M=2$.
3)$p=r\Rightarrow M=\frac{7q+3r}{qr}\Rightarrow qr|7q+3r\Rightarrow q|7q+3r\Rightarrow q|3r\Rightarrow q=3$ sau $q=r$.
3.1)$q=3\Rightarrow M=1+\frac{7}{r}\Rightarrow r|7\Rightarrow r=7\Rightarrow M=2$.
3.2)$q=r$. Analog cu 2.2).
7.2 $a+(a+1)+\ldots+b\leq 1+2+\ldots+9=45\Rightarrow a\leq 4$.
$a=4$. Atunci $b\geq 5$ şi $\overline{ab}\geq 45=1+2+\ldots+9\Rightarrow \overline{ab}=19$, contradicţie.
$a=3$. Atunci $3+4+\ldots+(b-1)+b=\overline{3b}\Leftrightarrow 1+2+\ldots+b-1=33\Leftrightarrow b(b-1)=66$, ecuaţie care nu are soluţii pentru $4\leq b\leq 9$.
$a=2$. Atunci $2+3+\ldots+(b-1)+b=\overline{2b}\Leftrightarrow 1+2+\ldots+b-1=21\Leftrightarrow b(b-1)=42$, ecuaţie cu soluţia $b=7$.
$a=1$. Atunci $1+2+\ldots+(b-1)+b=\overline{1b}\Leftrightarrow 1+2+\ldots+b-1=10\Leftrightarrow b(b-1)=20$, ecuaţie cu soluţia $b=5$.
Deci numerele sunt 15 şi 27.
7.3 Notăm cu (g,m,p) numărul de gutui, mere şi pere la un moment dat.
Dacă Marius mănâncă un măr tripletul (g,m,p) devine $(g+1,m-1,p-1)$, numerele $m+p$ şi $(m-1)+(p-1)$ au aceaşi paritate.
Dacă Marius mănâncă o pară tripletul (g,m,p) devine $(g-2,m+1,p-1)$, numerele $m+p$ şi $(m+1)+(p-1)$ au aceaşi paritate.
Dacă Marius mănâncă o gutuie tripletul (g,m,p) devine $(g-1,m-3,p+1)$, numerele $m+p$ şi $(m-3)+(p+1)$ au aceaşi paritate.
Deci, paritatea numărului $m+p$ mereu va fi aceaşi. Iniţial $m+p=2023+2023=4046-$ număr par. Dacă la final pe copac a rămas doar un măr sau o pară vom avea $m+p=0+1=1-$ număr impar, contradicţie. Deci pe copac

a rămas o gutuie.

7.4



1) Fără pierderea generalităţii fie $\angle ABC = 15$. Fie D piciorul înălţimii din A, iar M mijlocul laturii BC. Din faptul că $AM = MB = MC$, trebuie să demonstrăm că $AD = \frac{AM}{2}$. $\angle ACB = 180 - 90 - 15 = 75$. $\angle AMD = \angle AMC = 180 - 75 - 75 = 30$. În triunghiul dreptunghic AMD avem $\angle AMD = 30$, atunci $AD = \frac{AM}{2}$. Deci $AD = \frac{BC}{4}$.
2) Fără pierderea generalităţii fie $\angle ABC < \angle ACB$. Din condiţia $AD = \frac{BC}{4}$ şi $AM = MB = MC$ avem $AD = \frac{AM}{2}$. Atunci avem că $\angle AMC = \angle AMD = 30$. Deci $\angle ACB = \frac{180-30}{2} = 75$ şi $\angle ABC = 180 - 90 - 75 = 15$.

7.5 Vom arăta că $\dfrac{x^2+y^2}{x+y} \geq \dfrac{x+y}{2} \Leftrightarrow 2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$. Atunci $\dfrac{x^2+y^2}{x+y} + \dfrac{y^2+z^2}{y+z} + \dfrac{z^2+x^2}{z+x} \geq \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{y+z}{2} + \dfrac{z+x}{2} = x+y+z = 3$.

7.6 Colorăm tabla cu alb şi negru ca o tablă de şah. Un domino va acoperi un pătrat alb şi unul negru, deci numărul de pătrate albe acoperite şi numărul de pătrate negre acoperite vor fi egale. Deoarece tabla iniţială va avea un număr egal de pătrate albe şi negre, iar colţurile opuse au aceaşi culoare, după ce sunt tăiate colţurile vom avea un număr diferit de pătrate albe şi negre. Deci nu putem acoperi tabla cu dominouri.

