

CULEGERE
DE
PROBLEME
DE
MATEMATICĂ
ȘI
FIZICĂ

SERIE

FĂNICĂ TURTOIU

**ECUAȚII ȘI INECUAȚII
TRIGONOMETRICE**



FĂNICĂ TURTOIU

ECUAȚII ȘI INECUAȚII TRIGONOMETRICE

Seria
Culegeri de probleme
de matematică și fizică



EDITURA TEHNICĂ
BUCUREȘTI — 1977

Lucrarea abordează un capitol al trigonometriei, care prezintă un interes deosebit atât pentru elevi, cât și pentru cadre didactice, și pentru cei care lucrează în industrie.

Prima parte a lucrării este consacrată rezolvării unor tipuri de ecuații și inecuații trigonometrice, iar partea a doua se ocupă de discuția ecuațiilor cu parametri.

Fiecare parte conține expunerea metodelor de rezolvare, urmată de probleme rezolvate, apoi se dau enunțurile exercițiilor propuse spre rezolvare, însoțite de indicații și răspunsuri.

Se adresează tuturor elevilor de liceu, candidaților la examenele de bacalaureat și de admitere în institute tehnice, universități, școli tehnice postliceale, cadrelor didactice și studenților din institute pedagogice și poate fi utilă maiștrilor, tehnicienilor și muncitorilor de înaltă calificare din industrie.

PREFAȚĂ

Lucrarea de față se adresează în principal elevilor din liceele de toate categoriile și din școlile tehnice, putând fi utilă și maștrilor, tehnicienilor și muncitorilor de înaltă calificare din industrie, precum și cadrelor didactice din învățământul mediu, și are ca scop să pună la dispoziția acestora o sistematizare ceva mai completă decât aceea din manualele școlare a unui important capitol din trigonometrie și anume acela privitor la rezolvarea și discuția ecuațiilor trigonometrice. Tratatul mai dezvoltat a acestui capitol a fost determinată de faptul că problemele din această categorie mai constituie încă pentru elevii de liceu o dificultate, mai ales că în lucrările de specialitate (manuale, culegeri etc.) tratamentul este limitat doar la două sau trei tipuri de ecuații.

În materialul prezentat am căutat să extind pe cât a fost posibil gruparea ecuațiilor trigonometrice pe mai multe tipuri, sintetizând teoria respectivă pe exemple tratate complet.

Apreciez ca posibilă și o altă categorisire, dar din experiența de la catedră cu elevii a rezultat că prezentarea ecuațiilor trigonometrice, așa cum este dată în lucrarea de față, poate fi însoțită cu destulă ușurință de toți elevii din anii II—IV, cu mențiunea doar că rezolvarea și discuția unora dintre probleme necesită și cunoștințe din anii III—IV de liceu (reprezentarea grafică a funcțiilor, teorema lui Rolle etc.).

Materialul prezentat, circa 230 de exerciții, foarte variat și cu selecții din numeroase lucrări de specialitate, oferă elevilor multiple căi de abordare a rezolvării și discuției oricăror tipuri de ecuații trigonometrice, precum și a inecuațiilor și sistemelor trigonometrice. Pentru aceasta este însă necesară cunoașterea temeinică a formulelor trigonometrice, a calculului algebric și a analizei din anii III—IV.

Menționez că, în ceea ce privește completarea și finisarea materialului, am ținut seama de prețioasele sugestii date de tov. conf. dr. Gh. D. Simionescu, care a efectuat controlul științific al lucrării, precum și celor date de redacția de matematică a Editurii tehnice, cărora le aduc mulțumiri.

Soluțiile adoptate pentru fiecare exercițiu în parte nu sînt limitative și aș fi bucuros pentru unele sugestii ce ar veni de la cititori și de care, bineînțeles, s-ar putea ține seama la o eventuală reeditare a lucrării.

AUTORUL

CUPRINS

Partea întâi

Rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor trigonometrice	5
1. <i>Ecuații trigonometrice cu funcții circulare directe</i>	5
1.1. Forma de prezentare și metode generale de rezolvare ale ecuațiilor trigonometrice	
1.2. Exemple de ecuații trigonometrice rezolvate complet	8
2. <i>Ecuații trigonometrice cu funcții trigonometrice inverse</i>	22
2.1. Forma de prezentare și metode generale de rezolvare	22
2.2. Exemple de ecuații cu arcfuncții rezolvate complet	25
3. <i>Aplicații ale ecuațiilor trigonometrice la rezolvarea inecuațiilor și sistemelor trigonometrice</i>	27
3.1. Inecuații trigonometrice	27
3.2. Sisteme de ecuații trigonometrice	34
4. <i>Exerciții propuse spre rezolvare</i>	39

Partea a doua

Discuția ecuațiilor trigonometrice	81
5. <i>Discuția ecuațiilor trigonometrice</i>	81
5.1. Prezentare	81
5.2. Exemple de discuții de ecuații trigonometrice cu un singur parametru, rezolvate complet	85
6. <i>Exerciții propuse spre rezolvare</i>	96
Anexa 1	116
Anexa 2	118
<i>Bibliografie</i>	120

REZOLVAREA ECUAȚIILOR ȘI INECUAȚIILOR TRIGONOMETRICE

1. ECUAȚII TRIGONOMETRICE CU FUNCȚII CIRCULARE DIRECTE

1.1. Forma de prezentare și metode generale de rezolvare ale ecuațiilor trigonometrice

O ecuație se numește trigonometrică dacă conține una sau mai multe necunoscute numai prin intermediul unor funcții trigonometrice.

Forma generală a unei ecuații trigonometrice conținând o singură necunoscută este

$$F(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) = 0, \quad (1.1)$$

în care cel puțin una din funcțiile trigonometrice este nenulă.

Rezolvarea ecuației de forma (1.1) constă în a aduce membrul întâi, cu ajutorul operațiilor trigonometrice fundamentale cunoscute, la forma

$$f_1(\cos x) \cdot f_2(\sin x) \cdot f_3(\operatorname{tg} x) \cdot f_4(\operatorname{ctg} x) \dots = 0, \quad (1.2)$$

produsul din membrul întâi putînd conține chiar un singur factor. Din (1.2) rezultă imediat ecuațiile :

$$f_1(\cos x) = 0, f_2(\sin x) = 0, f_3(\operatorname{tg} x) = 0, f_4(\operatorname{ctg} x) = 0, \quad (1.3)$$

fiecare putînd fi de orice grad în raport cu funcția trigonometrică respectivă. Rezolvarea ecuațiilor (1.3) conduce la ecuații elementare de forma

$$\sin x = a, \cos x = b, \operatorname{tg} x = c, \operatorname{ctg} x = d, \quad (1.4)$$

iar pentru ca ecuațiile (1.4) să aibă soluții este necesar ca $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$ și $c, d \in \mathbb{R}$.

Problema dificilă constă însă în aceea că ecuațiile de forma (1.1) în multe cazuri nu pot fi aduse la forma (1.2). În această situație sînt recomandabile următoarele metode :

1° Dacă în ecuația (1.1) o funcție trigonometrică este la o putere impară, iar celelalte sînt la puteri pare, atunci se ia ca necunoscută funcția de putere impară, făcîndu-se transformările corespunzătoare ale funcțiilor de puteri pare cu ajutorul formulelor ce se deduc din relația fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ecuația (1.1) luînd una din formele (1.3) sau chiar (1.4).

2° Dacă transformarea 1° nu este posibilă și gradele funcțiilor trigonometrice din (1.1) nu sînt mari (de regulă ≤ 2), atunci cu ajutorul formulelor universale

$$\left. \begin{aligned} \cos x &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1 - t^2} \\ \operatorname{ctg} x &= \frac{1 - t^2}{2t}, \quad \text{unde } t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \text{cu } \frac{x}{2} \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

ecuația (1.1) se transformă într-o ecuație algebrică de forma

$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (1.6)$$

rezolvarea acesteia făcîndu-se după regulile cunoscute din algebră. Inconvenientul acestei metode este că ecuația algebrică (1.6) care se obține este de grad mare, așa încît metoda se aplică atunci cînd o altă posibilitate mai rapidă nu există, asigurîndu-ne în această situație că ecuația dată nu are soluții de forma $x = (2k + 1)\pi$.

3° Dacă nici una din metodele de la 1° și 2° nu este aplicabilă, atunci se vor folosi diferite procedee particulare ce necesită unele artificii de calcul și care se vor arăta în detaliu în cele ce urmează.

Orice metodă de rezolvare se folosește, în principal se urmărește ca ecuațiile de forma (1.1) să fie transformate în ecuații echivalente de forma (1.4), după care se trece la precizarea arcelor (unghiurilor) care răspund la problemă, adică la stabilirea soluției generale.

Avînd în vedere că fiecareia din ecuațiile de forma (1.4) corespund pentru x cîte două valori obținute prin parcurgerea o singură dată

a cercului trigonometric, se convine să se ia următoarele soluții generale pentru ecuațiile respective :

$$\left. \begin{array}{l} \sin x = a; x = (-1)^k \arcsin a + k\pi \text{ pentru } a \in [0, 1] \\ \text{și } x = (-1)^{k+1} \arcsin |a| + k\pi \text{ pentru } a \in (-1, 0) \\ \cos x = b; x = \pm \arccos b + 2k\pi, \text{ pentru } b \in [0, 1] \\ \text{și } x = \pm \arccos |b| + (2k+1)\pi, \text{ pentru } b \in (-1, 0) \\ \left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = c, x = \operatorname{arctg} c + k\pi \\ \operatorname{ctg} x = d, x = \operatorname{arctg} d + k\pi \end{array} \right\} c, d \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} (1.7)$$

(a se vedea cazurile particulare din anexa 2).

De observat că fiecare soluție generală din (1.7) constituie de fapt un șir sau două șiruri de valori pentru argumentul x , și că oricare din șirurile respective formează o progresie aritmetică, cu rația $\pm k\pi$ și respectiv $\pm 2k\pi$. Dacă din ecuația (1.1) rezultă în final mai multe ecuații de forma (1.4), soluțiile date în (1.7) se pot reuni, sau rămân așa cum vor rezulta din calcule.

În cele ce urmează vom folosi denumirea de soluție generală, sau pur și simplu soluție, a fiecărei ecuații de forma (1.4), orice șir de forma (1.7). Rezultă că o ecuație trigonometrică poate avea una sau mai multe soluții generale de forma (1.7).

4° În multe cazuri ecuațiile trigonometrice se dau și sub forma

$$F_1(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) = F_2(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x), (1.8)$$

cu mențiunea că cel puțin una din funcțiile F_1 sau F_2 trebuie să depindă minimum de o funcție trigonometrică. Dacă una din funcțiile F_1 sau F_2 nu are sens pentru $x = \alpha$, dar

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} (F_1 - F_2) = 0,$$

atunci, numărul α constituie o rădăcină singulară a ecuației (1.8), soluția generală corespunzătoare rezultând din ecuația elementară care face nedefinită funcția trigonometrică respectivă, când $x = \alpha$.

În cazul în care limita de mai sus este diferită de zero, nu există sau nu are sens, atunci soluțiile rezultate din $x = \alpha$ se exclud de la început. De regulă, în manualele de trigonometrie pentru licee, valorile α pentru care una din funcțiile F_1 sau F_2 nu are sens se înălbătură de la început, deoarece problemele de limită se tratează în cadrul analizei matematice. În exemplele ce se prezintă mai de-

parte se vor analiza și aceste cazuri, adică se vor determina și soluțiile singulare ale ecuațiilor trigonometrice.

1.2. Exemple de ecuații trigonometrice rezolvate complet

1.2.1. Ecuații la care se aplică metoda 1°

1.1. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{2} \cos x + 2 \sin^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 3, \quad \text{cu } x \neq k\pi.$$

R. Luându-se ca necunoscută $\cos x$, avem

$$\sqrt{2} \cos x + 2(1 - \cos^2 x) + \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} = 3. \quad (1)$$

Pentru ușurința calculului, se face înlocuirea $\cos x = t$ și după efectuarea calculului ecuația (1) devine

$$2t^4 - \sqrt{2}t^3 + \sqrt{2}t - 1 = 0$$

sau

$$\sqrt{2}t^3(\sqrt{2}t - 1) + (\sqrt{2}t - 1) = 0, \quad (2)$$

rădăcinile reale ale ecuației (2) fiind $t_1 = \sqrt{2}/2$ și $t_2 = -1/\sqrt{2}$.

Ținând seamă de (1.7), rezultă soluțiile generale

$$x_1 = \pm \frac{\pi}{4} + 2k_1\pi \quad \text{și} \quad x_2 = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} + (2k_2 + 1)\pi, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

De observat că s-au obținut patru șiruri de soluții distincte, care corespund problemei. Așa cum s-a arătat mai înainte șirurile respective se pot reuni, în cazul în care prin această operație soluția generală a problemei se poate scrie sub o formă mai condensată, decât soluțiile x_1 și x_2 , ceea ce nu este cazul în acest exemplu.

Se înțelege, că dacă se fac precizările respective, atunci se scriu soluțiile generale rezultate din ecuațiile de forma (1.4), reunirea acestora sub forma (1.7) nu mai este necesară, deși în unele lucrări de specialitate (culegeri de probleme), soluția concentrată se scrie și sub această ultimă formă, adică $x \in \{x_1\} \cup \{x_2\}$, formă care în situația actuală, așa cum am precizat mai înainte, nu oferă nici un avantaj.

Nu aceeași situație este în cazul următor.

1.2. Să se rezolve ecuația

$$\sin^2 x - \cos^2 x - \cos x = 0.$$

R. Soluțiile sînt date de ecuațiile elementare $\cos x = \frac{1}{2}$ și $\cos x = -1$ cu $x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi$ și $x_2 = (2k_2 + 1)\pi$. În acest caz, cele trei progresii date de x_1 și x_2 se pot reuni, observîndu-se că

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) + 2k\pi \text{ și } x = \pi + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

În consecință soluția generală se poate scrie astfel :

$$x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k' = \frac{2k' - 1}{3}\pi, \quad k' \in \mathbb{Z}.$$

1.2.2. Ecuații ce se rezolvă prin metoda 2°

1.3. Să se rezolve ecuația

$$\sin x - 13 \cos x + 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4 \operatorname{ctg} x = 4, \text{ cu } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

R. Înlocuind toate funcțiile circulare prin $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, ecuația devin

$$\frac{2t}{1+t^2} + 2 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3t + 4 \frac{1-t^2}{2t} = 4, \quad (1)$$

iar după efectuarea calculelor

$$t^4 + 9t^3 + 5t^2 - 17t + 2 = 0, \quad (2)$$

rădăcinile întregi ale ecuației (2) fiind $t_1 = 1, t_2 = -2$, de unde rezultă ecuațiile elementare $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$, cu soluția $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$ și $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -2$, cu soluția $x_2 = 2 \operatorname{arctg}(-2) + 2k_2\pi, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

1.4. Să se rezolve ecuația

$$2 \sin x \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 0.$$

R. Se observă că ecuația este nedefinită pentru arcele de forma $x' = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ și $x'' = (2k + 1) \pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Astfel, soluțiile de forma x' și x'' se exclud.

Ecuația dată se poate rezolva cu ajutorul formulelor (1.5). Ecuația devine în final $t^2(9 - t^2) = 0$, de unde rezultă $t_{1,2} = 0$ cu $x_1 = 2k_1\pi$ și $t_{3,4} = \pm\sqrt{3}$ cu $x_3 = \frac{2\pi}{3} + 2k_3\pi$ și $x_4 = \frac{-2\pi}{3} + 2k_4\pi$, $k_{1,3,4} \in \mathbb{Z}$.

De menționat că soluțiile reunite se pot scrie sub forma concentrată $x = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Altfel. Ecuația respectivă se poate rezolva și direct, astfel:

$$\frac{2 \sin^2 x}{\cos x} + \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = 0 \text{ sau } \frac{2(1 - \cos^2 x)}{\cos x} - \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = 0,$$

de unde rezultă $\cos x = 1$ cu soluția $x_1 = 2k_1\pi$ și $2(1 + \cos x)^2 + \cos x = 0$ sau $2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 = 0$ cu soluția $x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + (2k_2 + 1)\pi$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

1.2.3. Ecuații care se rezolvă prin diferite procedee particulare

$$\text{Ecuații de forma } a \sin x + b \cos x = c \quad (1.9)$$

O ecuație de tipul (1.9) în care $a, b \neq 0$ se rezolvă astfel:

1) Se introduce unghiul auxiliar $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$ și se împart ambii membri ai ecuației prin $\pm \sqrt{a^2 + b^2}$ (semnul + corespunde pentru $a > 0$ și semnul - pentru $a < 0$), ecuația respectivă devenind $\sin(\varphi + x) = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, adică de forma (1.4). Dar această ecuație are soluție numai dacă $\left| \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1$ sau $a^2 + b^2 \geq c^2$.

2) Se pune $\text{tg} \frac{x}{2} = t$ cu $x \neq (2k + 1)\pi$, fiind necesar ca mai întâi să se verifice dacă ecuația dată prin enunț nu are soluții de această formă.

Se examinează deci două cazuri.

1. Cazul în care ecuația (1.9) nu are soluții de forma $x = (2k + 1)\pi$. În această situație putem scrie $a \sin(2k + 1)\pi + b \cos(2k + 1)\pi \neq c$

sau $b + c \neq 0$. Înlocuind $\sin x$ și $\cos x$ cu tangenta arcului (unghiului) pe jumătate, ecuația dată devine

$$a \frac{2t}{1+t^2} + b \frac{1-t^2}{1+t^2} = c$$

sau

$$(b+c)t^2 - 2at - b + c = 0, \quad (1.10)$$

o ecuație de gradul al doilea, ținând seamă, așa cum am precizat mai înainte, că $b+c \neq 0$. Pentru ca ecuația (1.10) să aibă rădăcini reale este necesar ca

$$\Delta = a^2 + b^2 - c^2 \geq 0 \text{ sau } a^2 + b^2 \geq c^2,$$

condiție pe care am găsit-o folosind prima metodă.

În cazul în care rădăcinile ecuației (1.10) sint distincte, avem $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t_1$ cu $x_1 = 2 \operatorname{arctg} t_1 + 2k_1 \pi$ și $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t_2$ cu $x_2 = 2 \operatorname{arctg} t_2 + 2k_2 \pi$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

2. Cazul în care ecuația (1.9) are o soluție de forma $x = (2k+1)\pi$. În această situație avem $b+c=0$, putându-se scrie $a \sin x + b(1+\cos x) = 0$ sau $2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2b \cos^2 \frac{x}{2} = 0$, cu $\cos \frac{x}{2} = 0$

și $\frac{x}{2} = (2k+1) \frac{\pi}{2}$, adică $x = (2k+1)\pi$ și cu $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{b}{a}$,

cu $x = 2 \operatorname{arctg} \left(-\frac{b}{a} \right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

De menționat că în situația în care se presupune că $b+c=0$ și că ecuația de gradul al doilea (1.10) se reduce la o ecuație de gradul întâi, o rădăcină a acestei ecuații se poate considera ∞ , ceea ce corespunde pentru $x = (2k+1)\pi$. Problema se rezolvă în mod asemănător dacă se înlocuiește a cu b (sau $\sin x$ prin $\cos x$).

Dacă $a \neq 0$ și $b \neq 0$, atunci se presupune că există un arc $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ care verifică ecuația $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$. Prin urmare, împărțind ecuația (1.9) prin a , obținem

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a} \text{ sau } \sin x + \operatorname{tg} \alpha \cos x = \frac{c}{a}$$

sau încă

$$\sin(\alpha + x) = \frac{c}{a} \cos \alpha. \quad (1.11)$$

Dar ecuația (1.11) are soluții în cazul în care $\left| \frac{c}{a} \cos \alpha \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{c^2 \cos^2 \alpha}{a^2} \leq 1$, sau încă $\frac{c^2}{a^2} \leq \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$, sau $\frac{c^2}{a^2} \leq 1 + \frac{b^2}{a^2}$, adică $a^2 + b^2 \geq c^2$, relație găsită în ambele metode indicate mai înainte. Dacă condiția $a^2 + b^2 \geq c^2$ este îndeplinită, atunci putem scrie $\sin(\alpha + x) = \sin \beta$, de unde rezultă $x = (-1)^k \beta + k\pi - \alpha$.

Analog se procedează dacă ecuația (1.9) se împarte cu b ; se obține $\cos(x - \alpha) = \frac{c}{b} \cos \alpha$; punind condiția $\left| \frac{c}{b} \cos \alpha \right| \leq 1$ și notînd $\frac{c}{b} \cos \alpha = \cos \beta$, ecuația (1.9) devine în final $\cos(x - \alpha) = \cos \beta$, de unde $x = \pm \beta + 2k\pi + \alpha$.

De remarcat că împărțirea ecuației (1.9) la a sau b , după caz, se recomandă în cazul în care $\frac{b}{a}$ sau $\frac{a}{b}$ este valoarea tangentei unui arc cunoscut.

√ 1.5. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1. \quad (1)$$

R. Aplicînd acestei ecuații cele de la 1.2.3, cazul 1, în care $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, $c = 1$, rezultă $a^2 + b^2 > c^2$ și că, prin urmare, ecuația dată are soluții.

Se introduce unghiul auxiliar $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$, ceea ce corespunde arcului $\frac{\pi}{6}$; se împarte ecuația cu $\sqrt{a^2 + b^2} = 2$ (s-a luat \rightarrow în fața radicalului deoarece $a > 0$) și ecuația devine

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$$

adică o ecuație de forma (1.4) cu soluția

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi - \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De menționat că ecuația se mai poate rezolva și prin separarea uneia din funcțiile trigonometrice, ridicarea la pătrat și înlocuirea lui $\sin x$ prin $\cos x$ sau invers. În acest caz, este nevoie de a se verifica soluțiile aflate, deoarece, de regulă, prin ridicarea la pătrat se introduc soluții străine. Aplicând această metodă, ecuația se poate scrie sub forma

$$\cos x = 1 - \sqrt{3} \sin x; \quad (2)$$

ridicând la pătrat și înlocuind pe $\cos^2 x$ prin $1 - \sin^2 x$, ecuația (2) devine

$$2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x = 0, \quad (3)$$

soluțiile ecuației (3) fiind date de ecuațiile elementare $\sin x = 0$ cu $x_1 = k_1 \pi$ și $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cu $x_2 = (-1)^{k_2} \frac{\pi}{3} + k_2 \pi$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Dar înlocuind în ecuația (1) pe $x_1 = k_1 \pi$, se constată că această soluție nu este acceptabilă decât pentru valori pare ale lui k_1 , adică pentru $x_1 = 2k'\pi$, cu $k' \in \mathbb{Z}$. La fel, se constată că nici soluția dată de x_2 nu verifică ecuația decât pentru valori impare ale lui k_2 , ceea ce duce la concluzia că x_2 este de forma $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k_2 \pi$ găsită anterior.

Aplicând ecuației (1) cele arătate în 1.2.3, cazul 2, aceasta se transformă în

$$t^2 - \sqrt{3}t = 0,$$

unde $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, rezultând ecuațiile elementare $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$ cu $x_1 = 2k_1 \pi$ și $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$ cu $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k_2 \pi$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ecuații de forma } a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x + c = 0. \quad (1.12)$$

Rezolvarea unor astfel de ecuații se face în modul următor. Se observă că, deoarece $x \neq \frac{k\pi}{2}$, putem scrie

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \sin x \cos x = 0. \quad (1.13)$$

Ecuația (1.13) se poate considera ca omogenă și în această situație, prin împărțirea cu $\cos^2 x \neq 0$, se transformă în

$$a \operatorname{tg}^2 x + c \operatorname{tg} x + b = 0, \quad (1.14)$$

adică o ecuație de gradul al doilea în $\operatorname{tg} x$, care se rezolvă după metodele algebrice cunoscute. Dar ecuația (1.14) se mai poate scrie și sub forma

$$a(1 - \cos 2x) + b(1 + \cos 2x) + c \sin 2x = 0,$$

sau încă

$$c \sin 2x + (b - a) \cos 2x + (a + b) = 0.$$

Această ecuație fiind de forma (1.9), se tratează ca atare.

1.6. Să se rezolve ecuația

$$2 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x - 5 = 0, \quad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

R. Folosind cele arătate mai înainte, ecuația se transformă în

$$2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 5 \sin x \cos x = 0$$

sau

$$2(1 - \cos 2x) + 3(1 + \cos 2x) - 5 \sin 2x = 0$$

sau încă

$$5 \sin 2x - \cos 2x - 5 = 0.$$

Se observă că ecuația (1) are soluții, deoarece $a^2 + b^2 > c^2$, adică $5^2 + 1^2 > 5^2$. Deci, se poate folosi oricare din metodele arătate la 1.3.3; rezolvarea ecuației se face însă direct. Înlocuindu-se pentru ușurința calculului $\operatorname{tg} x = t$, această ecuație devine

$$2t^2 - 5t + 3 = 0,$$

cu $t_1 = 1$ și deci $\operatorname{tg} x = 1$ cu $x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\pi$ și $t_2 = \frac{3}{2}$ cu $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$ și $x_2 = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + k_2\pi$, ambele soluții verificând ecuația inițială.

Este recomandabil, ca la alegerea metodei de rezolvare a oricărei ecuații trigonometrice să se evite de la început aceea care implică vreo ridicare la pătrat, recurgându-se la această metodă numai atunci când o altă soluționare a problemei nu poate fi găsită operativ sau necesită calcule dificile.

Ecuații simetrice de forma

$$a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x = c \quad (1.15)$$

O ecuație de forma (1.15) se numește *simetrică* în raport cu $\sin x$ și $\cos x$. Într-adevăr, dacă $x_1 = x_0$ este o soluție a ecuației respective, atunci și $x_2 = \frac{\pi}{2} - x_0$ este o soluție, deoarece $\sin x_0 =$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)$. Dar x_1 și x_2 sînt simetrice în raport cu $\frac{\pi}{4}$,

astfel încît, pentru rezolvarea ecuației (1.15) se face substituția

$x = \frac{\pi}{4} + t$, observîndu-se că

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) = \frac{\sin t + \cos t}{\sqrt{2}}$$

și

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right) = \frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{2}}. \quad (1.16)$$

Cu substituțiile (1.16) ecuația (1.15) devine

$$\frac{b}{2}(\cos^2 t - \sin^2 t) + a\sqrt{2}\cos t = c, \quad (1.17)$$

sau, notind $\cos t = y$, aceasta se scrie sub forma

$$b y^2 + a\sqrt{2}y - \left(\frac{b}{2} + c\right) = 0. \quad (1.18)$$

Rezultă că și $-y$ este o rădăcină a ecuației (1.18). Modul de rezolvare rămâne valabil și în cazul în care în ecuația de tip (1.15) se înlocuiește x cu $-x$.

Ecuațiile de forma (1.15) se pot rezolva și prin substituțiile

$$\sin x + \cos x = u \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{u^2 - 1}{2},$$

ecuația (1.15) devenind

$$b u^2 + 2au - (b + 2c) = 0. \quad (1.19)$$

Ținând seamă de valorile extreme ale funcției $\sin x + \cos x$, rezultă că ecuația (1.19) are două soluții acceptabile numai dacă $u_1, u_2 \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, soluțiile generale aflate trebuind a fi verificate, deoarece s-a folosit ridicarea la pătrat.

Ecuațiile de forma (1.15) se mai pot rezolva și prin substituția $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, ecuația trigonometrică respectivă transformându-se într-o ecuație algebrică de gradul patru în t .

1.7. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{3} \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} \right) = 2(1 + \sqrt{3}), \quad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

R. Eliminând numitorii, ecuația dată se transformă în

$$\sqrt{3}(\sin x + \cos x) - 2(1 + \sqrt{3})\sin x \cos x = 0, \quad (1)$$

adică în ecuația de tipul (1.15). Punind $\sin x + \cos x = u$ și $\sin x \cos x = \frac{u^2 - 1}{2}$,

ecuația respectivă devine

$$(1 + \sqrt{3})u^2 - \sqrt{3}u - (1 + \sqrt{3}) = 0,$$

cu $u_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ și $u_2 = 1 - \sqrt{3}$.

Întrucât $\max(\sin x \pm \cos x) = \sqrt{2}$ și $\min(\sin x \pm \cos x) = -\sqrt{2}$, ambele rădăcini u_1 și u_2 obținute sînt acceptabile. Acum avem de rezolvat ecuațiile echivalente

$$\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}, \quad (2)$$

$$\cos x + \sin x = 1 - \sqrt{3}$$

care se rezolvă prin substituția $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Astfel, prima ecuație din (2) devine

$$\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + \frac{2t}{1 + t^2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)t^2 - 4t + \sqrt{3} - 1 = 0$$

cu $t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ și $t_2 = 2 - \sqrt{3}$, de unde rezultă soluțiile $\frac{x_1}{2} = \frac{\pi}{6} + k_1\pi$ sau $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi$

și $\frac{x_2}{2} = \frac{\pi}{12} + k_2\pi$ sau $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k_2\pi$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

Cea de-a doua ecuație din (2) devine

$$(2 - \sqrt{3})t^2 - 2t - \sqrt{3} = 0$$

cu $t_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{2\sqrt{3} - 2}}{2 - \sqrt{3}}$, de unde rezultă încă două soluții

$$x_3 = 2(\arctg t_3 + k_3\pi) \text{ și } x_4 = 2(\arctg t_4 + k_4\pi), \quad k_{3,4} \in \mathbb{Z}.$$

Folosind celelalte două metode, obținem aceleași rezultate.

Desigur că ecuația (1) se mai poate rezolva separînd cei doi termeni și apoi ridicînd la pătrat; se obține

$$3(1 + \sin 2x) = 2(1 + \sqrt{3}) \sin^2 2x,$$

ecuație de forma (1.3), care se rezolvă luîndu-se ca necunoscută $\sin 2x$, soluțiile generale obținute trebuind a fi verificate.

1.3. Să se rezolve ecuația

$$2 \sin 2x = 4(\sin x + \cos x) - 3.$$

R. Se notează $\sin x + \cos x = u$ și ecuația dată se transformă în

$$2(u^2 - 1) - 4u + 3 = 0$$

sau

$$2u^2 - 4u + 1 = 0$$

cu $u_1 = (2 + \sqrt{2})/2$ și $u_2 = (2 - \sqrt{2})/2$. Ținând seamă însă că $\max(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}$ și $\min(\sin x + \cos x) = -\sqrt{2}$, rezultă că avem de rezolvat doar ecuația $\sin x + \cos x = (2 - \sqrt{2})/2$, rezolvare ce se face, folosind formulele de substituție universale, ecuația respectivă transformându-se în $(3 - \sqrt{2})t^2 - 2t + 1 - \sqrt{2} = 0$ cu $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\sqrt{2} - 1}$. De aici

$$x_1 = 2 \arctg(1 + \sqrt{\sqrt{2} - 1}) + 2k_1\pi$$

și

$$x_2 = 2 \arctg(1 - \sqrt{\sqrt{2} - 1}) + 2k_2\pi.$$

Alfel. Înlocuind în ecuația dată prin enunț pe $\sin 2x$ cu $2 \sin x \cos x$, se observă, că această ecuație este simetrică în raport atât cu $\sin x$ cât și cu $\cos x$. Facem substituția $x = \frac{\pi}{4} - t$ și avem

$$\sin 2x = \sin 2 \left(\frac{\pi}{4} - t \right) = \cos 2t.$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \sqrt{2} \cos t,$$

asa încât ecuația din enunț devine după efectuarea tuturor calculelor $4 \cos^2 t - 4\sqrt{2} \cos t + 1 = 0$, adică o ecuație de forma (1.3), care, rezolvată în raport cu $\cos t$, ne dă

$$\cos t_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \text{ și } \cos t_2 = \frac{\sqrt{2} + 1}{2},$$

ultima neavând soluție, deoarece $(\sqrt{2} + 1)/2 > 1$. Luând în considerare numai prima ecuație elementară, se observă că putem scrie

$$\cos t_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} = 2 \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24}.$$

Ecuații omogene de forma

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + \dots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0 \quad (1.20)$$

O ecuație trigonometrică de forma (1.20) se numește omogenă, rezolvarea acesteia făcându-se astfel. Se înmulțesc ambii membri ai ecuației cu $\frac{1}{\cos^n x}$ (ceea ce este posibil dacă se consideră $\cos x \neq 0$) și ecuația devine

$$a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + \dots + a_n = 0. \quad (1.21)$$

Se ia $\operatorname{tg} x = t$, obținându-se astfel o ecuație care se rezolvă prin metodele cunoscute în algebră.

