UNIVERSITATEA DIN TIMIȘOARĂ
FACULTATEA DE ȘTIINȚE ALE NATURII
SECȚIA MATEMATICĂ

TESTE ȘI PROBLEME COMENTATE

pentru

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „TRAIAN LALESCU"

— forma prin corespondență (liceu) —

5

ALGEBRA ȘI GEOMETRIE

pentru clasele IX – X

de

D. MIHEȚ, L. LĂZĂROAIA și C. POP

1987

Prezentul caiet conţine enunţurile şi soluţiile testelor prin corespondenţă din cadrul Concursului Interjudeţean de Matematică "Traian Lalescu", ediţia 1987, pentru clasa a IX şi a X-a. Este însoţit de 5 note şi comentarii matematice sugerate de problemele din teste şi doresc să ofere o cale de lărgire a orizontului de cunoştinţe matematice ale elevilor.

Caietul conţine şi enunţurile testelor nr.1 pentru clasele a IX-a şi a X-a.

Enunţurile testelor nr.2 - 5 vor apărea în numerele următoare. Un caiet similar va apărea (caietul nr.6-liceu) pentru clasele a XI-a şi a XII-a.

PREFAȚĂ

Concursul Interjudețean de Matematică "Traian Lalescu" a fost inițiat de către Facultatea de Științe ale Naturii, Secția Matematică Universitatea din Timișoara și Inspectoratul Școlar Județean Caraș-Severin în colaborare cu Inspectoratele Școlare Județene Arad, Hunedoara și Timiș, la Consfătuirea Metodică din 8-9 octombrie 1984 de la Oțelu Roșu. La organizarea lui participă nemijlocit Consiliile Județene ale Organizației Pionierilor și Comitetele Județene Arad, Caraș-Severin, Hunedoara și Timiș ale U.T.C., Universitatea din Timișoara și Institutul Politehnic "Traian Vuia" din Timișoara. Acest concurs s-a desfășurat după cum urmează: Ediția a I-a la Caransebeș 21-23 martie 1985, Ediția a II-a la Deva, 28-30 martie 1986 și Ediția a II-a la Ineu, 4-7 iunie 1987.

Începînd cu anul școlar 1986-1987 s-au experimentat și s-au perfecționat noi forme de organizare care prevăd desfășurarea a cinci etape premergătoare și o secție "prin corespondență" a concursului. În cadrul secției prin corespondență se adresează concurenților amatori din cele patru județe organizatoare, sau din orice alt județ, cinci teste a cîte cinci probleme (pentru fiecare dintre etapele I-V). Aceste teste se întocmesc pe clase și condiția de înregistrare ca participant este rezolvarea corectă a cel puțin două probleme pentru fiecare etapă și expedierea lor în termenul stabilit de către comisia de corectare și premiere (la data și adresa menționată mai jos).

În acest caiet de informare matematică a elevilor interesați în aprofundarea matematicii și a profesorilor animatori ai programului competițional al elevilor sînt cuprinse soluțiile problemelor de la testele prin corespondență pentru treapta I de liceu și enunțurile problemelor din testul I, ediția 1987-1988, împreună cu cinci note și comentarii menite să lărgească orizontul de cunoștințe matematice . Enunţurile testelor Nr.2-5 vor apare în caietul Nr.7.

Sînt programate să apară cîte un caiet pentru fiecare etapă, fiecare clasă (V-XII) şi fiecare formă de concurs.

La ediţia a I-a a formei prin corespondenţă a concursului " Traian Lalescu ", 1987, a participat un număr mare de elevi. Dintre aceştia comisia de corectare şi premiere a acordat distincţii următorilor elevi:

Clasa a IX-a

Premiul I: SCHEUSAN IOAN, Liceul de Matematică-Fizică, Caransebeş.

Premiul II: RUSU BOGDAN, Liceul de Matematică-Fizică, Caransebes.

Premiul III: BOLDEA COSTIN, Liceul de Matematică-Fizică Nr.1, Timişoara.

Clasa a X-a

Premiul II: PHILIPS PETRA, Liceul N.Lenau, Timişoara.

1. ENUNȚURILE TESTELOR PRIN CORESPONDENȚĂ ALE CONCURSULUI "TRAIAN LALESCU", EDIȚIA 1987

1.A. Enunțurile testelor prin corespondență, ediția 1987, pentru clasa a IX-a.

TESTUL 1

1. Fie E o mulțime nevidă și $A,B \in \mathcal{P}(E)$. Se consideră funcția $f: \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$. Să se arate că f este bijectivă dacă și numai dacă $B = C_E A$ și în acest caz să se determine f^{-1}.

2. a) Dacă într-un triunghi ascuțitunghic cea mai mare înălțime AA' este egală cu mediana BM_0 atunci $m(\hat{B}) \leq 60^\circ$.

b) Demonstrați că dacă într-un triunghi ascuțitunghic ABC are loc egalitatea $m_a = \ell_b = h_c$, atunci triunghiul este echilateral.

3. Se consideră triunghiul isoscel ABC (AB=AC). Din mijlocul M al laturii BC ducem $MD \perp AC$ ($D \in AC$) și fie N mijlocul segmentului MD. Demonstrați că $AN \perp BD$.

4. Se consideră 2n puncte în plan, oricare trei necoliniare. Colorăm (la întîmplare) n din aceste puncte cu roșu și celelalte n cu albastru. Demonstrați că putem duce n segmente cu capetele în cele 2n puncte astfel încît fiecare segment să aibă capetele de culori diferite și oricare două din aceste segmente să nu aibă puncte interioare comune.

TESTUL 2

5. a) Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2+bx+c$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b,c \in \mathbb{R}$) și $\alpha \in$ Demonstrați că $\max\{|f(\alpha-1)|, |f(\alpha)|, |f(\alpha+1)|\} \geq \frac{a}{2}$.

b) Dintre toate polinoamele f de gradul 2 cu proprietatea că $|f(x)| \leq 2$, $(\forall) x \in [0,2]$, să se determină acela care are coefici...

tul dominant minim.

6. În triunghiul ascuţitunghic ABC se duc înălţimile AA', BB', CC'. Demonstraţi că

a) Perpendicularele din mijloacele laturilor BC, CA, AB respectiv pe $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ sînt concurente.

b) Perpendicularele din A, B, C respectiv pe $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ sînt concurente.

7. În triunghiul ascuţitunghic ABC se înscrie un semicerc cu centrul pe $|AB|$ şi tangent la BC şi AC respectiv în P şi Q. Fie $\{S\} = AP \cap BQ$.

Demonstraţi că $CS \perp AB$.

8. Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC şi $A' \in |BC|$, $B' \in |AC|$, $C' \in |AB|$ astfel încît AA', BB', CC' sînt bisectoarele unghiurilor triunghiului $A'B'C'$. Demonstraţi că A', B', C' sînt picioarele înălţimilor triunghiului ABC.

9. Se consideră 1987 de mulţimi, fiecare avînd 45 de elemente. Demonstraţi că dacă oricare două dintre acestea au un singur element comun, atunci toate cele 1987 de mulţimi au un element comun.

TESTUL 3

10. Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}^*$ soluţiile ecuaţiilor $x^2 + \frac{8}{a}x - 2a = 0$ şi $x^2 + \frac{6}{a}x - a = 0$ sînt distincte şi se separă (adică între două soluţii ale uneia din ecuaţii se află exact o soluţie a celeilalte ecuaţii) ?

11. Să se determine funcţiile $f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(xy) = xf(x) + yf(y), \ (\forall)\ x, y \in D, \text{ dacă}$$

a) $D = \mathbb{R}$.

b) $D = (0, a)$ cu $0 < a < 1$.

12. Fie ABCD un patrulater circumscriptibil. Să se arate că

a) Cercurile înscrise în triunghiurile ABD și BDC sînt tangente.

b) Punctele de tangență ale acestor cercuri cu laturile patrulaterului sînt vîrfurile unui patrulater inscriptibil.

13. Fie ABCD un patrulater inscriptibil. Demonstrați că centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABC, BCD, CDA, DAB sînt vîrfurile unui dreptunghi.

14. Fie D punctul de intersecție a bisectoarei unghiului A al triunghiului ABC cu cercul circumscris triunghiului. Demonstrați că $AD > \frac{AB+AC}{2}$.

TESTUL 4

15. a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și d un divizor natural al lui n^2. Demonstrați că numărul n^2+4d nu este pătrat perfect.

b) Fie $a,b \in \mathbb{Z}$ și $p(x) = x^2+ax+b$. Arătați că există $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ astfel încît $p(\alpha) \in \mathbb{Z}$.

16. Se consideră numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$, distincte două cîte două. Determinați valoarea minimă a funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = |x-a_1| + |x-a_2| + \ldots + |x-a_n|.$$

17. Se dă trapezul ABCD cu $AB \parallel CD$. Pe laturile neparalele (AD) și (BC) se iau respectiv punctele M și N astfel încît $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NB}$. Fie $\{P\} = MN \cap AC$ și $\{Q\} = MN \cap BD$. Demonstrați că $MP = NQ$.

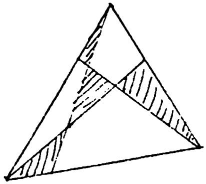
18. Într-un disc de rază r se iau 8 puncte distincte. Demonstrați că printre acestea există două cu distanța dintre ele mai mică decît r.

1. B. Enunțurile testelor prin corespondență, ediția 1987, pentru clasa a X-a.

TESTUL 1

19. În figura alăturată, ariile celor patru triunghiuri ha-

şurate sînt egale.



a) Demonstraţi că şi ariile celor trei patrulatere sînt egale.

b) Dacă ariile triunghiurilor haşurate sînt egale cu 1, determinaţi aria unui patrulater.

20. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi O centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

a) Dacă d_a, d_b, d_c sînt respectiv distanţele de la O la laturile triunghiului, arătaţi că $d_a + d_b + d_c = R + r$.

b) Demonstraţi că $\max\{h_a, h_b, h_c\} \geq R + r$.

21. Demonstraţi că pentru orice $n \in N^*$ ecuaţia $x^2+y^2 = z^n$ are soluţie în $N^* \times N^* \times N^*$.

22. Într-un cerc de rază 1 se înscrie un poligon regulat $A_1A_2\ldots A_n$. Demonstraţi că dacă P este un punct de pe cercul circumscris poligonului, atunci $PA_1^2 + PA_2^2 + \ldots + PA_n^2 = 2n$.

TESTUL 2

23. Laturile opuse AB şi DE, BC şi EF, CD şi FA ale hexagonului convex ABCDEF sînt paralele. Demonstraţi că $\sigma[ACE] = \sigma[BDF]$.

24. Hexagonul convex $A_1A_1'A_2A_2'A_3A_3'$ este înscris într-un cerc şi $m(\overset{\frown}{A_1A_1'}) = m(\overset{\frown}{A_2A_2'}) = m(\overset{\frown}{A_3A_3'}) = 60^\circ$. Demonstraţi că mijloacele coardelor $A_1'A_2$, $A_2'A_3$, $A_3'A_1$ sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

25. Fie $\mathcal{C}_1(O_1,r_1)$ şi $\mathcal{C}_2(O_2,r_2)$, $r_1 < r_2$, două cercuri secante în A şi B şi $P \in \mathcal{C}_1$. Dacă P_1 şi P_2 sînt intersecţiile dreptelor PA şi PB cu $\mathcal{C}_2$, să se arate că raza cercului circumscris triunghiului PP_1P_2 este egală cu O_1O_2.