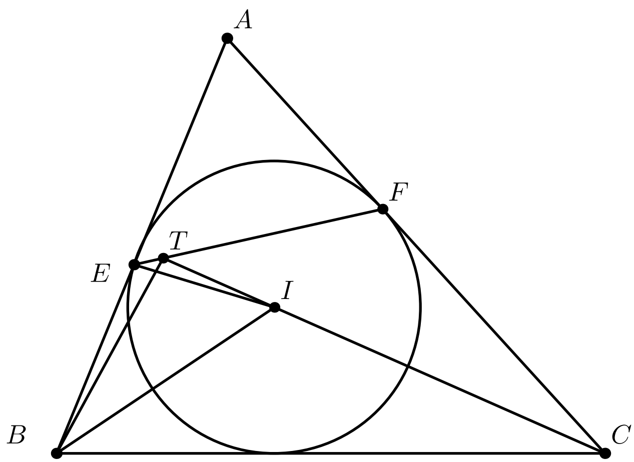
14.9 Clasa 8 Soluţii

8.1 $\dfrac{x^3}{yz} + \dfrac{y^3}{zx} + \dfrac{z^3}{xy} \geq x+y+z \Leftrightarrow x^4+y^4+z^4 \geq x^2yz + y^2zx + z^2xy$.

$x^4+y^4+z^4 \geq x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \Leftrightarrow (x^2-y^2)^2+(y^2-z^2)^2+(z^2-x^2)^2 \geq 0$.

$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq x^2yz+y^2zx+z^2xy \Leftrightarrow (xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2 \geq 0$.

8.2 Rezolvăm ecuaţia de gradul 2 faţă de y. $\Delta = x^4 + 4x^3 = x^2(x^2 + 4x) \Rightarrow$ $x^2 + 4x$ este un pătrat perfect dacă x este nenul, iar dacă $x = 0 \Rightarrow y = 0$. Deci $x^2+4x = k^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 = k^2+4 \Leftrightarrow (x+2+k)(x+2-k) = 4$. Verificând cazurile obţinem soluţia $x = -4, k = 0$. Atunci $\Delta = 0$ şi $y = \frac{-x^2}{2} = -8$.
8.3 Presupunem că toate 3 numere sunt pătrate perfecte. Atunci $a^2+b+c \geq (a+1)^2 \Leftrightarrow b+c \geq 2a+1$. Analog avem $c+a \geq 2b+1$ şi $a+b \geq 2c+1$. Adunând toate 3 relaţii avem $2a+2b+2c \geq 2a+2b+2c+3$, contradicţie.
8.4 Vom arăta că Keta are strategie de câştig. Notăm poligonul $A_1A_2...A_{2n}$. Prima diagonală care o va desena Keta va fi una dintre diagonalele principală, împarţind poligonul în două figuri simetrice. Fie această diagonală A_1A_{n+1}. Apoi după ce Slavic deseneează o diagonală, Keta va desena o diagonală simetrică faţă de A_1A_{n+1}. De exemplu, dacă Slavic deseneează diagonala A_iA_j $(1 \leq i < j \leq n+1)$, Keta va desena diagonala $A_{n+i+1}A_{j+n}$. În acest mod Keta mereu va putea desena o diagonală, deci ea câştigă.
8.5



Fie I centrul cercului înscris triunghiului ABC. Deoarece $\angle IEB = 90$ vom demonstra că I, E, T, B se află pe un cerc. $\angle ETI = 180 - \angle FTC = 180 - (180 - \frac{\angle ACB}{2} - (180 - \angle AFE))$. Triunghiul AEF este isoscel deci $\angle AFE = 90 - \frac{\angle BAC}{2}$. Aşadar avem $\angle ETI = 180-(180-\frac{\angle ACB}{2}-(180-(90-\frac{\angle BAC}{2}))) = 90 + \frac{\angle ACB}{2} + \frac{\angle BAC}{2} = 180 - \frac{\angle ABC}{2}$. Deci $\angle EBI = \frac{\angle ABC}{2} = 180 - \angle ETI \Rightarrow$ I, E, T, B se află pe un cerc $\Rightarrow \angle BTI = \angle BEI = 90$.
8.6 Fie $d(t)$ numărul de divizori a numărului natural t. Dacă unul din m şi n este 0 atunci şi celălalt este 0. Considerăm cazul când numerele sunt nenule. Fie d un divizor al lui m atunci $\frac{m}{d}$ tot este divizor al său. Deci produsul

divizorilor lui m este $m^{\frac{d(m)}{2}}$. Dacă m e un pătrat perfect atunci vom grupa $\frac{d(m)-1}{2}$ perechi de divizori şi $\sqrt{m}$ rămâne de unul singur şi obţinem că produsul este acelaşi. Deci avem că $m^{d(m)} = n^{d(n)}$. Fără pierderea generalităţii fie $d(m) \geq d(n)$. Fie p un număr prim astfel încât în factorizarea lui m sunt mai mulţi de p decât în n. Atunci am avea că în $m^{d(m)}$ sunt mai mulţi factori de p decât în $n^{d(n)}$, obţinem contradicţie. Deci avem că $m|n$. Dar asta ar însemna că $d(n) > d(m)$, dacă $m \neq n$ e imposibil. Aşadar avem că $m = n$.