1.9. Să se rezolve ecuația

$$5 \sin^2 x - 2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x = 0.$$

R. Aplicând cele de mai înainte, această ecuație devine

$$5 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 2 = 0, \quad x \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

de unde rezultă imediat $\operatorname{tg} x = 1$ cu soluția $x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\pi$ și $\operatorname{tg} x = -\frac{2}{5}$ cu soluția $x_2 = \operatorname{arctg} \left(-\frac{2}{5} \right) + k_2\pi, \quad k_{1,2} \in \mathbb{Z}.$

Sînt numeroase exemple în care ecuațiile date nu se prezintă sub forma (1.20), dar care, prin unele transformări simple, pot fi aduse la această formă. De exemplu :

— Ecuațiile de forma

$$a_0 \sin^2 x + a_1 \sin x \cos x + a_2 \cos^2 x - a_3 = 0$$

pot fi aduse la forma (1.20) dacă a_3 se înmulțește cu $\sin^2 x + \cos^2 x$.

— Ecuațiile de forma

$$a_0 \sin^4 x + a_1 \sin^3 x \cos x + \dots + a_4 \cos^4 x - a_5 = 0$$

pot fi aduse la forma (1.20) dacă a_5 se înmulțește cu $(\sin^2 x + \cos^2)^2$.

Ecuațiile de forma

$$f(\alpha \cos^2 mx, \beta \sin^2 nx) = 0 \tag{1.22}$$

care conțin numai pătrate de sinusuri sau cosinusuri

Astfel de ecuații se rezolvă trecînd de la puteri de cosinusuri sau sinusuri la cosinusuri de arce duble cu ajutorul formulelor

$$\cos^2 mx = \frac{1 + \cos 2mx}{2}, \quad \sin^2 nx = \frac{1 - \cos 2nx}{2}.$$

1.10. Să se rezolve ecuația

$$\cos^2 x + \cos^2 3x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}.$$

R. Trecând la cosinusuri de arce duble, avem

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} + \frac{1 - \cos 10x}{2} = \frac{3}{2}.$$

Efectuând calculele, ecuația devine

$$\cos 2x + \cos 6x + \cos 10x = 0. \quad (1)$$

Transformând sumele în produse, ecuația (1) se transformă în $\cos^2 6x (2 \cos 4x + 1) = 0$, soluțiile fiind date de $\cos 6x = 0$ cu $x_1 = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k_1 \pi}{3}$ și $\cos 4x = -\frac{1}{2}$ cu $x_2 = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{(2k_2 + 1)\pi}{4}$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

Ecuații care conțin sume de forma $\sin^{2n} x + \cos^{2n} x$, cu $n \geq 2$, adică

$$F(\alpha(\cos^{2n} x + \sin^{2n} x) + \beta(\cos^{2(n-1)} x + \sin^{2(n-1)} x) + \dots) = 0 \quad (1.23)$$

În general ecuațiile care conțin sume de forma $\sin^{2n} x + \cos^{2n} x$, cu $n \geq 2$, se rezolvă plecând de la identitatea $[\sin^2 x + \cos^2 x = 1]$, pe care o ridicăm la putere convenabilă obținându-se în final o ecuație în $\sin 2x$.

1.11. Să se rezolve ecuația

$$2(\sin^6 x + \cos^6 x) + \sin^4 x + \cos^4 x = 3.$$

R. Se ține seamă că $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$ și că $\sin^6 x + \cos^6 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$. Ecuația devine

$$2\left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x\right) + 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 3$$

sau, efectuând calculele, se obține $\sin^2 2x = 0$, de unde $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Observație. În unele lucrări se mai folosește noțiunea de soluție dublă, la ecuația de forma $\sin^2 \alpha x = 0$, $\cos^2 \alpha x = 0$ etc., ceea ce nu are sens, ținând seamă de faptul că soluția reprezintă unul sau două șiruri de valori pentru argumentul x .

Ecuatiile de forma (1.23) se mai pot rezolva și după metoda arătată în 1.1, 1°, trecindu-se de la cosinusi la sinusuri, sau invers; metoda folosită însă în cazul problemei 1.11 fiind mai rapidă.

Ecuatii conținând produse de funcții trigonometrice de forma

$$\cos \alpha x \cos \beta x \cos \gamma x \text{ sau } \cos \alpha x \cos \beta x \sin \gamma x \quad (1.24)$$

De regulă ecuațiile care conțin produse de cosinusi sau sinusuri de arce multiple, sau chiar produse din ambele funcții, se rezolvă prin transformarea produselor respective în sume de cosinusi sau sinusuri, luându-se în considerare formulele de bază.

1.12. Să se rezolve ecuația

$$\cos x \cos 3x \cos 6x = -\frac{1}{2}. \quad (1)$$

R. Se ține seamă că

$$2 \cos x \cos 3x = \cos 4x + \cos 2x,$$

$$2 (\cos 4x \cos 6x + \cos 2x \cos 6x) = \cos 10x + \cos 2x + \cos 8x + \cos 4x,$$

astfel încât ecuația devine

$$\cos 10x + \cos 8x + \cos 4x + \cos 2x = -2. \quad (2)$$

Se ia ca necunoscută $\cos 2x$ și ecuația (2) devine

$$(16 \cos^5 2x - 20 \cos^3 2x + 5 \cos 2x) + (8 \cos^4 2x - 8 \cos^2 2x + 1) + (2 \cos^3 2x - 1) + \cos 2x = -2$$

sau, efectuând toate calculele,

$$8 \cos^5 2x + 4 \cos^4 2x - 10 \cos^3 2x - 3 \cos^2 2x + 3 \cos 2x + 1 = 0, \quad (3)$$

o soluție a ecuației (3) fiind dată de $2 \cos 2x + 1 = 0$ cu $x_1 = \pm \frac{\pi}{6} + (2k_1 + 1) \frac{\pi}{2}$.

De menționat că ecuația (2) mai are încă două rădăcini reale: $\cos 2x = \alpha$ și $\cos 2x = \beta$, cu $\alpha \in (-1, 0)$ și $\beta < -1$, din care după cum se vede, numai α corespunde problemei. O a doua soluție a problemei este $x_2 = \pm \arccos |\alpha| + (2k_2 + 1)\pi$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

Mai sînt unele ecuații trigonometrice care după unele transformări elementare pot fi aduse la una din formele:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin y \Rightarrow x = (-1)^k y + k\pi, \\ \cos x &= \cos y \Rightarrow x = \pm y + 2k\pi, \\ \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} y \Rightarrow x = y + k\pi, \end{aligned} \quad (1.25)$$

cu condiția ca arcele x și y să nu fie de forma $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$ în ultima ecuație.

1.13. Să se rezolve ecuația

$$m \sin(a - x) = n \sin(b - x), \text{ unde } a - b = \frac{\pi}{2}.$$

R. Folosind proprietățile proporțiilor, ecuația dată se poate scrie sub forma

$$\frac{\sin(a - x) + \sin(b - x)}{\sin(a - x) - \sin(b - x)} = \frac{n + m}{n - m}$$

sau

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{a + b}{2} - x\right)}{\operatorname{tg}\frac{a - b}{2}} = \frac{n + m}{n - m}, \quad (1)$$

Puneri $\frac{m}{n} = \operatorname{tg} \varphi$ și, ținând seamă că $a - b = \frac{\pi}{2}$, ecuația (1) devine

$$\operatorname{tg}\left(\frac{a + b}{2} - x\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right),$$

adică o ecuație de forma (1.25) cu soluția $\frac{a + b}{2} - x = \frac{\pi}{4} + \varphi + k\pi$, de unde

$$x = \frac{a + b}{2} - \left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + k'\pi, \quad k' \in \mathbb{Z}.$$

Alfel. Din $a - b = \frac{\pi}{2}$ rezultă $b = a - \frac{\pi}{2}$ și ecuația dată se transformă în

$$m \sin(a - x) = -n \cos(a - x),$$

de unde $\operatorname{tg}(x - a) = \frac{n}{m}$ și punând $\frac{n}{m} = \operatorname{tg} \varphi$, se obține soluția $x - a = k\pi + \varphi$, $k \in \mathbb{Z}$

1.2.4. Ecuații cu soluții singulare

1.14. Să se rezolve ecuația

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x} = \frac{\cos x - \sin x}{\operatorname{ctg} x - 1}.$$

R. Se observă că ambii membri ai acestei ecuații nu au sens pentru $x = k\pi$. Se procedează așa cum s-a arătat în 1.1, calculându-se limita

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x} - \frac{\cos x - \sin x}{\operatorname{ctg} x - 1} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow k\pi} (\sin 2x - \sin x) = 0.$$

În consecință, $x_1 = k_1\pi$ este o soluție singulară a ecuației.

Cealaltă soluție este dată de ecuația elementară $\cos x = \frac{1}{2}$, adică $x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

Desigur că în rezolvarea unor ecuații se pot aplica unul sau chiar mai multe din procedeele generale sau particulare arătate mai înainte. În cap. 4 se vor da numeroase exerciții a căror rezolvare va contribui într-o mai bună măsură la aprofundarea teoriei date în 1.2.

2. ECUAȚII TRIGONOMETRICE CU FUNCȚII TRIGONOMETRICE INVERSE

2.1. Forma de prezentare și metode generale de rezolvare

Ca și în cazul ecuațiilor trigonometrice tratate în capitolul 1, ecuațiile conținând ca necunoscute una sau mai multe arcfuncții se prezintă sub forma cea mai generală

$$F(\arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x) = 0, \quad (2.1)$$

în care cel puțin una din arcfuncțiile respective trebuie să fie nenulă. De cele mai multe ori ecuațiile de acest tip se prezintă însă sub forme mai simple :

$$f(\arcsin x, \arccos x) = 0$$

sau

$$f(\operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x) = 0.$$

(2.2)

De regulă, este necesar ca prin diferite transformări trigonometrice ecuația să fie adusă la una din formele elementare

$$\arcsin x = a; \arccos x = b; \operatorname{arctg} x = c; \operatorname{arcctg} x = d. \quad (2.3)$$

De îndată ce am obținut una sau mai multe din ecuațiile (2.3), vor trebui luate în considerare următoarele:

— Pentru ecuația $\arcsin x = a$. Funcția $\sin x$ ia toate valorile posibile dacă se consideră intervalul de studiu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ecuația

$\arcsin x = a$ are soluție numai dacă $|a| \leq \frac{\pi}{2}$, ținând seama, bineînțeles, că și $|x| \leq 1$, soluția unică fiind $x = \sin a$.

Dacă argumentul x se prezintă sub forma unei funcții de x , de exemplu $\varphi(x)$, atunci ecuația $\arcsin \varphi(x) = a$ are soluții numai dacă $|\varphi(x)| \leq 1$ și $|a| \leq \frac{\pi}{2}$.

— Pentru ecuația $\arccos x = b$. Funcția $\cos x$ ia toate valorile posibile dacă se consideră intervalul de studiu $[0, \pi]$. În consecință, ecuația $\arccos x = b$ are soluție unică $x = \cos b$, numai dacă $b \in [0, \pi]$ și $|x| \leq 1$.

Dacă în loc de argumentul x avem o funcție $\varphi(x)$, atunci pe lângă condiția $b \in [0, \pi]$ se mai ia în considerare și inegalitatea $|\varphi(x)| \leq 1$, care constituie condiția de bază.

— Pentru ecuația $\operatorname{arctg} x = c$. Se știe că funcția $\operatorname{tg} x$ ia toate valorile posibile dacă se consideră ca interval de studiu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Prin urmare, când $c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ecuația respectivă are soluție unică $x = \operatorname{tg} c$.

— Pentru ecuația $\operatorname{arcctg} x = d$. Întrucât funcția $\operatorname{ctg} x$ ia toate valorile posibile în intervalul $(0, \pi)$, rezultă că ecuația $\operatorname{arcctg} x = d$ are soluție unică $x = \operatorname{ctg} d$ dacă și numai dacă $d \in (0, \pi)$.

De menționat că în toate cele patru cazuri s-a făcut precizarea de soluție unică, dat fiind că în intervalele considerate arcfuncțiile respective sînt strict monotone.

Pentru rezolvarea ecuațiilor de forma

$$f(\arcsin x, \arccos x) = 0 \text{ și } f(\operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x) = 0$$

arc-funcțiile	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctg x$	$\operatorname{arctg} x$
$\arcsin x$	$\arcsin x$	$\arccos \sqrt{1-x^2}, x \in [0,1]$ $-\arccos \sqrt{1-x^2}, x \in [-1,0)$	$\arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ cu $x \in (-1,1)$	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \in (0,1]$ $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, x \in [-1,0)$
$\arccos x$	$\arcsin \sqrt{1-x^2}, x \in [0,1]$ $-\arcsin \sqrt{1-x^2}, x \in [-1,0)$	$\arccos x$	$\arctg \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \in (0,1]$ $\pi + \arctg \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \in [-1,0)$	$\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctg x$	$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ cu $x \in R$	$\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in R_+$ $-\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in R_-$	$\arctg x$	$\operatorname{arctg} \frac{1}{x}, x \in R_+^*$ $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \pi, x \in R_-$
$\operatorname{arctg} x$	$\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in R_+^*$ $-\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in R_-$	$\arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in R$	$\arctg \frac{1}{x}, x \in R_+^*$ $\pi + \arctg \frac{1}{x}, x \in R_-$	$\operatorname{arctg} x$

se vor lua in considerare, după caz, identitățile

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad (2.4)$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

valabile pentru orice x admisibil.

Separat de aceste relații, numite în unele lucrări și *relații de primă speță*, în rezolvarea ecuațiilor trigonometrice de tipul (2.1) sau (2.3) mai trebuie avute în vedere și relațiile de transformare numite și *relații de speță doua*, între diversele funcții trigonometrice inverse, relații redată în tabelul 2.1.

2.2. Exemple de ecuații cu arcfuncții rezolvate complet

2.1. Să se rezolve ecuația

$$\arcsin x + \arccos \sqrt{x} = \operatorname{arctg} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2, \text{ cu } x \in (-1, 1) \setminus \{0\}.$$

R. Se transformă arcfuncțiile de sinus și cosinus din membrul întâi în arctg , ținând seama de relațiile de transformare din tabelul 2.1. Avem

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \operatorname{arctg} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2, \quad (1)$$

pentru $x \in (0, 1)$. Luăm tangenta în ambii membri din (1) și obținem

$$\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) = (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2$$

sau încă

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{\frac{1-x}{x}}}{1 - \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2} \cdot \frac{1-x}{x}}} = (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})^2. \quad (2)$$

Eliminăm d numitorii și efectuând toate calculele în ecuația (2), aceasta devine în final

$$4x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0. \quad (3)$$

rădăcinile ecuației (3) fiind $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, din care x_3 nu verifică ecuația dată, deoarece ecuația (1) este valabilă când $x \in (0, 1)$.

Pentru cazul $x \in (-1, 0)$ ecuația dată se transformă în

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \pi + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \operatorname{arctg} (\sqrt{1+x} + \sqrt{x})^2. \quad (4)$$

Trecem pe π în membrul al doilea și luând tangentele în ambii membri ai ecuației, rezultă în final aceeași ecuație (3); de data aceasta trebuind a reține doar pe $x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, deoarece x_1 și x_2 nu convin cazului studiat. În consecință, pe intervalele $(-1, 1) \setminus \{0\}$ ecuația are trei rădăcini.

2.2. Să se rezolve ecuația

$$\arcsin x + \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 2x.$$

R. Pe intervalul $(-1, 1)$ în care funcția $\arcsin x$ are sens, se face trecerea de la $\arcsin x$ la $\operatorname{arctg} x$ și ecuația devine

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 2x \quad (1)$$

Luând tangentele arcelor în (1), aceasta devine

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + x}{1 - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}} = 2x. \quad (2)$$

Efectuând calculele, obținem o singură rădăcină acceptabilă $x = 0$.

2.3. Să se rezolve ecuația

$$\operatorname{arctg} (2 - \sqrt{4-x^2}) + \operatorname{arctg} (2 + \sqrt{4-x^2}) = \frac{\pi}{6}.$$

R. Se pune mai întâi condiția ca $x \in [-2, 2]$; apoi, din tabelul (2.1) rezultă că

$$\operatorname{arctg} (2 + \sqrt{4-x^2}) = \operatorname{arctg} \frac{1}{2 + \sqrt{4-x^2}} \text{ pentru } x \in [0, 2]$$

și

$$\operatorname{arctg} (2 + \sqrt{4-x^2}) = \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 + \sqrt{4-x^2}} \text{ pentru } x \in [-2, 0).$$

Avem deci de rezolvat două ecuații :

$$\operatorname{arctg}(2 - \sqrt{4 - x^2}) + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 + \sqrt{4 - x^2}} = \frac{\pi}{6}, \text{ cind } x \in [0, 2], \quad (1)$$

și

$$\operatorname{arctg}(2 - \sqrt{4 - x^2}) + \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 + \sqrt{4 - x^2}} = \frac{\pi}{6}, \text{ cind } x \in [-2, 0). \quad (2)$$

Luând tangenta în ambii membri ai ecuației (1), rezultă

$$\frac{2 - \sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{2 + \sqrt{4 - x^2}}}{1 - \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{2 + \sqrt{4 - x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (1')$$

Efectuând toate calculele în (1'), inclusiv raționalizarea, rezultă ecuația bipătrată

$$3x^4 + 10x^2 - 13 = 0,$$

cu două rădăcini reale ± 1 , din care numai $x_1 = 1$ convine ecuației (1).

Observație. Dacă se notează $\operatorname{arctg}(2 - \sqrt{4 - x^2}) = \alpha$ și $\operatorname{arctg} \frac{1}{2 + \sqrt{4 - x^2}} = \beta$, atunci ecuațiile (1) și (2) devin $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$ și $\alpha + (\pi + \beta) = \frac{\pi}{6}$; ținând apoi seamă că $\operatorname{tg}(\pi + \beta) = \operatorname{tg} \beta$, ambele relații se reduc la $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ etc.

3. APLICAȚII ALE ECUAȚILOR TRIGONOMETRICE LA REZOLVAREA INECUAȚILOR ȘI SISTEMELOR TRIGONOMETRICE

3.1. Inecuații trigonometrice

3.1.1. Forma de prezentare și diferite metode de rezolvare

Dacă $F(x)$ este o funcție trigonometrică, atunci $F(x) \geq m$ se numește inecuație trigonometrică. Ținând seamă de periodicitatea funcțiilor trigonometrice, pentru aflarea mulțimii tuturor soluțiilor se

consideră o perioadă întreagă a funcției trigonometrice, care intră în compunerea inecuației considerate.

Soluțiile unora din inecuațiile trigonometrice simple, mai des întâlnite, sînt :

$$\cos x < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\cos x < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\operatorname{tg} x > \sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$\operatorname{ctg} x > \sqrt{3} \Rightarrow k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ș.a.}$$

Din forma de prezentare a soluțiilor de mai înainte, se pot găsi și soluțiile altor inecuații trigonometrice simple, asemănătoare cu cele date.

Dacă se dă un sistem de inecuații trigonometrice, atunci soluția sistemului se află intersectînd mulțimile soluțiilor inecuațiilor trigonometrice date în sistem.

3.1. Să se rezolve sistemul de inecuații

$$\operatorname{tg} x > \sqrt{3}, \cos 3x > -\frac{1}{2}.$$

R. Perioada comună celor două funcții trigonometrice este 2π . Soluțiile primei inecuații sînt

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \text{ și } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2}. \quad (1)$$

Iar soluțiile celei de a doua inecuații sînt

$$-\frac{2\pi}{9} \leq x \leq \frac{2\pi}{9}; \quad \frac{4\pi}{9} \leq x \leq \frac{8\pi}{9}; \quad \frac{10\pi}{9} \leq x \leq \frac{14\pi}{9}. \quad (2)$$

Intersectînd soluțiile (1) și (2), obținem soluțiile sistemului

$$\frac{4\pi}{9} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3.2. Să se rezolve inecuația $\sin x (1 - 2 \cos x) > 0$.

R. Această inecuație se reduce la sistemele:

$$\sin x > 0, \quad 1 - 2 \cos x > 0$$

și

$$\sin x \leq 0, \quad 1 - 2 \cos x < 0.$$

Rezolvarea acestor două sisteme de inecuații se face cu ajutorul tabelului următor, în care s-a luat ca perioadă intervalul $(-\pi, \pi)$:

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π								
$\sin x$	0	-	-	-	0	+	+	+	+	+	0		
$1 - 2 \cos x$	3	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	3
$\sin x (1 - 2 \cos x)$	0	-	-	-	0	+	0	-	0	+	+	+	0

Din tabelul respectiv rezultă soluțiile:

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq 2k\pi \quad \text{și} \quad \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Inecuațiile raționale în raport cu o anumită funcție trigonometrică (sin sau cos)

$$F(f(x)) > 0,$$

se rezolvă prin substituția $f(x) = t, t \in [-1, 1]$.

3.3. Să se rezolve inecuația $2 \cos x > \sin^2 x$.

R. Se aplică substituția de raționalizare $\sin x = t$, cu $t \in [-1, 1]$ și inecuația dată devine $t^2 + 2t - 1 > 0$, cu $t \in (-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, \infty)$ și ținând seama de restricția pusă pentru t , rezultă $t \in (-1 + \sqrt{2}, 1]$, adică $-1 + \sqrt{2} < \sin x \leq 1$; prin urmare, soluția inecuației din enunț este

$$(-1)^k \arcsin(-1 + \sqrt{2}) + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De menționat că, dacă membrul întii al unei inecuații trigonometrice este o expresie rațională în raport cu mai multe funcții trigonometrice, atunci se aplică substituții de raționalizare fiecărei funcții trigonometrice în parte.

Unele inecuații trigonometrice de forma $F(\sin \alpha, \cos \alpha) \geq 0$ se rezolvă prin folosirea interpretării grafice, considerând că $\cos \alpha$ și $\sin \alpha$ sînt respectiv abscisa și ordonata unui punct de pe cercul trigonometric.

3.4. Să se rezolve inecuația $\cos \alpha - \sin \alpha < 1$.

R. Notînd $\cos \alpha = x$ și $\sin \alpha = y$, avem de rezolvat sistemul $x - y - 1 < 0$ și $x^2 + y^2 = 1$ (fig. 3.4, a). Rezultă că arcele cu extremitatea pe $\widehat{AA'B'}$ verifică inecuația dată, adică

$$2k\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

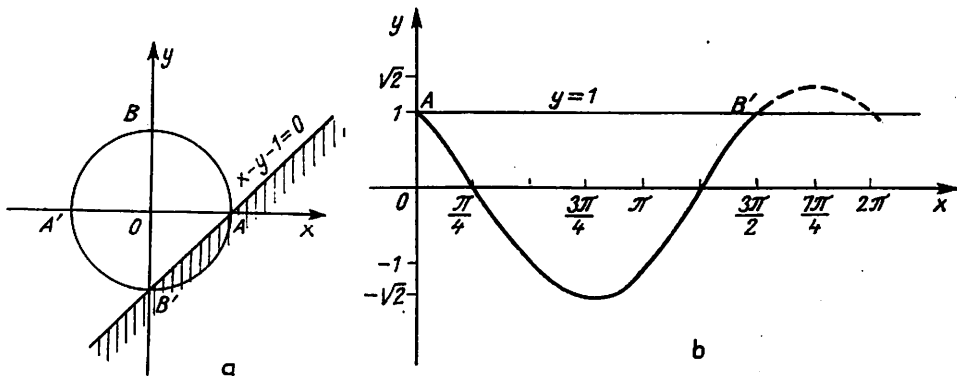


Fig. 3.4.

La aceeași concluzie ajungem dacă se trasează graficul funcției $f(\alpha) = \cos \alpha - \sin \alpha$, care se va compara cu dreapta $y = 1$ (fig. 3.4, b).

3.5. Să se rezolve inecuația

$$\cos \alpha > \sqrt{2} \sin^2 \alpha.$$

R. Folosind aceleași notații ca în exercițiul precedent, rezultă sistemul

$$x > \sqrt{2} y^2, x^2 + y^2 = 1$$

cu soluțiile $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

în fig. 3.5 în care s-a trasat cercul $x^2 + y^2 = 1$ și parabola $y^2 = x/\sqrt{2}$, arcul MM' reprezintă soluția inecuației din enunț, adică

$$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

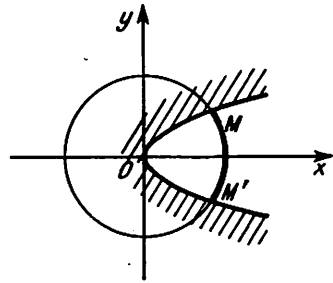


Fig. 3.5.

3.6. Să se găsească soluția inecuației

$$1 + \sqrt{3 - \operatorname{tg} x} < \operatorname{tg} x.$$

R. Inecuația se poate scrie și sub forma

$$\sqrt{3 - \operatorname{tg} x} < \operatorname{tg} x - 1, \quad (1)$$

condițiile fiind $3 - \operatorname{tg} x \geq 0, \operatorname{tg} x - 1 > 0$, adică

$$1 < \operatorname{tg} x \leq 3, \quad (2)$$

În aceste condiții se raționalizează în (1) și se obține inecuația $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 2 > 0$, cu $\operatorname{tg} x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$; ținând seamă și de (2), rezultă $2 < \operatorname{tg} x \leq 3$, cu soluția $\operatorname{arctg} 2 + k\pi < x < \operatorname{arctg} 3 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Altfel. Se pot trasa graficele funcțiilor $f(x) = \sqrt{3 - \operatorname{tg} x}$ și $g(x) = \operatorname{tg} x - 1$ (fig. 3.6) și din studiul acestora rezultă soluția de mai sus, punctul de intersecție a celor două curbe obținându-se prin rezolvarea ecuației

$$\sqrt{3 - \operatorname{tg} x} + 1 - \operatorname{tg} x = 0.$$

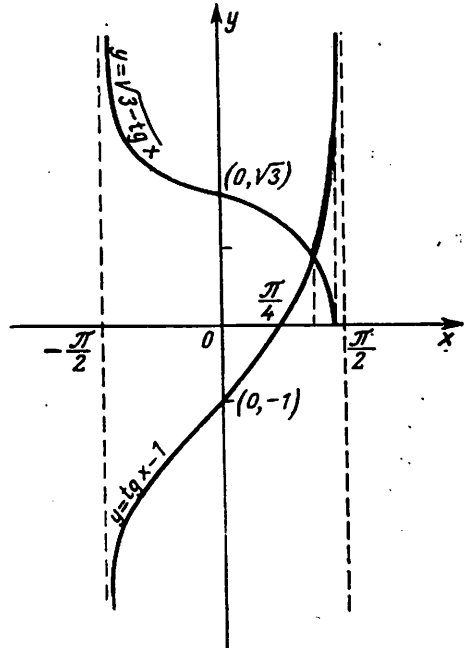


Fig. 3.6.

3.7. Să se rezolve inecuația

$$\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 \geq 0.$$

R. Se rezolvă ecuația $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 = 0$, observându-se că $\operatorname{tg} x_1 = 2 + \sqrt{3}$ și $\operatorname{tg} x_2 = 2 - \sqrt{3}$, de unde rezultă inecuațiile $\operatorname{tg} x \leq 2 - \sqrt{3}$ și $\operatorname{tg} x \geq 2 + \sqrt{3}$. Ținând seama că $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$ și $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$, rezultă soluțiile (fig. 3.7)

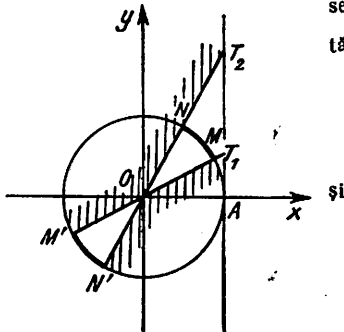


Fig. 3.7.

$$\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \leq x \leq \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$$

$$\frac{19\pi}{12} + 2k\pi \leq x \leq \frac{25\pi}{12} + 2k\pi,$$

arcele cu extremitățile pe \widehat{MN} și $\widehat{M'N'}$ neverificând inecuația din enunț.

3.8. Să se afle soluțiile inecuației $\cos 2x - \sin 2x - 1 \geq 0$.

R. Se observă că putem scrie

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \sin 2x > 1$$

sau $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, de unde rezultă

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq \frac{\pi}{4} - 2x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

sau $-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq k\pi$, soluție echivalentă cu

$$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$$

și $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Alfel. Problema se poate trata și grafic: se reprezintă funcția $f(x) = \cos 2x - \sin 2x - 1$ și din comparația graficului cu dreapta $y = 1$ rezultă aceleași concluzii (v. fig. 3.8).

La rezolvarea inecuațiilor care conțin funcții trigonometrice inverse, trebuie avute în vedere : domeniul de definiție, codomeniul și proprietatea de monotonie a funcției respective.

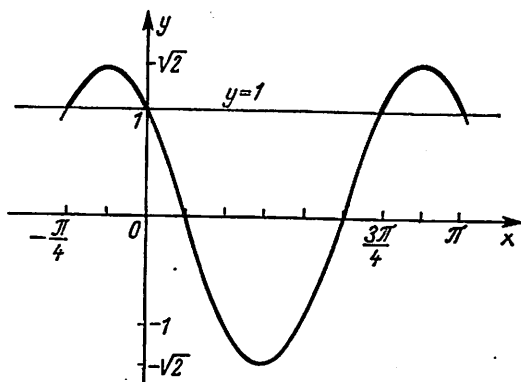


Fig. 3.8.

3.9. Să se rezolve inecuația

$$2 \arcsin^2 x + \arcsin x - 1 \geq 0.$$

R. Se notează $\arcsin x = t$ și se rezolvă inecuația $2t^2 + t - 1 \geq 0$, cu soluția $t \in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$. Dar funcția $\arcsin x$ este definită pentru $x \in [-1, 1]$, codomeniul corespunzător fiind $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, de unde rezultă că $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, -1\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; revenind la $\arcsin x$, avem soluțiile $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq -1$ și $\frac{1}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$ cu $-1 \leq x \leq \sin(-1)$ și $\sin \frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

3.10. Să se rezolve inecuația

$$\arcsin(1-x) < \arcsin 2x.$$

R. Domeniul de definiție pentru funcția $\arcsin(1-x)$ este dat de $-1 \leq 1-x \leq 1$, cu $x \in [0, 2]$, iar pentru funcția $\arcsin 2x$ este $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Intersectând cele două mulțimi, rezultă intervalul $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Ținând seama de faptul că pe acest in

terval funcția este crescătoare, avem $1 - x \leq 2x$ sau $x \geq \frac{1}{3}$. Cum $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, se obține în final soluția $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$. În fig. 3.10 sînt trasate graficele funcțiilor $\arcsin(1-x)$ și $\arcsin 2x$, rezultînd aceeași soluție.