26. Demonstraţi că nu există progresii aritmetice infinite de numere naturale în care toţi termenii sînt pătrate perfecte.

27. Să se găsească soluţiile ecuaţiei

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = 0, \quad (n \in N)$$

TESTUL 3

28. Fie ABCDE un pentagon convex de arie S şi s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 respectiv ariile triunghiurilor ABC, BCD, CDE, DEA, EAB.

a) Arătaţi că cel puţin unul dintre numerele s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 este mai mare decît $\frac{S}{5}$.

b) Dacă $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = 1$, să se determine S.

29. Hexagonul convex ABCDEF are aria S. Demonstraţi că cel puţin unul dintre triunghiurile ABC, BCD, CDE, EDF, DFA, FAB are aria $\leq \frac{S}{6}$.

30. Demonstraţi că între raza r a sferei înscrise într-un tetraedru echifacial şi raza R a cercului circumscris unei feţe are loc inegalitatea $R \geq 2\sqrt{2}\, r$.

31. Fie $a, a+r, \dots, a+nr, \dots$ o progresie aritmetică infinită neconstantă de numere reale. Demonstraţi că această progresie conţine o progresie geometrică infinită dacă şi numai dacă $\frac{a}{r} \in Q$.

32. Fie $A = \{1, 2, \dots, n\}$ şi $p \in N^*$, $p < n$. Determinaţi numărul submulţimilor de p elemente ale lui A, care nu conţin două numere consecutive.

TESTUL 4

33. Dacă a, b, c sînt lungimile laturilor unui triunghi, atunci

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2.$$

34. Se consideră şirul de numere naturale

$1 = x_1 < x_2 < x_3 \quad \dots \quad$ cu proprietatea că $x_{n+1} \leq 2n$, $(\forall) n \in N^*$.
Demonstraţi că pentru orice $k \in N^*$ există x_i, x_j aparţinînd şirului

dat, astfel încît $x_i - x_j = k$.

35. Fie P un punct interior triunghiului ascuțitunghic ABC. Notăm cu u, v, w distanțele de la P la laturile BC, CA, AB (respectiv) și AP=x, BP=y, CP=z. Demonstrați inegalitățile:

a) $2x \sin \frac{A}{2} \geqslant v+w$,

b) $xyz \geqslant \frac{4R}{r} uvw$.

36. Se dau 13 puncte în plan, oricare 3 necoliniare și oricare 4 neconciclice. Demonstrați că printre aceste puncte există trei, A, B, C astfel încît cercul circumscris triunghiului ABC să conțină în interior exact 5 din cele 10 puncte rămase.

2. SOLUTIILE TESTELOR PRIN CORESPONDENTA ALE CONCURSULUI "TRAIAN LALESCU", EDITIA 1987

2. A. Soluţiile testelor prin corespondenţă, ediţia 1987, pentru clasa a IX-a.

1. Fie E o mulţime nevidă şi $A,B \in \mathcal{P}(E)$. Se consideră funcţia $f: \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, $f(X) = (X\cap A, X\cap B)$. Să se arate că f este bijecţie dacă şi numai dacă $B = C_E A$ şi în acest caz să se determine f^{-1}.

<u>Soluţie.</u> ($\Rightarrow$) Presupunem f bijectivă şi arătăm că $A\cup B = E$ şi $A\cap B = \emptyset$.

Dacă $A\cup B \neq E$, $(\exists)\, x\in E-(A\cup B)$. Fie $C\subset E$: $x\notin C$ (de exemplu $C\subset A\cup B$). Atunci $C \neq C\cup\{x\}$ şi $f(C) = \{C\cap A, C\cap B\} = f(C\cup\{x\})$, deci f nu este injectivă, contradicţie. Dacă $A\cap B \neq \emptyset$, $(\exists)\, y\in A\cap B$. Arătăm că f nu este surjectivă, mai precis că $f(X) \neq (\{y\},\emptyset) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, $(\forall) X \in \mathcal{P}(E)$.

În adevăr, dacă $(\exists) X \in \mathcal{P}(E)$: $f(X) = (\{y\},\emptyset)$, atunci $A\cap X = \{y\}$ şi $B\cap X = \emptyset$. Din prima relaţie rezultă că $y\in X$, deci $y\in B\cap X$ în contradicţie cu relaţia $B\cap X = \emptyset$.

($\Leftarrow$) $B = C_E A \Rightarrow f$ bijectivă.

Fie $X,Y\in\mathcal{P}(E)$: $f(X) = f(Y)$. Avem deci $X\cap A = Y\cap A$ şi $X\cap B = Y\cap B$, de unde obţinem succesiv: $X = X\cap E = X\cap(A\cup B) = (X\cap A)\cup(X\cap B) = (Y\cap A)\cup(Y\cap B) = Y\cap(A\cup B) = Y\cap E = Y$, deci f este injectivă.

Fie acum $(A_1,B_1) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, adică $A_1\subset A$, $B_1\subset B$. Deoarece $A\cap B = \emptyset$, rezultă că $B_1\cap A = A_1\cap B = \emptyset$. Pentru $X = A_1\cup B_1 \in \mathcal{P}(E)$ avem $f(X) = ((A_1\cup B_1)\cap A, (A_1\cup B_1)\cap B) = ((A_1\cap A)\cup(B_1\cap A), (A_1\cap B)\cup(B_1\cap B)) = (A_1\cup\emptyset, B_1\cup\emptyset) = (A_1,B_1)$. Prin urmare f este şi surjectivă.

Din cele de mai sus rezultă că f este bijectivă dacă şi numai dacă $B = C_E A$ şi în acest caz $f^{-1}: \mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)\to\mathcal{P}(E)$, $f^{-1}(A_1,B_1) = A_1\cup B_1$.

Observaţie.

Relaţia $A\cup B = E$ de la implicaţia ($\Rightarrow$) poate fi demonstrată direct ţinînd seama de proprietatea de absorbţie: pentru orice mulţimi X, Y, $(X\cup Y)\cap X = X$;

$E\in\mathcal{P}(E)\Rightarrow f(E) = (E\cap A, E\cap B) = (A,B)$.

$A\cup B\in\mathcal{P}(E)\Rightarrow f(A\cup B) = ((A\cup B)\cap A,(A\cup B)\cap B) = (A,B)$. Deci $f(E) = f(A\cup B)$ şi cum f este injectivă rezultă $A\cup B = E$.

De asemenea, $B = C_E A\Rightarrow f$ injectivă poate fi demonstrată folosind proprietăţile funcţiei caracteristice (pentru detalii se poate consulta Gh. Rizescu, E. Rizescu, Teme pentru cercurile din licee, vol I.)

$$\begin{cases} X\cap A = Y\cap A \\ X\cap B = Y\cap B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\varphi_{A\cap X} = \varphi_{A\cap Y}\\ \varphi_{\bar{A}\cap X} = \varphi_{\bar{A}\cap Y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi_A\cdot\varphi_X = \varphi_A\cdot\varphi_Y\\ \varphi_{\bar{A}}\cdot\varphi_X = \varphi_{\bar{A}}\cdot\varphi_Y\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\varphi_X(\varphi_A+\varphi_{\bar{A}}) = \varphi_Y(\varphi_A+\varphi_{\bar{A}}).$$

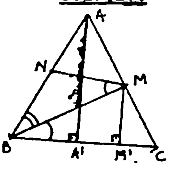
Dacă $A\neq\emptyset$ atunci $\varphi_A+\varphi_{\bar{A}} = 1$, deci $\varphi_X = \varphi_Y\Rightarrow X = Y$. Dacă $A = \emptyset$ atunci $\varphi_E\cdot\varphi_X = \varphi_E\cdot\varphi_Y\Rightarrow X = Y$ (am notat $B = C_E A = \bar{A}$).

Recomandăm demonstraţia implicaţiei $B = C_E A\Rightarrow f$ injectivă folosind metoda reducerii la absurd.

2. a) Dacă într-un triunghi ascuţitunghic cea mai mare înălţime AA' este egală cu mediana BM, atunci $m(\hat{B})\leq 60^\circ$.

b) Demonstraţi că dacă într-un triunghi ascuţitunghic ABC are loc egalitatea $m_a = \ell_b = h_c$ atunci triunghiul este echilateral.

Soluţie.



a) Arătăm că $m(\widehat{MBC}) = 30^\circ$ şi $m(\widehat{MBA})\leq 30^\circ$. Ducem $MM'\perp BC$ ($M'\in BC$) şi fie N mijlocul lui AB. Rezultă că $MM' = \frac{1}{2}AA' = \frac{1}{2}BM$, deci $m(\widehat{MBC}) =$

$= 30^\circ$.

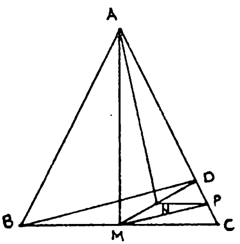
Rezultă că $m(\widehat{BMN}) = 30^\circ$, deci pentru a demonstra că $m(\widehat{MBN}) \leq \leq 30^\circ$ este suficient să demonstrăm că $NM \leq NB$, adică $BC \leq AB$, inegalitate care rezultă imediat din faptul că într-un triunghi produsul dintre o latură şi înălţimea corespunzătoare este constant iar AA' este cea mai mare înălţime a triunghiului.

b) Deoarece $h_c = \ell_b \geq h_b$ şi $h_c = m_a \geq h_a$, h_c este cea mai mare înălţime a triunghiului ABC. Cum $h_c = m_a$, din prima parte a problemei rezultă că $m(\hat{A}) \leq 60^\circ$.

Pe de altă parte, mediana m_a este cea mai mică mediană a triunghiului, deoarece $m_a = \ell_b \leq m_b$ şi $m_a = h_c \leq m_c$. Rezultă că A este cel mai mare unghi al triunghiului. Prin urmare şi $m(B) \leq 60^\circ$, $m(C) \leq 60^\circ$ şi cum $m(\hat{A})+m(\hat{B})+m(\hat{C}) = 180^\circ$, în mod necesar $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 60^\circ$.

3. Se consideră triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$). Din mijlocul M al laturii BC ducem $MD \perp AC$ ($D \in AC$) şi fie N mijlocul segmentului MD . Demonstraţi că $AN \perp BD$.

Soluţie.



Fie P mijlocul segmentului CD. Atunci NP este linie mijlocie în triunghiul MDC, deci $NP \parallel MC$. Cum $AM \perp BC$, rezultă că $NP \perp AM$. Dar, prin ipoteză, $MD \perp AC$, deci N este ortocentrul triunghiului AMP. Rezultă că $AN \perp MP$ şi cum $MP \parallel BD$ (MP este linie mijlocie în triunghiul BDC), $AN \perp BD$, c.c.t.d.

4. Se consideră 2n puncte în plan, oricare trei necoliniare. Colorăm (la întîmplare) n dintre aceste puncte cu roşu şi celelalte n cu albastru. Demonstraţi că putem duce n segmente cu capetele

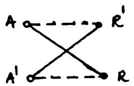
în cele 2n puncte astfel încît fiecare segment să aibă capetele de culori diferite și oricare două din aceste segmente să nu aibă puncte interioare comune.