14.10 Clasa 9 Soluţii

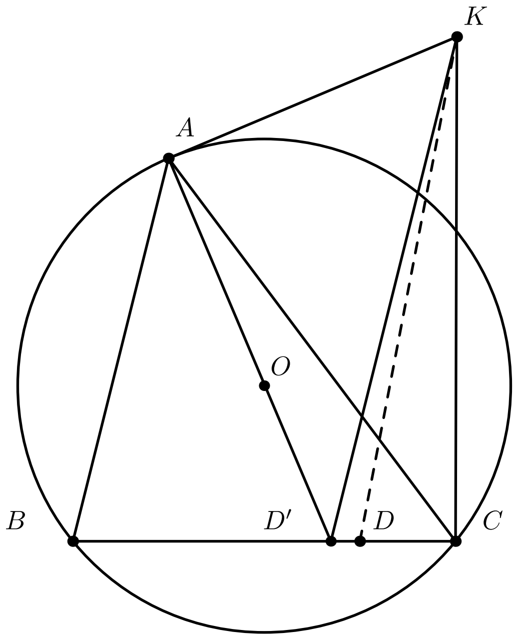
9.1 Presupunem că toate 3 numere sunt pătrate perfecte. Atunci $a^2+b+c \geq (a+1)^2 \Leftrightarrow b+c \geq 2a+1$. Analog avem $c+a \geq 2b+1$ şi $a+b \geq 2c+1$. Adunând toate 3 relaţii avem $2a+2b+2c \geq 2a+2b+2c+3$, contradicţie.
9.2 În cele 3 relaţii egalitatea are loc pentru $x = 9, y = 16, z = 144$. Din inegalitatea mediilor geometrică şi aritmetică avem

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{9x}}{3} \leq \frac{x+9}{6},$$

$$\sqrt{y} = \frac{\sqrt{16y}}{4} \leq \frac{y+16}{8},$$

$$\sqrt{z} = \frac{\sqrt{144z}}{12} \leq \frac{z+144}{24}.$$

Adunând relaţiile obţinem $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leq \dfrac{4x+3y+z+228}{24} \leq 19.$
9.3 Fie $D^{'}$ un punct fantomă care este intersecţia dreptei AO cu BC. Vom arăta că $KD' \parallel AB$ din care rezultă că $D^{'}$ coincide cu D. Deoarece AK este tangentă la cerc avem că $\angle D'AK = \angle OAK = 90$. Deoarece $\angle D'AK + \angle D'CK = 180$ avem că $AD'CK$ este un patrulater inscriptibil. Atunci $\angle AD'K = \angle ACK = 90 - \angle ACB$, dar $\angle BAO = \frac{180-2\angle ACB}{2} = 90 - \angle C$, deci obţinem că $\angle AD'K = \angle BAO \Rightarrow AB \parallel KD'$. Aşadar avem că $D = D'$, de unde rezultă concluzia.



9.4 Vom arăta că Mihai are strategie de câştig. Notăm poligonul $A_1A_2...A_{2n}$. Prima diagonală care o va desena Mihai va fi una dintre diagonalele principală, împarţind poligonul în două figuri simetrice. Fie această diagonală A_1A_{n+1}. Apoi după ce Slavic desenează o diagonală, Mihai va desena o diagonală simetrică faţă de A_1A_{n+1}. De exemplu, dacă Slavic desenează diagonala A_iA_j $(1 \leq i < j \leq n+1)$, Mihai va desena diagonala $A_{n+i+1}A_{j+n}$. În acest mod Mihai mereu va putea desena o diagonală, deci el câştigă.
9.5 Fie x un număr natural şi d cel mai mare divizor impar al său. Atunci următorul număr cu cel mai mare divizor impar d va $2x$. Cum $4045 < 2 \cdot 2023 = 4046$, toţi temenii a_k, $2023 \leq k \leq 4045$ sunt distincţi. Deci, avem 2023 numere impare distincte mai mici sau egale cu 4045. Deoarece $2023 = \frac{4045+1}{2}$, numărul N va fi suma numerelor impare de la 1 la 4045, adică $N = 2023^2$.
9.6 $p^p > p! \Rightarrow p > a, b$. Din teorema mică a lui Fermat avem

$$0 \equiv p! \equiv a^p + b^p \equiv a + b \pmod{p} \Rightarrow p|a+b \Rightarrow a+b=p.$$

$$a^p + b^p = a^p + (p-a)^p = p!, a|a^p, a|p! \Leftrightarrow a|p \Leftrightarrow a = 1.$$

$a^p + (p-a)^p = 1 + (p-1)^p = p!$ Pentru $p > 2$ avem că partea stângă este impară iar partea dreaptă este pară, contradicţie. Deci $a = 1, b = 1$ şi $p = 2$.

Elevii Liceului Teoretic ”Orizont” în cadrul Olimpiadelor Internaţionale de Matematică

Olimpiada Internaţională de Matematică 2012 Argentina

Tabără de pregătire România, Olimpiada Internaţională 2005, Mexic

Olimpiada Europeană de Matematică pentru Fete 2019 Ucraina

Olimpiada Internaţională de Matematică 2010 Kazakhstan

Olimpiada Balcanică de Matematică 2013 Cipru

Momente din cadrul Olimpiadei de Matematică a Liceului