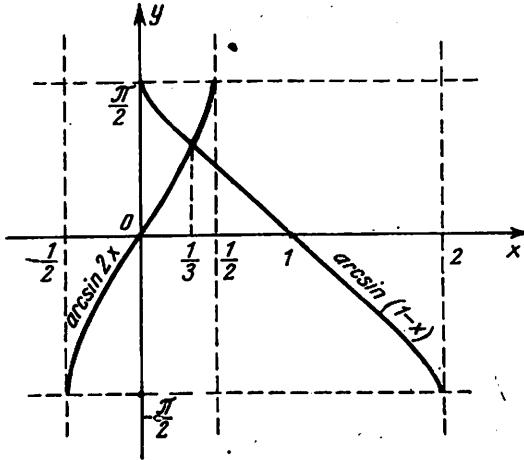


Fig. 3.10.

3.11. Să se rezolve inecuația

$$\arccos(x^2 - 2) \leq \cos(x - 1).$$

R. Domeniul de definiție al funcției $\arccos(x^2 - 2)$ este dat de $-1 \leq x^2 - 2 \leq 1$, cu $x \in [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$, iar al funcției $\cos(x - 1)$ este $x \in [1, \pi + 1]$; rezultă că pentru cele două funcții domeniul de definiție este $x \in [1, \sqrt{3}]$. Dar din $x^2 - 2 \leq x - 1$, rezultă $x^2 - x - 1 \leq 0$, unde $x \in \left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right]$ și ținînd seamă de domeniul de definiție aflat, se observă că soluția inecuației este $x \in \left[1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right]$.

3.2. Sisteme de ecuații trigonometrice

În rezolvarea sistemelor de ecuații trigonometrice se vor avea în vedere soluțiile generale ale ecuațiilor trigonometrice prevăzute în cap. 1. Metode generale de rezolvare sau categorii de sisteme care se

rezolvă după anumite metode nu se pot da. În exemplele ce urmează vor fi menționate doar unele sisteme de ecuații trigonometrice întâlnite mai frecvent.

3.12. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$x - y = \frac{\pi}{6}, \quad \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 3y = 0.$$

R. Transformând ecuația a doua în produs, obținem

$$\frac{\sin 3(x+y)}{\cos 3x \cos 3y} = 0, \text{ de unde } 3(x+y) = k\pi, \quad x, y \neq (2k+1)\frac{\pi}{6}.$$

Din $x - y = \frac{\pi}{6}$ și $x + y = \frac{k\pi}{3}$ rezultă $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$ și $y = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$.

3.13. Să se rezolve sistemul

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4, \quad \operatorname{tg}(x - y) = \sqrt{3}.$$

R. Dezvoltăm pe $\operatorname{tg}(x - y)$, iar pentru ușurința calculului notăm $\operatorname{tg} x = u$, $\operatorname{tg} y = v$; avem de rezolvat sistemul

$$u + v = 4, \quad \frac{u - v}{1 + uv} = \sqrt{3},$$

cu $u = 2 + \sqrt{3}$ și $v = 2 - \sqrt{3}$, de unde rezultă soluția $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ și $y = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3.14. Să se rezolve sistemul

$$\sin x + \sin y = 1, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} = 1.$$

R. Se observă că $x, y \neq (2k+1)\pi$; notăm $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = u$, $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = v$ și sistemul dat se transformă în $u + v = 1$, $\frac{2u}{1+u^2} + \frac{2v}{1+v^2} = 1$, care se rezolvă prin substituție și are două soluții $u = 1, v = 0$ și $u = 0, v = 1$, de unde $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ și $y = \frac{k\pi}{2}$, sau $x = \frac{k\pi}{2}$ și $y = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

3.15. Să se rezolve sistemul $x + y = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\cos x}{\cos y} = \sqrt{3}$.

R. Din ecuația a doua deducem $\frac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$ sau, transformând în

produse,

$$\frac{-2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}}{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Ținând seamă că $x + y = \frac{\pi}{2}$, rezultă imediat $\operatorname{tg} \frac{y-x}{2} = 2 - \sqrt{3}$ cu soluția $\frac{y-x}{2} = \frac{\pi}{12} + k\pi$ sau $y - x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$. Asociind această ecuație cu $x + y = \frac{\pi}{2}$, rezultă $x = \frac{\pi}{6} - k\pi$ și $y = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

În cazul în care avem de rezolvat un sistem de ecuații trigonometrice cu parametri, atunci este necesar să se facă anumite considerații asupra elementelor neprecizate — chiar dacă aceasta nu se cere prin enunț.

3.16. Să se rezolve sistemul $x + y = m$, $\sin x + \sin y = p$.

R. Se observă că ecuația a doua se poate scrie sub forma $2 \sin \frac{m}{2} \cos \frac{x-y}{2} = p$,

iar dacă $\sin \frac{m}{2} \neq 0$, adică $m \neq 2k\pi$, atunci

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{p}{2 \sin \frac{m}{2}}. \quad (1)$$

Dar ecuația (1) are soluție numai dacă $\left| \frac{p}{2 \sin \frac{m}{2}} \right| \leq 1$; în caz contrar sistemul nu are soluții.

Această condiție fiind îndeplinită, se poate găsi un arc $\varphi \in [0, \pi]$ astfel încît să putem nota

$$\cos \varphi = \frac{p}{2 \sin \frac{m}{2}}. \quad (2)$$

Ținând seamă de (1) și (2), rezultă

$$\frac{x-y}{2} = \pm \varphi + 2k\pi.$$

Deci, avem de rezolvat sistemul $x + y = m$, $x - y = \pm 2\varphi + 4k\pi$, de unde rezultă $x = \frac{m}{2} \pm \varphi + 2k\pi$ și $y = \frac{m}{2} \mp \varphi - 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dacă $m = 2k\pi$, atunci sistemul este incompatibil, dacă $p \neq 0$, și compatibil nedeterminat dacă $p = 0$.

În mod asemănător se discută și sistemele $x - y = a$, $\sin x - \sin y = b$; $x \pm y = m$, $\cos x \pm \cos y = p$; $\sin x \pm \cos y = q$, $x \pm y = r$, aceste ultime două sisteme reducându-se la cele precedente, înlocuind pe $\cos y$ cu $\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$.

3.17. Să se rezolve și să se discute sistemul

$$x + y = a, \quad \frac{\cos x}{\cos y} = b.$$

R. Se observă că dacă $\cos y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, atunci b nu poate rezulta decât dintr-o formă nedeterminată $\frac{0}{0}$ și, prin urmare, $\cos x = 0$ și $x = \frac{\pi}{2} + k'\pi$. Ținând seamă de prima ecuație a sistemului, ar rezulta în această situație $a = x + y = k\pi$. Reciproc, dacă $a = k\pi$, $x = k\pi - y$ și $\cos x = \pm \cos y$, sistemul fiind incompatibil dacă $b \neq \pm 1$ și nedeterminat dacă $b = 1$ (pentru k par), sau $b = -1$ (pentru k impar).

Presupunem $a \neq k\pi$ (și deci $b \neq \pm 1$); aplicând proprietățile proporțiilor în ecuația a doua a sistemului, obținem

$$\frac{\cos x - \cos y}{b - 1} = \frac{\cos x + \cos y}{b + 1} \quad (b \neq \pm 1).$$

După unele calcule elementare, din ultimele două rapoarte rezultă $\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{1-b}{1+b} \operatorname{ctg} \frac{a}{2}$.

Se poate găsi însă un arc $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\frac{1-b}{1+b} \operatorname{ctg} \frac{a}{2} = \operatorname{tg} \varphi$, de unde rezultă imediat $x - y = 2\varphi + 2k\pi$. Asociind această ecuație cu $x + y = a$, rezultă în final $x = \varphi + \frac{a}{2} + k\pi$ și $y = -\varphi + \frac{a}{2} - k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Să se rezolve și să se discute sistemele de ecuații :

3.18. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = m$, $x + y = n$.

R. Se va observa că se poate scrie

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)} \quad \text{etc.}$$

$$3.19. \cos x + \cos y = 1,$$

$$\cos 2x + \cos 2y = m.$$

R. Se va ține seamă că $m \in [-2, 2]$; apoi se vor exprima $\cos 2x$ și $\cos 2y$ în funcție de $\cos x$ și $\cos y$.

$$3.20. \sin x + \sin y = m,$$

$$\cos x \mp \cos y = 1 + \sqrt{1 - m^2}.$$

R. Trebuie ca $m \in [-1, 1]$; transformând în produse și împărțind cele două ecuații, se obține $\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = \frac{m}{1 + \sqrt{1 - m^2}}$. Pentru $m \in [0, 1]$ se pot ridica la pătrat ambele ecuații și apoi adunându-le sub forma obținută, rezultă $\cos(x - y) = \sqrt{1 - m^2}$.

$$3.21. \sin x + \sin y = m,$$

$$\sin^2 x + \sin^2 y = 8m^2.$$

R. Se poate rezolva sistemul $u + v = m$ și $u^2 + v^2 = 8m^2$ (unde $\sin x = u$ și $\sin y = v$) apoi se pun condițiile $u, v \in [-1, 1]$.

$$3.22. \sin^2 x \mp \sin^2 y = m, \quad x \mp y = n.$$

B. Se trece de la pătrate de sinusuri la cosinusuri de arce duble, obținându-se

$$\cos 2x + \cos 2y = 2(1 - m), \quad x + y = n.$$

$$3.23. \cos x + \cos y = m, \quad \sin x \sin y = n.$$

R. Se observă că $m \in [-2, 2]$, iar $n \in [-1, 1]$; se poate transforma ecuația a doua în $\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2n$, iar prima ecuație în $\cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{m}{2}$. Acum, se pot lua ca necunoscute $\frac{x+y}{2} = \alpha$ și $\frac{x-y}{2} = \beta$.

$$3.24. \cos x - \cos y = a, \quad \sin x + \sin y = b.$$

R. Transformând în produse cele două ecuații, prin împărțire se obține $\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = -\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$).

Dacă considerăm $0 \leq a, b \leq 2$, ridicăm la pătrat cele două ecuații și prin adunarea acestora se obține

$$\cos(x + y) = 1 - \frac{a^2 + b^2}{2},$$

de unde rezultă condiția $\left| 1 - \frac{a^2 + b^2}{2} \right| \leq 1$ etc.

4. EXERCITII PROPUSE SPRE REZOLVARE

Ecuatii care se pot rezolva cu ajutorul formulelor universale

4.1. Să se rezolve ecuația

$$2 \cos^2 x - \sin 2x + \sin x + \cos x = 1.$$

R. Se folosesc formulele $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ și $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, unde $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$,

$x \neq (2k+1)\pi$; făcând înlocuirile respective, ecuația dată devine $3t^2 - 3t^2 - t \mp 1 = 0$, cu rădăcinile $t_1 = 1, t_{2,3} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, de unde rezultă imediat ecuațiile elementare $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$,

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ cu soluțiile $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi, x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi, k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

4.2. Să se rezolve ecuația $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 1 + \sin 2x$,

R. Se exclud soluții de forma $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (pentru care se anulează numitorul din membrul întâi al ecuației) precum și soluții de forma $(2k+1)\frac{\pi}{2}$; ecuația se poate rezolva cu ajutorul formulelor universale, obținându-se soluțiile $x_1 = \frac{3\pi}{4} + k_1\pi$ și $x_2 = k_2\pi, k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

Altfel. Se trece 1 în membrul întâi și ecuația devine $\frac{\sin x}{\cos x - \sin x} = \sin x \cos x$, de unde rezultă $\sin x = 0$ cu $x_1 = k_1\pi$ și $\sin x + \cos x = 0$ cu $x_2 = \frac{3\pi}{4} + k_2\pi$ (sau $x_2 = -\frac{\pi}{4} + k_2\pi$), $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

4.3. Să se rezolve ecuația $\sin x + \sin 2x = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

R. Se poate lua ca necunoscută $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ cu $x \neq (2k+1)\pi$ și ecuația devine

$$\frac{2t}{1+t^2} + 2 \cdot \frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = t$$

cu $t_1 = 0$, care dă $x_1 = 2k_1\pi$ și $t_{2,3} = \pm 1$, de unde $x_{2,3} = \pm \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi, k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

Alfel. Ecuația se mai poate scrie

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} (1 + 2 \cos x) = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}, \text{ cu } \sin \frac{x}{2} = 0, x = 2k\pi \text{ și } 2 \cos^2 \frac{x}{2} (1 + 2 \cos x) = 1 \Leftrightarrow (1 + \cos x) (1 + 2 \cos x) = 1, \text{ de unde rezultă } \cos x = 0 \text{ cu } x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

4.4. Să se rezolve ecuația

$$8 \cos^3 x + \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x = 1.$$

R. Înlocuind pe $\sin^2 x$ cu $1 - \cos^2 x$ și efectuând reducerea termenilor, ecuația dată se transformă în

$$8 \cos^3 x - \sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x = 0,$$

de unde

$$\cos x = 0 \text{ cu } x_1 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$$

și

$$8 \cos^2 x - \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0. \quad (1)$$

Dar ecuația (1) se poate rezolva cu ajutorul formulelor universale, rezultând ecuația

$$9t^4 - 2\sqrt{3}t^3 - 16t^2 - 2\sqrt{3}t + 7 = 0, \quad (1')$$

unde $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, o soluție a ecuației (1') fiind $t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, de unde $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi$ etc.

4.5. Să se rezolve ecuația

$$\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2.$$

R. Notând $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, ecuația se poate scrie $\sqrt{\frac{(1-t)^2}{2}} = 2 - t$, cu $2 - t \geq 0$, sau $|1 - t| = (2 - t)\sqrt{2}$ etc.

Ecuații de forma $a \sin x + b \cos x = c$

4.6. Să se rezolve ecuația $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2$.

R. Se înlocuiește $\sqrt{3}$ cu $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ și ecuația dată devine $\cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 1$, cu soluția generală $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Alfel. Notînd $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, ecuația dată se transformă în $3t^2 - 2\sqrt{3}t + 1 = 0$, unde $t_1 = t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ și deci $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, cu soluția $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

4.7. Să se rezolve ecuația $\sin x + \cos x = 1$.

R. Se poate înlocui coeficientul lui $\sin x$ (sau $\cos x$) cu $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ și ecuația devine $\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, cu soluția $x = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Alfel. Se pot folosi formulele universale și ecuația dată devine $2t^2 - 2t = 0$ cu $t_1 = 0$ și $t_2 = 1$, de unde $x_1 = 2k_1\pi, x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi$, adică aceleași rezultate ca mai înainte.

Alfel. Ecuația dată se poate scrie și astfel :

$$\sin x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \quad (1)$$

soluțiile ecuației (1) fiind date de $\sin \frac{x}{2} = 0$ cu $x_1 = 2k_1\pi$ și $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$, cu $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi, k_{1,2} \in \mathbb{Z}$, (aceleași rezultate).

4.8. Să se rezolve ecuația $(\sqrt{3} + 2) \sin x + \cos x = \sqrt{3} + 1$.

R. Se înlocuiește $\sqrt{3} + 2$ cu $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}$ și se obține $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} \sin x + \cos x = \sqrt{3} + 1$, sau

$$\cos \left(x - \frac{5\pi}{12} \right) = (\sqrt{3} + 1) \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4} \text{ sau încă } \cos \left(x - \frac{5\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ de unde}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi \text{ și } x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k_2\pi, k_{1,2} \in \mathbb{Z}.$$

Ecuații care conțin expresiile $\sin x \pm \cos x$ și $\sin x \cos x$

4.9. Să se rezolve ecuația $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$.

R. Se poate nota $\sin x + \cos x = u$ și ecuația se transformă în $u \left(1 - \frac{u^2 - 1}{2} \right) = 1$ sau $u^3 - 3u - 2 = 0$, cu $u_1 = u_2 = 1$ și $u_3 = -2$, din care convine doar $u_{1,2} = 1$, deoarece $\max(\sin x \pm \cos x) = \sqrt{2}$. Acum avem de rezolvat ecuația $\sin x + \cos x = 1$, ale cărei soluții sînt $x_1 = 2k_1\pi$ și $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi, k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

Altfel. Putem scrie $1 - \sin^3 x - \cos^3 x =$

$$= (1 - \sin x)(1 + \sin x + \sin^2 x) - \cos x(1 - \sin^2 x) =$$

$$= (1 - \sin x)(1 - \cos x)(2 + \sin x + \cos x) = 0,$$

rezultând aceleași soluții.

4.10. Să se rezolve ecuația $\sin^3 x - \cos^3 x = 1$.

R. Notînd $\sin x - \cos x = u$, ecuația devine $u \left(1 + \frac{u^2 - 1}{2}\right) = 1$ sau $u^3 + u - 2 = 0$,

cu $u_1 = 1$, $u_{2,3} \in \mathbb{C}$, de unde $\sin x - \cos x = 1$, cu soluțiile $x_1 = (2k_1 + 1)\pi$ și $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

4.11. Să se rezolve ecuația

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

R Se notează $\sin x + \cos x = u$ și ecuația se transformă în

$$u^3 - 3u + \sqrt{2} = 0, \quad (1)$$

de unde se obțin rădăcinile $u_1 = \sqrt{2}$ și $u_{2,3} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2}$. Întrucît $\max(\sin x + \cos x) =$

$= \sqrt{2}$ iar $\min(\sin x + \cos x) = -\sqrt{2}$, rezultă că nu pot fi luate în considerare decît

rădăcinile $u_1 = \sqrt{2}$ și $u_2 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$. Deci, ecuația dată este echivalentă cu

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}$, și $\sin x + \cos x = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$, soluțiile fiind respectiv

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k_1\pi \text{ și } x_2 = \pm \arccos \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{\pi}{4} + 2k_2\pi, k_{1,2} \in \mathbb{Z}.$$

4.12. Să se rezolve ecuația

$$\sin^3 3x + \cos^3 3x + \sin 6x + 1 = 0.$$

R. Punem $\sin 3x = u$ și $\cos 3x = v$; ecuația dată se transformă în

$$u^3 + v^3 + 2uv + 1 = 0, \quad (1)$$

Dar (1) se mai poate scrie și astfel:

$$u^3 + v^3 + u^2 + v^2 + 2uv = 0, \text{ de unde } u + v = 0 \text{ și } u + v - uv + 1 = 0.$$

Din $u + v = 0$ rezultă imediat soluția $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{k_1\pi}{6}$; rămîne de rezolvat ecuația

$$u + v - uv + 1 = 0, \quad (2)$$

în condiția $u^2 + v^2 = 1$. Dar, singura soluție acceptabilă a ecuației (2) este $u + v = -1$, adică $\sin 3x + \cos 3x = -1$, de unde $\frac{3x}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ și $\frac{3x}{2} = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ etc.

Ecuații omogene

4.13. Să se rezolve ecuația

$$\cos^2 x + 3 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 1.$$

R. Înlocuind membrul al doilea prin $\cos^2 x \mp \sin^2 x$, ecuația dată se transformă în $\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = 0$, cu $x_1 = k_1\pi$ și $x_2 = \frac{2\pi}{3} + k_2\pi$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

Atfel. Se poate trece de la pătrate de sinusuri și cosinusuri la cosinusuri de arce duble, rezultând ecuația $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = 1$. În care, înlocuind $\sqrt{3}$ cu $\text{tg } \frac{\pi}{3}$, aceasta devine $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3}$ etc.

4.14. Să se rezolve ecuația

$$(\sqrt{3} \mp 1) \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1) \cos^2 x = 0$$

R. Ecuația omogenă se împarte la $\cos^2 x \neq 0$ și rezultă o ecuație de gradul al doilea în $\text{tg } x$, ale cărei rădăcini sînt $\text{tg } x_1 = 1$ cu $x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\pi$ și $\text{tg } x_2 = 2 - \sqrt{3}$ cu $x_2 = \frac{\pi}{12} + k_2\pi$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

Atfel. Efectuînd toate calculele, se ajunge la ecuația $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{3}$, în care înlocuindu-se $\sqrt{3}$ prin $\text{tg } \frac{\pi}{3}$, se obține $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{6}$, de unde rezultă aceleași soluții ca prin metoda anterioară.

4.15. Să se rezolve ecuația

$$\sin^6 x - 7 \sin^4 x \cos^4 x + 6 \cos^8 x = 0.$$

R. Ecuația omogenă se împarte la $\cos^8 x \neq 0$ și se obține ecuația $\text{tg}^6 x - 7 \text{tg}^4 x + 6 = 0$ cu soluțiile $x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x_2 = \frac{3\pi}{4} + k_2\pi$, $x_3 = \text{arctg } \sqrt[4]{6} + k_3\pi$ și $x_4 = \text{arctg } (-\sqrt[4]{6}) + k_4\pi$, $k_{1,2,3,4} \in \mathbb{Z}$.

4.16. Să se rezolve ecuația

$$2 \sin^4 x + \sin 2x - 6 \cos^4 x = 0.$$

R. Scriind ecuația sub forma

$$2 \sin^4 x + 2 \sin x \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) - 6 \cos^4 x = 0,$$

aceasta se transformă într-o ecuație omogenă, prin împărțirea cu $\cos^4 x \neq 0$ devenind

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0, \quad (1)$$

o soluție a ecuației (1) fiind dată de $\operatorname{tg} x = 1$, $x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\pi$, $k_1 \in \mathbb{Z}$. Rămâne de rezolvat ecuația $\operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 3 = 0$, care nu are decât o singură soluție reală dată de $\operatorname{tg} x = \alpha$, cu $\alpha \in (-2, -1)$, ceea ce se poate constata folosind teorema lui Rolle.

4.17. Să se rezolve ecuația

$$2 \cos^4 x - \frac{5}{4} \sin 2x \mp \sin^2 2x - \sin^4 x = 0.$$

R. Dacă în loc de $\sin 2x$ se scrie $\sin 2x (\sin^2 x + \cos^2 x)$, ecuația dată se transformă în ecuația omogenă

$$4 \cos^4 x - 5 \cos^2 x \sin x + 8 \cos^2 x \sin^2 x - 5 \cos x \sin^3 x - 2 \sin^4 x = 0,$$

care prin împărțirea cu $\cos^4 x$ (ceea ce este posibil dacă $\cos x \neq 0$) se transformă în final în ecuația

$$2 \operatorname{tg}^4 x + 5 \operatorname{tg}^3 x - 8 \operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x - 4 = 0, \quad (1)$$

având două rădăcini reale $\operatorname{tg} x = 1$ și $\operatorname{tg} x = \alpha \in (-4, -3)$, de unde $x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\pi$ și $x_2 = \operatorname{arctg} \alpha + k_2\pi$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

4.18. Să se rezolve ecuația

$$4 \sin^4 x + \sin^2 2x \mp \sin 2x (\cos^2 x - 3 \sin^2 x) - 2 \cos 2x = 0.$$

R. Se va înlocui $\cos 2x$ cu $(\cos^2 x - \sin^2 x)$, $(\cos^2 x + \sin^2 x)$ și ecuația se transformă în ecuația omogenă

$$3 \sin^4 x - 3 \sin^3 x \cos x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos^3 x - \cos^4 x = 0,$$

care, prin împărțire cu $\cos^4 x$ (ceea ce este posibil dacă $\cos x \neq 0$), devine

$$3 \operatorname{tg}^4 x - 3 \operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 1 = 0. \quad (1)$$

Dar ecuația (1) are numai două rădăcini reale date de $3 \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$, de unde rezultă imediat soluțiile generale

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k_1\pi \text{ și } x_2 = -\frac{\pi}{6} + k_2\pi, \text{ sau } \{x_1\} \cup \{x_2\} = \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ecuații de forma $f(\alpha \sin^2 mx, \beta \cos^2 nx) = 0$

4.19. Să se rezolve ecuația

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

R. Se trece de la puteri de cosinusuri la cosinusuri de arce multiple și se obține

$$\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1 + \cos 6x}{2} = 1, \quad (1)$$

iar după efectuarea calculelor

$$\cos 6x + \cos 4x + \cos 2x + 1 = 0, \quad (1')$$

căre se mai poate scrie și sub forma

$$2 \cos^2 3x + 2 \cos 3x \cos x = 0 \quad (1'')$$

sau încă $\cos 3x \cos 2x \cos x = 0$, de unde $x_1 = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{2k_1\pi}{3}$, $x_2 = \pm \frac{\pi}{4} \oplus k_2\pi$,

$x_3 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k_3\pi$, $\{x_3\} \subset \{x_1\}$, $k_{1,2,3} \in \mathbb{Z}$.

De observat că ecuația (1') se mai poate rezolva luind ca necunoscută $\cos 2x = y$, rezolvând ecuația algebrică $2y^3 + y^2 - y = 0$, cu rădăcinile $y_1 = 0$, $y_2 = -1$, $y_3 = \frac{1}{2}$.

4.20. Să se rezolve ecuația

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x.$$

R. Se trece de la puteri de sinusuri la cosinusuri de arce duble, procedându-se ca la exercițiul anterior; se obțin soluțiile

$$x_1 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi, \quad x_2 = \frac{k_2\pi}{5}, \quad k_{1,2} \in \mathbb{Z}.$$

4.21. Să se rezolve ecuația

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2.$$

R. Se trece de la puteri de cosinusuri la cosinusuri de arce duble; avem

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0, \quad (1)$$

sau transformând în produse, ecuația (1) devine $2 \cos x \cos 2x \cos 5x = 0$, cu $x_1 = \pm \frac{\pi}{2} +$

$+ 2k_1\pi$, $x_2 = \pm \frac{\pi}{4} + k_2\pi$, $x_3 = \pm \frac{\pi}{10} + \frac{2k_3\pi}{5}$, unde $\{x_1\} \subset \{x_3\}$, $k_{1,2,3} \in \mathbb{Z}$.

4.22. Să se rezolve ecuația

$$\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{4}.$$

R. Ecuația dată se poate scrie și sub forma

$$(1 - \cos 2x)^2 + (1 + \sin 2x)^2 = 1, \quad (1)$$

sau, dezvoltând și făcând înlocuirile corespunzătoare, (1) devine:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ de unde } x_1 = k_1\pi \text{ și } x_2 = -\frac{\pi}{4} + k_2\pi, k_{1,2} \in Z.$$

4.23. Să se rezolve ecuația

$$\cos^2 x + \sin^2 2x + \cos^2 3x + \sin^2 4x = 2.$$

R. Se trece la cosinusi de arce duble, rezultând ecuația $\cos 2x - \cos 4x + \cos 6x - \cos 8x = 0$ cu soluțiile $x_1 = \pm \frac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x_2 = k_2\pi$, $x_3 = \frac{k_3\pi}{5}$, unde $\{x_2\} \subset \{x_3\}$.

4.24. Să se rezolve ecuația

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x.$$

R. Se trece de la puteri de cosinusi și sinusuri la cosinusi de arce multiple, rezultând ecuația $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$, care este echivalentă cu $\cos 4x = 0$ și $2 \cos 2x + 1 = 0$, de unde

$$x_1 = \pm \frac{\pi}{8} + \frac{k_1\pi}{2} \text{ și } x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + (2k_2 + 1) \frac{\pi}{2}, k_{1,2,3} \in Z.$$

4.25. Să se rezolve ecuația

$$\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{8}.$$

R. Se trece de la puteri de sinusuri la cosinusi de arce duble; în final se ajunge la ecuația $2 \cos^2 2x + 4 \cos 2x - 1 = 0$, care are o singură soluție acceptabilă dată de

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{6}-2}{2}, x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{6}-2}{2} + k\pi, k \in Z.$$

Altfel, se înlocuiește direct $\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$ cu $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x \pm \cos x)$ și se ajunge la ecuația

$$8 \sin^4 x - 16 \sin^2 x + 5 = 0 \text{ etc.}$$

4.26. Să se rezolve ecuația

$$\cos^2(a-x) + \cos^2(a-2x) + \cos^2(a-3x) + \cos^2(a-4x) = 2.$$

R. Se trece de la puteri de cosinusi la cosinusi de arce duble și se obține

$$\cos 2(a-x) + \cos 2(a-2x) + \cos 2(a-3x) + \cos 2(a-4x) = 0, \quad (1)$$

sau, grupind convenabil și transformind în produse, (1) devine

$$\cos(2a - 5x) \cos 3x + \cos(2a - 5x) \cos x = 0,$$

de unde $\cos(2a - 5x) = 0$ cu $x_1 = \pm \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} + \frac{2a}{5}$ și $\cos 3x + \cos x = 0$ cu

$$x_2 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi \text{ și } x_3 = \pm \frac{\pi}{4} + k_3\pi, k_{1,2,3} \in \mathbb{Z}.$$

4.27. Să se rezolve ecuația

$$\sin^2 a + \sin^2(a + x) + \sin^2(a + 2x) + \sin^2(a + 3x) = 2.$$

R. Se trece de la puteri de sinusuri la cosinusuri de arce duble și apoi se transformă sumele în produs, rezultând ecuațiile echivalente $\cos(2a + 3x) = 0$, cu $x_1 = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{2k_1\pi}{3} - \frac{2a}{3}$ și $\cos x = 0$, $\cos 2x = 0$, cu soluțiile $x_2 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi$, respectiv $x_3 = \pm \frac{\pi}{4} + k_3\pi$, $k_{1,2,3} \in \mathbb{Z}$

4.28. Să se rezolve ecuația

$$\sin^2 x + \sin^2 3x + \sin^2 5x = \frac{3}{2}.$$

R. Se trece de la puteri de sinusuri la cosinusuri de arce duble și ecuația dată se transformă în

$$\cos 2x + \cos 6x + \cos 10x = 0,$$

care este echivalentă cu $\cos 6x(2\cos 4x + 1) = 0$, cu soluțiile $x_1 = (2k_1 + 1)\frac{\pi}{12}$ și

$$x_2 = \pm \frac{\pi}{12} + (2k_2 + 1)\frac{\pi}{4}, k_{1,2} \in \mathbb{Z}.$$

4.29. Să se rezolve ecuația

$$\sin^2 x + \sin^2 3x + \sin^2 5x = 3.$$

R. Trecerea la cosinusuri de arce duble conduce la calcule destul de complicate (rezultă ecuația $2 \cos 4x \cos 6x + \cos 6x = -3$, în care se poate lua ca necunoscută $\cos 2x = y$, obținându-se $16y^5 - 16y^3 + 3y + 3 = 0$, ecuație cu o singură rădăcină reală $y = -1$, ceea ce se constată utilizând teorema lui Rolle). Astfel, în cazul de față este mai simplu de rezolvat ecuația respectivă, observând că aceasta se poate scrie sub forma

$$(\sin^2 x - 1) + (\sin^2 3x - 1) + (\sin^2 5x - 1) = 0$$

sau $\cos^2 x + \cos^2 3x + \cos^2 5x = 0$, de unde $\cos x = 0$, $\cos 3x = 0$, $\cos 5x = 0$, cu soluțiile corespunzătoare.