<u>Soluție.</u>

Fie $R_1, R_2, \ldots, R_n$ punctele colorate cu roșu și $A_1, A_2, \ldots, A_n$ cele colorate cu albastru. Unim punctele albastre cu cele roșii în toate modurile posibile și luăm în considerare toate configurațiile formate din n segmente avînd capetele de culori diferite. Dintre aceste configurații (care sînt în număr finit) considerăm configurația $\mathcal{C}$ (sau una din configurațiile) cu suma lungimilor celor n segmente minimă.

Să arătăm că în această configurație nu există două segmente cu puncte interioare comune.

Presupunem de exemplu $(AR)\cap(A'R')\neq\emptyset$. Atunci $AR' + A'R < AR + A'R'$



dei înlocuind segmentele AR și $A'R'$ cu AR' și $A'R$ și lăsînd celelalte segmente din $\mathcal{C}$ neschimbate, obținem o configurație $\mathcal{C}'$ formată din segmente cu capetele de culori diferite și cu suma lungimilor segmentelor mai mică decît suma lungimilor segmentelor din configurația $\mathcal{C}$, ceea ce contrazice proprietatea de minimalitate a configurației $\mathcal{C}$

5. a) Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2+bx+c$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b,c \in \mathbb{R}$) și $\alpha \in \mathbb{R}$. Demonstrați că $\max\{|f(\alpha-1)|, |f(\alpha)|, |f(\alpha+1)|\} \geq \frac{a}{2}$.

b) Dintre toate polinoamele de gradul 2 cu proprietatea că $|f(x)| \leq 2$, $(\forall)x \in [0,2]$ să se determine acela care are coeficientul dominant minim.

<u>Soluție.</u>

a) Avem: $f(\alpha-1) = a(\alpha^2-2\alpha+1)+b(\alpha-1)+c = f(\alpha)-2a\alpha+a-b$

$f(\alpha+1) = a(\alpha^2+2\alpha+1)+b(\alpha+1)+c = f(\alpha)+2a\alpha+a+b$,

deci

$$f(\alpha-1)+f(\alpha+1) = 2f(\alpha)+2a \Rightarrow a = \frac{f(\alpha-1)+f(\alpha+1)-2f(\alpha)}{2}$$

$\Rightarrow |a| \leq \frac{|f(\alpha-1)|+|f(\alpha+1)|+2|f(\alpha)|}{2} \leq \frac{M+M+2M}{2} = 2M$, unde $M =$

$= \max\{|f(\alpha-1)|, |f(\alpha)|, |f(\alpha+1)|\}$. Deci $M \geq \frac{a}{2} \geq \frac{|a|}{2}$. $(*)$

b) Din $M \geq \frac{|a|}{2}$ rezultă $|a| \leq 2M \Rightarrow -2M \leq a \leq 2M$.

Pentru $\alpha = 1$, obținem $M = \max\{|f(0)|, |f(1)|, |f(2)|\} \overset{ip}{\leq} 2$, deci $a \geq -4$. Incercăm să determinăm polinoamele de gradul 2 cu proprietatea din enunț cu $a=-4$.

Deoarece în $(*)$ avem egalitate, în mod necesar $|f(0)| = |f(1)| = |f(2)| = 2$. In plus, $a = \frac{f(0)+f(2)-2f(1)}{2} = -4$, deci $f(0) = f(2) = -2$, $f(1) = 2$.

Obținem sistemul

$$\begin{cases} c = -2 \\ a+b+c = 2 \\ 4a+2b+c = -2, \end{cases}$$ cu soluția $a = -4$, $c = -2$, $b = 8$.

Rămîne să verificăm că funcția $f(x) = -4x^2+8x-2$ are proprietatea $|f(x)| \leq 2$, $(\forall)x \in [0,2]$.

Deoarece $-\frac{b}{2a} = 1 \in [0,2]$, inegalitatea $|-4x^2+8x-2| \leq 2$ este echivalentă cu

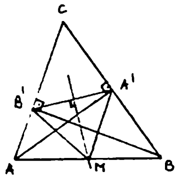
$$\begin{cases} |f(0)| \leq 2 \\ |f(1)| \leq 2 \\ |f(2)| \leq 2 \end{cases}$$, care (din felul în care am determinat pe a,b,c) sînt verificate cu egalitate.

6. In triunghiul ascuțitunghic ABC se duc înălțimile AA', BB', CC'. Demonstrați că:

a) Perpendicularele din mijloacele laturilor BC, CA, AB respectiv pe B'C', C'A', A'B' sînt concurente.

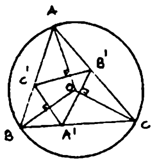
b) Perpendicularele din A, B, C respectiv pe B'C', C'A', A'B sînt concurente.

Soluţie.



a) Fie M mijlocul segmentului AB. Rezultă că $A'M = B'M = \frac{AB}{2}$, deci perpendiculara din M pe B'A' este mediatoarea segmentului B'A' şi analog pentru celelalte două perpendiculare. Punctul de concurenţă căutat este centrul cercului circumscris triunghiului A'B'C!

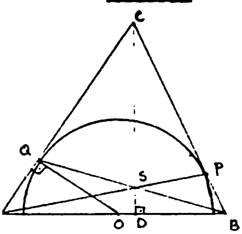
b) Perpendicularele din A, B, C respectiv pe B'C', C'A', A'B' sînt concurente în centrul cercului circumscris triunghiului ABC,



după cum rezultă imediat din teorema lui Nagel: $AO \perp B'C'$ (şi analoagele). Demonstraţia acestei teoreme o lăsăm pe seama cititorului.

7. În triunghiul ascuţitunghic ABC se înscrie un semicerc cu centrul pe |AB|, tangent la BC şi AC respectiv în P şi Q. Fie $\{S\} = AP \cap BQ$. Demonstraţi că $CS \perp AB$.

Soluţie.



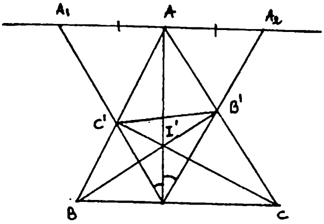
Fie D piciorul înălţimii din C a triunghiului. Trebuie să demonstrăm că dreptele CD, AP şi BQ sînt concurente, adică

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1 \iff \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BP}{QA} = 1,$$

egalitate care rezultă din asemănările $\triangle AQO \sim \triangle ADC$ şi $\triangle BPO \sim \triangle BDC$.

8. Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC şi $A' \in |BC|$, $B' \in |AC|$, $C' \in |AB|$ astfel încît AA', BB', CC' sînt bisectoarele unghiurilor triunghiului A'B'C'. Demonstraţi că A', B', C' sînt picioarele înălţimilor triunghiului ABC.

Soluţie.



Să arătăm că $AA' \perp BC$.

Ducem prin A paralela la BC şi notăm cu A_1 şi A_2 intersecţiile acestei drepte respectiv cu A'C' şi A'B'.

AA', BB', CC' sînt concurente, deci

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1 \qquad (1)$$

Dar $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AA_1}{BA'}$ şi $\frac{CB'}{B'A} = \frac{A'C}{AA_2}$, şi atunci din (1) rezultă $AA_1 = AA_2$. Prin urmare în triunghiul $A_1A'A_2$, AA' este bisectoare şi mediană, deci este şi înălţime. Rezultă că $AA' \perp BC$ ($\parallel A_1A_2$). Analog se arată că $BB' \perp AC$.

9. Se consideră 1987 de mulţimi, fiecare avînd 45 de elemente. Demonstraţi că dacă oricare două dintre acestea au un singur element comun, atunci toate cele 1987 de mulţimi au un element comun.

Soluţie.

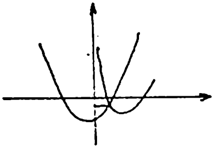
Fie $A_1, A_2, \ldots, A_{1987}$ cele 1987 de mulţimi şi $A_1 \cap A_2 = \{x\}$. Arătăm că există cel puţin 51 de mulţimi (din cele date) care îl conţin pe x. (*)

Dacă toate mulţimile A_i îl conţin pe x, problema este rezolvată. Presupunem că există o mulţime A care nu-l conţine pe x. Rezultă că A are un element comun cu $A_1 - \{x\}$ şi un element comun cu $A_2 - \{x\}$, deci există cel mult 44.44 = 1936 mulţimi A, adică cel puţin 1987-1936 = 51 mulţimi care îl conţin pe x.

Fiecare din aceste 51 de mulţimi are un element comun cu A şi, ţinînd seama de ipoteză, rezultă că A are cel puţin 51 de elemente, absurd.

10. Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}^*$ soluţiile ecuaţiilor $x^2 + \frac{8}{a}x - 2a = 0$ şi $x^2 + \frac{6}{a}x - a = 0$ sînt distincte şi se separă ?

Soluţie.



Făcînd un desen deducem că o condiţie necesară ca rădăcinile a două polinoame de gradul II, f şi g, să se separe este ca graficelor să se intersecteze sub axa Ox. Vom pune deci condiţiile $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ şi $f(x_1) = g(x_1) < 0$. Egalînd $f(x) = g(x)$, obţinem $x_1 = \frac{a^2}{2}$ iar $f(x_1) = \frac{1}{4}a^4 + 2a$, care este negativ pentru $a \in (-2,0)$, iar aceste valori ale lui a verifică şi inegalităţile $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$.

11. Să se determine funcţiile $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(xy) = xf(x) + yf(y), \quad (\forall)\ x,y \in D \qquad (*),$$

dacă

a) $D = \mathbb{R}$

b) $D = (0,a)$ cu $0 < a < 1$.

Soluţie.

a) Făcînd $x = y = 0$ rezultă imediat că $f(0) = 0$, iar pentru $y=0$ obţinem $0 = f(0) = xf(x)$, deci $f(x) = 0$ $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$. Prin urmare $f(x) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

Putem proceda şi astfel:

Pentru $x = y = 1$ $f(1) = 0$, deci $0 = f(1.x) = 1.f(x) + yf(1) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

b) Metoda de la a) nu mai este aplicabilă căci 0 şi 1 nu aparţin lui D. Înlocuind succesiv în $(*)$ $y = x, x^2, x^3$ obţinem:

$f(x^2) = 2xf(x)$

$f(x^3) = xf(x) + x^2f(x^2) = (x+2x^3)f(x)$

$f(x^4) = xf(x) + x^3f(x^3) = (x+x^4+2x^6)f(x)$.

Pe de altă parte, $f(x^4) = f(x^2.x^2) = 2x^2f(x^2) = 4x^3f(x)$, deci

$(x+x^4+2x^6)f(x) = 4x^3f(x) \Rightarrow f(x) = 0$ cu excepţia unui număr finit de puncte (soluţiile ecuaţiei $x+x^4+2x^6 = 4x^3$).

Fie x_0 o soluţie a ecuaţiei $x+x^4+2x^6=4x^3$ ($x_0 \neq 0$ şi $x_0 \neq 1$ căci 0 şi $1 \notin D$).

Dacă $f(x_0) \neq 0$, atunci $f(x_0^2) \neq 0 \Rightarrow f(x_0^4) \neq 0$ şi, în general, $f(x_0^{2^k}) \neq 0$ deci $f(x)$ ar fi nenulă într-o infinitate de puncte, absurd.