Ecuatii care conțin expresii de forma $\sin^{2n} x + \cos^{2n} x$, $n \geq 2$

4.30. Să se rezolve ecuația

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{56}{41} (\sin^8 x + \cos^8 x).$$

R. Se pleacă de la $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ și se ridică succesiv la puterea a treia și apoi la a patra, obținându-se

$$1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{56}{41} \left(1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8} \sin^4 2x\right),$$

sau luând ca necunoscută $\sin 2x$, ecuația devine

$$28 y^4 - 101 y^2 + 60 = 0. \quad (1)$$

Dar ecuația (1) este echivalentă cu ecuațiile $4y^2 - 3 = 0$ și $7y^2 - 20 = 0$, fiind acceptabile doar soluțiile $y_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, de unde și soluțiile $x_1 = (-1)^{k_1} \frac{\pi}{6} + k_1 \frac{\pi}{2}$ și $x_2 = (-1)^{k_2+1} \frac{\pi}{6} + \frac{k_2 \pi}{2}$, $k_{1,2} \in Z$.

4.31. Să se rezolve ecuația

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x} + \frac{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x} = 2.$$

R. Se va ține seama că $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$, $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$, $\sin^8 x + \cos^8 x = 1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \sin^4 x \cos^4 x$; apoi se ia ca necunoscută $\sin^2 x \cos^2 x = y$ și ecuația dată se transformă în $20 y^3 - 37 y^2 + 16 y - 2 = 0$, care are o singură rădăcină acceptabilă $y_1 = \frac{1}{4}$, de unde rezultă $\sin x \cos x = \pm \frac{1}{2}$ cu

$$x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \frac{k_1 \pi}{2} \text{ și } x_2 = (-1)^{k_2+1} \frac{\pi}{4} + \frac{k_2 \pi}{2}, \quad k_{1,2} \in Z, \text{ sau } x = (2k + 1) \frac{\pi}{4}, \quad k \in Z.$$

4.32. Să se rezolve ecuația

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 2 (\sin^6 x + \cos^6 x).$$

R. Se pleacă de la $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ și prin ridicarea la pătrat și la cub a acestei egalități se obține

$$1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 2 (1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x). \quad (1)$$

Luând ca necunoscută auxiliară $\sin 2x = y$, ecuația (1) se transformă în $y^2 = 1$, de unde $x_1 = (-1)^{k_1} \frac{\pi}{4} + \frac{k_1 \pi}{2}$ și $x_2 = (-1)^{k_2+1} \frac{\pi}{4} + \frac{k_2 \pi}{2}$, $k_{1,2} \in Z$, sau $x = (2k \oplus 1) \frac{\pi}{4}$, $k \in Z$.

4.33. Să se rezolve ecuația

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16} \cos^4 2x.$$

R. Se ia ca necunoscută $\cos^2 2x = t \in [0, 1]$ și ecuația dată devine

$$24t^2 - 10t - 1 = 0, \quad (1)$$

rădăcina acceptabilă fiind $t_1 = \frac{1}{2}$, de unde rezultă soluțiile date de ecuațiile elementare

$$\cos 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ecuații care conțin produse de funcții trigonometrice de arce multiple

4.34. Să se rezolve ecuația

$$\cos x \cos 3x = \cos 5x \cos 7x.$$

R. Este ușor de observat că transformând produsele de cosinusi în sume, ecuația dată devine $\cos 2x + \cos 4x = \cos 2x + \cos 12x$, sau $\cos 12x - \cos 4x = 0$, sau încă $2 \sin 4x \sin 8x = 0$, de unde $x_1 = \frac{k_1 \pi}{4}$ și $x_2 = \frac{k_2 \pi}{8}$, cu $\{x_1\} \subset \{x_2\}$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

Alfel. Se observă că ecuația se mai poate scrie și sub forma $\sin^2 4x \cos 4x = 0$, de unde $\sin 4x = 0$ și $\cos 4x = 0$, cu soluțiile $x_1 = k_1 \frac{\pi}{4}$ și $x_2 = (2k_2 + 1) \frac{\pi}{8}$, iar $\{x_1\} \cup \{x_2\} = k \frac{\pi}{8}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.35. Să se rezolve ecuația

$$4 \sin x \sin (x - a) = 2 \cos a - 1.$$

R. După desfacerea produsului din membrul întâi și gruparea convenabilă a termenilor rezultă ecuația

$$\cos (2x - a) = \frac{1}{2}, \text{ cu } x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{a}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

4.36. Să se rezolve ecuația

$$2 \cos x \cos 2x \sin 3x = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right).$$

R. Înmulțim ambii membri ai ecuației cu 2 și transformând produsele de sinusuri și cosinusuri în sume, obținem

$$\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = \sin 4x + \cos 2x$$

sau $2 \sin 4x \cos 2x = \cos 2x$, de unde $x_1 = \pm \frac{\pi}{4} + k_1 \pi$ și $x_2 = (-1)^{k_2} \frac{\pi}{24} + \frac{k_2 \pi}{4}$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

4.37. Să se rezolve ecuația

$$\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos 3x = \sin 3x \cos 4x.$$

R. Se trece de la produse de sinusuri și cosinusuri la sume de aceleași funcții:

$$\frac{1}{2} (\sin 3x - \sin x) + \frac{1}{2} (\sin 5x - \sin x) = \frac{1}{2} (\sin 7x - \sin x),$$

ecuație care este echivalentă cu $\sin 5x + \sin 3x = \sin 7x + \sin x$, sau

$$\sin 4x \cos x = \sin 4x \cos 3x, \quad (1)$$

soluțiile ecuației (1) fiind date de $\sin 4x = 0$ cu $x_1 = \frac{k_1\pi}{4}$ și $\cos 3x - \cos x = 0$ cu $x_2 = k_2\pi$ și $x_3 = k_3 \frac{\pi}{2}$, adică în final $x = k \frac{\pi}{4}$, soluțiile lui x_2 și x_3 fiind cuprinse în această soluție generală.

Altfel. Ecuația dată este echivalentă cu următoarele două: $\sin x = 0$, cu $x_1 = k\pi$ și

$$\cos 2x + 2 \cos x \cos 3x = \cos 4x (3 - 4 \sin^2 x), \quad (1)$$

sau

$$\cos 2x + (\cos 4x + \cos 2x) = \cos 4x (2 \cos 2x + 1), \quad (1')$$

soluțiile ecuației (1') fiind date de $\cos 2x = 0$ cu $x_2 = \pm \frac{\pi}{4} + k_2\pi$ și $\cos 4x = 1$ cu $x_3 = k_3 \frac{\pi}{2}$, care reunite dau $x = \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Altfel. După scoaterea în factor a lui $\sin x$, de unde soluția imediată $x_1 = k_1\pi$, ecuația rămasă se poate scrie sub forma

$$\cos 2x + 2 \cos x \cos 3x = \cos 4x (4 \cos^2 x - 1), \quad (1)$$

sau ținând seamă că $2 \cos x \cos 3x = \cos 2x + \cos 4x$, ecuația (1) devine $\cos 2x + \cos 4x = 2 \cos^2 x \cos 4x$, sau $\cos x \cos 3x = \cos^2 x \cos 4x$, de unde a doua soluție este dată

de $\cos x = 0$, adică $x_3 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k_3\pi$, iar $\cos 3x = \frac{1}{2} (\cos 3x + \cos 5x)$ sau

$\cos 5x - \cos 3x = 0$ dă soluțiile $x_4 = k_4 \frac{\pi}{4}$ și $x_5 = k_4\pi$, deci $x = \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.38. Să se rezolve ecuația

$$\sin 3x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2} = \cos 3x \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

R. Transformând în sume cei doi membri ai ecuației, aceasta devine

$$\sin x \oplus \sin 5x + \sin 6x = \cos x + \cos 5x + \sin 6x$$

sau $2 \sin 3x \cos 2x = 2 \cos 3x \cos 2x$, de unde $\cos 2x=0$ cu $x_1 = \pm \frac{\pi}{4} + k_1\pi$ și $\operatorname{tg} 3x = 1$
 cu $x_2 = \frac{\pi}{12} + k_2 \frac{\pi}{3}$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$. De remarcat că $\left\{ -\frac{\pi}{4} + k_1\pi \right\} \subset \left\{ \frac{\pi}{12} + k_2 \frac{\pi}{3} \right\}$.

4.39. Să se rezolve ecuația

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 5x = 1.$$

R. Se ia ca necunoscută $\operatorname{tg} x = t$ și ecuația se transformă în

$$\frac{t(3t - t^3)(5t - 10t^3 + t^5)}{(1 - 3t^2)(1 - 10t^2 + 5t^4)} = 1. \quad (1)$$

După eliminarea numitorului aceasta devine

$$t^9 - 13t^7 - 15t^6 + 35t^5 + 35t^4 - 15t^3 - 13t^2 + 1 = 0, \quad (1')$$

Ecuația (1') este reciprocă avind una din soluțiile $t_1 = -1$, de unde $\operatorname{tg} x_1 = -1$ și

$$x_1 = \frac{3\pi}{4} + k_1\pi; \text{ alte două rădăcini ale ecuației reciproce (1') sînt } t_2 = 2 - \sqrt{3}, t_3 = \\ = 2 + \sqrt{3}, \text{ de unde } \operatorname{tg} x_2 = 2 - \sqrt{3} \text{ cu } x_2 = \frac{\pi}{12} + k_2\pi \text{ și } \operatorname{tg} x_3 = 2 + \sqrt{3} \text{ cu } x_3 = \\ = \frac{5\pi}{12} + k_3\pi, k_{1,2,3} \in \mathbb{Z}.$$

4.40. Să se rezolve ecuația

$$4 \cos x \cos 3x \cos 6x = \cos 10x.$$

R. Membrul întii al ecuației se transformă în sume de cosinusuri de arce multiple, rezultă

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 8x + \cos 10x = \cos 10x$$

sau

$$2 \cos 5x \cos 4x + \cos 4x = 0,$$

de unde $\cos 4x = 0$ cu $x_1 = \pm \frac{\pi}{8} + \frac{k_1\pi}{2}$ și $\cos 5x = -\frac{1}{2}$ cu $x_2 = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{2k_2\pi}{5}$,
 $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

Diverse tipuri de ecuații

Să se rezolve ecuațiile :

4.41. $\sin 5x = \sin 7x$.

R. Ecuația dată fiind de forma (1.25), rezultă imediat soluțiile

$$7x + 5x = (2k_1 + 1)\pi \text{ cu } x_1 = \frac{2k + 1}{12}\pi,$$

$$7x - 5x = 2k_2\pi \text{ cu } x_2 = k_2\pi, k_{1,2} \in \mathbb{Z}.$$

Alfel. Treceam în membrul al doilea pe $\sin 5x$ și ecuația se transformă în $2 \sin x \cos 6x = 0$, soluțiile fiind date de ecuațiile elementare $\sin x = 0$ cu $x_1 = k_1\pi$ și $\cos 6x = 0$ cu $x_2 = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k_2\pi}{3}$ sau încă $x_2 = (2k_2 + 1)\frac{\pi}{12}$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

4.42. $\sin 2x = \cos(x + a)$.

R. Se trece în membrul al doilea de la cosinus la sinusul arcului complementar, ecuația fiind de aceeași formă (1.25). Avem $\sin 2x = \sin\left[\frac{\pi}{2} - (x + a)\right]$ sau, punând $\frac{\pi}{2} - a = \alpha$, rezultă imediat $x_1 = \frac{2k_1\pi + \alpha}{3}$ și $x_2 = (4k_2 \pm 1)\pi - \alpha$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

4.43. $\sin(x + a) = \cos(3x + b)$.

R. Același tip de ecuație cu precedentă. Procedând asemănător, rezultă soluțiile

$$x_1 = (4k_1 + 1)\frac{\pi}{8} - \frac{a + b}{4}, \quad x_2 = \frac{a - b}{2} - (4k_2 \pm 1)\frac{\pi}{4}, \quad k_{1,2} \in \mathbb{Z}.$$

4.44. $\sin 2x = \cos 3x$.

R. Ecuație de tipul (1.25) cu

$$x_1 = 2k_1\pi - \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{10}(4k_2 + 1)\pi, \quad k_{1,2} \in \mathbb{Z}.$$

4.45. $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin x$.

R. Scriem pe $\cos 2x$ în funcție de sinusul arcului complementar și membrul întâi al ecuației devine

$$2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin x$$

sau

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x,$$

adică o ecuație de același tip cu (1.25).

4.46. $\sin 3x - \cos^2 x - \sin x(1 - \sin x) = 0$.

R. Se transformă totul în $\sin x$ și se obține ecuația

$$4 \sin^3 x - 2 \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0$$

cu rădăcinile $\sin x_1 = \frac{1}{2}$, $\sin x_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, de unde $x_1 = (-1)^{k_1} \frac{\pi}{6} + k_1\pi$, $x_2 = (-1)^{k_2+1} \frac{\pi}{4} + k_2\pi$, $x_3 = (-1)^{k_3} \frac{\pi}{4} + k_3\pi$, $k_{1,2,3} \in \mathbb{Z}$. De observat că $\{x_2\} \cup \{x_3\} = \left\{ (2k + 1) \frac{\pi}{4} \right\}$.

Alfel. Se observă că ecuația se mai poate scrie și sub forma $\sin 3x - \sin x - \cos 2x = 0$ sau $2 \sin x \cos 2x - \cos 2x = 0$, de unde rezultă imediat $\cos 2x = 0$ cu $x_1 = (2k_1 + 1) \frac{\pi}{4}$ și $\sin x = \frac{1}{2}$ cu $x_2 = (-1)^{k_2} \frac{\pi}{6} + k_2\pi$, cu mențiunea că soluțiile $(-1)^{k_2+1} \frac{\pi}{4} + k_2\pi$ sînt incluse în $(2k_1 + 1) \frac{\pi}{4}$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

4.47. $\sin x - \cos x = 4 \sin x \cos^2 x$.

R. Se împart ambii membri ai ecuației la $\sin x \neq 0$ și punînd $\operatorname{ctg} x = y$, se obține ecuația algebrică $y^3 + 3y^2 + y - 1 = 0$, cu rădăcinile $y_1 = -1$ și $y_{2,3} = -1 \pm \sqrt{2}$ etc.

4.48. $2(\cos x + \cos 3x) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$.

R. Se transformă suma de cosinusuri în produs și ecuația dată devine echivalentă cu $4 \sin x \cos 2x + \sqrt{3} = 0$, cu $x \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}$; înlocuind pe $\cos 2x$ cu $1 - 2 \sin^2 x$ și efectuînd calculele, se ajunge la ecuația

$$8 \sin^3 x - 4 \sin x - \sqrt{3} = 0, \quad (1)$$

care are o singură rădăcină reală $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, căreia îi corespunde soluția $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, celelalte rădăcini ale ecuației (1) fiind complexe, ceea ce se poate constata formînd șirul lui Rolle, sau direct împărțind (1) la $2 \sin x - \sqrt{3}$.

4.49. $(7 \sin x - \sin 2x) \sin x + 4(\cos x - 1) = 0$.

R. Dezvoltînd și transformînd totul în $\cos x$, ecuația devine $2 \cos^3 x - 7 \cos^2 x + 2 \cos x + 3 = 0$, de unde rezultă $\cos x_1 = 1$, $\cos x_2 = -1/2$ și $\cos x_3 = 3$, această ultimă soluție nefiind acceptabilă. În consecință, soluțiile ecuației sînt $x_1 = 2k_1\pi$ și $x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + (2k_2 + 1)\pi$, care reunite dau $x = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.50. $\cos x (3 \cos^2 x - \sin^2 x) - \sin x = 0$.

R. Ecuația este echivalentă cu $3 \cos^3 x - \sin^2 x = \operatorname{tg} x$, care se poate rezolva luîndu-se ca necunoscută $\operatorname{tg} x = y$. Se obține ecuația algebrică $y^3 + y^2 + y - 3 = 0$, care are o singură rădăcină reală $y = 1$, pentru care $\operatorname{tg} x = 1$, cu soluția $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.51. $\cos^2 x + \sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \frac{29}{3}$;

R. Luînd ca necunoscută $\sin 2x$, rezultă ecuațiile elementare $\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ cu

$$x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{k_1\pi}{2}, \quad x_2 = (-1)^{k_2+1} \frac{\pi}{6} + \frac{k_2\pi}{2}, \quad k_{1,2} \in \mathbb{Z}.$$

$$4.52. \cos^4 x \mp \sin^4 x + \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x + \sec^4 x + \operatorname{cosec}^4 x = \frac{21}{2}.$$

R. Se ia ca necunoscută $\sin^2 x \cos^2 x = y$ și se ajunge la ecuația $4y^3 + 15y^2 + 12y - 4 = 0$, ale cărei rădăcini sînt $y_1 = \frac{1}{4}$, $y_{2,3} = \pm 2$; ultimele două rădăcini nu corespund problemei. În consecință, soluțiile ecuației sînt date de $\sin 2x = \pm 1$.

$$4.53. (5 + 3\sqrt{3}) \sin x + 2(3 \mp \sqrt{3}) \cos^2 x - \sin 3x - 3(2 + \sqrt{3}) = 0.$$

R. Treccm de la $\cos^2 x$ și $\sin 3x$ la $\sin x$ și obținem ecuația

$$4 \sin^3 x - 2(3 + \sqrt{3}) \sin^2 x + 2 + 3\sqrt{3} \sin x - \sqrt{3} = 0, \quad (1)$$

rădăcinile fiind $\sin x_1 = 1$, $\sin x_2 = \frac{1}{2}$ și $\sin x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de unde soluțiile $x_1 = (-1)^{k_1} \frac{\pi}{2} + k_1 \pi$, $x_2 = (-1)^{k_2} \frac{\pi}{6} + k_2 \pi$, $x_3 = (-1)^{k_3} \frac{\pi}{3} + k_3 \pi$, $k_{1,2,3} \in \mathbb{Z}$.

$$4.54. (5 + 3\sqrt{3}) \cos x + 2(3 + \sqrt{3}) \sin^2 x + \cos 3x - 3(2 + \sqrt{3}) = 0.$$

R. Se transformă $\sin^2 x$ și $\cos 3x$ în $\cos x$, rezultînd ecuația $4 \cos^3 x - 2(3 + \sqrt{3}) \cos^2 x + 4(2(3 + \sqrt{3}) \cos x - \sqrt{3}) = 0$, ai cărei coeficienți sînt identici cu cei ai ecuației de la exercițiul precedent. Soluțiile sînt $x_1 = 2k_1 \pi$, $x_2 = \pm \frac{\pi}{3} \mp 2k_2 \pi$, $x_3 = \pm \frac{\pi}{6} + 2k_3 \pi$, cu $k_{1,2,3} \in \mathbb{Z}$.

$$4.55. \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x).$$

R. Soluțiile de forma $x = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ și $x = k\pi$ se exclud; pentru rezolvare se ia ca necunoscută $y = \operatorname{tg} x$ și ecuația se transformă în $\sqrt{3}y^4 - 2y^3 - 2\sqrt{3}y^2 + 2y + \sqrt{3} = 0$, ale cărei rădăcini sînt $y_{1,2} = \pm 1$, $y_3 = \sqrt{3}$ și $y_4 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, de unde rezultă soluțiile ecuației din enunț $x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1 \pi$, $x_2 = \frac{3\pi}{4} + k_2 \pi$, $x_3 = \frac{\pi}{3} + k_3 \pi$ și $x_4 = \frac{5\pi}{6} + k_4 \pi$, $k_{1,2,3,4} \in \mathbb{Z}$.

$$4.56. \cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x + 4 \cos 4x = 2.$$

R. Se înlocuiesc cosinusurile de arce multiple prin $\cos x$; rezultă ecuația $8 \cos^4 x + 3 \cos^3 x - 7 \cos^2 x - 2 \cos x = 0$ cu $\cos x_1 = 0$ cu $x_1 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k_1 \pi$, $\cos x_2 = -1$ cu $x_2 = (2k_2 + 1)\pi$ și $\cos x_3 = \frac{5 - \sqrt{41}}{4}$ cu $x_3 = \pm \arccos \frac{\sqrt{41} - 5}{4} + (2k_3 + 1)\pi$, $k_{1,2,3} \in \mathbb{Z}$.

$$4.57. 4 \cos^2 2x - 2 \cos 3x - 1 = 0.$$

R. Se transformă cosinusurile de arce multiple în $\cos x$; se ia $\cos x = y$ și se ajunge la ecuația algebrică $16y^4 - 8y^3 - 16y^2 + 8y + 3 = 0$, care se mai scrie sub forma $(4y^2 - 3)(4y^2 - 2y - 1) = 0$, de unde

$$\cos x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ și } \cos x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4},$$

soluțiile rezultând din acestea.

$$4.58. 9 \sin 4x - 4 \operatorname{tg} 2x + 9 \sin 2x - 4 \operatorname{tg} x = 0.$$

R. Se ia ca necunoscută $\operatorname{tg} x = t$ și ecuația se transformă în

$$t(2t^6 + 7t^4 - 46t^2 + 21) = 0, \quad (1)$$

rădăcinile reale fiind $t_1 = 0$, $t_{2,3} = \pm \sqrt{3}$, celelalte rădăcini fiind date de ecuația bipătrată $2t^4 + 13t^2 - 7 = 0$.

Altfel. Se grupează convenabil termenii ecuației și avem

$$9 \sin 2x (2 \cos 2x + 1) - \frac{4 \sin 3x}{\cos x \cos 2x} = 0,$$

sau

$$\sin x = 0 \text{ și } 18 \cos^2 x (2 \cos^2 x - 1) (4 \cos^2 x - 1) - 4 (4 \cos^2 x - 1) = 0,$$

de unde $4 \cos^2 x - 1 = 0$ și $36 \cos^4 x - 18 \cos^2 x - 4 = 0$, rezultând soluția ca în prima metodă.

$$4.59. \sqrt{3} \cos 5x = \cos 2x + \cos 12x.$$

R. Se transformă în produs membrul al doilea al ecuației, rezultând imediat soluțiile

$$x_1 = \pm \frac{\pi}{10} + \frac{2k_1\pi}{5} \text{ și } x_2 = \pm \frac{\pi}{42} + \frac{2k_2\pi}{7}, \quad k_{1,2} \in \mathbb{Z}.$$

$$4.60. \sin x + \sin(x + 40^\circ) = \sin(x + 60^\circ).$$

R. Treceam în membrul al doilea pe $\sin x$ și transformând în produse, obținem ecuația echivalentă $\sin(x + 40^\circ) = \cos(x + 30^\circ)$, sau

$$\sin(x + 40^\circ) = \sin(60^\circ - x), \quad (1)$$

soluția ecuației (1) fiind $x = k \cdot 180^\circ + 10^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$4.61. \sin(75^\circ + x) + \cos(105^\circ + x) + \sin 2x = 1.$$

R. Dezvoltând și înlocuind $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$ și $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$, ecuația dată devine

$$(\cos x - \sin x)(\cos 15^\circ - \sin 15^\circ) = (\cos x - \sin x)^2, \quad (1)$$

de unde rezultă soluțiile

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\pi, \quad x_2 = (-1)^{k_2} \frac{\pi}{6} + k_2\pi - \frac{\pi}{4}, \quad k_{1,2} \in \mathbb{Z}.$$

$$4.62. \sin(x + 20^\circ) + \cos(x - 10^\circ) - \sin(x - 40^\circ) = \sqrt{3}.$$

R. Se transformă în produs diferența de sinusuri și rezultă soluțiile

$$x_1 = 40^\circ + 360^\circ k_1 \text{ și } x_2 = -20^\circ + 360^\circ k_2, k_{1,2} \in \mathbb{Z}.$$

$$4.63. \cos x \sin^2 x - \sin x \cos^2 x = 0.$$

R. O soluție evidentă este dată de $\cos x = \cos a$, celelalte soluții fiind date de ecuația $(1 + \sin a) \cdot \cos^2 x - \cos^2 a = 0$.

$$4.64. \frac{\cos ax + \cos 3ax + \cos 5ax}{\sin ax + \sin 3ax + \sin 5ax} = \sqrt{3}.$$

R. Se transformă sumele de cosinusuri și sinusuri în produse, rezultând

$$\frac{\cos 3ax (2 \cos 2ax + 1)}{\sin 3ax (2 \cos 2ax + 1)} = \sqrt{3}, \quad (1)$$

soluția ecuației (1) fiind dată de $\operatorname{ctg} 3ax = \sqrt{3}$, de unde

$$x = \frac{\pi}{18a} + \frac{k\pi}{3a}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$4.65. \frac{1 + \cos 2ax}{2 \sin ax} = \frac{\sin 2ax}{1 - \cos 2ax},$$

unde a este un parametru real.

R. Trebuie eliminate soluțiile date de $\sin ax = 0$ și $1 - \cos 2ax = 0$; singura soluție acceptabilă este dată de $\cos ax = 0$ cu $x = \pm \frac{\pi}{2a} + \frac{2k\pi}{a}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$4.66. \cos x - \sin x + 2 = 2 \cos^2 x + \sin 2x.$$

R. Ecuația se poate scrie sub forma echivalentă $\cos x - \sin x + 2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 0$, de unde rezultă imediat soluțiile

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\pi \text{ și } x_2 = (-1)^{k_2} \frac{\pi}{6} + k_2\pi, \quad k_{1,2} \in \mathbb{Z}.$$

$$4.67. \sin(x + 2a) = \sin(x + 2b) + \sin(x + 2c).$$

R. Se dezvoltă sinusurile sumelor de arce, se transpun convenabil termenii și se obține

$$\operatorname{tg} x = \frac{-\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c}{\cos 2a - \cos 2b - \cos 2c} \quad \text{etc.}$$

$$4.68. \sin x + \sin 2x \rightarrow \sin 3x \rightarrow \sin 4x = 0.$$

R. Transformând sumele de sinusuri în produse, membrul întâi al ecuației devine

$$4 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x = 0,$$

de unde $x_1 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$, $x_2 = \pm \pi + 4k_2\pi$ și $x_3 = \frac{2k_3\pi}{5}$, $k_{1,2,3} \in \mathbb{Z}$.

$$4.69. \operatorname{tg} x \rightarrow \operatorname{tg} 2x \rightarrow \operatorname{tg} 3x = 0, \quad x \neq (2k \rightarrow 1) \frac{\pi}{2}, \quad (2k+1) \frac{\pi}{4} \text{ și } (2k+1) \frac{\pi}{6}.$$

R. Înlocuind $\operatorname{tg} 2x$ și $\operatorname{tg} 3x$ în funcție de $\operatorname{tg} x$, ecuația propusă se transformă în

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \text{și} \quad 2 \operatorname{tg}^4 x - 7 \operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$$

cu $\operatorname{tg}^2 x = 3$ și $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{2}$, de unde $x_{1,3} = \arctg \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + k\pi$ și $x_{2,4} = \arctg \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + k\pi$ și $x_5 = k_5\pi$, $k_l \in \mathbb{Z}$, $l = 1, \dots, 5$.

Atfel. Grupând tangentele, avem

$$\frac{\sin 4x}{\cos x \cos 3x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 0,$$

de unde rezultă $\sin 2x = 0$ cu $x = \frac{k\pi}{2}$ și $k > 1$ (conform restricțiilor din enunț) și $2 \cos^2 2x \rightarrow \cos x \cos 3x = 0$, sau încă $6 \cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0$, de unde rezultă imediat $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ și $\cos 2x = \frac{1}{3}$ cu soluțiile $x_1 = \pm \frac{\pi}{6} + (2k_1 + 1) \frac{\pi}{2}$ și $x_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + k_2\pi$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

$$4.70. \sin x + \sin 2x \rightarrow \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

R. Efectuând toate calculele, ecuația dată se transformă în

$$(1 \rightarrow 2 \cos x)(2 \sin x - 1) \cos x =$$

cu soluțiile $x_1 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$, $x_2 = (-1)^{k_2} \frac{\pi}{6} + k_2\pi$, $x_3 = \pm \frac{\pi}{3} + (2k_3 + 1)\pi$, $k_{1,2,3} \in \mathbb{Z}$.

$$4.71. \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin x.$$

R. Se transformă în produs membrul întâi al ecuației iar în membrul al doilea se înlocuiește $\sin x$ prin $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; se obține $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, de unde $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{2k_1\pi}{3}$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

Altfel. Se observă că ecuația se poate scrie astfel $2 \sin x \cos x - \sqrt{2} \sin x + (\sqrt{2} \cos x - 1)(\sqrt{2} \cos x + 1) = 0$, de unde $\sqrt{2} \cos x - 1 = 0$, cu $x_1 = \pm \frac{\pi}{4} + 2k_1\pi$ și

$$\sqrt{2}(\cos x + \sin x) + 1 = 0. \quad (1)$$

Dar ecuația (1) se mai poate scrie astfel:

$$\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1')$$

sau

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}, \quad (1'')$$

soluția ecuației (1'') fiind $x_2 = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + (2k_2 + 1)\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

$$4.72. \cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x = -2.$$

R. Se înlocuiesc cosinusurile de arce multiple prin $\cos x$; rezultă ecuația $\cos x (3 \cos^2 x + \cos x - 2) = 0$, de unde $x_1 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$, $x_2 = (2k_2 + 1)\pi$, $x_3 = \pm \arccos \frac{2}{3} + 2k_3\pi$, $k_{1,2,3} \in Z$.

$$4.73. (\sin x + \cos x)^2 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

R. Efectuând toate calculele ecuația dată se transformă în $2 \sin x (\cos x + \sin x) = 0$, de unde $x_1 = k_1\pi$, $x_2 = \frac{3\pi}{4} + k_2\pi$, $k_{1,2} \in Z$.

$$4.74. \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) + \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) + \sin 2x.$$

R. Se transformă în produs suma de sinusuri din membrul întâi al ecuației și diferența de cosinusuri din membrul al doilea, obținându-se:

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \cos 2x + \cos 2x = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \sin 2x + \sin 2x \quad (1)$$

sau

$$(\sin 2x - \cos 2x) \left[2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) + 1 \right] = 0. \quad (1')$$

Soluțiile ecuației sînt date de $\sin 2x - \cos 2x = 0$ cu $x_1 = \frac{\pi}{8} + k_1\pi$ și $2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) +$

$+ 1 = 0$ cu $x_2 = (-1)^{k_2+1} \frac{\pi}{6} + k_2\pi - \frac{\pi}{4}$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

$$4.75. \frac{\sin x}{\sin 2x} + \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{4}{3} \sqrt{3}, \quad x \neq k \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

R. Se elimină numitorii și se ajunge la ecuația $4 \cos^2 x - \frac{8}{3} \sqrt{3} \cos x + 1 = 0$, cu soluțiile $x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi$ și $x_2 = \pm \arccos \frac{1}{2\sqrt{3}} + 2k_2\pi$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

$$4.76. \sin 2x + 2 \sin 4x + 3 \sin 10x - 4 \sin 4x \cos^2 3x = 0.$$

R. Se înlocuiește $2 \cos^2 3x$ cu $1 + \cos 6x$, se reduc termenii și se obține ecuația $\sin 2x + \sin 10x = 0$ cu $x_1 = \frac{k_1\pi}{6}$ și $x_2 = \pm \frac{\pi}{8} + \frac{k_2\pi}{2}$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

$$4.77. \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right)} + \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} = 2 \sqrt{2}.$$

R. Se ține seamă că $\sin \left(\frac{\pi}{4} \pm x \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x \pm \cos x)$; rezultă soluțiile $x_1 = (-1)^{k_1} \frac{\pi}{2} + k_1\pi$ și $x_2 = (-1)^{k_2+1} \frac{\pi}{6} + k_2\pi$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

$$4.78. \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2} \right) = 3 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

R. Dezvoltînd ambii membri ai ecuației, aceasta se transformă în

$$\cos \frac{3x}{2} + \sin \frac{3x}{2} = 3 \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right), \quad (1)$$

Ținând seamă că $\cos \frac{3x}{2} = 4 \cos^3 \frac{x}{2} - 3 \cos \frac{x}{2}$ și $\sin \frac{3x}{2} = 3 \sin \frac{x}{2} - 4 \sin^3 \frac{x}{2}$, ecuația (1) se transformă în

$$2 \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) \left(1 + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) = 3 \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right),$$

de unde rezultă soluția imediată dată de ecuația $\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0$, adică $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$, observându-se că ecuația rămasă $2 \left(1 + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) = 3$ furnizează aceeași soluție $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

Altfel. Se observă că putem scrie

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$$

și efectuând calculele, rezultă ecuațiile $\sin x = 1$ cu $x_1 = (-1)^{k_1} \frac{\pi}{2} + k_1\pi$, $k_1 \in \mathbb{Z}$, și $\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = 0$ cu $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi$, $k_2 \in \mathbb{Z}$, soluție care este inclusă în x_1 .

4.79. $\cos^2 2x - 2 \sin 2x \sin^2 x - \cos 2x = 0.$

R. Grupând convenabil termenii, ecuația dată se transformă în $(\cos x - 1)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$, de unde rezultă imediat soluțiile $x_1 = k_1\pi$ și $x_2 = \frac{3\pi}{8} + \frac{k_2\pi}{2}$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

Observație. Grupând termenii în alt mod, ecuația respectivă se transformă în $\sin^2 x \cos 2x + \sin^2 x \sin 2x = 0$, de unde rezultă aceleași soluții.

4.80. $\sin x + \cos x + \sin 2x \diamond \cos 2x + \sin 3x + \cos 3x = 0.$

R. Grupând convenabil termenii din membrul întâi și transformând sumele în produse, ecuația dată se scrie astfel:

$$4\sqrt{2} \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0,$$

de unde rezultă soluțiile $x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + 4k_1\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + k_2\pi$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

4.81. Să se rezolve ecuațiile

$$\sin(x - a) + \sin(x - b) = \sin a \diamond \sin b,$$

$$\cos(x - a) + \cos(x - b) = \cos a \diamond \cos b.$$

R. Prima ecuație este echivalentă cu $\sin \left(x - \frac{a \diamond b}{2} \right) = \sin \frac{a + b}{2}$, iar cea de-a doua cu $\cos \left(x - \frac{a \diamond b}{2} \right) = \cos \frac{a + b}{2}$.

4.82. Să se rezolve ecuațiile

$$\sin(x - a) \sin(x - b) = \sin a \sin b.$$

$$\cos(x - a) \cos(x - b) = \cos a \cos b.$$

R. Prima ecuație este echivalentă cu $\cos(-a + b) - \cos(2x - a - b) = \cos(a - b) - \cos(a + b)$ cu $x_1 = (a + b) + 2k\pi$ și $x_2 = 2k\pi$, iar cea de-a doua ecuație este echivalentă cu $\cos(-a + b) + \cos(2x - a - b) = \cos(a + b) + \cos(a - b)$ cu aceleași soluții ca ecuația precedentă.

4.83. Să se rezolve ecuația

$$\cos x \cos 2x \cos 3x = 1.$$

R. Transformând totul în $\cos x$, ecuația devine

$$8 \cos^6 x - 10 \cos^4 x + 3 \cos^2 x - 1 = 0, \quad (1)$$

având ca rădăcini acceptabile pe $\cos x = \pm 1$, de unde $x_1 = 2k_1\pi$ și $x_2 = (2k_2 + 1)\pi$, sau și mai general, $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Altfel. Ecuația se mai poate scrie sub forma $\cos 2x(\cos 2x + \cos 4x) = 2$, în care luând ca necunoscută $\cos 2x$, rezultă o singură soluție și anume $\cos 2x = 1$ cu $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.84. Să se rezolve ecuația

$$\sin^3 x \cos 3x + \sin 3x \cos^3 x = \frac{3}{4}.$$

R. Se observă că ecuația dată se poate scrie sub forma echivalentă, după ce se trece de la arce multiple la arce simple: $\sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{4}$ sau $4 \sin x \cos x \cos 2x = 1$, sau încă $\sin 4x = 1$, de unde $x = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.85. Să se rezolve ecuația

$$\frac{2}{\cos x} = \frac{1}{\cos(x + 2a)} \oplus \frac{1}{\cos(x - 2a)}.$$

R. Ecuația dată este echivalentă cu $\cos^2 x = 2 \cos^2 a$, soluțiile date de $\cos x = 0$ și $\cos(x \pm 2a) = 0$ fiind excluse,

4.86. Să se rezolve ecuația

$$2 \sin(x - a) \cos 2x + 3 \sin^2(x - a) = \cos^2(x - a) + \sin(x - 3a).$$

R. Se va observa mai întâi că

$$2 \sin(x - a) \cos 2x = \sin(3x - a) - \sin(x + a),$$

apoi se trece de la puteri de sinusuri și cosinusuri la cosinusuri de arce duble și ecuația dată

se transformă în $[\sin(x+a) - 1][2\cos 2(x-a) - 1] = 0$, de unde rezultă soluțiile $x_1 = (-1)^{k_1} \frac{\pi}{2} + k_1\pi - a$ și $x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + k_2\pi + a$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

4.87. Să se rezolve aceeași ecuație de la exercițiul precedent, dar în raport cu a .

R. Din $\sin(x+a) - 1 = 0$, rezultă $a_1 = (-1)^{k_1} \frac{\pi}{2} + k_2\pi - x$ iar din $2\cos 2(a-x) = 1$ rezultă $a_2 = \pm \frac{\pi}{6} + k_2\pi + x$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

4.88. Să se rezolve ecuația

$$\sin^5 x + \cos^5 x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 0.$$

R. Ecuația dată se mai poate scrie sub forma

$$\sin x \cos x (\sin^5 x + \cos^5 x) + (\sin x + \cos x) = 0, \quad (1)$$

observându-se că soluțiile de forma $x = \frac{k\pi}{2}$ sînt excluse. Dar ecuația (1) este echivalentă cu

$$\sin x + \cos x = 0, \quad (1')$$

și

$$\sin x \cos x (\sin^4 x - \sin^2 x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x - \sin x \cos^3 x + \cos^4 x) + 1 = 0, \quad (1'')$$

din (1') rezultînd soluția $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ecuația (1'') se poate rezolva în două moduri: ori ca ecuație omogenă înlocuindu-se termenul liber prin $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2$, ori luînd ca necunoscută pe $\sin x \cos x$. În acest ultim mod de rezolvare, (1'') se transformă în

$$[y^3 + y^2 - y - 1 = 0. \quad (2)$$

Cum rădăcinile ecuației (2) sînt $y_1 = y_2 = -1$ și $y_3 = 1$, dar $\sin x \cos x$ nu poate lua aceste valori, rezultă că singura soluție a ecuației din enunț este aceea dată de (1').

4.89. Să se rezolve ecuația

$$2\cos^2 x + 4\sin x \cos x + \cos x + \sin x + 1 = 0.$$

R. Ecuația se reduce la $\cos x + \sin x = 0$ cu $x_1 = \frac{3\pi}{4} + k_1\pi$ și la $3\cos x + \sin x + 1 = 0$ cu $x_2 = (-1)^{k_2+1} \frac{\pi}{2} + k_2\pi$ și $x_3 = \arccos \frac{3}{5} + (2k_3 + 1)\pi$, $k_{1,2,3} \in \mathbb{Z}$.

4.90. Să se rezolve ecuația

$$4 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + 3 \cos x + 3 \sin x - 3 = 0.$$

R. Aceasta se reduce la ecuațiile $\cos x + \sin x = 0$ cu $x_1 = \frac{3\pi}{4} + k_1\pi$ și $\cos x - 3 \sin x + 3 = 0$ cu soluțiile $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi$ și $x_3 = \arccos \frac{3}{5} + (2k_3 + 1)\pi$, $k_{1,2,3} \in \mathbb{Z}$.

4.91. Să se afle valorile unghiului x pentru care

$$(\sin x + i \cos x) (\sin 2x + i \cos 2x) (\sin 3x + i \cos 3x) = \frac{i + 1}{\sqrt{2}}.$$

R. Înmulțind ambii membri ai egalității cu $-i^3$, aceasta se transformă în $(\cos x - i \sin x)^3 = \frac{-1 + i}{\sqrt{2}}$, de unde rezultă imediat

$$\cos 6x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ și } \sin 6x = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

soluția comună a ecuațiilor (1) fiind $6x = 135^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$.

Să se rezolve ecuațiile :

$$4.92. \sin x + 3 \cos x + \sin 3x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} = 0.$$

R. Se trece de la sinusuri și cosinusuri de arce multiple la arce simple, rezultând ecuațiile $\cos^2 x = 0$ cu soluția $x_1 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$ și $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cu soluția

$$x_2 = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi, \quad k_{1,2} \in \mathbb{Z}.$$

$$4.93. \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{2}.$$

R. Se observă că soluțiile de forma $\frac{k\pi}{2}$ sînt excluse. Eliminînd numitorii, ecuația dată se transformă în

$$\sin x + \cos x = 2\sqrt{2} \sin x \cos x, \quad (1)$$

care se rezolvă prin substituția $\sin x + \cos x = u$, astfel încît (1) devine

$$\sqrt{2}u^2 - u - \sqrt{2} = 0. \quad (2)$$

Rezolvînd ecuația (2) și ținînd seamă de substituția făcută, se obțin soluțiile

$$x_1 = 2k_1\pi + \frac{\pi}{4} \text{ și } x_2 = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + (2k_2 + 1)\pi, \quad k_{1,2} \in \mathbb{Z}.$$

Alfel. Se observă că putem scrie $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \sin 2x$ sau $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin 2x$ cu soluția $x + \frac{\pi}{4} = (-1)^k 2x + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$4.94. \quad 8 \cos \omega = \frac{\sqrt{3}}{\sin \omega} + \frac{1}{\cos \omega}.$$

R. Se observă că $x \neq k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$; se elimină numitorii și se ajunge la ecuația echivalentă

$$2 \cos x \sin 2x = \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right). \quad (1)$$

Membrul întâi fiind echivalent cu $\sin x + \sin 3x$, ecuația (1) se poate scrie sub forma

$$\sin 3x = \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \sin x \quad (1')$$

sau, transformând în produs membrul al doilea și transpunând apoi termenii, se ajunge la ecuația

$$\sin 3x - \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = 0$$

cu soluțiile $x_1 = \frac{\pi}{6} + k_1 \frac{\pi}{2}$ și $x_2 = \pm \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k_2\pi$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

Alfel. Se pot folosi formulele universale, ecuația transformându-se în

$$\sqrt{3}t^5 + 14t^5 \Leftrightarrow \sqrt{3}t^4 - 36t^3 - \sqrt{3}t^2 + 14t - \sqrt{3} = 0, \quad (2)$$

unde $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Dar (2) este o ecuație reciprocă care, după împărțirea cu $t^5 \neq 0$, devine

$$\sqrt{3} \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right) \Leftrightarrow 14 \left(t^2 + \frac{1}{t^2} \right) + \sqrt{3} \left(t - \frac{1}{t} \right) - 36 = 0. \quad (2')$$

Făcând substituția $t - \frac{1}{t} = z$, se obține o nouă ecuație

$$\sqrt{3}z^3 + 14z^2 + 4\sqrt{3}z - 8 = 0, \quad (3)$$

cu o rădăcină $z_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow t - \frac{1}{t} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $t_2 = -\sqrt{3}$, de unde $\frac{x_1}{2} = \frac{\pi}{6} + k_1\pi$ și $x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k_2\pi$. Ecuația (3) mai are încă două rădăcini reale $z_{2,3} = -2(\sqrt{3} \pm 2)$, care înlocuite în $z = t - \frac{1}{t}$ mai dau și celelalte rădăcini ale ecuației (2).

De observat că metoda aceasta — în cazul de față — conduce la dificultăți de calcul.

Altfel. Ecuația dată se mai poate scrie sub forma $8 \sin x \cos x = \sqrt{3} + \operatorname{tg} x$, cu $\cos x \neq 0$ sau

$$4 \sin 2x = \sqrt{3} + \operatorname{tg} x. \quad (3)$$

Se ia $\operatorname{tg} x = t$ și se obține ecuația

$$\frac{8t}{1+t^2} = \sqrt{3} + t, \quad (3')$$

care este echivalentă cu

$$t^3 + \sqrt{3}t^2 - 7t + \sqrt{3} = 0, \quad (3'')$$

aceasta avînd rădăcinile $t_1 = \sqrt{3}$ și $t_{2,3} = -\sqrt{3} \pm 2$, de unde rezultă imediat soluțiile ecuației date.

$$4.95. \quad 8 \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}, \quad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

R. Se poate aplica metoda a treia de la ecuația precedentă; înmulțind ecuația cu $\cos x$, se obține

$$4 \sin 2x = \sqrt{3} + \frac{1}{\operatorname{tg} x}. \quad (1)$$

Se ia ca necunoscută $\operatorname{tg} x = t$ și (1) se transformă în

$$\sqrt{3}t^3 - 7t^2 + \sqrt{3}t + 1 = 0, \quad (1')$$

care are ca rădăcini $t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $t_{2,3} = \sqrt{3} \pm 2$, cu soluțiile evidente pentru $\operatorname{tg} x$.

$$4.96. \quad \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = 8 \cos^2 x.$$

R. Transformăm în produse membrul întii al ecuației și obținem $\frac{\cos x}{\sin x \cos 2x} = 8 \cos^2 x$, de unde $\cos x = 0$ cu $x_1 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$, rămînînd de rezolvat ecuația

$$\frac{1}{\sin x \cos 2x} = 8 \cos x, \text{ care se mai scrie sub forma } 2 \sin^2 4x = 1 \text{ cu soluția}$$

$$x_2 = (-1)^{k_2} \frac{\pi}{24} + \frac{k_2\pi}{4}, \quad k_{1,2} \in \mathbb{Z}.$$

Altfel. Dacă se ia ca necunoscută $\operatorname{tg} x = t$, ecuația dată devine $t^4 + 8t^3 + 2t^2 - 8t + 1 = 0$, care se rezolvă cu substituția $t - \frac{1}{t} = u$.

4.97. $1 - \sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{1 - \sin x} \cdot \sqrt{1 + \sin x}$ pe mulțimea $x \in [0, 2\pi]$.

R. Ecuația dată se poate scrie

$$1 - \sqrt{2} \left| \cos \frac{x}{2} \right| = |\cos x|, \quad (1)$$

de unde rezultă că ecuația (1) este echivalentă cu următoarele:

$$1 - \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} = \cos x, \quad \text{pentru } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad (2)$$

$$1 - \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} = -\cos x, \quad \text{pentru } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right], \quad (3)$$

$$1 + \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} = -\cos x, \quad \text{pentru } x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \quad (4)$$

$$1 + \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} = \cos x, \quad \text{pentru } x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], \quad (5)$$

care se rezolvă luând ca necunoscută pe $\cos \frac{x}{2}$. Rezultă soluțiile: $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$, la care se adaugă perioadele corespunzătoare.

4.98. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} (x + a) = 0$.

R. Ecuația se reduce la

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a = 0$$

cu soluțiile $x_1 = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}\right) + k_1\pi$ și $x_2 = \pi - \frac{a}{2} + k_2\pi$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

Altfel. Se poate scrie $\operatorname{tg} (a + x) = \operatorname{tg} (-x)$, de unde $x + a = k\pi - x$, sau $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{a}{2}$ (a se vedea formulele (1.25)).

4.99. $\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg} x = 2$.

R. Se dezvoltă $\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ și se ajunge la ecuația $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 = 0$, cu soluțiile $x_1 = \frac{5\pi}{12} + k_1\pi$ și $x_2 = \frac{\pi}{12} + k_2\pi$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

$$4.100. \operatorname{tg}(x - a) + \operatorname{tg}(x - b) = \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b.$$

R. Se poate lua ca necunoscută $\operatorname{tg} x$ și se ajunge la o ecuație de gradul al doilea.
Atfel. Ecuația este echivalentă cu

$$\frac{\sin(x - a - b)}{\cos(x - a) \cos b} + \frac{\sin(x - a - b)}{\cos(x - b) \cos a} = 0,$$

de unde rezultă $\sin(x - a - b) = 0$, cu $x = k\pi + (a + b)$ și

$$2 \cos a \cos b \cos x + \sin x \sin(a + b) = 0,$$

$$\text{cu } \operatorname{tg} x = - \frac{2 \cos a \cos b}{\sin(a + b)}.$$

$$4.101. \operatorname{tg}(x - a) \operatorname{tg}(x - b) = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b.$$

R. Se dezvoltă $\operatorname{tg}(x - a)$ și $\operatorname{tg}(x - b)$ și se ia ca necunoscută $\operatorname{tg} x$; se obțin soluțiile $x_1 = k_1\pi$, $x_2 = (a + b) + k_2\pi$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

$$4.102. \operatorname{tg}(x + a) + \operatorname{tg}(x - a) = 2 \operatorname{ctg} x.$$

R. Se observă că soluțiile de forma $x = k\pi$ și $x \pm a = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ sînt excluse; pentru rezolvare se transformă sumele de tangente în produse și ecuația dată se transformă în

$$\sin^2 x = \cos(x + a) \cos(x - a) \quad (1)$$

sau, dezvoltînd în (1), se obține în final

$$\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \cos a. \quad (1')$$

soluțiile fiind $x = (-1)^k \arcsin \frac{\cos a}{\pm \sqrt{2}} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$4.103. \operatorname{tg}(x - a) \operatorname{tg}(x - b) = \operatorname{tg}^2 x.$$

R. Se dezvoltă $\operatorname{tg}(x - a)$, respectiv $\operatorname{tg}(x - b)$; rezultă soluția dată de $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \sin a \sin b}{\sin(a + b)}$.

$$4.104. \operatorname{tg}(x + a) + \operatorname{tg}(x - a) = \operatorname{tg} 2x.$$

R. Ecuația se scrie sub forma

$$\frac{\sin 2x}{\cos(x + a) \cos(x - a)} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x},$$

de unde rezultă $\sin 2x = 0$ cu $x_1 = \frac{k\pi}{2}$ și $\cos(x + a) \cos(x - a) = \cos 2x$. Dar ultima ecuație se poate scrie sub forma $\cos 2x + \cos 2a = 2 \cos 2x$, de unde rezultă, ținînd seamă de (1.25), $x_2 = \pm a + k_2\pi$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

4.105. $\operatorname{tg} m x \operatorname{tg} n x = 1$.

R. Ecuația dată se poate scrie sub forma echivalentă

$$\operatorname{tg} m x = \operatorname{ctg} n x, \quad m, n \in \mathbb{Q} \quad (1)$$

(observând că $\operatorname{tg} n x \neq 0$). Dar ecuația (1) se mai poate scrie și sub forma

$$\operatorname{tg} m x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - n x \right), \quad (1')$$

soluția rezultată din (1') fiind $m x = \frac{\pi}{2} - n x + k\pi$, de unde

$$x = \frac{(2k+1)\pi}{2(m+n)}, \quad m \neq -n. \quad (2)$$

În (2) pot fi cuprinse și soluții străine, care se determină însă punând condiția

$$m x = \frac{(2k+1)\pi}{2(m+n)} \quad m = \frac{2k'+1}{2},$$

de unde rezultă

$$n = \frac{2(k-k')m}{2k'+1}, \quad k, k' \in \mathbb{Z}.$$

4.106. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x = 0$.

R. Se grupează convenabil termenii din membrul întâi al ecuației, transformându-se sumele de tangente în produse; se obține ecuația echivalentă

$$\frac{\sin 5x}{\cos x \cos 4x} + \frac{\sin 5x}{\cos 2x \cos 3x} = 0, \quad x \neq \frac{k\pi}{4} \text{ și } x \neq \frac{k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Dar ecuația (1) este echivalentă cu $\sin 5x = 0$, cu $x_1 = \frac{k\pi}{5}$ și

$$\cos 2x \cos 3x + \cos x \cos 4x = 0. \quad (1')$$

Trecând în (1') la $\cos 2x$, această ecuație devine

$$4 \cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0,$$

rezultând soluțiile $x_2 = k_2\pi \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 + \sqrt{17}}{8}$ și $x_3 = k_3\pi \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{17}}{8}$,

$k_{1,2,3} \in \mathbb{Z}$.

4.107. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{ctg} 3x + \operatorname{ctg} 4x = 0, \quad x \neq \frac{k\pi}{3}, \quad x \neq \frac{k\pi}{4},$

$k \in \mathbb{Z}$.

R. Transformând sumele de contangente în produse, ecuația devine

$$\frac{\sin 5x (5 - 8 \sin^2 x)}{\sin 3x \sin 4x} = 0,$$

de unde $x_1 = k_1 \frac{\pi}{5}$ ($k_1 \neq$ multiplu de 5),

$$x_2 = (-1)^{k_2} \arcsin \frac{5}{8} + k_2 \pi \text{ și } x_3 = (-1)^{k_3+1} \arcsin \frac{5}{8} + k_3 \pi, k_{1,2,3} \in \mathbb{Z}.$$

4.108. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$

R. Membrul al doilea al ecuației se poate scrie astfel :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) &= \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = \\ &= \frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} \cdot \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}} = \frac{(1 - \sin x)^2}{\cos x (1 + \sin x)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ecuația dată devine $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(1 - \sin x)^2}{\cos x (1 + \sin x)}$, cu $\cos x \neq 0$ și $\sin x \neq -1$, de

unde se obține $3 \sin x = 1$, cu $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4.109. $\operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{4 \cos^2 x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}.$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \neq 0.$$

R. După efectuarea primelor calcule, ecuația dată se transformă în

$$-\operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{4 \cos^2 x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{-\cos x}$$

sau $\operatorname{tg} x = 2 \sin x \cos x$, de unde $x_1 = k_1 \pi$ și $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{k_2 \pi}{2}, k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

$$4.110. \operatorname{tg}(a+x) \operatorname{tg}(a-x) = \frac{1 - 2 \cos 2a}{1 + 2 \cos 2a}$$

R. Ecuația este echivalentă cu

$$\frac{\cos 2x - \cos 2a}{\cos 2x + \cos 2a} = \frac{\frac{1}{2} - \cos 2a}{\frac{1}{2} + \cos 2a},$$

de unde rezultă imediat $\cos 2x = \frac{1}{2}$ cu $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Altfel. Înlocuind $\cos 2a$ cu $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$ și $\operatorname{tg}(a+x) \operatorname{tg}(a-x)$ cu $\frac{\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 x}$, se obține $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$, de unde $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$4.111. \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x.$$

R. Notăm $\operatorname{tg} x = t$ și ecuația devine $t + \frac{1}{t} = t^2 + \frac{1}{t^2}$, de unde $t_1 = t_2 = 1$ și

$t_2 = -1$ deci $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$4.112. (\sin x + \cos x) \sqrt{2} = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

R. Ecuația dată este echivalentă cu,

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sin 2x}. \quad (1)$$

Dar, ținând seamă de inegalitățile evidente $\left| \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq 1$ și $\left| \frac{1}{\sin 2x} \right| \geq 1$, rezultă că ecuația (1) poate fi satisfăcută de soluțiile date de ecuațiile elementare:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) &= 1 \quad \text{și} \quad \sin 2x = 1, \\ \text{b) } \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) &= -1 \quad \text{și} \quad \sin 2x = -1, \end{aligned} \quad (1')$$

soluția generală a ecuațiilor (1') fiind $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$4.113. 4 \sin 4x + \operatorname{tg} 2x + 4 \sin 2x + \operatorname{tg} x = 0.$$

R. Se grupează convenabil termenii, după care se transformă sumele în produse, rezultând ecuația echivalentă

$$8 \sin 3x \cos x + \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} = 0 \quad (1)$$

cu $x \neq (2k+1) \frac{\pi}{2}$ și $x \neq (2k+1) \frac{\pi}{4}$. Soluțiile ecuației (1) sînt $x_1 = \frac{k_1 \pi}{3}$,

$x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2k_2 \pi$ și $x_3 = \pm \frac{\pi}{3} + (2k_3 + 1)\pi$, $k_{1,2,3} \in \mathbb{Z}$, sau reunind, rezultă

$$x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$4.114. 6 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x.$$

R. Observîndu-se că soluții de forma $x = (2k+1) \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{k\pi}{3}$ și $x = (2k+1) \frac{\pi}{2}$ se exclud, ecuația se poate scrie sub forma echivalentă $5(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 3x) = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x$ sau, după transformarea sumelor în produse și simplificare,

$$5 \cos^2 2x = \sin x \sin 3x,$$

$$5 \cos^2 2x = \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 4x),$$

$$12 \cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0, \quad (1)$$

soluțiile ecuației (1) fiind date de $\cos 2x = \frac{1}{3}$ și $\cos 2x = -\frac{1}{4}$, de unde $x_1 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + k_1 \pi$ și $x_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} + (2k_2 + 1) \frac{\pi}{2}$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

$$4.115. \frac{\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right).$$

R. Se observă că soluții de forma $x = (2k+1) \frac{\pi}{2}$ și $x = (2k+1) \frac{\pi}{4}$ nu sînt acceptabile; apoi, pentru rezolvare se va ține seamă că $2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \cos 2x$ și că $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x \cos 2x}$, rezultînd fără nici o dificultate soluția dată de ecuația elementară $\operatorname{tg} 2x = 1$, adică $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$4.116. \cos x + \sin x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x = -1.$$

R. Ecuația dată este echivalentă cu următoarele: $\sin x + \cos x + 1 = 0$ și $\sin x \cos x + 1 = 0$, soluțiile rezultând imediat din aceste două ecuații.

$$4.117. \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{tg} 2x + 4 \operatorname{tg} 4x + 8 \operatorname{tg} 8x + 16 \operatorname{ctg} 16x = \sqrt{3}.$$

R. Grupând ultimii doi termeni din membrul întâi al ecuației avem

$$8 \operatorname{tg} 8x + \frac{16(1 - \operatorname{tg}^2 8x)}{2 \operatorname{tg} 8x} = \frac{8}{\operatorname{tg} 8x}. \quad (1)$$

Grupăm acum (1) cu al treilea termen din membrul întâi al ecuației și avem

$$4 \operatorname{tg} 4x + \frac{8(1 - \operatorname{tg}^2 4x)}{2 \operatorname{tg} 4x} = \frac{4}{\operatorname{tg} 4x}, \quad (2)$$

Se repetă operația cu ceilalți termeni ai ecuației și se ajunge în final la $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \sqrt{3}$, de unde $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$4.118. \sin^3 x (1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x (1 + \operatorname{tg} x) = \cos 2x.$$

R. Trebuie ca $x \neq k\pi$ și $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$; apoi, se observă că putem scrie ecuația astfel:

$$\frac{\sin^3 x (1 + \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} + \cos^3 x (1 + \operatorname{tg} x) = \frac{(1 + \operatorname{tg} x)(1 - \operatorname{tg} x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x},$$

de unde rezultă prima soluție dată de $\operatorname{tg} x + 1 = 0$ cu $x_1 = \frac{3\pi}{4} + k_1\pi$. Ecuația rămasă se poate scrie sub forma

$$\sin^3 x + \cos^3 x \sin x = \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \operatorname{tg} x,$$

sau

$$\sin x (1 + \operatorname{tg}^2 x) - \operatorname{tg} x (1 - \operatorname{tg} x) = 0, \quad (1)$$

Excluzând soluția dată de $\sin x = 0$ (restricție rezultată din enunț), (1), devine

$$\sin x - \cos x + 1 = 0, \quad (1')$$

Dar nici soluțiile ecuației (1'), $x_2 = 2k_2\pi$ și $x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2k_2\pi$ nu convin problemei (restricții din enunț). În consecință, singura soluție acceptabilă este $x_1 = \frac{3\pi}{4} + k_1\pi, k_1 \in \mathbb{Z}$.

$$4.119. \operatorname{tg} 4x = 2\sqrt{3}(\cos^4 x - \sin^4 x).$$

R. Ținând seamă că $\operatorname{tg} 4x = \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{1 - 2 \sin^2 2x}$, ecuația din enunț se poate scrie sub forma

$$2\sqrt{3}(1 - 2 \sin^2 2x) \cos 2x - 2 \sin 2x \cos 2x = 0, \quad (1)$$

fiind echivalentă cu următoarele :

$$\cos 2x = 0 \text{ cu } x_1 = \pm \frac{\pi}{4} + k_1 \pi.$$

$$\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ cu } x_2 = (-1)^{k_2} \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} + k_2 \pi \text{ și}$$

$$\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cu } x_3 = (-1)^{k_3+1} \frac{\pi}{3} + k_3 \pi, \quad k_{1,2,3} \in \mathbb{Z}.$$

Altfel. Ecuația dată se poate scrie sub forma

$$\sin^3 x \frac{\sin x + \cos x}{\sin x} + \cos^3 x \frac{\sin x + \cos x}{\cos x} = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x),$$

de unde rezultă soluția dată de $\cos x + \sin x = 0$, adică $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$, ecuația rămasă $\cos x - \sin x = 1$ neavând soluții acceptabile (a se vedea restricțiile puse la începutul rezolvării).

$$4.120. (\cos x + i \sin x)(\cos 2x + i \sin 2x) \dots (\cos nx + i \sin nx) = 1.$$

R. Ecuația dată este echivalentă cu

$$\cos \frac{n(n+1)}{2} x + i \sin \frac{n(n+1)}{2} x = 1,$$

de unde rezultă imediat

$$\cos \frac{n(n+1)}{2} x = 1 \text{ și } \sin \frac{n(n+1)}{2} x = 0,$$

cu soluțiile corespunzătoare.

$$4.121. \sin \frac{n+1}{2} x + \sin \frac{n-1}{2} x = \sin x.$$

R. Se transformă membrul întâi în produse; rezultă

$$x_1 = (4k_1 \pm 1)\pi \text{ și } x_2 = \frac{2}{n} \left[k_2 \pi + (-1)^{k_2} \frac{\pi}{2} \right], k_{1,2} \in \mathbb{Z}.$$

4.122.
$$\frac{1}{\cos x \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cos 3x} + \dots + \frac{1}{\cos nx \cos(n+1)x} = 0.$$

R. Pentru calculul sumei din membrul întâi al ecuației se pleacă de la $\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$; rezultă ecuația $\frac{\operatorname{tg}(n+1)x - \operatorname{tg} x}{\sin x} = 0$ cu soluția $x = \frac{k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.123. $\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x).$

R. Înlocuim $\cos(\pi \sin x)$ cu sinusul arcului complementar; rezultă ecuațiile $\sin x + \cos x = \frac{1}{2} + 2k_1$ și $\cos x - \sin x = \pm 1 - \frac{1}{2} + 4k_2$; pentru a avea soluții acceptabile, este necesar ca numerele k_1 și k_2 să verifice dubla inegalitate $-\sqrt{2} \leq \frac{1}{2} + 2k_{1,2} \leq \sqrt{2}$, care este însă satisfăcută doar pentru $k_1 = k_2 = 0$. Prin urmare, ecuația din enunț se reduce la rezolvarea ecuațiilor echivalente $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ și $\cos x - \sin x = \frac{1}{2}$, care se poate face utilizând formulele universale.