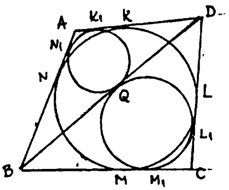
Deci $f(x) = 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

12. Fie ABCD un patrulater circumscriptibil. Să se arate că:

a) Cercurile înscrise în triunghiurile ABD şi BDC sînt tangente.

b) Punctele de tangenţă ale acestor cercuri cu laturile patrulaterului sînt vîrfurile unui patrulater inscriptibil.

Soluţie.



a) Fie R şi Q punctele de tangenţă ale cercurilor înscrise în triunghiurile ABD şi BDC cu dreapta BD.

Atunci $RQ = |BQ-BR| = |(p-AD)-(p'-BD)| =$
$= \frac{1}{2}|(AB+BD-AD)-(BC+BD-DC)| = \frac{1}{2}|(AB+DC) - (AD+BC)| = 0$, deci $R = Q$.

b) Notăm cu K, L, M, N punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile patrulaterului, iar cu K_1, L_1, M_1, N_1 punctele de tangenţă ale cercurilor înscrise în triunghiurile ABD şi BCD cu laturile patrulaterului (vezi figura).

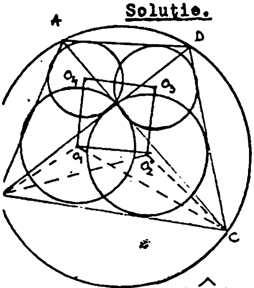
Atunci $N_1K_1 \parallel NK$ şi $M_1L_1 \parallel ML$. Demonstrăm că şi $K_1L_1 \parallel KL$, $N_1M_1 \parallel NM$:

Din a) rezultă că $BN_1 = BQ = BM_1$ şi $BM = BN$, deci $MN \parallel M_1N_1$ şi analog $K_1L_1 \parallel KL$.

Prin urmare, patrulaterul $M_1N_1K_1L_1$, ca şi patrulaterul KLMN, este inscriptibil, c.c.t.d.

13. Fie ABCD un patrulater inscriptibil. Demonstraţi că centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABC, BCD, CDA, DAB sînt vîrfurile unui dreptunghi.

Soluție.



Se demonstrează ușor că dacă I este centrul cercului înscris într-un triunghi ABC atunci $m(\widehat{BIC}) = 90^\circ + m(\frac{\widehat{BAC}}{2})$ (1).

Folosind această proprietate, cu notațiile din figură, obținem :

$$m(\widehat{BO_1C}) = 90^\circ + \frac{1}{2}\, m(\widehat{BAC})$$
$$m(\widehat{BO_2C}) = 90^\circ + \frac{1}{2}\, m(\widehat{BDC}).$$

Deoarece $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BDC})$ rezultă că $m(\widehat{BO_1C}) = m(\widehat{BO_2C})$, deci patrulaterul BO_1O_2C este inscriptibil.

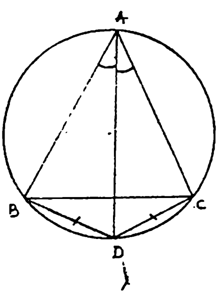
Analog se demonstrează că patrulaterul CO_2O_3D este inscriptibil.

Rezultă că $m(\widehat{O_1O_2C}) = 180^\circ - \frac{1}{2}\, m(\hat{B})$ și $m(\widehat{O_3O_2C}) = 180^\circ - \frac{1}{2} m(\hat{D})$, deci $m(\widehat{O_1O_2O_3}) = 360^\circ - m(\widehat{O_1O_2C}) - m(\widehat{O_3O_2C}) = 360^\circ - 180^\circ + \frac{1}{2}\, m(\hat{B}) - 180^\circ + \frac{1}{2}\, m(\hat{D}) = \frac{m(\hat{B}) + m(\hat{D})}{2} = 90^\circ$.

Analog se arată că măsurile celorlalte unghiuri ale patrulaterului $O_1O_2O_3O_4$ sînt de 90°.

14. Fie D punctul de intersecție a bisectoarei unghiului A al triunghiului ABC cu cercul circumscris triunghiului. Demonstrați că $AD > \frac{AB + AC}{2}$.

Soluție.



Din teorema lui Ptolemeu rezultă că

$$AD = \frac{AB.DC + AC.BD}{BC}.$$

Cum BD = DC, inegalitatea de demonstrat devine

$$\frac{DC(AB+AC)}{BC} > \frac{AB+AC}{2} \iff 2DC > BC \iff$$
$\iff BD+DC > BC$, inegalitate evidentă ($\triangle BDC$).

15. a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi d un divizor natural al lui n^2. Demonstraţi că n^2+4d nu este pătrat perfect.

b) Fie $a,b \in \mathbb{Z}$ şi $p(x) = x^2+ax+b$. Arătaţi că există $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ astfel încît $p(\alpha) \in \mathbb{Z}$.

<u>Soluţie.</u>

a) Fie $n^2 = k.d$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. Dacă n^2+4d este pătrat perfect, atunci $n^2+4d = m^2 \Rightarrow n^2 + \frac{4n^2}{k} = m^2 \Rightarrow k^2m^2 = n^2(k^2+4k)$.

Rezultă că k^2+4k este pătrat perfect. Dar $k^2 < k^2+4k < (k+2)^2$, deci $k^2+4k = (k+1)^2 \Rightarrow 4k = 2k+1$, absurd.

b) Fie d un divizor al lui a^2. Din a) rezultă că ecuaţia $x^2+ax-d = o$ are o soluţie iraţională $= \frac{-a+\sqrt{a^2+4d}}{2}$.

Pentru acest α, $\alpha^2+a\alpha-d = o \Rightarrow \alpha^2+a\alpha+b = b+d \Rightarrow p(\alpha) = b + d \in \mathbb{Z}$.

16. Se consideră numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ distincte două cîte două. Determinaţi valoarea minimă a funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = |x-a_1| + |x-a_2| + \ldots + |x-a_n|.$$

<u>Soluţie.</u>

Observăm mai întîi că pentru $a < b$,

$$|x-a| + |x-b| = \begin{cases} a+b-2x & \text{pentru } x \leq a \\ -a+b & \text{pentru } a \leq x \leq b \\ 2x-a-b & \text{pentru } x \geq b \end{cases},$$

deci $|x-a| + |x-b|$ îşi atinge valoarea minimă $-a+b$ în fiecare punct din intervalul $a \leq x \leq b$.

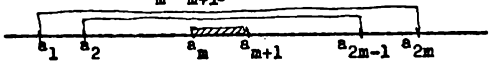
Această observaţie ne permite să găsim soluţia problemei.

Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Pentru n par, $n = 2m$, putem scrie pe $f(x)$ ca o sumă de m termeni, grupînd primul termen cu ultimul, al 2-lea cu penultimul, etc:

(*) $f(x)=(|x-a_1|+|x-a_{2m}|)+(|x-a_2|+|x-a_{2m-1}|)+\ldots+(|x-a_m|+|x-a_{m+1}|)$

Suma $y_i = |x-a_i| + |x-a_{2m+1-i}|$ $(i=\overline{1,m})$ are cea mai mică valoare în intervalul $a_i \leq x \leq a_{2m+1-i}$, în care este constantă. Fiecare interval

$[a_1, a_{2m+1-i}]$ îl conține pe următorul, iar toate aceste intervale au în comun intervalul $[a_m, a_{m+1}]$:



În fiecare punct al acestui interval, fiecare din sumele y_i are valoarea minimă, deci $f(x)$ are de asemenea valoarea minimă, pe care o determinăm făcînd în (*) $x = a_m$ sau $x = a_{m+1}$.

Valoarea minimă va fi deci în acest caz

$$-a_1 - a_2 - \dots - a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$$

Pentru $n = 2m+1$, $f(x)$ se scrie sub forma

$f(x) = (|x-a_1| + |x-a_n|) + \dots + (|x-a_m| + |x-a_{m+2}|) + |x-a_{m+1}|$.

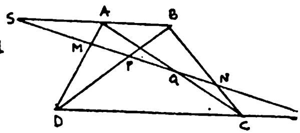
Ca și în cazul n par se arată ușor că fiecare din sumele $y_i = |x-a_i| + |x-a_{n+1-i}|$ are cea mai mică valoare pentru $x = a_{m+1}$. De asemenea, $|x-a_{m+1}|$ are valoarea minimă pentru $x = a_{m+1}$, deci în acest caz valoarea minimă a lui f este

$$-a_1 - a_2 - \dots - a_m + a_{m+2} + a_{m+3} + \dots + a_n.$$

17. Se dă trapezul ABCD cu $AB \parallel CD$. Pe laturile neparalele AD și BC se iau respectiv punctele M și N astfel încît $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NB}$. Fie $\{P\} = MN \cap AC$ și $\{Q\} = MN \cap BD$. Demonstrați că $MP = NQ$.

<u>Soluție.</u>

Dacă $MN \parallel AB$ concluzia problemei rezultă ușor.



Dacă $MN \nparallel AB$, fie $\{S\} = MN \cap AB$ și $\{T\} = MN \cap DC$. Avem: $\Delta SMA \sim \Delta TMD \Rightarrow \frac{SM}{TM} = \frac{MA}{MD} = \frac{SA}{TD}$, $\Delta CNT \sim \Delta BNS \Rightarrow \frac{CN}{BN} = \frac{NT}{NS} = \frac{CT}{BS}$. Ținînd seama de ipoteză, deducem că $\frac{SM}{TM} = \frac{NT}{NS} \Leftrightarrow \frac{SM}{SM+TM} = \frac{NT}{NT+NS} \Rightarrow SM = NT$ și $\frac{SA}{TD} = \frac{CT}{BS} \Rightarrow \frac{SA}{CT} = \frac{TD}{BS}$.

De asemenea,

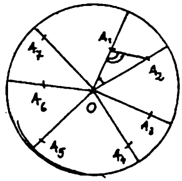
$\frac{SQ}{QT} = \frac{SA}{CT}$ și $\frac{SP}{PT} = \frac{SB}{DT}$, deci $\frac{SQ}{QT} = \frac{PT}{SP}$ de unde obținem că

SQ = PT, deci SP = QT. Ţinînd seama de relaţia SM = NT (demonstrată anterior), concluzia este evidentă.

18. Într-un cerc de rază r se iau 8 puncte distincte. Demonstraţi că printre acestea există două cu distanţa dintre ele mai mică decît r.

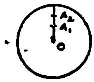
Soluţie.

Din cele 8 puncte, cel puţin 7 nu coincid cu centrul cercului. Unim aceste (cel puţin) 7 puncte cu centrul cercului. Dacă toate cele 7 segmente obţinute sînt distincte, cel puţin unul din cele 7 unghiuri la centru care se formează între ele este mai mic decît $\frac{1}{6} \cdot 360^{\circ} = 60^{\circ}$.



Presupunem de exemplu că $m(\widehat{A_1OA_2}) < 60^{\circ}$. Atunci în triunghiul OA_1A_2 există un unghi mai mare, de exemplu $\sphericalangle A_2$. Rezultă că $A_1A_2 < OA_2 \leq r$.

Dacă obţinem mai puţin de 7 segmente, atunci cel puţin două puncte (de exemplu A_1 şi A_2) sînt coliniare cu O, şi în acest caz $A_1A_2 < r$.



2. B. Soluţiile testelor prin corespondenţă, ediţia 1987, pentru clasa a X-a.

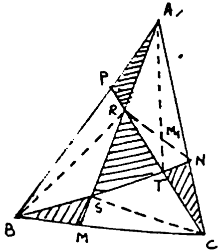
19. În figura de mai jos, ariile celor patru triunghiuri haşurate sînt egale.

a) Demonstraţi că şi ariile celor trei patrulatere sînt egale.

b) Dacă ariile triunghiurilor haşurate sînt egale cu 1, determinaţi aria unui patrulater.