4.124. $\sin(\pi \ln x) + \cos(\pi \ln x) = 1.$

R. Se înlocuiește $\cos(\pi \ln x)$ cu sinusul arcului complementar, apoi se transformă în produs membrul întâi al ecuației, rezultând $2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(\pi \ln x - \frac{\pi}{4} \right) = 1$, sau $\ln x = \pm \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2k$ cu $x_1 = e^{2k_1}$ și $x_2 = e^{2k_2 + \frac{1}{2}}$.

4.125. $\sin(\pi \operatorname{arctg} x) = \cos(\pi \operatorname{arctg} x).$

R. Se observă că putem scrie

$$\sin(\pi \operatorname{arctg} x) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{arctg} x \right)$$

sau ceea ce este echivalent cu $\operatorname{arctg} x = \frac{1}{4} + k$, cu condiția $-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{4} + k < \frac{\pi}{2}$.

$$4.126. \operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{ctg} x).$$

R. Ecuația se poate scrie sub forma $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{ctg} x\right)$, de unde rezultă ecuația

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} - \operatorname{ctg} x + k, \quad (1)$$

echivalentă cu

$$2 \operatorname{tg}^2 x - (2k + 1) \operatorname{tg} x + 2 = 0. \quad (1')$$

Pentru ca aceasta să aibă soluții reale este necesar ca $(2k + 1)^2 - 16 \geq 0$ etc.

$$4.127. \log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \sin x - 2 = 0.$$

R. Este necesar ca $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, adică $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; se ține seamă apoi de relația $\log_a b \log_b a = 1$ și se rezolvă sistemul $u + v - 2 = 0$, $uv = 1$ cu $u = \log_{\sin x} \cos x$, $v = \log_{\cos x} \sin x$, deci $\log_{\cos x} \sin x = 1$.

$$4.128. \log_{\cos x} \sin x + 4 \log_{\sin x} \cos x = 4.$$

R. Este necesar să avem concomitent $\sin x > 0$ și $\sin x \neq 1$, $\cos x > 0$ și $\cos x \neq 1$, adică $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Apoi, ținând seamă că $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ și notând $\log_{\sin x} \cos x = y$,

ecuația dată se transformă în $(2y - 1)^2 = 0$, de unde rezultă imediat $\log_{\sin x} \cos x = \frac{1}{2}$

și $\log_{\cos x} \sin x = 2$. Dar aceste ecuații sînt echivalente respectiv cu $\sqrt{\sin x} = \cos x$ și $\sin x = \cos^2 x$, aceste două ecuații avînd aceleași soluții

$$x = \arcsin \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + k\pi, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$4.129. (\cos x + \sin x)^n + (\cos x - \sin x)^n = 0.$$

R. Transformînd sumele din paranteze în produse, ecuația dată devine

$$\cos^n \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin^n \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0, \quad (1)$$

de unde rezultă că dacă $n = 2k$, ecuația nu are nici o soluție, iar dacă $n = 2k + 1$ ecuația are o singură soluție dată de $\operatorname{tg}^n \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, adică $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Atfel. Dacă notăm $\cos x + \sin x = u$ și $\cos x - \sin x = v$, obținem sistemul

$$u^2 + v^2 = 2, \quad u^n + v^n = 0, \quad (2)$$

Din ecuația a doua rezultă $u = -v \sqrt[n]{1}$ și luând în considerare numai cazul $u = -v$, soluțiile sistemului (2) sînt $u = \pm 1, v = \mp 1$, de unde și ecuațiile

$$\begin{aligned} \cos x + \sin x &= \pm 1, \\ \cos x - \sin x &= \mp 1, \end{aligned} \quad (3)$$

rezolvarea concomitentă a ecuațiilor (3) conducînd la soluția generală $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, care este echivalentă cu aceea obținută prin metoda anterioară.

$$4.130. \quad \sin^n x + \frac{1}{\cos^m x} = \cos^n x + \frac{1}{\sin^m x}.$$

R. Observîndu-se că soluțiile de forma $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ și $x = k\pi$ nu sînt acceptabile, ecuația dată se poate scrie sub forma echivalentă

$$\sin^n x - \cos^n x = \frac{\cos^m x - \sin^m x}{\cos^m x \sin^m x},$$

soluția unică $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ fiind dată de ecuația $\sin x - \cos x = 0, k \in \mathbb{Z}$.

4.131. Să se rezolve ecuațiile

$$\sin x + \sin(x+r) + \sin(x+2r) + \dots + \sin[x+(n-1)r] = 0.$$

$$\cos x + \cos(x+r) + \cos(x+2r) + \dots + \cos[x+(n-1)r] = 0,$$

R. Se aplică formulele de însumare a sinusurilor și cosinusurilor arcelor în progresie aritmetică și anume:

$$\begin{aligned} S_s &= \sin a + \lambda \sin(a+r) + \lambda^2 \sin(a+2r) + \dots \\ &\quad \dots + \lambda^{n-1} \sin[a+(n-1)r] = \\ &= \frac{\lambda^n \sin[a+(n-1)r] - \lambda [\sin(a+nr) + \sin(a-r)] + \sin a}{\lambda^2 - 2\lambda \cos r + 1} \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} S_c &= \cos a + \lambda \cos(a+r) + \lambda^2 \cos(a+2r) + \dots \\ &\quad \dots + \lambda^{n-1} \cos[a+(n-1)r] = \\ &= \frac{\lambda^n \cos[a+(n-1)r] - \lambda [\cos(a+nr) + \cos(a-r)] + \cos a}{\lambda^2 - 2\lambda \cos r + 1} \end{aligned}$$

în care, luându-se $\lambda = 1$, ecuațiile din enunț se transformă în

$$\frac{\sin \frac{nr}{2} \sin \left(x + \frac{n-1}{2} r \right)}{\sin \frac{r}{2}} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\sin \frac{nr}{2} \cos \left(x + \frac{n-1}{2} r \right)}{\sin \frac{r}{2}} = 0. \quad (2)$$

Ecuația (1) este echivalentă cu

$$\sin \frac{nr}{2} = 0 \text{ și } \sin \left(x + \frac{n-1}{2} r \right) = 0. \quad (1')$$

Ecuația $\sin \frac{nr}{2} = 0$ nu conține pe x , ci dă doar o condiție pentru n și r și anume $\frac{r}{2} = \frac{k}{n} \pi$. În această situație se disting două cazuri:

a) $\frac{k}{n} \notin \mathbb{N}$, ceea ce conduce la $\sin \frac{r}{2} \neq 0$;

b) $\frac{k}{n} \in \mathbb{N}$, deci $k = n n'$ ($n' \in \mathbb{N}$) și $\sin \frac{r}{2} = \sin k\pi = 0$, cînd $\lim_{\frac{r}{2} \rightarrow k\pi} \frac{\sin \frac{nr}{2}}{\sin \frac{r}{2}} =$

$= \pm n$, iar $\sin \left(x + \frac{n-1}{2} r \right) = \mp \sin x$, după paritatea lui n și n' . Ecuația respectivă se reduce la $\sin x = 0$ și deci $x = k\pi$. Dealtfel, în acest caz avem $r = 2 n' \pi$, de unde $\sin(x+r) = \sin(x+2r) = \dots = \sin[x+(n-1)r] = \sin x$ și ecuația dată devine $n \sin x = 0$.

Dacă $\sin \frac{nr}{2} \neq 0$, rămîne $\sin \left(x + \frac{n-1}{2} r \right) = 0$, din care rezultă imediat $x =$

$= k\pi - \frac{n-1}{2} r$, $k \in \mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{N}$. În acest caz ecuația (2) se reduce la $\cos \left(x + \frac{n-1}{2} r \right) = 0$

cu soluția $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \frac{n-1}{2} r$, $k \in \mathbb{Z}$.

4.132. Să se rezolve ecuația

$$\operatorname{arctg}(x+2) - \operatorname{arctg}(x+1) = \frac{\pi}{4}.$$

R. Luind tangenta arcelor din ambii membri ecuația dată se transformă în

$$\frac{(x+2) - (x+1)}{1 + (x+2)(x+1)} = 1, \quad (1)$$

și efectuind calculele în (1), se obțin $x_1 = -1$, $x_2 = -2$.

4.133. Să se rezolve ecuația

$$\arctg(x-1) + \arctg x + \arctg(x+1) = \arctg 3x.$$

R. Se iau tangentele în ambii membri ai ecuației și se obține

$$\frac{(x-1) + x + (x+1) - x(x^2-1)}{1 - x(x-1) - x(x+1) - (x^2-1)} = 3x \quad (1)$$

sau, efectuind calculele în (1), rezultă ecuația $x(4x^2 - 1) = 0$ cu $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm \frac{1}{2}$.

Alfel. Se poate scrie și astfel:

$$\arctg(x-1) + \arctg(x+1) = \arctg 3x - \arctg x$$

și apoi se iau tangentele în ambii membri ai ecuației.

Să se rezolve inecuațiile:

4.134. $|\sin x| \geq |\cos x|$.

R. Mai întâi se explicitează modulii.

4.135. $\frac{2 \sin^2 x}{2 \sin^2 x - 1} > -1$.

R. Se trece totul în partea stângă a inecuației.

4.136. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2}$.

R. Se poate lua ca necunoscută $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

4.137. $\frac{1}{\sin^2 x} - (\sqrt{3} + 1) \operatorname{ctg} x + \sqrt{3} - 1 > 0$.

R. Se ia ca necunoscută $\operatorname{ctg} x$; rezultă inecuațiile elementare $\operatorname{ctg} x < 1$ și $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$.

$$4.138. \cos x (1 - 2 \sin x) < 0.$$

$$R. \frac{\pi}{9} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ și } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$4.139. 4 \sin^2 x + 3 \sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x > 4.$$

R. Se poate trata mai întâi ca o ecuație omogenă, observând că membrul al doilea se poate scrie sub forma $4(\cos^2 x + \sin^2 x)$.

$$4.140. \frac{2 \cos 2x - 1}{1 + 2 \cos 2x} < 0.$$

R. Se poate forma un tabel pentru determinarea semnului expresiei din partea stângă a inecuației (a se vedea exemplul 3.2).

$$4.141. \frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} > 0.$$

R. Inecuația se transformă în $\frac{1-t}{1+t} > 0$, unde $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; soluția generală este formată din mulțimea infinită de intervale

$$\left((2k-1) \frac{\pi}{2}, (2k+1) \frac{\pi}{2} \right), k \in \mathbb{Z}.$$

$$4.142. \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x \leq 1.$$

R. Se poate lua ca necunoscută $\operatorname{tg} x = t$.

$$4.143. \operatorname{tg} x > \operatorname{tg} \frac{x}{3}.$$

R. Se va considera mai întâi un interval egal cu perioada 3π a funcțiilor din ambii membri ai inecuației.

$$4.144. \frac{\sin \frac{2x}{3}}{\cos x \cos \frac{x}{3}} > 0.$$

R. Se procedează ca la exercițiul 3.2, rezultând $0 < x < \frac{\pi}{2}$ și $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$.

$$4.145. \sin 2x \operatorname{tg} 2x > \frac{6 \operatorname{tg}^2 x}{4 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

R. Se poate lua ca necunoscută $\operatorname{tg} x = t$.

$$4.146. \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) > \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right).$$

$$4.147. \sqrt{2 \sin^2 x - 1} < 1$$

R. Se vor scrie mai întâi condițiile de existență

$$0 \leq 2 \sin^2 x - 1 < 1.$$

DISCUȚIA ECUAȚILOR TRIGONOMETRICE

5. DISCUȚIA ECUAȚILOR TRIGONOMETRICE

5.1. Prezentare

Problema discuției ecuațiilor trigonometrice, de regulă avind un singur parametru real, se pune în principal la ecuații ce conțin ca necunoscută una din funcțiile $\sin x$ sau $\cos x$, sau chiar o funcție de forma $f(\sin x, \cos x)$ și într-o mai mică măsură, ecuații ce conțin ca necunoscută pe $\operatorname{tg} x$ sau $\operatorname{ctg} x$. Problemele cu privire la discuția ecuațiilor trigonometrice se pot grupa după cum urmează :

1° *Ecuații de gradul întâi în raport cu funcțiile circulare de forma*

$$\sin \alpha x = m, \cos \beta x = n, \operatorname{tg} \gamma x = p, \operatorname{ctg} \delta x = q, \quad (5.1)$$

unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sînt elemente cunoscute, m, n, p, q parametri reali și x argumentul.

Ecuațiile $\sin \alpha x = m, \cos \beta x = n$ au soluții dacă $|m| \leq 1$, respectiv $|n| \leq 1$. Pentru p și q nu se pun nici un fel de condiții, parametrii respectivi putînd avea orice valori reale.

2° *Ecuații de gradul al doilea în raport cu $\sin x$ sau $\cos x$:*

$$f(\sin x, m) = 0, f(\cos x, n) = 0. \quad (5.2)$$

În această situație distingem două cazuri :

1) Parametrii m și n pot fi explicitați (separați de restul termenilor ecuației).

2) Parametrii m și n nu sînt explicitați (separați de restul termenilor ecuației).

În cazul 1 ecuațiile (5.2) pot avea forma generală

$$a \sin^2 x + b \sin x + c = m, \quad (5.3)$$

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = n.$$

Pentru ușurința calculului în prima ecuație notăm $\sin x = X$, aceasta devenind

$$X^2 + bX + c - m = 0, \quad a \neq 0 \text{ și } X \in [-1, 1]. \quad (5.4)$$

Discuția ecuației (5.4) se poate face prin mai multe metode.

a) Fie X_1 și X_2 rădăcinile ecuației (5.4). Pentru ca ambele rădăcini să fie acceptabile și distincte, adică să aparțină intervalului $[-1, 1]$, este necesar ca parametrul m să verifice următorul sistem de inecuații (în raport cu m):

$$\Delta > 0, \quad af(-1) \geq 0, \quad af(1) \geq 0, \quad -1 < \frac{-b}{2a} < 1. \quad (5.5)$$

Dacă însă numai una din rădăcinile ecuației (5.4) convine problemei, adică aparține intervalului $[-1, 1]$, atunci parametrul m trebuie să verifice inecuațiile

$$f(-1) \cdot f(1) < 0, \quad \Delta > 0 \quad (5.6)$$

cazul de egalitate trebuind a fi studiat separat.

De menționat faptul că este necesar a se examina și cazul în care $\Delta = 0$, deoarece este posibil ca pentru valorile lui m care verifică ecuația $\Delta = 0$ să corespundă o rădăcină dublă $X_1 = X_2$ a ecuației (5.4) și deci o soluție unică a ecuației (5.3).

b) Se separă m din ecuația (5.4) și se notează cu

$$y_1 = aX^2 + bX + c \text{ și } y_2 = m.$$

Se reprezintă grafic parabola $y_1 = f(X)$ și se limitează graficul respectiv de dreptele $X = -1$ și $X = 1$. Ordonatele punctelor de intersecție ale graficului parabolei cu dreapta $y_2 = m$ dau valorile lui m prin care ecuația (5.4) are una sau două rădăcini acceptabile. Abscisele α_1, α_2 ale punctelor de interecție respective conduc la ecuațiile elementare $\sin x = \alpha_1$ și $\sin x = \alpha_2$. Dacă dreapta $y_2 = m$ întâlnește numai într-un singur punct (simplu sau dublu) graficul limitat al parabolei y_1 , atunci există o singură rădăcină acceptabilă a ecuației (5.4) și deci o sigură soluție a ecuației, dată de $\sin x = \alpha_1$.

c) Se rezolvă ecuația algebrică (5.4), determinându-se X_1, X_2 ; pentru ca ambele rădăcini să fie însă acceptabile și distincte pentru ecuația (5.3), este necesar ca parametrul m să verifice sistemele de inecuații

$$\Delta > 0, \quad -1 \leq X_1 \leq 1, \quad -1 \leq X_2 \leq 1. \quad (5.7)$$

Fie A și B respectiv soluțiile celor două sisteme din (5.7) verificate de m . Pentru ca ecuația (5.3) să aibă o singură soluție acceptabilă este însă necesar ca m să aparțină mulțimei $C=A \setminus B$ la care trebuie adăugate valorile lui m pentru care $\Delta = 0$.

Tot în cazul 1 ecuațiile de tip (5.2) se mai pot prezenta sub o formă în care parametrul m figurează la gradul întâi, dar este afectat pe lângă $\sin^2 x$ sau $\sin x$, sau chiar pe lângă amândouă acestea, adică de forma

$$ma \sin^2 x + b \sin x + c = 0, \tag{5.8}$$

$$a \sin^2 x + bm \sin x + c = 0,$$

sau încă $ma \sin^2 x + b \sin x + cm = 0$, etc., considerându-se asemănător și ecuații în $\cos x$. Și în această situație parametrul m este separabil, deci se poate aplica pentru discuția ecuației respective oricare din cele trei metode de la 2°. Deosebirea constă doar în aceea că graficul corespunzător funcției $y = f(X)$ nu mai este o parabolă ci o curbă oarecare, discuția conducându-se ca la 2°, b).

De remarcat doar, că în cazul ecuațiilor de forma (5.8) metoda grafică de la 2°, b) prezintă unele dificultăți de rezolvare. De aceea, în astfel de situații se va observa dacă nu sînt mai indicate metodele 2°, a) și 2°, c).

În cazul 2, adică atunci cînd parametrii m sau n nu sînt explicitați, ecuațiile respective se prezintă sub forma

$$f(m \sin x) = 0 \text{ sau } f(n \cos x) = 0,$$

unde atît necunoscutele $\sin x$ și $\cos x$ cît și parametrii m sau n figurează neapărat și la gradul al doilea.

De exemplu :

$$(m^2 + 1) \sin^2 x + m \sin x + c = 0, \tag{5.9}$$

$$(2m - 1) \cos^2 x - \cos x + m^2 - 2 = 0$$

și alte forme asemănătoare. Înlocuind $\sin x$ sau $\cos x$ cu $X \in [-1, 1]$, ecuațiile trigonometrice (5.9) se transformă în ecuații algebrice

$$(m^2 + 1) X^2 + mX + c = 0, \tag{5.10}$$

$$(2m - 1) X^2 - X + m^2 - 2 = 0.$$

Pentru discuția ecuațiilor de tip (5.10) se procedează astfel :

a) Se calculează mai întâi discriminantul Δ al ecuației respective. Dacă Δ este un pătrat perfect, se află rădăcinile X_1 și X_2 și se pun condițiile

$$|X_1| \leq 1, |X_2| \leq 1. \quad (5.11)$$

Dacă m verifică ambele sisteme de inecuații din (5.11), atunci ecuațiile de forma (5.9) au două soluții distincte; dacă numai unul din cele două sisteme este verificat de m , atunci ecuațiile de forma (5.9) au o singură soluție acceptabilă.

Dacă Δ nu este un pătrat perfect, se aplică metoda a) de la 2°, aplicarea metodei c) fiind, de regulă, destul de dificilă.

3° *Ecuații de gradul al treilea în raport cu $\sin x$ sau $\cos x$, conținând un singur parametru, de forma*

$$F(\sin x, m) = 0 \text{ sau } F(\cos x, m) = 0 \quad (5.12)$$

Se disting două cazuri :

1) Parametrii m și n pot fi explicitați din ecuațiile (5.12).

2) Parametrii m și n nu sînt explicitați.

În cazul 1) pot exista următoarele situații :

1. Ecuațiile (5.12) după explicitarea lui m iau forma

$$f(\sin x) = m \text{ sau } f(\cos x) = n. \quad (5.13)$$

Se poate proceda în două feluri :

a) Se înlocuiește $\sin x$, respectiv $\cos x$ prin $X \in [-1, 1]$ și se reprezintă graficul funcției algebrice $y = f(X)$, care se limitează de dreptele $X = -1$ și $X = 1$. Punctele de intersecție ale graficului funcției $y = f(X)$ cu dreapta $y = m$ dau numărul și natura rădăcinilor ecuației respective de tip (5.13).

Cînd funcțiile $f(\sin x)$ și $f(\cos x)$ nu au forme prea complicate, acestea se pot reprezenta grafic ca funcții trigonometrice, luîndu-se ca interval de studiu perioada ce rezultă din ordinul de multiplicitate al argumentului x . Trebuie însă avut în vedere în acest caz că intersecția graficului funcției $y = f(\sin x)$ sau $y = f(\cos x)$ cu dreapta $y = m$ dă un număr dublu de puncte de intersecție decît în cazul reprezentării funcției algebrice $y = f(X)$; de aceea — în această situație — punctele de intersecție, care sînt simetrice de regulă două cîte două față de $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, vor constitui cîte o soluție a ecuațiilor de forma (5.12).

Pentru stabilirea numărului rădăcinilor oricăreia din ecuațiile de tip (5.12), se poate folosi și teorema lui Rolle.

2. Ecuațiile de tip (5.12) nu iau forma (5.13) prin explicitarea lui m , ci una din formele

$$\frac{\varphi(\sin x)}{\psi(\sin x)} = m, \quad \frac{\varphi(\cos x)}{\psi(\cos x)} = n. \quad (5.14)$$

În acest caz se înlocuiește $\sin x$ sau $\cos x$ prin $X \in [-1, 1]$; se reprezintă grafic funcția

$$y = \frac{\varphi_1(X)}{\psi_1(X)}$$

și se limitează graficul de dreptele $X = -1$ și $X = 1$. Punctele de intersecție ale graficului astfel limitat cu dreapta $y = m$ indică numărul și natura soluțiilor ecuației studiate.

În cazul 2) în care parametrul m nu este explicitat, m figurând la un grad ≥ 2 , discuția ecuației nu este posibilă decît cu ajutorul teoremei lui Rolle.

4° *Ecuații care conțin ca necunoscută o funcție $\varphi(\sin \alpha x, \cos \beta x)$ în care, de regulă, $\sin x$ și $\cos x$ figurează la gradul întâi, forma ecuației respective fiind*

$$F(\varphi, m) = 0, \quad (5.15)$$

unde funcția φ are semnificația de mai înainte.

Discuția unor asemenea ecuații se face în felul următor :

1. Se află extremele funcției $\varphi(\sin \alpha x, \cos \beta x)$ cu ajutorul derivatelor sau printr-o altă metodă mai rapidă.

2. Se înlocuiește în ecuația de discutat $\varphi(\sin \alpha x, \cos \beta x)$ prin $X \in [\min \varphi, \max \varphi]$, aplicîndu-se apoi, după caz, una din metodele arătate la punctele 1°—3°.

5.2. Exemple de discuții de ecuații trigonometrice cu un singur parametru, rezolvate complet

Ecuații de forma (5.2)

5.1. Să se rezolve și să se discute natura soluțiilor ecuației

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = m,$$

unde m este un parametru real.

R. înlocuind $\sqrt{3}$ prin $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ ecuația dată devine

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{m}{2}$$

și ținând seamă de condițiile de la (1.4), pentru ca ecuația dată să aibă soluții trebuie ca

$$\left| \frac{m}{2} \right| \leq 1 \Rightarrow m \in [-2, 2],$$

soluțiile fiind de forma $x_1 = \pm \arccos \frac{m}{2} + \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi$ pentru $m \in [0, 2]$ și $x_2 =$
 $= \pm \arccos \left| \frac{m}{2} \right| + \frac{\pi}{3} + (2k_2 + 1)\pi$ pentru $m \in [-2, 0)$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

Ecuații de forma (5.3)

5.2. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$2 \cos^2 x - \cos x - (1 + m) = 0,$$

unde m este un parametru real.

R. Aducem ecuația la forma (5.4), punând $\cos x = X \in [-1, 1]$; avem

$$2X^2 - X - (1 + m) = 0. \quad (1)$$

Aplicăm metoda de la 5.2°, a și avem

$$\Delta = 1 + 8(1 + m) = 9 + 8m, \quad -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}.$$

$$f(-1) = 2 - m; \quad f(1) = -m,$$

Ținând seamă de condițiile (5.5), pentru ca ecuația (1) să aibă două soluții distincte este necesar ca m să verifice concomitent inecuațiile

$$\text{adică} \quad \Delta > 0, \quad af(-1) \geq 0, \quad af(1) \geq 0, \quad -1 < -\frac{b}{2a} < 1, \quad (\alpha)$$

$$9 + 8m > 0, \quad 2(2 - m) \geq 0, \quad 2(-m) \geq 0, \quad (2)$$

ultima inegalitate din (α) fiind evidentă pentru orice $m \in \mathbb{R}$. Rezolvând sistemul de inecuații (2), rezultă $m \in \left(-\frac{9}{8}, 0 \right]$.

Ca ecuația să aibă o singură soluție acceptabilă este necesar ca m să verifice inegalitatea $f(-1) \cdot f(1) < 0$, adică $(2 - m)(-m) < 0 \Rightarrow m \in (0, 2)$. Din $f(-1) \cdot f(1) = 0$ rezultă $m_1 = 0, m = 2$; pentru $m = 0$ ecuația dată are două soluții: $\cos x = 1$ și $\cos x = -\frac{1}{2}$,

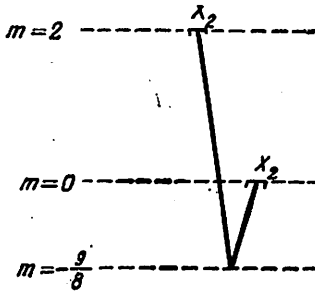
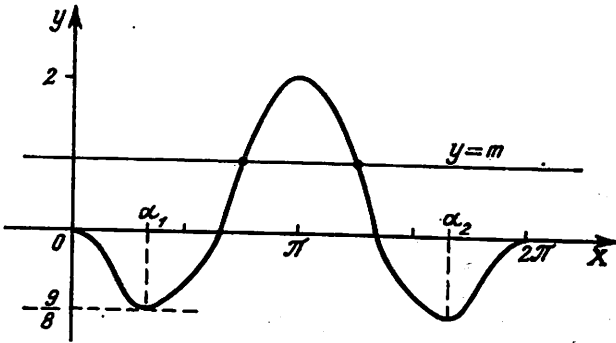
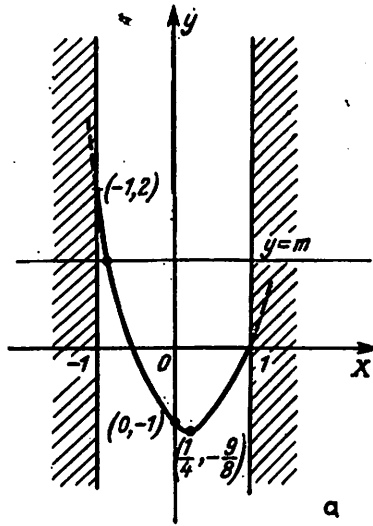


Fig. 5.2

De remarcat faptul că, în cazul reprezentării funcției $y = 2 \cos^2 x - \cos x - 1$, dreapta $y = m$ întâlnește graficul respectiv într-un număr dublu de puncte, simetrice două câte două față de extremitățile arcelor $0, \pi, 2\pi$. Fiecărei perechi de puncte de intersecție îi corespunde însă o singură soluție, dat fiind că în intervalul de studiu $[0, 2\pi]$ funcția cosinus are câte două valori simetrice față de extremitățile arcelor $0, \pi, 2\pi$.

Altfel. Aplicăm metoda 5.2°, c și rezolvând ecuația (1), obținem

$$X_1 = \frac{1 + \sqrt{9 + 8m}}{4}, \quad X_2 = \frac{1 - \sqrt{9 + 8m}}{4}.$$

Avem de rezolvat sistemele de inecuații

$$-1 \leq \frac{1 + \sqrt{9 + 8m}}{4} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{1 - \sqrt{9 + 8m}}{4} \leq 1 \quad (1)$$

sau

$$-5 \leq \sqrt{9 + 8m} \leq 3; \quad -3 \leq \sqrt{9 + 8m} \leq 5, \quad 9 + 8m > 0.$$

Soluțiile sistemelor sînt arătate în fig. 5.2, c, din care rezultă următoarele :

- pentru $m \in \left[-\frac{9}{8}, 0\right]$ ecuația are două soluții;
- pentru $m \in (0, 2] \cup \left\{-\frac{9}{8}\right\}$ ecuația are o singură soluție.

Ecuații de forma (5.8)

5.3. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$m \sin^2 x - 2(m - 2) \sin x + m + 2 = 0;$$

cazuri particulare $m = 0, m = 1/2, m = 2/3$.

R. Aducem ecuația la forma (5.4), punând $\sin x = X \in [-1, 1]$ și avem

$$mX^2 - 2(m - 2)X + m + 2 = 0. \quad (1)$$

Folosim prima metodă de la 5.1, calculînd

$$\Delta = (m - 2)^2 - m(m + 2) = 2(-3m + 2),$$

$$a \cdot f(-1) = 2m(2m - 1); \quad a \cdot f(1) = 6m; \quad -\frac{b}{2a} = \frac{m - 2}{m}.$$

Ecuația (1) are două rădăcini acceptabile și distincte, dacă m verifică inecuațiile

$$2(-3m + 2) > 0, \quad 2m(2m - 1) \geq 0, \quad 6m \geq 0, \quad \left| \frac{m - 2}{m} \right| < 1,$$

de unde rezultă că $m \in \emptyset$. (Ecuația (1) are o singură rădăcină în intervalul $[-1, 1]$, dacă m verifică inegalitatea $f(-1) \cdot f(1) < 0$, sau $2m(2m - 1) \cdot 6m < 0$, de unde rezultă că

$m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$ (se vor studia și cazurile $\Delta = 0$ și $f(-1)f(1)=0$). Cazul particular $m = 0$ are însă sens, cum se va arăta în continuare.

Altfel. Aplicăm metoda b) de la 5.1.2° și explicitând pe m , obținem

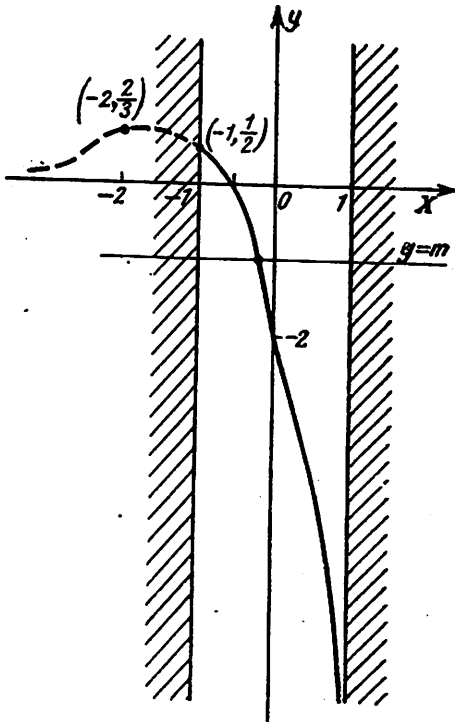


Fig. 5.3

$$m = -2 \frac{2X + 1}{(X - 1)^2}$$

Grăficul funcției $y = -2 \frac{2X + 1}{(X - 1)^2}$ este dat în fig. 5.3, din care rezultă că în intervalul $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ ecuația respectivă are o singură soluție.

În cazurile particulare:

$m = 0$, rezultă $X = -\frac{1}{2}$ și deci $\sin x = -\frac{1}{2}$ cu $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (cealaltă rădăcină $X_2 = \infty$ a ecuației (1) nu furnizează nici o soluție pentru ecuația dată);

$$m = \frac{1}{2}, X = -1, \sin x = -1,$$

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$m = \frac{2}{3}$, ecuația propusă nu are soluții deoarece $X_1 = X_2 = -2$.

Aplicarea metodei c) de la 5.1.2° este mai dificilă, avînd de rezolvat sistemele de inecuații iraționale

$$-1 \leq \frac{m - 2 - \sqrt{2(-3m + 2)}}{m} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{m - 2 + \sqrt{2(-3m + 2)}}{m} \leq 1.$$

Pentru valorile lui m care verifică concomitent ambele sisteme de inecuații, se obțin două soluții ale ecuației problemei 5.3, iar pentru valorile lui m care verifică numai un singur sistem de inecuații, există o singură soluție.

Ecuații de forma (5.9)

5.4. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$(2m^2 + m - 1) \cos^2 x - (2m + 1) \cos x + 1 = 0.$$

B. Notăm cos $x = X \in [-1, 1]$ și ecuația devine

$$(2m^2 + m - 1)X^2 - (2m + 1)X + 1 = 0. \quad (1)$$

Deoarece parametrul m nu poate fi explicat din ecuația (1), metoda grafică de la 5.1,2^o nu mai este aplicabilă. De asemenea, nici metoda c) nu este indicată, întrucât, Δ nefiind un pătrat perfect, X_1 și X_2 au forme complicate și rezolvarea sistemelor $|X_1| \leq 1$, $|X_2| \leq 1$ conduce la calcule dificile.

Astfel, în cazul de față se aplică metoda a) de la 5.1,2^o. Avem

$$\begin{aligned} \Delta &= (2m + 1)^2 - 4(2m^2 + m - 1) = -4m^2 + 5, \\ f(-1) &= 2\left(m + \frac{1}{2}\right)(m + 1), \quad f(1) = 2\left(m + \frac{1}{2}\right)(m - 1), \\ -\frac{b}{2a} &= \frac{2m + 1}{2(2m^2 + m - 1)}. \end{aligned}$$

Pentru ca ecuația (1) să aibă două rădăcini distincte acceptabile, cuprinse în intervalul $[-1, 1]$, este necesar ca m să verifice inecuațiile

$$\begin{aligned} -4m^2 + 5 > 0, \quad (2m^2 + m - 1) \cdot 2\left(m + \frac{1}{2}\right)(m + 1) &\geq 0, \\ (2m^2 + m - 1) \cdot 2\left(m + \frac{1}{2}\right)(m - 1) &\geq 0, \quad \left| \frac{2m + 1}{2(2m^2 + m - 1)} \right| < 1, \end{aligned}$$

ceea ce conduce la condiția $m \in \left[1, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

Dacă m verifică doar inecuațiile

$$-4m^2 + 5 = 0, \quad 2\left(m + \frac{1}{2}\right)(m + 1) \cdot 2\left(m + \frac{1}{2}\right)(m - 1) < 0,$$

adică $m \in [-1, 1] \cup \left\{\pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$, atunci ecuația (1) are o singură rădăcină acceptabilă, cuprinsă în intervalul $(-1, 1]$, deci ecuația dată are o singură soluție.

Ecuații de forma (5.13)

5.5. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$\cos^3 x - 3 \cos x - m = 0.$$

R. Înlocuim cos x prin $X \in [-1, 1]$ și ecuația propusă devine

$$X^3 - 3X - m = 0, \quad (1)$$

Separăm pe m din această ultimă ecuație și reprezentăm grafic funcția $y = X^3 - 3X$; limităm graficul acesteia cu dreptele $X = -1$, $X = +1$ (v. fig. 5.5, a). Punctele de

intersecție ale acestui grafic cu dreapta $y = m$ arată numărul și natura rădăcinilor ecuației (1), deci numărul și natura soluțiilor ecuației. Din analiza graficului dat în fig. 5.5, a rezultă că pentru $m \in [-2, 2]$ ecuația propusă are o singură soluție.

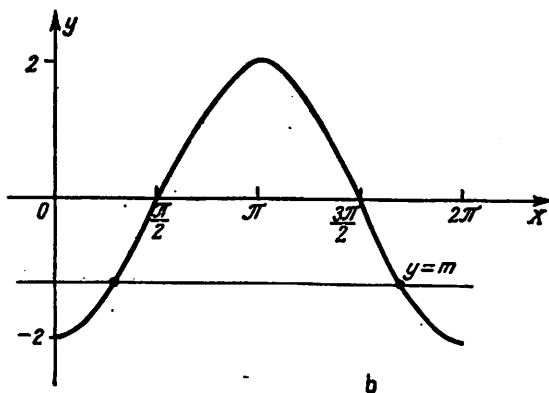
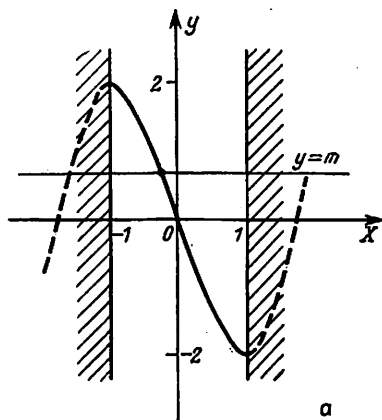


Fig. 5.5

În cazul ecuației date se poate studia direct funcția $y = \cos^2 x - 3 \cos x$, al cărei grafic este dat în fig. 5.5, b, unde s-a considerat ca interval de studiu $[0, 2\pi]$. Din analiza acestuia, rezultă că ecuația dată are o singură soluție când $m \in [-2, 2]$, dreapta $y = m$ intersectând graficul din fig. 5.5, b numai în două puncte simetrice față de π .

Folosind teorema lui Rolle, metoda b) de la 5.1,3° și tabloul următor, rezultă numărul și natura soluțiilor ecuației din enunț.

x	0	π	2π	concluzii
$m \backslash f(x)$	$-(2+m)$	$2-m$	$-(2+m)$	
	+	+	+	nici o soluție
-2	0	+	0	o soluție $x = 2k\pi$
	-	+	-	o soluție de forma $x = \pm \alpha + (2k+1)\pi$
2	-	0	-	o soluție $x = (2k+1)\pi$
	-	-	-	nici o soluție

Ecuatii de forma (5.14)

5.6. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$m(\cos^3 x - 1) + \cos^3 x + 1 = 0.$$

R. Se explicitază m și se notează $\cos x = X \in [-1, 1]$, obținându-se

$$\frac{1+X^3}{1-X^3} = m. \quad (1)$$

Se reprezintă grafic funcția $y = \frac{1+X^3}{1-X^3}$ și se limitează graficul de dreptele $X = -1$, $X = 1$ (v. fig. 5.6, a). Intersecțiile dreptei $y = m$ cu graficul respectiv rezolvă problema. Astfel, din analiza graficului menționat rezultă că pentru $m \in [0, +\infty)$ ecuația are o singură soluție.

În loc de funcția $y = \frac{1+X^3}{1-X^3}$ se poate studia direct funcția $y = \frac{1+\cos^3 x}{1-\cos^3 x}$, graficul acesteia fiind dat în fig. 5.6, b, din care rezultă că în intervalul $[0, \infty)$ dreapta $y = m$ întâlnește graficul în două puncte simetrice în raport cu π și deci ecuația din enunț are o singură soluție de forma $x = \pm \alpha + (2k+1)\pi$.

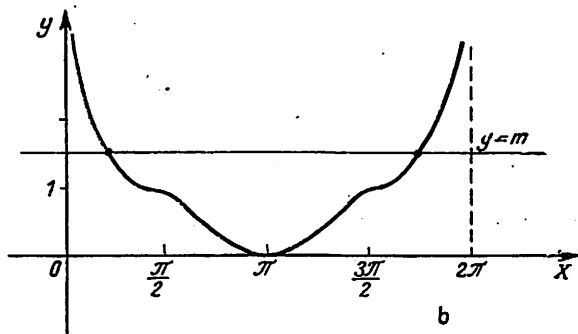
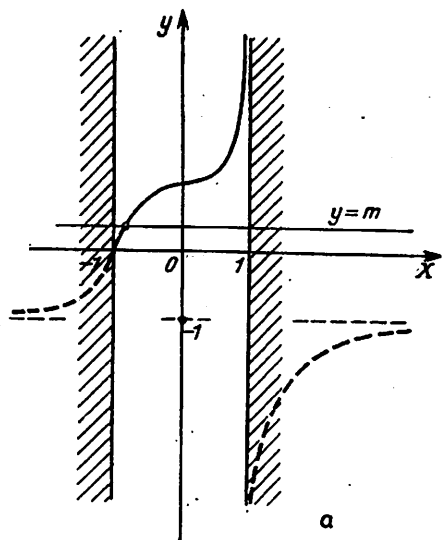


Fig. 5.6

Ecuatii de forma (5.15)

5.7. Să se rezolve și să se discute natura soluțiilor ecuației

$$\sin x \cos x - \sin x - \cos x + m = 0.$$

R. Se vor analiza și diferite cazuri particulare pentru parametrul real m . Notăm cu $X = \sin x + \cos x$. Se știe că $\max(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}$ și că $\min(\sin x + \cos x) = -\sqrt{2}$.

Ținând seamă că $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$, rezultă, cu substituția făcută anterior, că $\sin x \cos x = \frac{X^2 - 1}{2}$. Deci, ecuația devine

$$\frac{X^2 - 1}{2} - X + m = 0 \text{ sau } X^2 - 2X + 2m - 1 = 0. \quad (1)$$

Ca ecuația (1) să aibă două rădăcini distincte acceptabile, m trebuie să verifice inecuațiile

$$\Delta > 0, a \cdot f(-\sqrt{2}) \geq 0, a \cdot f(\sqrt{2}) \geq 0, \left| -\frac{b}{2a} \right| < \sqrt{2},$$

de unde rezultă $m \in \left[\frac{2\sqrt{2}-1}{2}, 1 \right)$.

Pentru ca ecuația (1) să aibă o singură rădăcină cuprinsă în intervalul $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ este necesar ca m să verifice inegalitatea $f(-\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2}) < 0$, de unde rezultă

$$m \in \left[-\frac{2\sqrt{2}+1}{2}, \frac{2\sqrt{2}-1}{2} \right) \cup \{1\},$$

Iuindu-se în considerare și valorile lui m pentru care $\Delta=0$, precum și cazurile cind m verifică și egalitatea

$$f(-\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2}) = 0.$$

La aceleași rezultate ajungem dacă se reprezintă grafic funcția $y = \frac{-X^2 + 2X + 1}{2}$ și se limitează

graficul de dreptele $X = -\sqrt{2}, X = \sqrt{2}$. Intersecțiile graficului (v.fig.5.7) cu dreapta $y = m$ dau soluțiile problemei, adică aceleași rezultate ca cele obținute prin metoda anterioară.

Ecuația dată se poate rezolva, aducind-o la o formă

$$2 \sin x \cos x - 2(\sin x + \cos x) + 2m = 0$$

sau

$$2 \sin x \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - 2 \left[\sin x + \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right] + 2m = 0$$

sau, efectuind toate calculele, se ajunge la forma

$$2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - 2\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 2m - 1 = 0.$$

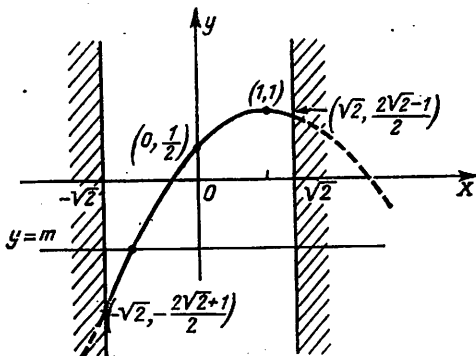


Fig. 5.7

rădăcinile acestei ecuații fiind

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} \pm 2\sqrt{1-m}}{2}.$$

Dacă m verifică inecuațiile

$$\left| \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{1-m}}{2} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{1-m}}{2} \right| \leq 1, \quad (1)$$

ecuația dată are două soluții, iar dacă m verifică o singură inecuație din (1), atunci ecuația propusă are o singură soluție. În ambele cazuri soluțiile sînt de forma

$$X = \pm \arccos \frac{\sqrt{2} \pm 2\sqrt{1-m}}{2} + 2k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Se disting următoarele cazuri particulare :

- pentru $m = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi + \frac{\pi}{4}$;

- pentru $m = -\frac{2\sqrt{2}+1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$;

- pentru $m = \frac{2\sqrt{2}-1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k_1\pi$ și

$$x_2 = \pm \arccos(\sqrt{2}-1) + \frac{\pi}{4} + 2k_2\pi, \quad k_{1,2} \in \mathbb{Z}.$$

6. EXERCIIII PROPUSE SPRE REZOLVARE

6.1. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$3 \cos^2 x - 2 \cos x - 1 + m = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

R. Este o ecuație de același tip cu aceea studiată în exercițiul 5.2. Aplicînd aceleași metode de discuție, rezultă în final următoarele :

- pentru $m \in [-4, 0) \cup \left\{ \frac{4}{3} \right\}$ ecuația are o singură soluție ;

- pentru $m \in \left(0, \frac{4}{3}\right)$ ecuația are două soluții distincte;
- pentru $m \in (-\infty, -4) \cup \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$ ecuația nu are soluții. A se vedea și fig. 6.1.

6.2. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$3 \sin^2 x - \sin x + 2 - m = 0,$$

unde m este un parametru real.

R. Se aplică metoda grafică; notăm $\sin x = X$ și separăm pe m . Avem de reprezentat funcția $y = 3X^2 - X + 2$, $X \in [-1, 1]$, al cărei grafic este dat în fig. 6.2 și din care rezultă;

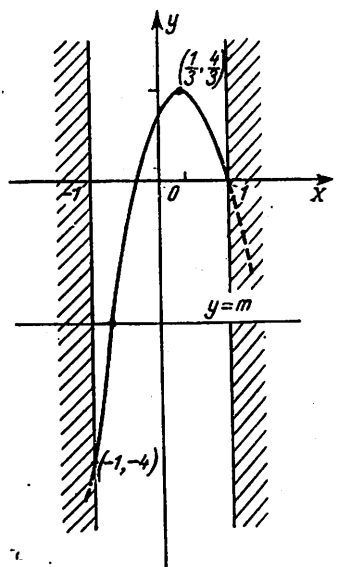


Fig. 6.1

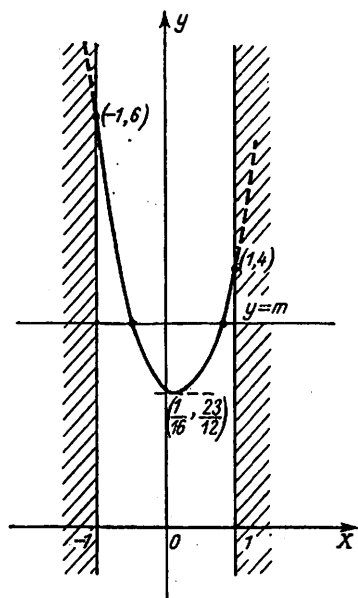


Fig. 6.2

- pentru $m \in \left(-\infty, \frac{23}{12}\right) \cup (6, +\infty)$ ecuația nu are soluții;
- pentru $m \in \left(\frac{23}{12}, 4\right]$ ecuația are două soluții;
- pentru $m \in (4, 6] \cup \left\{\frac{23}{12}\right\}$ ecuația are o soluție.

6.3. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$3m \sin^2 x - \sin x - 1 = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

R. Este o ecuație de același tip cu aceea studiată în exercițiul 5.3.

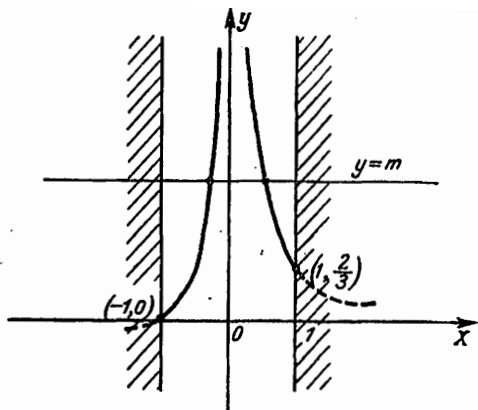


Fig. 6.3

Sînt mai indicate metodele a) și b) prezentate la 5.1,2°, metoda c) fiind ceva mai dificilă.

Aplicăm metoda grafică; pentru aceasta separăm pe m și avem $m = \frac{X+1}{3X^2}$, unde am notat $\sin x = X$.

Graficul funcției $y = \frac{X+1}{3X^2}$ este dat în fig. 6.3, din care rezultă:

– pentru $m \in (-\infty, 0)$ ecuația propusă nu are soluții;

– pentru $m \in [0, \frac{2}{3})$ ecuația are o singură soluție;

– pentru $m \in [\frac{2}{3}, \infty)$ ecuația propusă are două soluții.

Folosirea metodei a) indicată la 5.1,2° conduce la aceleași rezultate.

6.4. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + m = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

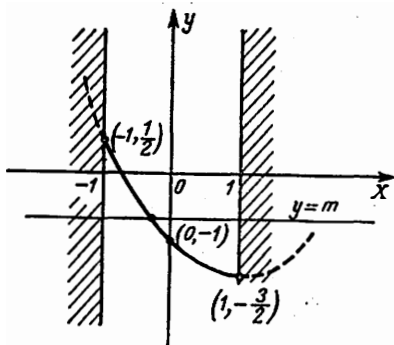


Fig. 6.4

R. Se ține seama că $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$ și luând ca necunoscută pe $\sin 2x$, ecuația dată se transformă în

$$\sin^2 2x - 2 \sin 2x - 2(1+m) = 0. \quad (1)$$

Pentru discuția ecuației (1) se poate aplica oricare din metodele menționate la exercițiul precedent; aplicînd, de exemplu, metoda grafică și reprezentînd funcția $y = \frac{X^2 - 2X - 2}{2}$,

$X \in [-1, 1]$, (fig. 6.4), rezultă că pentru $m \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ecuația dată are o singură soluție.

6.5. Să se rezolve și să se discute ecuația

$$\sin^2 x + (m^2 - 1) \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{m^2 + 1}{2}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

R. Se trece de la puteri de sinusuri la cosinusuri de arce duble și ecuația se transformă în

$$\cos 2x + (m^2 - 1) \cos 4x + \cos 6x = 0$$

sau, grupând convenabil și transformând sumele în produse, se obțin ecuațiile $\cos 4x = 0$ cu $x_1 = \pm \frac{\pi}{8} + \frac{k_1\pi}{2}$ și $\cos 2x = \frac{1-m^2}{2}$ cu $x_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1-m^2}{2} + k_2\pi$, $-1 \leq \frac{1-m^2}{2} \leq 1$, adică $m \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

6.6. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$\sin^4 x + \cos^4 x = m (\sin^6 x + \cos^6 x), \quad m \in \mathbb{R}.$$

R. Se pleacă de la $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ și se ia ca necunoscută $\sin^2 2x = y$; ecuația dată devine $(3m-2)y^2 - 4(m-1) = 0$, de unde,

$$y_{1,2} = \pm 2 \sqrt{\frac{m-1}{3m-2}}. \quad (1)$$

Pentru ca ecuația (1) să aibă soluții acceptabile (ca $\sin 2x$ să existe) este necesar ca m să satisfacă dubla inecuație $0 \leq \frac{m-1}{3m-2} \leq \frac{1}{4}$, de unde rezultă $m \in [1, 2]$.

6.7. Să se rezolve și să se discute ecuația

$$(1-a) \cos 4x - 2(5-2a) \cos 2x + 5a + 13 = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Caz particular: $a = -5$.

R. Se trece de la $\cos 4x$ la $\cos 2x$ și se obține ecuația

$$(1-a) \cos^2 2x - (5-2a) \cos 2x + (3a+6) = 0. \quad (1)$$

Dar ecuația (1) nu are decât o singură rădăcină acceptabilă

$$\cos 2x_1 = \frac{2+a}{1-a}. \quad (2)$$

Punând condiția ca $-1 \leq \frac{2+a}{1-a} \leq 1$, rezultă valorile lui a pentru care ecuația dată are soluții și anume

$a \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$. Pentru $a = -5$, rezultă $x_1 = \pm \frac{\pi}{6} + (2k_1 + 1) \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

6.8. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$\sin 2x + \sin 3x = m \sin x, \quad m \in \mathbb{R}.$$

R. O soluție evidentă este $x_1 = k\pi$, pentru orice $m \in \mathbb{R}$; ecuația rămasă de discutat este

$$4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 - m = 0. \quad (1)$$

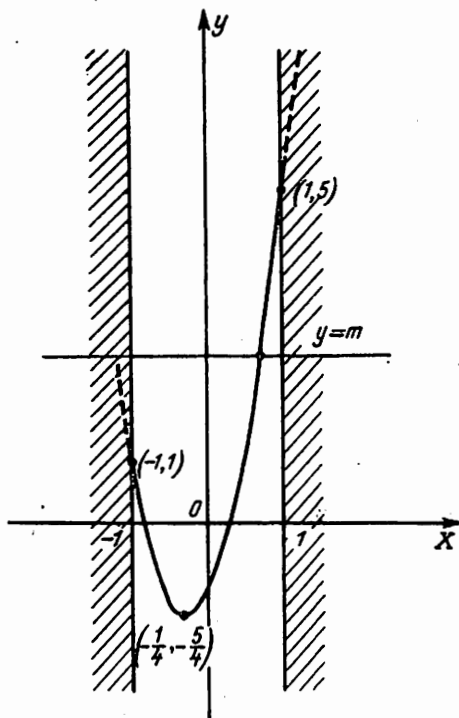


Fig. 6.8

Punând $\cos x = X \in [-1, 1]$ și separând pe m , obținem

$$4X^2 + 2X - 1 = m, \quad (1')$$

Din graficul funcției $y_1 = 4X^2 + 2X - 1$ dat în fig. 6.8 rezultă:

$$\text{— pentru } m \in \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right) \cup (5, \infty)$$

ecuația (1) nu are soluții;

— pentru $m \in \left(-\frac{5}{4}, 1\right]$ ecuația are două soluții;

— pentru $m \in (1, 5] \cup \left\{-\frac{5}{4}\right\}$ ecuația (1) are o soluție.

Aceiași rezultate obținem, dacă punem condiții ca ecuația (1') să aibă două soluții în intervalul $[-1, 1]$, adică

$$\Delta > 0, \quad a \cdot f(-1) \geq 0, \quad af(1) \geq 0,$$

$$-1 < -\frac{b}{2a} < 1,$$

sau o soluție dacă $f(-1) \cdot f(1) < 0$; cazurile $\Delta = 0$ și $f(-1) \cdot f(1) = 0$ se vor studia separat, reținându-se valorile corespunzătoare ale lui m pentru care ecuația are o singură soluție.

√ 6.9. Se dă ecuația

$$\cos^3 x + (a + a^2) \cos^2 x + (a^3 + a^2 - 1) \cos x + a^3 - a = 0,$$

unde a este un parametru real. Se cere:

√ 1° Să se rezolve ecuația notând $y = \cos x$.

√ 2° Pentru $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ să se afle valorile lui x care verifică ecuația dată.

√ 3° Fie $y_1 = \cos x_1, y_2 = \cos x_2, y_3 = \cos x_3$ rădăcinile ecuației de la 1°. Să se calculeze

$$E = \operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{tg} x_2 + \operatorname{tg} x_2 \cdot \operatorname{tg} x_3 + \operatorname{tg} x_3 \cdot \operatorname{tg} x_1$$

R. 1° $\cos x_1 = -1, \cos x_2 = -a, \cos x_3 = 1 - a^2$ și pentru ca ecuația să aibă trei soluții distincte este necesar ca $|a| < 1$.

$$2^\circ x_1 = \pi + 2k_1\pi, x_2 = (2k_2 + 1)\pi \pm \frac{\pi}{4}, x_3 = \pm \frac{\pi}{3} + 2k_3\pi, k_{1,2,3} \in \mathbb{Z}.$$

$$3^\circ E = \pm \sqrt{\frac{2-a^2}{1-a^2}}.$$

6.10. Se dă ecuația

$$2(2a + 1) \cos^2 x + 3 \cos x + (1 - a) = 0$$

și se cere :

— să se rezolve ecuația ;

— să se determine a astfel încât ecuația să aibă soluții cuprinse în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

R. Rezolvând ecuația, se obține $\cos x_1 = \frac{a-1}{2a+1}$, și $\cos x_2 = -\frac{1}{2}$. Pentru ca x_1 să fie cuprins în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ este necesar ca parametrul a să verifice dubla inecuație $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{a-1}{2a+1} \leq 1$.

6.11. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$(p + 1) \cos 2x + 2p^2 \sin x + 1 - 3p = 0, p \in \mathbb{R}.$$

R. Ecuația dată este echivalentă cu

$$(p + 1) \sin^2 x - p^2 \sin x + p - 1 = 0$$

și deoarece $\Delta = (p^2 - 2)^2$ este un pătrat perfect, este de preferat a se rezolva ecuația, ale cărei rădăcini snt $\sin x_1 = p - 1$ și $\sin x_2 = \frac{1}{p + 1}$, punindu-se apoi condițiile $-1 \leq \sin x_1 \leq 1$ și $-1 \leq \sin x_2 \leq 1$.

Alfel. Ecuația are două soluții distincte cînd p satisface inecuațiile

$$\Delta > 0, af(-1) \geq 0, af(1) \geq 0, -1 < \frac{-b}{2a} < 1$$

și o singură soluție dacă p satisface inecuațiile $\Delta > 0, f(-1) \cdot f(1) < 0$ cazurile $\Delta = 0$ și $f(-1) \cdot f(1) = 0$ studiindu-se separat.

6.12. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = m \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right), m \in \mathbb{R}.$$

R. Dezvoltând și efectuând simplificările respective, ecuația dată se transformă în

$$\cos 3x + \sin 3x = m(\cos x - \sin x).$$

care se descompune în $\cos x - \sin x = 0$, de unde $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, și $4\left(1 + \frac{1}{2} \sin 2x\right) = m + 3$ sau $\sin 2x = \frac{m-1}{2}$. Pentru ca această ecuație să aibă soluții este necesar ca $-1 \leq \frac{m-1}{2} \leq 1$, adică $m \in [-1, 3]$.

6.13. Să se găsească valorile parametrului real m pentru care ecuația $(m^2 + 1) \cos^2 x - \sin x + 1 - m = 0$ are cele mai multe soluții.

R. Ecuația dată este echivalentă cu

$$(m^2 + 1) \sin^2 x + \sin x - (m^2 - m + 2) = 0.$$

care are două soluții dacă sînt satisfăcute concomitent inecuațiile

$$\Delta > 0, af(-1) \geq 0, af(1) \geq 0, -1 < -\frac{b}{2a} < 1.$$

Rezolvarea inecuațiilor conduce la rezultatul $m \in [2, \infty)$.

De observat că ecuația dată are o singură soluție, dacă sînt satisfăcute concomitent inecuațiile

$$\Delta > 0, f(-1) \cdot f(1) < 0$$

(și separat $\Delta = 0, f(-1) \cdot f(1) = 0$), din care, fără nici o dificultate rezultă că $m \in [0, 2)$. În consecință, pentru valorile lui $m \in (-\infty, 0)$ ecuația nu are nici o soluție.

6.14. Să se găsească valorile parametrului real m pentru care ecuația

$$(m^2 + 1) \sin^2 x - \cos x + 1 - m = 0$$

are cele mai multe soluții.

R. Procedeu analog ca la exercițiul precedent; ecuația dată este echivalentă cu $(m^2 + 1) \cos^2 x + \cos x - (m^2 - m + 2) = 0$. Pentru a avea cele mai multe soluții acceptabile, este necesar ca m să satisfacă concomitent inecuațiile

$$\Delta > 0, af(-1) \geq 0, af(1) \geq 0, -1 < -\frac{b}{2a} < 1.$$

Se va observa de asemenea că pentru $m \in [0, 2)$ ecuația are o soluție, iar pentru $m \in (-\infty, -1)$ ecuația nu are soluții.

6.15. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$(m^2 + 1) \cos^2 x + (m + 1) \cos x - 3 = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

R. Pentru ca ecuația dată să aibă două soluții este necesar ca m să satisfacă simultan următoarele inecuații:

$$\Delta > 0, \quad a \cdot f(-1) \geq 0, \quad a \cdot f(1) \geq 0, \quad -1 < -\frac{b}{2a} < 1, \quad (1)$$

iar pentru ca ecuația respectivă să aibă o singură soluție este necesar ca m să satisfacă inecuațiile

$$\Delta > 0, \quad f(-1) \cdot f(1) < 0 \quad (\text{și separat } \Delta = 0, \quad f(-1) \cdot f(1) = 0). \quad (2)$$

Din (1) rezultă că $m \in \left(-\infty, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \infty\right)$, iar din (2) rezultă

$$\text{că } m \in \left[\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right].$$

6.16. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$m^3 \cos^2 x - \cos x + m = 0.$$

R. Procedem analog ca la exercițiul precedent; pentru $m \in (-\infty, \beta] \cup \left[3\sqrt{\frac{1}{2}}, \infty\right)$ ecuația are două soluții și pentru $m \in [\beta, \alpha]$ ecuația are o singură soluție, unde $\alpha \in (-1, 0)$, $\beta \in (-2, -1)$.

6.17. Să se rezolve ecuația

$$m(2 \cos x + 1)^2 - (m + 1)(2 \cos x + 1) + 1 = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

R. Punind $2 \cos x + 1 = u$, ecuația dată se transformă în $mu^2 - (m + 1)u + 1 = 0$ cu rădăcinile $u_1 = 1$ și $u_2 = \frac{1}{m}$, cu o soluție evidentă $x_1 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k_1\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, cealaltă soluție fiind dată de ecuația

$$\cos x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - 1 \right). \quad (1)$$

Evident, pentru ca ecuația (1) să aibă soluție este necesar ca m să verifice dubla inecuație $-1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \leq 1$, din care rezultă că $m \in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$. Rezultă că

pentru $m \in \left(-1, \frac{1}{3}\right)$ ecuația dată are o singură soluție, iar pentru restul valorilor, două soluții.

6.18. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$m(1-m)\sin^2 x - \sin x + m(1+m) = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

R. Deoarece $\Delta = (2m^2 - 1)^2$, este preferabil a se calcula rădăcinile ecuației; avem

$$\sin x_1 = \frac{m}{1-m} \quad \text{și} \quad \sin x_2 = \frac{1+m}{m}. \quad (1)$$

Pentru ca ecuația să aibă o singură soluție este necesar ca m să verifice unul din sistemele de inecuații :

$$-1 \leq \frac{m}{1-m} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{1+m}{m} \leq 1. \quad (1')$$

Rezolvând aceste sisteme, rezultă că pentru $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ ecuația are două soluții, iar pentru $m \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ecuația are o singură soluție (v. fig. 6.18).