Soluţie.

a) $\sigma[RST] = \sigma[TNC] \Rightarrow RN \parallel SC$. Fie $\{M_1\} = AT \cap RN$. Dintre



proprietate caracteristică a trapezului rezultă că M_1 este mijlocul lui RN, deci $\sigma[ART] = \sigma[ARM_1] + \sigma[RTM_1] = \sigma[AM_1N] + \sigma[TNM_1] = \sigma[ATN]$.

Prin urmare $\sigma[APT] = \sigma[ATC]$, deci T este mijlocul segmentului PC. Dar atunci $\sigma[BTP] = \sigma[BTC]$, de unde rezultă că $\sigma[BSRP] = \sigma[MSTC]$.

Analog se arată că $\sigma[MSTC] = \sigma[ARTN]$.

b) Avem: $\dfrac{\sigma[RBS]}{\sigma[BSM]} = \dfrac{\sigma[RSC]}{\sigma[SCM]} = \dfrac{RS}{SM}$, de unde (notînd $\sigma[MCTS] = x$ şi ţinînd seama de cele demonstrate la a)):

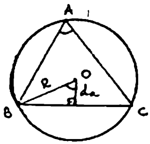
$$\frac{\frac{x}{2}}{1} = \frac{1 + \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x}{2} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{5}.$$

20. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi O centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

a) Dacă d_a, d_b, d_c sînt respectiv distanţele de la O la laturile triunghiului, arătaţi că $d_a + d_b + d_c = R + r$.

b) Demonstraţi că $\max\{h_a, h_b, h_c\} \geq R + r$.

Soluţie.



a) $d_a + d_b + d_c = R(\cos A + \cos B + \cos C) = R(1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}) = R(1 + \frac{r}{R}) = R + r$. (Relaţia $\sum d_a = R+r$ se numeşte relaţia lui Carnot).

b) Presupunem că $\max\{h_a, h_b, h_c\} = h_a$.

Atunci $a \leq b$, $a \leq c$ şi $2\sigma[ABC] = ah_a = ad_a + bd_b + cd_c \geq a(d_a + d_b + d_c) = a(R + r)$, deci $h_a \geq R+r$ (Erdös).

21. Demonstraţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ecuaţia $x^2+y^2 = z^n$ are soluţie în $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Soluţie.

Demonstrăm prin inducţie matematică cu pasul 2.

Proprietatea este adevărată pentru $n = 1$ şi $n = 2$ (ecuaţia $x^2+y^2 = z$ are soluţia $(1,1,2)$, iar ecuaţia $x^2+y^2 = z^2$ are soluţia $(3,4,5)$).

Presupunem că ecuaţia $x^2+y^2 = z^n$ are soluţie în $(\mathbb{N}^*)^3$ şi arătăm că şi ecuaţia $x^2+y^2 = z^{n+2}$ are soluţie în $(\mathbb{N}^*)^3$:

$x_0^2 + y_0^2 = z_0^n \Rightarrow (x_0z_0)^2 + (y_0z_0)^2 = z_0^{n+2}$, deci ecuaţia $x^2+y^2 = z^{n+2}$ are în $(\mathbb{N}^*)^3$ soluţia (x_0z_0, y_0z_0, z_0).

22. Într-un cerc de rază 1 se înscrie un poligon regulat $A_1A_2\ldots A_n$. Demonstraţi că dacă P este un punct de pe cercul circumscris poligonului, atunci

$$PA_1^2 + PA_2^2 + \ldots + PA_n^2 = 2n.$$

<u>Soluţie.</u>

Fie $A_k(z_k)$, unde z_k, $k=\overline{1,n}$ sînt soluţiile ecuaţiei $z^n - 1=0$, şi $P(z)$. Atunci

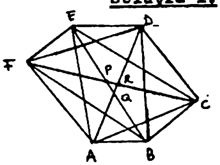
$$\sum_{k=1}^{n} PA_k^2 = \sum_{k=1}^{n} |z-z_k|^2 = \sum_{k=1}^{n}(z-z_k)(\bar z-\bar z_k) = \sum_{k=1}^{n}(z\cdot\bar z - z_k\cdot\bar z - z\cdot\bar z_k + z_k\cdot\bar z_k) = nz\cdot\bar z - \bar z\sum_{k=1}^{n} z_k - z\sum_{k=1}^{n}\bar z_k + \sum_{k=1}^{n} z_k\cdot\bar z_k.$$

Dar, $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$ (din relaţiile lui Viète) deci şi $\sum_{k=1}^{n}\bar z_k = 0$, deci

$$\sum_{k=1}^{n} PA_k^2 = n|z|^2 + n = n + n = 2n, \text{ c.c.t.d.}$$

23. Laturile opuse AB şi DE, BC şi EF, CD şi FA ale hexagonului convex ABCDEF sînt paralele. Demonstraţi că $\sigma[ACE] = \sigma[BDF]$.

<u>Soluţia 1.</u>



$$\sigma[ACE] = \sigma[ACR] + \sigma[CPE] + \sigma[EQA] + \sigma[PRQ]$$

$$\sigma[BDF] = \sigma[FRD] + \sigma[FPB] + \sigma[DQB] + \sigma[PRQ].$$

Dar

$\sigma[ACR] = \sigma[FRD]$ (din trapezul FADC), etc.

Soluţia a 2-a.

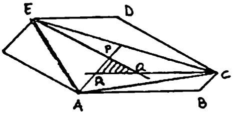


Fig.1

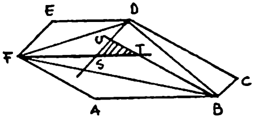


Fig.2

Ducem prin A, C, E paralele la FB (şi BC), AB, DC şi se formează cîte paralelogramele ABCR, APEF, EQCD (vezi Fig.1). Rezultă că

$\sigma[ACE] = \frac{1}{2}(\sigma[ABCDEF]) + \sigma[PQR]$.

Analog, $\sigma[FDB] = \frac{1}{2}(\sigma[ABCDEF]) + \sigma[UST]$.

Triunghiurile PQR şi UST (eventual degenerate) sînt însă congruente, căci $PR = |FE-BC| = US$, etc.

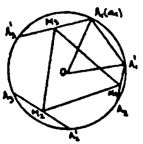
Din această soluţie rezultă următoarele consecinţe:

1) $\sigma[ACE] \geq \frac{1}{2}\sigma[ABCDEF]$.

2) $\min\{\sigma[EAF], \sigma[ABC], \sigma[CDE]\} \leq \frac{1}{6}\sigma[ABCDEF]$.

24. Hexagonul convex $A_1A_1'A_2A_2'A_3A_3'$ este înscris într-un cerc şi $m(\overset{\frown}{A_1A_1'}) = m(\overset{\frown}{A_2A_2'}) = m(\overset{\frown}{A_3A_3'}) = 60^\circ$. Demonstraţi că mijloacele coardelor $A_1'A_2$, $A_2'A_3$, $A_3'A_1$ sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

Soluţie.



Fie $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Alegem originea sistemului de coordonate în centrul cercului. Deoarece triunghiurile OA_1A_1', OA_2A_2', OA_3A_3' sînt echilaterale, rezultă că

$$a_1' + \omega a_1 = 0$$
$$a_2' + \omega a_2 = 0$$
$$a_3' + \omega a_3 = 0 .$$

Avem :

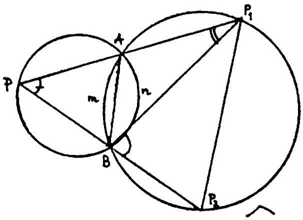
$$m_1 + \omega^2 m_2 + \omega m_3 = \frac{1}{2}\left[a_1' + a_2 + \omega^2(a_2'+a_3) + \omega(a_3'+a_1)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(a_1' + a_1) + \omega^2(a_2'+\omega a_2) + \omega(a_3'+\omega a_3)\right] = 0,$$

deci triunghiul $M_1M_2M_3$ este echilateral.

25. Fie $\mathcal{C}_1(O_1,r_1)$ şi $\mathcal{C}_2(O_2,r_2)$, $r_1 < r_2$ două cercuri secante în A şi B şi $P \in \mathcal{C}_1$. Dacă P_1 şi P_2 sînt intersecţiile dreptelor PA şi PB cu $\mathcal{C}_2$, să se arate că raza cercului circumscris triunghiului PP_1P_2 este egală cu O_1O_2.

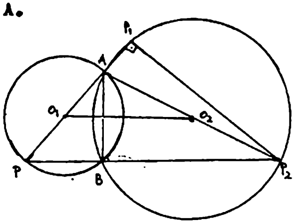
<u>Soluţie.</u>



Arătăm mai întîi că segmentul P_1P_2 are o lungime constantă (sau, echivalent, $m(\overset{\frown}{P_1P_2})$ = constant).

Avem: $m(\overset{\frown}{P_1P_2}) = 2m(\widehat{P_1BP_2}) = 2(m(\widehat{BP_1P}) + m(\widehat{BPP_1})) = m(\overset{\frown}{AmB}) + m(\overset{\frown}{AnB})$ = constant (am folosit faptul că unghiul $\widehat{P_1BP_2}$ este unghi exterior triunghiului PBP_1).

Pentru a determina lungimea segmentului P_1P_2 vom lua o poziţie particulară a lui P şi anume luăm punctul P diametral opus lui A.



Atunci $m(\widehat{ABP}) = m(\widehat{ABP_2}) = 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow AP_2$ diametru $\Rightarrow O_1O_2$ linie mijlocie în triunghiul APP_2.

Rezultă că $P_1P_2 = PP_2 \sin P = 2O_1O_2 \sin P$.

Acum concluzia problemei rezultă imediat din teorema sinusului: $P_1P_2 = 2R\sin P = 2O_1O_2 \sin P$
$\Rightarrow R = O_1O_2$.

26. Demonstrați că nu există progresii aritmetice (neconstante) infinite de numere naturale în care toți termenii sînt pătrate perfecte.

Soluție.

Presupunem că avem progresia $a_1 < a_2 < \dots a_n < \dots$ în care $a_k = b_k^2$, $(\forall)\ k \in N, (b_k \in N)$.

Atunci $b_1 < b_2 < \dots < b_n < \dots$, deci $(\exists)\ k \in N$: $r < 2b_k + 1$.

Rezultă că $b_k^2 = a_k < a_{k+1} = a_k + r < b_k^2 + 2b_k + 1 = (b_k+1)^2$, deci a_{k+1} nu este pătrat perfect (fiind cuprins între două pătrate perfecte consecutive), absurd.

27. Să se găsească soluțiile ecuației

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = 0.$$

Soluție.

Demonstrăm prin inducție după n propoziția:

$$\mathcal{P}(n):\ 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n (x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n!}.$$

$\mathcal{P}(1)$ este adevărată. Presupunem că $\mathcal{P}(n)$ este adevărată, adică

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n (x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n!}.$$

Atunci

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} + \frac{(-1)^{n+1} x(x-1)\dots(x-n)}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n (x-1)(x-2)\dots(x-n)}{n!} +$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1} x(x-1)\dots(x-n)}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1}(x-1)\dots(x-n)}{(n+1)!}(x-n-1) =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}(x-1)(x-2)\dots(x-n-1)}{(n+1)!},$$

adică $\mathcal{P}(n+1)$ este adevărată.