Altfel. Notăm $\sin x = X$ și ecuația din enunț devine

$$m(1-m)X^2 - X + m(1+m) = 0, \quad (2)$$

Ca ecuația (2) să aibă o singură soluție este necesar să avem

$$\Delta > 0, \quad f(-1) \cdot f(1) < 0 \quad (\text{separat studiindu-se cazul } \Delta = 0, \quad f(-1)f(1) = 0), \quad (3)$$

iar pentru a avea două soluții (distincte), trebuie să avem

$$\Delta > 0, \quad af(-1) \geq 0, \quad af(1) \geq 0, \quad -1 < -\frac{b}{2a} < 1, \quad (4)$$

Rezolvând inecuațiile (3), se obține $m \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, iar din inecuațiile (4) se obține $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

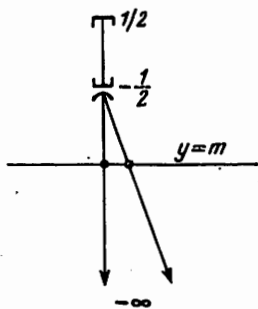


Fig. 6.18

6.19. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$\sin x + \cos x + \sin 2x = m, \quad m \in \mathbb{R}.$$

R. Se ia ca necunoscută $\sin x + \cos x = X$, $X \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, și ecuația dată se transformă în

$$X^2 + X - 1 = m. \quad (1)$$

Folosind metoda grafică, soluțiile ecuației (1) sînt abscisele punctelor de intersecție a parabolei $y_1 = X^2 + X - 1$ cu dreapta $y_2 = m$. Din fig. 6.19 rezultă :

- pentru $m \in \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right) \cup (\sqrt{2} + 1, \infty)$ ecuația nu are nici o soluție;

- pentru $m \in \left(-\frac{5}{4}, 1 - \sqrt{2}\right)$,

ecuația are două soluții;

- pentru $m \in \left(1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} + 1\right) \cup$

$\cup \left\{-\frac{5}{4}\right\}$ ecuația are o soluție.

Altfel. Ca ecuația (1) să aibă două rădăcini cuprinse în intervalul $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ este necesar ca m să satisfacă concomitent inecuațiile

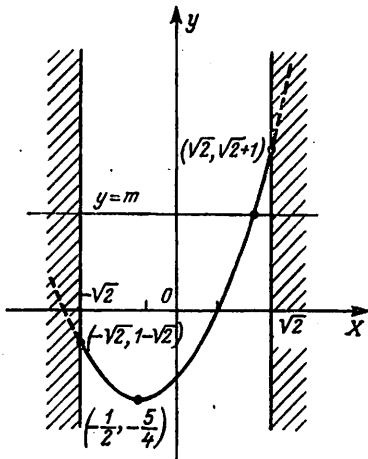


Fig. 6.19

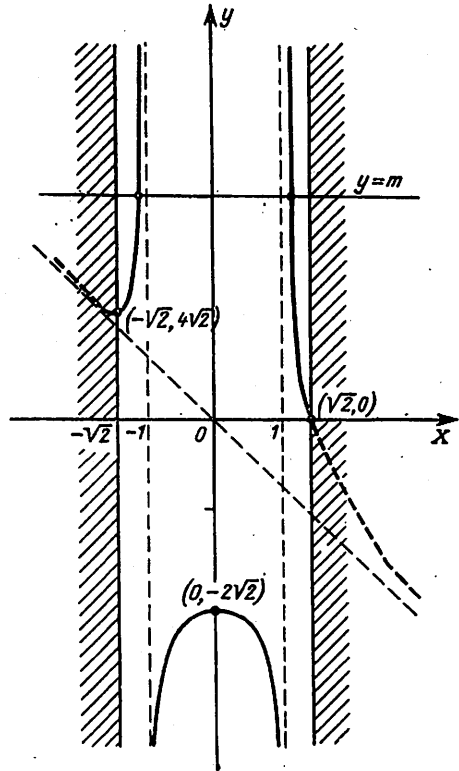


Fig. 6.20.

$$\Delta > 0, af(-\sqrt{2}) \geq 0, af(\sqrt{2}) \geq 0, \quad -\sqrt{2} < -\frac{b}{2a} < \sqrt{2},$$

iar pentru ca aceeași ecuație să aibă o singură rădăcină cuprinsă în intervalul considerat, este necesar ca m să verifice inegalitățile $\Delta > 0, f(-\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2}) < 0$, studiindu-se separat cazurile în care $\Delta = 0$ și $f(-\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{2}) = 0$ și reținându-se valorile corespunzătoare ale lui m .

6.20. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$(\cos x - \sin x)^3 - m(\cos x - \sin x) + m - 2\sqrt{2} = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

R. Se știe că $\max(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}$ și că $\min(\cos x - \sin x) = -\sqrt{2}$. Pentru rezolvarea prin metoda grafică, notăm $\cos x - \sin x = X$, $X \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Avem deci de reprezentat grafic funcția

$$y_1 = \frac{2\sqrt{2} - X^3}{X^3 - 1} \quad (1)$$

soluțiile ecuației fiind date de punctele de intersecție ale dreptei $y_2 = m$ cu curba reprezentativă a funcției (1). Din studiul graficului dat în fig. 6.20, α rezultă următoarele:

- pentru $m \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup [4\sqrt{2}, \infty)$ ecuația are două soluții.
- pentru $m \in [0, 4\sqrt{2}) \cup \{-2\sqrt{2}\}$ ecuația are o soluție;
- pentru $m \in (-2\sqrt{2}, 0)$ ecuația nu are soluții.

6.21. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$m(\sqrt{3}\cos x + \sin x)^2 - 2(\sqrt{3}\cos x + \sin x) + m = 0.$$

R. Se cercetează mai întâi extremele funcției $g(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x$ pentru $x \in [0, 2\pi]$, rezultând $\max(g(x)) = +2$ și $\min(g(x)) = -2$. În ecuația dată în enunț, în care se poate lua în considerare ca necunoscută $\sqrt{3}\cos x + \sin x$, se pun condiții:

- ecuația dată să aibă o soluție cuprinsă în intervalul $[-2, 2]$;
- ecuația dată să aibă două soluții în intervalul considerat.

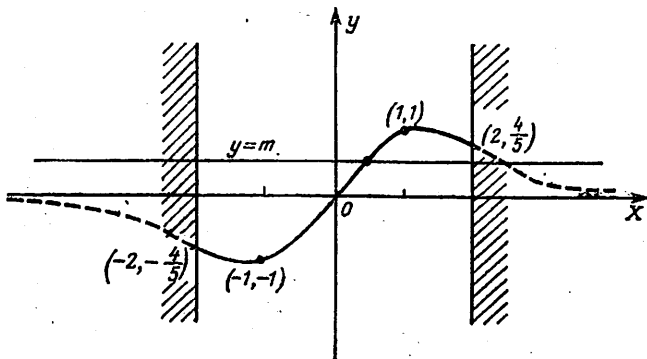


Fig. 6.21

În rezolvarea acestei probleme se pot folosi sau metoda grafică sau teoremele privitoare la separarea rădăcinilor unei ecuații algebrice de gradul al doilea.

Altfel. Se reprezintă grafic funcția

$$f(x) = \frac{2X}{X^2 + 1}, \quad X \in [-2, 2], \quad (1)$$

soluțiile ecuației respective fiind date de abscisele punctelor comune (v. fig. 6.21) ale graficului funcției (1) și dreptei $y = m$. Rezultă:

- pentru $m \in \left(-1, -\frac{4}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{5}, 1\right)$ ecuația are două soluții;

- pentru $m = \pm 1$ și $m \in \left(-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right)$ ecuația are o singură soluție;
- pentru $m \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ ecuația nu are soluții.

6.22. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$\sin^2 x - m \sin^2 x - m = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

R. Folosim metoda grafică. Separând pe m , obținem

$$m = \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x}, \quad (1)$$

soluțiile ecuației din enunț fiind date de intersecțiile curbei de ecuație $y =$

$$= \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} \text{ cu dreapta } y = m.$$

Pentru ușurința calculului, notăm $\sin x = X, X \in [-1, 1]$. Graficul funcției

$$y = \frac{X^2}{1 + X^2} \text{ este dat în fig. 6.22, din}$$

care rezultă că ecuația din enunț are o singură soluție pentru $m \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

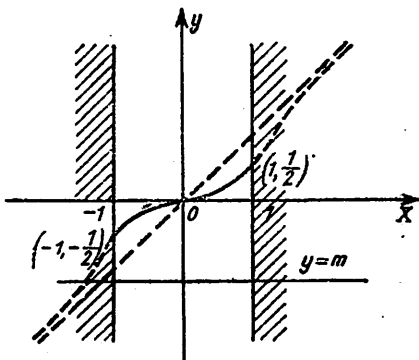


Fig 6.22.

6.23. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$m \sin^3 x + m \cos^3 x - 1 = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

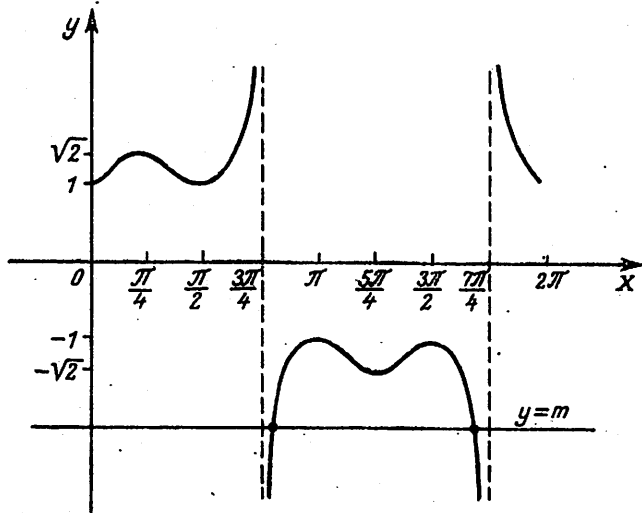


Fig. 6.23

R. Se folosește metoda grafică, soluțiile ecuației fiind abscisele punctelor de intersecție a curbei de ecuație $y = \frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 x}$ cu dreapta $y = m$. Din graficul dat în fig. 6.23 rezultă că pe intervalul $[0, 2\pi]$:

- pentru $m \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ ecuația are două soluții;
- pentru $m \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$ ecuația are patru soluții;
- pentru $m \in \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$ ecuația are trei soluții.

6.24. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$m \cos^3 x - \cos x - 1 = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

R. Se folosește metoda grafică, luând în considerare funcțiile $y = \frac{X+1}{X^3}$ și $y = m$, $X \in [-1, 1]$. Graficul este redat în fig. 6.24, din care rezultă și concluziile necesare cerute prin enunț.

6.25. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$\frac{\sin 5x + \cos 5x}{\sec x + \operatorname{cosec} x} = m, \quad m \in \mathbb{R}.$$

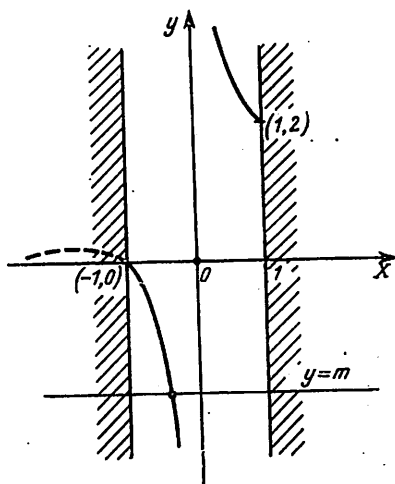


Fig. 6.24

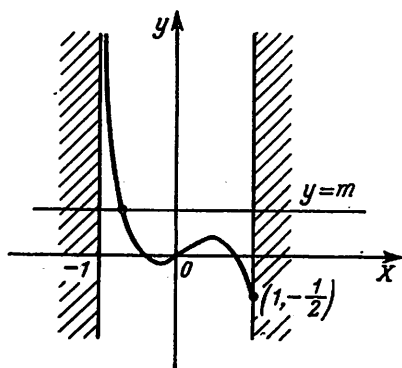


Fig. 6.25

R. De observat că soluțiile date de ecuația $\sin x + \cos x = 0$ sînt excluse; efectuînd calculele ecuația dată se transformă în

$$\frac{1}{2} \sin 2x (1 + 2 \sin 2x - 4 \sin^2 2x) = m. \quad (1)$$

sau

$$\frac{1}{2} X (1 + 2X - 4X^2) = m, \quad X \in [-1, 1]. \quad (1')$$

Dar ecuația (1') se poate discuta fie prin metoda grafică, fie cu ajutorul teoremei lui Rolle.

a) *Metoda grafică.* Se trasează graficul funcției

$$y = -2X^3 + X^2 + \frac{1}{2} X,$$

soluțiile ecuației (1') fiind abscisele punctelor de intersecție ale curbei y cu dreapta $y = m$ (v. fig. 6.25), tabloul de variație a funcției y fiind

X	-1	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	1			
y'	-	-	0	+	+	0	-	-
y	$\frac{5}{2}$	$\searrow -\frac{5}{108}$	$\nearrow 0$	$\nearrow \frac{1}{4}$	$\searrow -\frac{1}{2}$			
		min		max				

b) Discuția ecuației (1') cu teorema lui Rolle rezultă din tabloul:

X	-1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1	
m \ / $f(X)$	$2m-5$	$2m + \frac{5}{54}$	$2m - \frac{1}{2}$	$2m + 1$	Concluzii
$-\infty$	-	-	-	-	nici o soluție
$-1/2$	-	-	-	0	o soluție $X = 1$
$-5/108$	-	0	-	+	o soluție
				+	două soluții (una dublă)
$1/4$	-	+	-	+	trei soluții
	-	+	0	+	două soluții (una dublă)
$5/2$	-	+	+	+	o soluție
	0	+	+	+	o soluție
$+\infty$	+	+	+	+	nici o soluție.

N o t ă . Se va observa că ecuația admite o soluție singulară cînd $\sin x + \cos x \rightarrow 0$ deoarece

$$\lim_{\cos x + \sin x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x + \sin 5x}{\sec x + \operatorname{cosec} x}$$

există.

6.26. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x = m \operatorname{tg} 2x, \quad m \in \mathbb{R}.$$

R. Ecuația dată se poate scrie sub forma

$$\frac{-\sin 2x}{\cos x \cos 3x} = m \frac{\sin 2x}{\cos 2x}, \quad (1)$$

iar soluția este dată de $\sin 2x = 0$, adică $x = k\pi$ (soluția $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, fiind exclusă). Astfel din ecuația (1) rămâne

$$2m \cos^2 2x + (m+2) \cos 2x - m = 0. \quad (1')$$

Natura soluțiilor ecuației (1') se poate stabili fie prin metoda grafică, fie prin separarea rădăcinilor ecuației algebrice

$$2m X^2 + (m+2)X - m = 0, \quad X \in [-1, 1]. \quad (1'')$$

Se separă m din (1'') și se trasează graficul funcției $y = -\frac{2X}{2X^2 + X - 1}$ (v. fig. 6.26), din care rezultă:

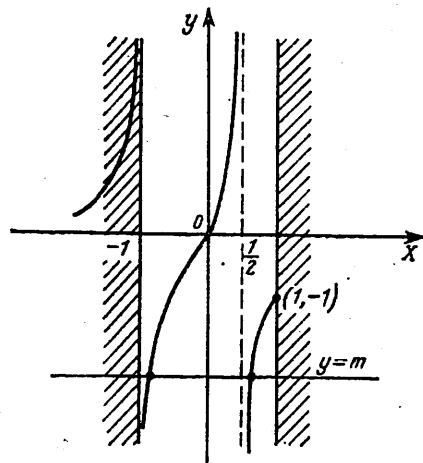


Fig. 6.26

— pentru $m \in (-\infty, -1]$ ecuația (1'') are două rădăcini și deci ecuația (1') are două soluții;

— pentru $m \in (-1, \infty)$ ecuația (1') are o singură soluție.

Altfel. Ca ecuația (1'') să aibă o rădăcină și deci (1') o soluție este necesar ca m să satisfacă sistemul de inecuații

$$\Delta \geq 0, \quad f(-1) \cdot f(1) \leq 0 \quad (\text{și separat } \Delta = 0, \quad f(-1) \cdot f(1) = 0), \quad (2)$$

unde s-a notat cu $f(X)$ membrul întâi al ecuației (1''); iar pentru ca ecuația (1'') să aibă două rădăcini și deci (1') două soluții este necesar ca m să satisfacă sistemul de inecuații

$$\Delta \geq 0, \quad a \cdot f(-1) \geq 0, \quad a \cdot f(1) \geq 0, \quad -1 < -\frac{b}{2a} < 1. \quad (3)$$

Din (2) rezultă $m \in (-1, \infty)$, iar din (3) rezultă $m \in (-\infty, -1]$.

6.27. Să se discute natura soluțiilor ecuației

$$\cos^3 x - \sin^3 x + 1 - m = 0.$$

R. Folosim teorema lui Rolle și notînd cu $f(x)$ membrul întâi al ecuației, avem $f'(x) = 3 \cos^2 x \sin x - 3 \sin^2 x \cos x$. Rezolvînd ecuația $f'(x) = 0$, obținem $x_1 = \frac{k_1 \pi}{2}$ și $x_2 = \frac{3\pi}{4} + k_2 \pi$. Dacă luăm în considerare doar intervalul $[0, 2\pi]$, soluțiile

$$\text{ecuației } f'(x) = 0 \text{ sînt: } x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{4}, \quad x_3 = \pi, \quad x_4 = \frac{3\pi}{2}, \quad x_5 = \frac{7\pi}{4}, \quad x_6 = 2\pi.$$

Numărul soluțiilor ecuației din enunț se poate citi în tabloul de variație întocmit conform teoremei lui Rolle.

x	0	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π	Concluzii
m	$2-m$	$-m$	$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - m$	$-m$	$2-m$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) - m$	$2-m$	
	+	+	+	+	+	+	+	nici o soluție
0	+	0	+	0	+	+	+	două soluții $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$
	+	-	+	-	+	+	+	patru soluții
$\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$	+	-	0	-	+	+	+	trei soluții din care $x_1 = 3\pi/4$
	+	-	-	-	+	+	+	două soluții
$\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$	+	-	-	-	+	0	+	trei soluții din care $x_1 = 7\pi/4$
	+	-	-	-	+	-	+	patru soluții
2	0	-	-	-	0	-	0	trei soluții $x_1 = 0$, $x_2 = 3\pi/2$, $x_3 = 2\pi$
	-	-	-	-	-	-	-	nici o soluție

Rezultă că, în intervalul $[0, 2\pi]$, pentru $m \in [0, 2]$ ecuația are de la două până la patru soluții.

6.28. Să se rezolve și să se discute ecuația

$$\sin^2 x + \sin 2x - 2 \cos^2 x = m,$$

unde m este un parametru real. Caz particular : $m = \frac{1}{2}$.

R. Multiplicând pe m cu $\cos^2 x + \sin^2 x$ și împărțind ecuația prin $\cos^2 x$, aceasta devine

$$(1 - m) \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - (2 + m) = 0, \quad x \neq (2k+1) \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Pentru ca această ecuație să aibă soluții este necesar ca $\Delta = 1 + (1 - m)(2 + m) \geq 0$, de unde rezultă

$$m \in \left[-\frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \right],$$

soluțiile fiind date de ecuațiile elementare

$$\operatorname{tg} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + (1 - m)(2 + m)}}{1 - m}.$$

Pentru $m = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} x = 1$ cu $x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\pi$ și $\operatorname{tg} x = -5$ cu $x_2 = \operatorname{arctg}(-5) + k_2\pi$, $k_{1,2} \in \mathbb{Z}$.

6.29. Să se rezolve și să se discute soluțiile ecuației

$$\operatorname{tg}^2 x = m \operatorname{tg}(x + a) \operatorname{tg}(x - a),$$

unde m este un parametru real, iar a constantă. Caz particular : $m = 1$.

R. Dezvoltând membrul al doilea și apoi eliminând numitorii, ecuația propusă devine

$$\operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^4 x - (1 - m) \operatorname{tg}^2 x - m \operatorname{tg}^2 a = 0.$$

Notăm $\operatorname{tg} x = t$ și $\operatorname{tg} a = \alpha$, ecuația devenind

$$\alpha^2 t^4 - (1 - m) t^2 - m\alpha^2 = 0,$$

adică o ecuație bipătrată în raport cu t . Această ecuație are toate rădăcinile reale dacă

$$(1 - m)^2 + 4m\alpha^4 \geq 0, \quad \frac{1 - m}{\alpha^2} \geq 0, \quad -m \geq 0$$

și are numai două rădăcini reale, dacă

$$(1 - m)^2 + 4m\alpha^2 > 0, \quad -m < 0.$$

Pentru $m = 1$, ecuația propusă se reduce la $\operatorname{tg}^4 x = 1$, de unde $\operatorname{tg} x = \pm 1$, cu $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6.30. Să se studieze natura soluțiilor ecuației

$$m(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x) - (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

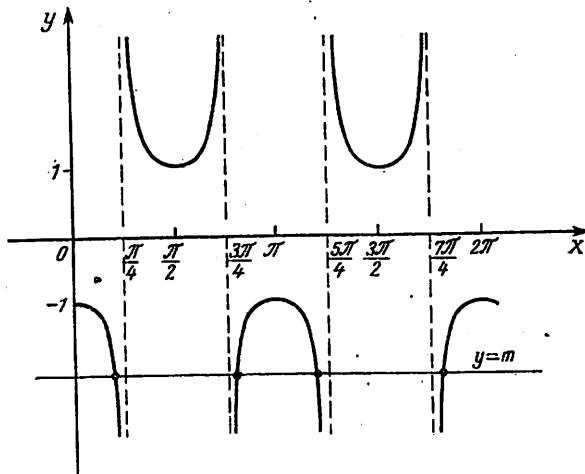


Fig. 6.30

R. Se aplică metoda grafică; soluțiile ecuației rezultă din intersecția graficului funcției $y = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}$ cu dreapta $y = m$. Din fig. 6.30, în care s-a luat în considerare intervalul $[0, 2]$, rezultă.

- pentru $m \in (-1, 1)$ ecuația nu are soluții;
- pentru $m \in (-\infty, -1] \cup (1, \infty)$ ecuația are două soluții.

Altfel. Se poate lua ca necunoscută $\operatorname{tg} x$, rezultând $\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{\frac{m+1}{m-1}}$, cu aceeași concluzii ca mai înainte.

6.31. Să se studieze natura soluțiilor ecuației

$$(m-1)\cos^3 x + \cos x - 1 + m = 0.$$

R. Se aplică metoda grafică, trasându-se graficul funcției $y = \frac{\cos^3 x - \cos x + 1}{\cos^3 x + 1}$

(v. fig. 6.31, a) sau graficul funcției $y = \frac{X^3 - X + 1}{X^3 + 1}$ (v. fig. 6.31, b); din ambele grafice rezultă;

- pentru $m \in \left(-\infty, \frac{3 - \sqrt[3]{4}}{3}\right)$ ecuația nu are soluții;

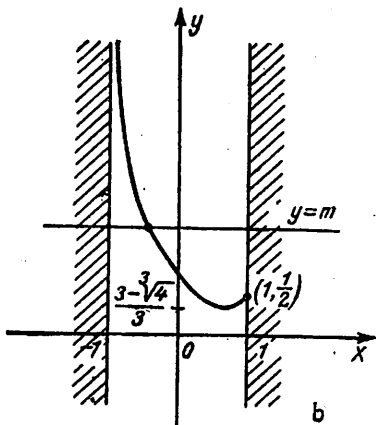
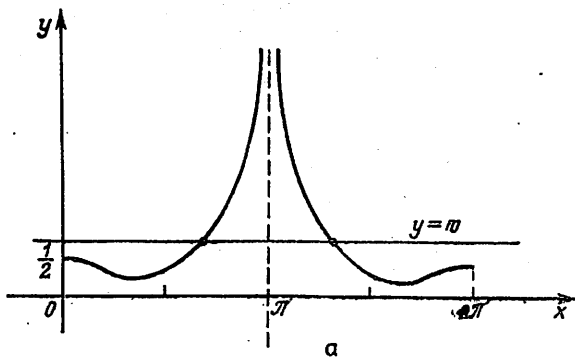


Fig. 6.31

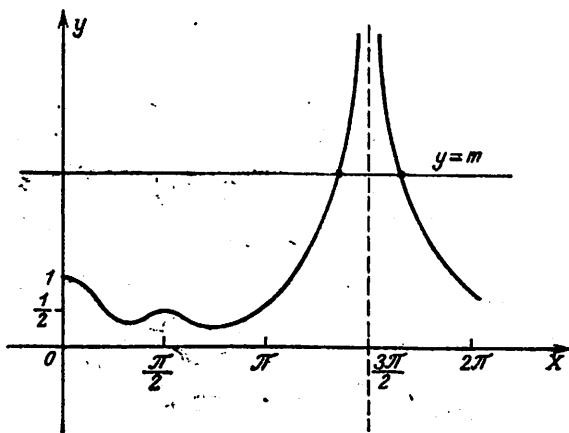


Fig. 6.32

- pentru $m \in \left(\frac{3 - \sqrt[3]{4}}{3}, \frac{1}{2} \right]$ ecuația are două soluții;

- pentru $m \in \left(\frac{1}{2}, \infty \right) \cup \left\{ \frac{3 - \sqrt[3]{4}}{3} \right\}$ ecuația are o singură soluție.

6.32. Să se studieze natura soluțiilor ecuației

$$(m - 1) \sin^3 x + \sin x - 1 + m = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

R. Din graficul funcției $y = \frac{\sin^3 x - \sin x + 1}{\sin^3 x + 1}$ dat în fig. 6.32 rezultă următoarele:

- pentru $m \in \left(-\infty, \frac{3 - \sqrt[3]{4}}{3} \right)$ ecuația nu are soluții;

- pentru $m \in \left(\frac{3 - \sqrt[3]{4}}{3}, \frac{1}{2} \right]$ ecuația are două soluții;

- pentru $m \in \left(\frac{1}{2}, \infty \right) \cup \left\{ \frac{3 - \sqrt[3]{4}}{3} \right\}$ ecuația are o soluție.

Anexa 1

FORMULE TRIGONOMETRICE

A.1. Funcții trigonometrice de arce multiple

$$\sin 2a = 2 \cos a \sin a; \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a; \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

$$\sin na = C_n^1 \sin a \cos^{n-1} a - C_n^3 \sin^3 a \cos^{n-3} a + C_n^5 \sin^5 a \cos^{n-5} a - \dots$$

$$\cos na = \cos^n a - C_n^2 \cos^{n-2} a \sin^2 a + C_n^4 \cos^{n-4} a \sin^4 a - \dots$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}, \quad \operatorname{ctg} 2a = \frac{\operatorname{ctg}^2 a - 1}{2 \operatorname{ctg} a}$$

$$\operatorname{tg}(a + b + c) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}$$

$$\operatorname{ctg}(a + b + c) = \frac{\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c - \operatorname{ctg} a - \operatorname{ctg} b - \operatorname{ctg} c}{\operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} b + \operatorname{ctg} a \operatorname{ctg} c + \operatorname{ctg} b \operatorname{ctg} c - 1}$$

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a}, \quad \operatorname{ctg} 3a = \frac{\operatorname{ctg}^3 a - 3 \operatorname{ctg} a}{3 \operatorname{ctg}^2 a - 1}$$

$$\operatorname{tg} na = \frac{C_n^1 \operatorname{tg} a - C_n^3 \operatorname{tg}^3 a + C_n^5 \operatorname{tg}^5 a - \dots}{1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2 a + C_n^4 \operatorname{tg}^4 a - C_n^6 \operatorname{tg}^6 a + \dots}$$

A.2. Transformări de sume de funcții trigonometrice în produse (formule calculabile prin logaritmi)

$$\sin a \pm \sin b = 2 \sin \frac{a \pm b}{2} \cos \frac{a \mp b}{2} \quad (\text{semnele corespund})$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b-a}{2}$$

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b}; \quad \operatorname{ctg} a \pm \operatorname{ctg} b = \frac{\sin(a \pm b)}{\sin a \sin b}$$

$$\begin{aligned} \sin a + \cos b &= 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a-b}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a+b}{2} \right) = \\ &= 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a-b}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a+b}{2} \right) \end{aligned}$$

A.3. Transformări de produse de cosinusuri și sinusuri în sume de aceleași funcții

$$2 \sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$$

$$2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

$$2 \sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

A.4. Transformări de pătrate de cosinusuri și sinusuri în cosinusuri de arce multiple

$$\cos^2 na = \frac{1 + \cos 2na}{2}, \quad \sin^2 na = \frac{1 - \cos 2na}{2}$$

A.5. Formule de transformare a sinusului, cosinusului și tangentei în funcție de tangenta areului pe jumătate

$$\sin a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}, \quad \cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}, \quad \operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

Anexa 2

Soluții generale ale unor ecuații trigonometrice particulare mai des întâlnite în diferite exerciții teoretice și aplicative :

Ecuatiile	$\sin x = a$	$\cos x = a$	$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{ctg} x = a$
$a =$	$x =$			
$-\sqrt{3}$			$-\frac{\pi}{3} + k\pi$	$-\frac{\pi}{6} + k\pi$
-1	$(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{2} + k\pi$	$(2k + 1)\pi$	$-\frac{\pi}{4} + k\pi$	$-\frac{\pi}{4} + k\pi$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{3} + k\pi$	$\pm \frac{\pi}{6} + (2k + 1)\pi$	$-\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi$	$-\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{4} + k\pi$	$\pm \frac{\pi}{4} + (2k + 1)\pi$	$-\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi$	$-\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(-1)^{k+1} \cdot \operatorname{arcsin} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) + k\pi$	$\pm \operatorname{arccos} \frac{\sqrt{3}}{3} + (2k + 1)\pi$	$-\frac{\pi}{6} + k\pi$	$-\frac{\pi}{3} + k\pi$

$-\frac{1}{2}$	$(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi$	$\pm \frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi$	$-\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi$	$-\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi$
0	$k\pi$	$\pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$k\pi$	$\frac{\pi}{2} + k\pi$
$\frac{1}{2}$	$(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + k\pi$	$\pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$	$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi$	$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$(-1)^k \cdot \operatorname{arcsin} \frac{\sqrt{3}}{3} + k\pi$	$\pm \operatorname{arccos} \frac{\sqrt{3}}{3} + 2k\pi$	$\frac{\pi}{6} + k\pi$	$\frac{\pi}{3} + k\pi$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + k\pi$	$\pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi$	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$(-1)^k \cdot \frac{\pi}{3} + k\pi$	$\pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi$	$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi$
1	$(-1)^k \cdot \frac{\pi}{2} + k\pi$	$2k\pi$	$\frac{\pi}{4} + k\pi$	$\frac{\pi}{4} + k\pi$
$\sqrt{3}$			$\frac{\pi}{3} + k\pi$	$\frac{\pi}{6} + k\pi$

BIBLIOGRAFIE

- Coșniță, C. și Turtoiu, F. *Culegere de probleme de matematici*. București, Editura tehnică, 1966, 1968, 1969.
- Ghermănescu, M. *Aplicațiile trigonometriei*. București, Editura tehnică, 1963.
- Lespinard, V., Pernet, R. *Trigonométrie*. Lyon, 1962.
- Maillard, R., Millet, A. *Trigonométrie*. Paris, 1961.
- Novoselov, I. S. *Trigonometrie* (trad. din l. rusă). București, Editura tehnică, 1956.
- * * * *Gazeta matematică*, seria A. București, 1930—1940.

Control științific: Gh. D. Simionescu

Redactor: Valentina Crețu

Tehnoredactor: Elena Geru

Coperta și supracoperta: Alex. Banu

Bun de tipar: 3.03.1977. Coli de tipar 7,50.

Tiraj: 130 000 + 75 exemplare legale. C.Z. 514.1



C. 571. — I. P. INFORMAȚIA
str. Brezoianu nr. 23—25
București