Deci $1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{(-1)^n (x-1)(x-2) \ldots (x-n)}{n!} = 0 \Rightarrow x_k = k,\ k = \overline{1,n}.$

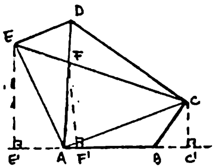
28. Fie ABCDE un pentagon convex de arie S şi s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 respectiv ariile triunghiurilor ABC, BCD, CDE, DEA, EAB.

a) Arătaţi că cel puţin unul dintre numerele s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 este mai mare decît $\frac{S}{5}$.

b) Dacă $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = 1$, să se determine S.

Soluţie.

a) Demonstrăm o inegalitate mai tare: cel puţin unul dintre numerele s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 este $> \frac{S}{4}$.



Să presupunem de exemplu că s_1 este cel mai mic dintre numerele s_1, s_2, s_3, s_4, s_5.

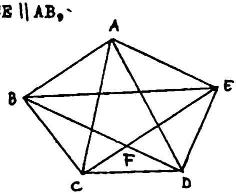
Notăm cu F intersecţia diagonalelor AD şi EC. Atunci $S < \sigma[AED] + \sigma[EDC] + \sigma[ABCF]$. Deoarece $F \in (EC)$ şi $\sigma[ABC] \leq \sigma[EAB]$, rezultă că $\sigma[EAB] \geq \sigma[FAB]$. Analog, $\sigma[DBC] \geq \sigma[FCB]$.

Prin urmare, $\sigma[ABCF] = \sigma[FAB] + \sigma[FCB] \leq \sigma[EAB] + \sigma[DCB]$, de unde

$$S < \sigma[AED] + \sigma[EDC] + \sigma[EAB] + \sigma[DBC],$$

deci cel mai mare din numerele s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 este mai mare decît $\frac{S}{4}$.

b) Deoarece $\sigma[EDC] = \sigma[DCB] = 1$, $BE \parallel CD$. Analog $BD \parallel AE$ şi $CE \parallel AB$.



Notînd $\{F\} = CE \cap BD$ rezultă că ABFE este paralelogram, deci $\sigma[BFE] = \sigma[ABE] = 1$ şi BCDE este trapez, deci $\sigma[BFC] =$

$\sigma[FDE] \overset{not}{=} y$.

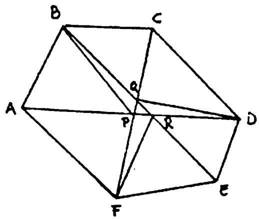
Notînd $\sigma[CFD] = x$, obținem

$x + y = 1$ și (deoarece $\frac{\sigma[BFC]}{\sigma[BFE]} = \frac{\sigma[CFD]}{\sigma[FDE]} = \frac{CF}{FE}$) $y^2 = x$.

Rezolvînd acest sistem rezultă $y = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, deci $\sigma[ABCDE] = 2 + y + x + y = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})$.

29. Hexagonul convex ABCDEF are aria S. Demonstrați că cel puțin unul dintre triunghiurile ABC, BCD, CDE, EDF, EFA, FAB are aria $\leq \frac{S}{6}$.

Soluție.

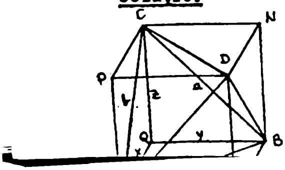


Fie $\{P\} = AD \cap CF$, $\{R\} = AD \cap BE$, $\{Q\} = FC \cap BE$. Patrulaterele APCB și CQED nu au puncte interioare comune, căci P, C, Q sînt coliniare iar AB și DE sînt de o parte și de alta a dreptei CF. Analog, patrulaterele APCB, CQED și EFAR nu au puncte interioare comune, deci suma ariilor lor nu depășește S. Prin urmare, cel puțin unul din triunghiurile ABP, BCP, CDQ, DEQ, AFR, FER, de exemplu ABP, are aria $\leq \frac{S}{6}$.

Cum $P \in (FC)$, sau $d(C,AB) \leq d(P,AB)$, sau $d(F,AB) \leq d(P,AB)$, deci sau $\sigma[ABC] \leq \sigma[ABP] \leq \frac{S}{6}$, sau $\sigma[ABF] \leq \sigma[ABP] \leq \frac{S}{6}$.

30. Demonstrați că între raza r a sferei înscrise într-un tetraedru echifacial și raza R a cercului circumscris unei fețe are loc inegalitatea $R \geq 2\sqrt{2}\, r$.

Soluție.



Considerăm paralelipipedul în care este înscris tetraedrul ABCD (vezi figura). Deoarece tetraedrul este echifacial, acest paralelipiped este dreptunghic. Notăm cu x, y, z dimensiunile paralelipipedului.

Atunci volumul tetraedrului ABCD este $V = \frac{1}{3}xyz$. Avem: $x^2+y^2 = c^2$, $y^2+z^2 = a^2$, $z^2+x^2 = b^2$, de unde $x^2 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} = bc\cos A$, $y^2 = \frac{c^2+a^2-b^2}{2} = ac\cos B$, $z^2 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2} = ab\cos C$, unde A, B, C sînt unghiurile triunghiului ABC, deci

$$V = \frac{abc}{3}\sqrt{\cos A\cos B\cos C} \leq \frac{abc}{3.2\sqrt{2}} (\cos A\cos B\cos C \leq \tfrac{1}{8})$$

Pe de altă parte, $V = \frac{4}{3}Sr$, $abc = 4RS$ ($S = \sigma[ABC]$), de unde rezultă că

$$\frac{4}{3}Sr \leq \frac{4RS}{3.2\sqrt{2}} \Longrightarrow R \geq 2\sqrt{2}\,r, \text{ c.c.t.d.}$$

31. Fie a, $a+r$, ..., $a+nr$, ... o progresie aritmetică infinită neconstantă de numere reale. Demonstrați că această progresie conține o progresie geometrică infinită dacă și numai dacă $\frac{a}{r} \in Q$.

<u>Soluție.</u>

Presupunem că $\frac{a}{r} \in Q$. Fără a restrînge generalitatea, putem considera că a și r au același semn, deci $\frac{a}{r} = \frac{p}{q}$ cu $p,q \in N$.

Atunci, pentru orice $m \in N$, numărul $n_m = \frac{a(1+q)^m-a}{r} = \frac{a}{r}\left[(1+q)^m-1\right] = \frac{p}{q}\left[(1+q)^m - 1\right]$ este natural nenul, deci orice termen al progresiei geometrice $a(1+q)^m$ ($m \in N$) este de forma $a+r.n_m$, adică aparține progresiei aritmetice date.

Reciproc, dacă progresia $\{a+nr\}_{n\in N}$ conține numerele $a+kr$, $a+\ell r$, $a+mr$ în progresie geometrică cu $k < \ell < m$ și $2\ell-k-m \neq 0$, atunci $(a+\ell r)^2 = (a+kr)(a+mr)$, de unde rezultă $2a\ell r + \ell^2r^2 = amr + akr + kmr^2 \Longrightarrow a(2\ell-m-k) = r(km-\ell^2) \Longrightarrow \frac{a}{r} = \frac{km-\ell^2}{2\ell-m-k} \in Q$.

32. Fie $A = \{1, 2, ..., n\}$ și $p \in N^*$, $p \leq n$. Determinați numărul submulțimilor de p elemente ale lui A care nu conțin două numere consecutive.

Soluție.

Fie $X = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$, $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ o submulțime de p elemente a lui A care nu conține două numere consecutive. Atunci numerele $x_1, x_2-1, x_3-2, \dots, x_p-p+1$ sînt distincte și deci $\{x_1, x_2-1, \dots, x_p-p+1\}$ este o submulțime a mulțimii $\{1, 2, \dots, n-p+1\}$

Reciproc, dacă $\{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ $(y_1 < y_2 \dots < y_p)$ este o submulțime de p elemente a mulțimii $\{1, 2, \dots, n-p+1\}$, punînd $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2+1, \dots, x_p = y_p + p+1$, obținem o submulțime de p elemente a mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$ care nu conține două numere consecutive.

Prin urmare numărul cerut este C^p_{n-p+1}.

33. Dacă a, b, c sînt lungimile laturilor unui triunghi, atunci

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2.$$

Soluție.

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \Leftrightarrow a^3 - a(b-c)^2 - abc + b^3 - b(c-a)^2 - abc + c^3 - c(a-b)^2 - \quad 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(a^2 - b^2 - c^2 + bc) + b(b^2 - a^2 - c^2 + ac) + c(c^2 - a + ab) \geq 0 \Leftrightarrow a(bc - 2bc\cos A) + b(ac - 2ac\cos B) + c(ab - 2ab\cos C) \geq 0 \Leftrightarrow abc\,[3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C)] \geq 0 \Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{r}{R} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow R \geq \frac{1}{2} r.$$

34. Se consideră șirul de numere naturale

$1 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ cu proprietatea că $x_{n+1} \leq 2n$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

Demonstrați că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ există x_i, x_j aparținînd șirului dat, astfel încît $x_i - x_j = k$.

Soluție.

Fie r_j restul împărțirii lui x_j prin k.

Considerînd numerele $r_1, r_2, \ldots, r_{k+1}$, din principiul lui Dirichlet deducem că există $i,j \in \overline{1,k+1}$, $i<j$: $r_i = r_j$.

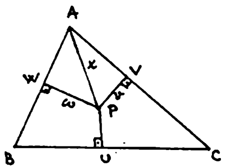
Deoarece $o < x_i < x_j \leq x_{k+1} \leq 2k$ şi $x_j - x_i : k$, rezultă că $x_i - x_j = k$.

35. Fie P un punct interior triunghiului ascuţitunghic ABC. Notăm cu u, v, w distanţele de la P la laturile BC, CA, AB (respectiv) şi AP = x, BP = y, CP = z. Demonstraţi inegalităţile:

a) $2x \sin \frac{A}{2} \geq v + w$.

b) $xyz \geq \frac{4R}{r} uvw$.

<u>Soluţie.</u>



a) În triunghiul dreptunghic WAP, $w = x \sin \widehat{WAP}$, iar în triunghiul VAP, $v = x \sin \widehat{VAP}$, deci $v+w = x(\sin \widehat{WAP} + \sin \widehat{VAP}) = 2x \sin \frac{A}{2} \cos \frac{\widehat{WAP}-\widehat{VAP}}{2} \leq 2x \sin \frac{A}{2}$.

b) Din punctul a) avem $2x \sin \frac{A}{2} \geq v + w$ şi analog se demonstrează că $2y \sin \frac{B}{2} \geq u + w$, $2z \sin \frac{C}{2} \geq v + w$, deci

$$8xyz \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geq (v + w)(u+ w)(v + w) \Leftrightarrow$$

$$\frac{2r}{R} xyz \geq (u + v)(u + w)(v + w).$$

Dar

$$(u +v)(u +w)(v + w) \geq 2\sqrt{uv} \cdot 2\sqrt{uw} \cdot 2\sqrt{vw} = 8uvw,$$

deci

$$xyz \geq \frac{4R}{r} uvw, \text{ c.c.t.d.}$$

36. Se consideră 13 puncte în plan, oricare trei necoliniare şi oricare patru neconciclice. Demonstraţi că printre acestea există trei, A, B, C, astfel încît cercul circumscris triunghiului ABC să conţină în interior exact 5 din cele 10 puncte rămase.

Soluţie.

Fie AB una din laturile înfăşurătoarei convexe a celor 13 puncte. Numerotăm celelalte puncte în ordinea crescătoare a unghiurilor sub care se vede segmentul AB din ele, adică P_1, P_2, ..., P_{11} astfel încît

$$m(\widehat{AP_1B}) < m(\widehat{AP_2B}) < \ldots \quad m(\widehat{AP_{11}B}).$$

Atunci punctele P_1, P_2, ..., P_5 sînt situate în exteriorul cercului circumscris triunghiului ABP_6, iar P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11} în interiorul său, deci cercul ABP_6 are proprietatea cerută.

3. NOTE SI COMENTARII

3.A. TEOREMA ARTICULATIEI (asupra problemei 2)

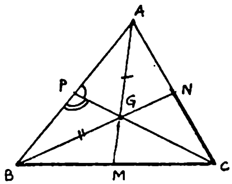
Se consideră triunghiurile ABC şi A'B'C' în care AB = A'B', AC = A'C' şi $m(\hat{A}) > m(\hat{A}')$. Atunci BC > B'C'. Reciproc, dacă AB = = A'B', AC = A'C' şi BC > B'C', atunci m(A) > m(A').

Demonstraţia acestei teoreme se găseşte în manualul de geometrie pentru clasa a X-a, ed. 1983, pg. 73.

Aplicaţii.

1) În triunghiul ABC, m(A) > m(B). Atunci $m_a < m_b$ şi reciproc.

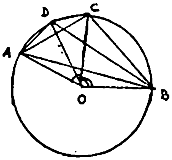
Demonstraţie.



Din teorema articulaţiei în triunghiurile ACP şi PCB rezultă că $m(\widehat{APC}) < m(\widehat{BPC})$ şi din teorema articulaţiei în triunghiurile PAG şi PBG obţinem atunci AG < BG, deci AM < BN.

2) Dacă ABCD este un patrulater inscriptibil cu $m(\hat{A}) < 90^{\circ}$, $m(\hat{B}) < 90^{\circ}$ şi $m(\hat{B}) > m(\hat{A})$, atunci diagonala ce se opune unghiului B este mai mare decît diagonala ce se opune unghiului A.

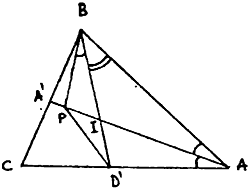
Demonstraţie.



$\triangle$ AOC şi $\triangle$ DOB: DO = AO = CO = = BO = R; $m(\hat{B}) > m(\hat{A}) \Rightarrow m(\widehat{ADC}) >$ $> m(\widehat{DCB}) \Rightarrow m(\widehat{AOC}) > m(\widehat{DOB}) \xRightarrow{T.A.}$ AC > DB.

3) Dacă în triunghiul ascuţitunghic ABC, $m(\hat{A}) < m(\hat{B})$, atunci $\ell_a > \ell_b$.

Demonstraţie. $m(\widehat{D'BC}) = \frac{1}{2} m(\hat{B}) >$ $> \frac{1}{2} m(A) = m(\widehat{BAA'}) \Rightarrow (\exists)\ P \in (AA')$:

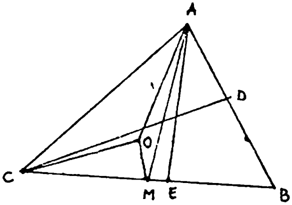


$m(\widehat{BAA'}) = m(\widehat{D'BP}) \Longrightarrow$ patrulaterul ABPD' este inscriptibil cu $m(\hat{A}) < m(\hat{B}) < 90^\circ \overset{2)}{\Longrightarrow}$ $BD' < AP \Longrightarrow BD' < AA'$.

<u>Consecință.</u> Triunghiul cu două bisectoare congruente este isoscel (teorema lui <u>Steiner-Lehmus</u>).

4) Într-un triunghi ascuțitunghic lungimea celei mai mici mediane nu depășește lungimea celei mai mari bisectoare.

<u>Soluție.</u>



Presupunem că $90^\circ > m(\hat{A}) \geq m(\hat{B}) \geq m(\hat{C})$ și arătăm că $CD \geq AM$ (CD- bisectoare, AM- mediană).

Arătăm că $m(\widehat{BAM}) \geq \frac{1}{2} m(\hat{C})$ și $m(\widehat{MAC}) \geq \frac{1}{2} m(C)$:

Deoarece $m(\hat{B}) \geq m(\hat{C})$, notând cu E piciorul bisectoarei din A rezultă că $E \in |BM|$, deci $m(\widehat{BAM}) \geq \frac{1}{2} m(\hat{A}) \geq 30^\circ \geq \frac{1}{2} m(\hat{C})$.

Apoi, dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, O este interior triunghiului AMC $\Rightarrow m(\widehat{OAC}) \leq m(\widehat{MAC})$.

Avem: $m(\widehat{OAC}) = \dfrac{180^\circ - m(\widehat{AOC})}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2} m(\widehat{AOC}) = 90^\circ - m(\hat{B})$.

Arătăm că $90^\circ - m(\hat{B}) \geq \frac{1}{2} m(C) \Leftrightarrow 180^\circ - 2m(\hat{B}) - m(\hat{C}) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) - 2m(\hat{B}) - m(\hat{C}) \geq 0 \Leftrightarrow m(\hat{A}) \geq m(\hat{B})$. Deci $m(\widehat{MAC}) \geq m(\widehat{OAC}) \geq \frac{1}{2} m(\hat{C})$.

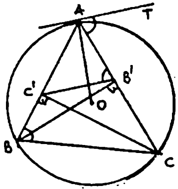
În continuare problema propusă se rezolvă analog cu aplicația 3.

3.B. TEOREMA LUI NAGEL SI "RELAȚIA LUI ȚIȚEICA"

(asupra problemei 6)

Teorema lui Nagel.

Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC iar B', C' sînt picioarele înălțimilor din B și C, atunci $AO \perp B'C'$.



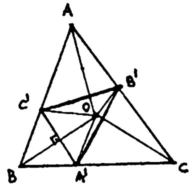
Demonstrație.

Patrulaterul BCB'C' este inscriptibil, deci $m(\widehat{AB'C'}) = m(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} m(\overset{\frown}{AC}) = m(\widehat{TAC})$ (AT este tangenta în A la cercul circumscris). Rezultă că $B'C' \parallel AT$, deci $AO \perp B'C'$.

Din teorema lui Nagel se poate deduce următoarea relație:

$$\sigma[ABC] = p_0 R, \quad (\text{" Relația lui Tițeica "})$$

unde p_0 este semiperimetrul triunghiului ortic iar R raza cercului circumscris triunghiului ABC.

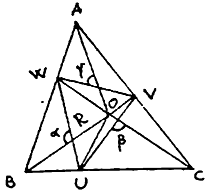


Demonstrație.

Fie A', B', C' picioarele înălțimilor triunghiului ABC. Atunci $\sigma[ABC] = \sigma[BA'OC'] + \sigma[CB'OA'] + \sigma[AC'OB']$. Din teorema lui Nagel rezultă că patrulaterele BA'OC', CB'OA', AC'OB' au diagonalele perpendiculare, deci

$$\sigma[ABC] = \frac{1}{2} R.C'A' + \frac{1}{2} R.A'B' + \frac{1}{2} R.C'B' = p_0 R.$$

Vom demonstra în continuare că dintre toate triunghiurile înscrise într-un triunghi dat, triunghiul de perimetru minim este triunghiul ortic.



Într-adevăr, fie UVW un triunghi înscris în triunghiul ABC (cu vîrfurile pe cîte o latură a triunghiului). Atunci

$$\sigma[ABC] = p_0 R = \frac{1}{2} R(UW \sin\alpha + UV \sin\beta + VW \sin\gamma) \leq$$
$$\leq \frac{1}{2} R(UW + UV + VW) = pR,$$

unde p este semiperimetrul triunghiului UVW.

Deci $p_0 \leq p$, c.c.t.d.

<u>Consecință.</u> In orice triunghi are loc inegalitatea

$$\sum a^2(b + c - a) \leq 3abc \qquad (\text{O.I.M., } 1964)$$

Vom arăta că această inegalitate exprimă inegalitatea dintre perimetrul triunghiului ortic și perimetrul triunghiului median.

Laturile triunghiului ortic sînt $a\cos A$, $b\cos B$, $c\cos C$, deci perimetrul triunghiului ortic este

$$p_1 = \sum a\,\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{2abc}\sum a^2(b^2+c^2-a^2) =$$
$$= \frac{1}{2abc}\sum a^2\left[(b+c)^2-a^2-2bc\right] = \frac{1}{2abc}\Big(\sum a^2(b+c+a)(b+c-a) -$$
$$-2\sum a^2bc\Big) = \frac{1}{2abc}\left[(a+b+c)\sum a^2(b+c-a)-2abc(a+b+c)\right]$$
$$= \frac{a+b+c}{2abc}\Big(\sum a^2(b + c - a) - 2abc\Big).$$

Perimetrul triunghiului median al triunghiului ABC este $p_2 = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Scriind că $p_1 \leq p_2$ obținem

$$\frac{1}{abc}\left[\sum a^2(b+c-a) - 2abc\right] \leq 1 \Longleftrightarrow \sum a^2(b+c-a) \leq 3abc.$$

3.C. O GENERALIZARE A PROBLEMEI 26.

Vom demonstra că dacă $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, atunci mulţimea $\{1, 2^k, 3^k, \ldots, n^k, \ldots\}$ nu conţine nici o progresie aritmetică infinită.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x,y) = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + y^{n-1}$.

Evident, $f(x,y) = f(y,x)$. Vom demonstra că dacă $x,y,z \in \mathbb{N}$, $x < y < z$, atunci

$$f(x,y) < f(y,z).$$

În adevăr, $f(z,y) - f(y,z) = f(z,y) - f(x,y) = (z^{n-1}-x^{n-1}) + (z^{n-2}-x^{n-2})y + (z^{n-3}-x^{n-3})y^2 + \ldots > 0.$

Să presupunem acum prin absurd că mulţimea $\{1, 2^k, 3^k, \ldots, n^k, \ldots\}$ conţine progresia aritmetică infinită $a_1^k < a_2^k \ldots < a_n^k < \ldots$.

Rezultă că $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ şi

$$a_2^k - a_1^k = a_3^k - a_2^k = \ldots = a_n^k - a_{n-1}^k = \ldots,$$

de unde

$$(a_2-a_1)f(a_1,a_2) = (a_3-a_2)f(a_3,a_2) = \ldots = (a_n-a_{n-1})f(a_n,a_{n-1}) = \qquad (1)$$

Deoarece $f(a_1,a_2) < f(a_2,a_3) < \ldots < f(a_n,a_{n-1}) < \ldots$, din (1) rezultă

$$a_2 - a_1 > a_3 - a_2 > \ldots > a_n - a_{n-1} > \ldots \qquad (2)$$

Deoarece $a_k, a_{k+1} \in \mathbb{N}$ şi $a_{k+1} > a_k$, $(\forall)\ k \in \mathbb{N}^*$, rezultă că şirul (2) este un şir infinit strict descrescător de numere naturale ceea ce este absurd.

3.D. ÎN LEGĂTURĂ CU PROBLEMA 33

În nota 38 am demonstrat inegalitatea $\sum a^2(b+c-a) \leqslant 3abc$.

Folosind această inegalitate vom da o nouă soluție problemei 33:

$$\sum a^2(b + c - a) \leqslant 3abc \Leftrightarrow \sum a^2(b + c) - \sum a^3 \leqslant 3abc \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum a^3 + 3abc \geqslant \sum a^2(b + c) \Leftrightarrow \sum a^3 - 3abc \geqslant \sum a^2(b + c) -$$

$$- 6abc = a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b) - 6abc = a(b^2 + c^2$$

$$- 2ac) + c(a^2 + b^2 - 2ab) = a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2.$$

Remarcăm că $a^3 + b^3 + c^3 - 4abc < a(b - c)^2 + b(a - c)^2 +$
$+ c(a - b)^2$. (Olimpiadă, Ungaria, 1972).

În adevăr,

$$a^3 + b^3 + c^3 - 4abc - a(b - c)^2 - b(a - c)^2 - c(a - b)^2 =$$

$$= a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) - 2abc =$$

$$= 2abc(\cos A + \cos B + \cos C - 1) =$$

$$= 2abc.4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 0.$$

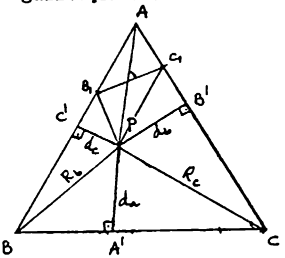
3.E. ÎN LEGATURA CU INEGALITATEA LUI ERDÖS-MORDELL
(asupra problemei 35)

Problema 35 face parte dintr-un ciclu de probleme "Variaţiuni pe tema inegalităţii Erdös-Mordell" care afirmă că dacă P este un punct interior triunghiului ascuţitunghic ABC şi d_a, d_b, d_c sînt distanţele de la P la laturile triunghiului iar R_a = PA, R_b = PB, R_c = PC, atunci

$$R_a + R_b + R_c \geqslant 2(d_a + d_b + d_c). \qquad \text{(E-M)}$$

Una din cele mai frumoase demonstraţii a acestei inegalităţi aparţine matematicianului american Kazarinoff. Sînt cunoscute cîteva zeci de inegalităţi legate de mărimile d_a, d_b, d_c şi R_a, R_b, R_c (cîteva dintre ele vor fi prezentate şi în această notă).

Prezentăm în continuare demonstraţia dată de Kazarinoff inegalităţii lui Erdös.



Fie $B_1 \in (AC')$ şi $C_1 \in (AB')$ astfel încît $AB_1 = kb$ şi $AC_1 = kc$. Atunci $B_1C_1 = kBC$ şi

$2\sigma[AB_1PC_1] = AB_1 \cdot d_c + AC_1 \cdot d_b \leqslant$
$\leqslant AP \cdot B_1C_1$, deci

$$a R_a \geqslant b\, d_c + c\, d_b \iff$$
$$\iff R_a \geqslant \frac{b}{a}\, d_c + \frac{c}{a}\, d_b.$$

Considerînd şi celelalte două inegalităţi analoage, prin adunare, ţinînd seama de inegalitatea $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$, $(\forall)\ x, y > 0$, rezultă imediat inegalitatea dorită.

Egalitatea în (E-M) are loc cînd triunghiul ABC este echilateral iar P coincide cu centrul triunghiului.

Particularizînd punctul P din inegalitatea lui Erdös-Mordell obţinem o serie de inegalităţi remarcabile în triunghi:

Dacă $P = O$, din (E-M) şi relaţia lui Carnot rezultă

$$3R \geq 2(d_a + d_b + d_c) \Leftrightarrow 3R \geq 2(R + r) \Leftrightarrow R \geq 2r,$$

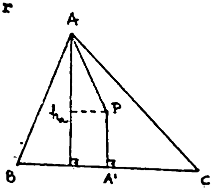
adică inegalitatea lui Euler.

De asemenea, $d_a = R\cos A$ (şi analoagele) deci în orice triunghi ascuţitunghic $3R \geq 2R(\cos A + \cos B + \cos C) \Leftrightarrow \sum \cos A \leq \frac{3}{2}$, cu egalitate cînd triunghiul este echilateral.

Dacă $P = H$, atunci $\sum HA' \leq \frac{1}{2} \sum HA$, adică $\sum HA' \leq R+r$, deci $\sum h_a = \sum HA + \sum HA' \leq 3(R + r)$.

Dacă P este un punct interior triunghiului ABC, atunci $\sum AP \geq$ $\geq 6r$.

În adevăr, în orice triunghi $\frac{h_a + h_b + h_c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}} =$ $= \frac{3}{\frac{1}{r}} = 3r$, deci $h_a + h_b + h_c \geq 9r$.



Prin urmare,

$9r \leq h_a + h_b + h_c < (PA+PA') + (PB+PB')+(PC+PC') = (PA+PB+PC) + (PA'+PB'+PC') \overset{E-M}{\leq} (PA+PB+PC) + \frac{1}{2}(PA+PB+PC)$ deci

$$\frac{3}{2}\sum PA \geq 9r \Longrightarrow \sum PA \geq 6r.$$

Punctul a) al problemei 35 se poate rezolva printr-o tehnică asemănătoare celei din demonstraţia inegalităţii lui Erdős-Mordell şi anume, alegînd punctele $B_1 \in (AC')$ şi $C_1 \in (AB')$ astfel încît $AB_1 = AC_1 = k$.

In acest caz $B_1C_1 = k \sin \frac{A}{2}$ şi $2\sigma[AB_1MC_1] = k(d_b + d_c)$, deci $2R_a \sin \frac{A}{2} \geq d_b + d_c$.

De asemenea, alegînd punctele B_1 şi C_1 astfel încît $AB_1 = kb$ şi $AC_1 = kc$ obţinem inegalitatea $aR_a \geqslant b\, d_b + c\, d_c$. Scriind şi celelalte două inegalităţi analoage, prin adunare obţinem

$$a\, R_a + b\, R_b + c\, R_c \geqslant 4\, \sigma[ABC].$$

Folosind rezultatul problemei 35 vom demonstra că în orice triunghi ascuţitunghic

$$\sum \frac{R_a}{d_b + d_c} \geqslant 3 \qquad \text{(G.M. nr. 6/1983).}$$

Avem:

$$\sum \frac{R_a}{d_b + d_c} \geqslant \frac{1}{2} \sum \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \geqslant \frac{1}{2} \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{1}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}} \geqslant$$

$\geqslant \frac{1}{2} \cdot 3 \sqrt[3]{8} = 3$ (am folosit inegalitatea mediilor şi inegalitatea $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$).

Altă soluţie a acestei probleme se găseşte în G.M. nr.5/1987.

Prezentăm în continuare alte două inegalităţi între R_a, R_b, R_c şi d_a, d_b, d_c.

Din inegalităţile $a\, R_a \geqslant b\, d_c + c\, d_b$ şi $a\, R_a \geqslant b\, d_b + c\, d_c$ stabilite mai sus, rezultă că $2a\, R_a \geqslant (b+c)(d_b+d_c)$. Înmulţind cele trei inegalităţi de acest tip şi ţinînd seama de inegalitatea $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ şi analoagele, obţinem

$$8abc\, R_a R_b R_c \geqslant (a + b)(a + c)(b + c)(d_a + d_b)(d_a + d_c)(d_b+d_c)$$

$$\Longrightarrow 8abc\, R_a R_b R_c \geqslant 8abc(d_a + d_b)(d_a + d_c)(d_b + d_c),$$

deci

$$R_a R_b R_c \geqslant (d_a + d_b)(d_a + d_c)(d_b + d_c).$$

Scriind inegalitatea $a\, R_a \geqslant b\, d_b + c\, d_c$ sub forma

$$d_a R_a \geqslant \frac{b}{a}\, d_a d_b + \frac{c}{a}\, d_a d_c$$

obţinem

$$d_a R_a + d_b R_b + d_c R_c \geqslant \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) d_a d_b + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) d_b d_c + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) d_a d_c,$$

de unde rezultă imediat

$$d_a R_a + d_b R_b + d_c R_c \geqslant 2(d_a d_b + d_b d_c + d_a d_c).$$

4. ENUNŢURILE PROBLEMELOR PROPUSE LA TESTUL 1 (prin [illegible] pondenţă), ediţia 1987-1988, treapta I-[illegible] de liceu.

4.A. TESTUL 1, clasa a IX-a, ediţia 1988.

1. Să se simplifice fracţia

$$\frac{x^5 + (x-1)^4}{(x-1)^5 - x^4} .$$

2. Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ ştiind că polinomul $(x-a)(x-10)+1$ se descompune într-un produs de două polinoame de gradul I cu coeficienţi întregi.

3. În triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90^\circ$) se duce înălţimea AA' ($A' \in BC$) şi fie M mijlocul lui AC, N mijlocul lui AA', $\{N_1\} = BN \cap AC$, $\{M_1\} = BM \cap AA'$. Demonstraţi că patrulaterul NM_1MN_1 este inscriptibil.

4. În triunghiul ABC, $m(\hat{B}) = 75^\circ$ iar înălţimea AA' este egală cu $\frac{BC}{2}$. Demonstraţi că triunghiul ABC este isoscel.

5. Fie A', B', C' punctele de tangenţă ale cercului înscris în triunghiul ABC respectiv cu BC, AC, AB. Bisectoarea unghiului B intersectează pe $B'C'$ în M. Demonstraţi că $m(\widehat{BMC}) = 90^\circ$.

Soluţiile se primesc pînă la data de 25 noiembrie 1987. Plicurile (care vor conţine cel puţin două probleme rezolvate) se vor trimite pe adresa: Miheţ Dorel, Lic. Matematică-Fizică, nr.1, Strada Ghirlandei nr.4, 1900 Timişoara.

4. ENUNȚURILE PROBLEMELOR PROPUSE LA TESTUL 1 (prin corespondență), ediția 1987-1988, treapta I-a de liceu.

4.B. TESTUL 1, clasa a X-a, ediția 1988.

1. Fie $a>0$, $b>0$, $c>0$. Să se rezolve în R^3 sistemul

$$ax - b|y| = ay - b|z| = az - b|x| = c.$$

2. Fie $A,B \in \mathbb{R}$ și $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = A\sin x + B\cos x$.

Demonstrați că dacă există $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 - x_2 \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ astfel încît $f(x_1) = f(x_2) = 0$, atunci $f(x) = 0$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.

3. Demonstrați că pentru orice $x,y \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea

$$\left|\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

4. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ și $z_0 = \frac{1}{n}(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)$.

Demonstrați că pentru orice $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{k=1}^{n} |z_0 - z_k|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z - z_k|^2$.

5. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n$ numere complexe distincte două cîte două cu proprietatea că

$$\min\{|z_i - z_j|,\ i,j \in \overline{1,n},\ i \neq j\} \geqslant \max\{|z_i|,\ i \in \overline{1,n}\}.$$

Determinați valoarea maximă a lui n.

Soluțiile se primesc pînă la data de 25 noiembrie 1987. Plicurile (care vor conține cel puțin două probleme rezolvate) se vor trimite pe adresa: Miheț Dorel, Lic. Matematică-Fizică nr.1, Strada Ghirlandei nr.4, 1900 Timișoara.

C U P R I N S

LEI 6