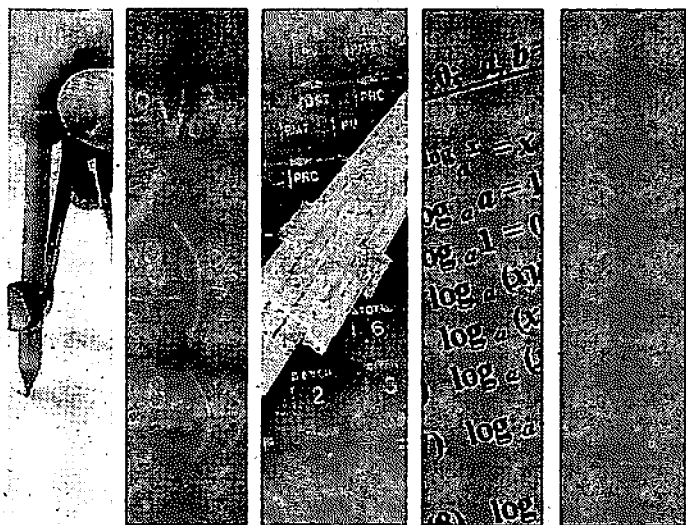


Решение задач по МАТЕМАТИКЕ



филологическое общество «слово»

МОСКВА  2006

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я7
Я 49

Научная разработка и составление
Г. М. Якушевой

при участии О. А. Смирнова

Научный редактор
доктор физ.-мат. наук, проф. А. С. Барашков
(МГУ им. М.В. Ломоносова)

Все права на данное издание принадлежат
Филологическому обществу «СЛОВО» и находятся
под охраной издательства. Ни одна часть данного издания,
включая название, не может перерабатываться, ксерокопироваться,
репродуцироваться или множиться каким-либо иным способом

Оформление переплета С. Киселевой

Якушева Г.М.
Я49 Решение задач по математике / Г.М. Якушева. — М.: Филол.
о-во «СЛОВО», Изд-во Эксмо, 2006. — 640 с.

ISBN 5-8123-0274-X (Филол. о-во «СЛОВО»)
ISBN 5-899-11922-1 (Изд-во Эксмо)

«Новейший справочник школьника» — современное и самое полное учебное пособие, составленное по действующей базовой программе, утвержденной Министерством образования и науки РФ. Серия составлена и разработана опытными учителями московских школ и преподавателями МГУ им. М. В. Ломоносова. Издание, охватывающее все аспекты школьной программы, предназначено для школьников 4—11-х классов, их родителей, учителей и абитуриентов.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я7

ISBN 5-8123-0274-X
ISBN 5-899-11922-1

© Филологическое общество «СЛОВО», 2005
© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2005

Арифметика

I. Признаки делимости

Делимость на:	Условие
2	Если число оканчивается четной цифрой или нулем
3	Если сумма цифр числа делится на 3
5	Если последняя цифра числа 0 или 5
9	Если сумма цифр числа делится на 9
10	Если последняя цифра числа нуль

Существуют и другие признаки делимости, многие из которых можно вывести из ранее перечисленных. Например, для того чтобы число делилось на 6, необходимо выполнение условий признака делимости на 2 и на 3, т.е. число делится на 6, если сумма цифр числа делится на 3 и оно оканчивается четной цифрой или нулем.

Задача 1. Какие из чисел 1854, 1001, 9999, 45035, 23100, 88472

- а) делятся на 2;
- б) делятся на 5?

Решение:

По внешнему виду перечисленных чисел, пользуясь признаками делимости, можно определить:

- а) на 2 делятся 1854, 23100 и 88472;
- б) на 5 делятся 45035 и 23100.

Причем число 23100 делится и на 2, и на 5.

Задача 2. Какие из чисел 5401, 8154, 3012, 11111, 27081, 742436

- а) делятся на 3;
б) делятся на 9?

Решение:

Найдем сумму цифр каждого из перечисленных чисел:

$$5 + 4 + 0 + 1 = 10$$

$$8 + 1 + 5 + 4 = 18$$

$$3 + 0 + 1 + 2 = 6$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$$2 + 7 + 0 + 8 + 1 = 18$$

$$7 + 4 + 2 + 4 + 3 + 6 = 26$$

- а) Числа 8154, 3012, 27081 делятся на 3, так как сумма цифр каждого этих чисел делится на 3;
б) числа 8154, 27081 делятся на 9, так как сумма цифр каждого из чисел делится на 9.

Задача 3. Не производя действий и пользуясь признаками делимости, выяснить, будут ли делиться на 4, 5, 9, 18 данные произведения:

- а) $24 \cdot 36 \cdot 53$

Решение:

В произведении множитель 24 делится на 4, следовательно, и произведение делится на 4.

Очевидно, что произведение данных чисел не будет оканчиваться ни 0, ни 5, следовательно, произведение не будет делиться на 5.

В произведении множитель 36 делится на 9, следовательно, и произведение делится на 9.

В произведении множитель 36 делится на 18, следовательно, и произведение делится на 18.

- б) $37 \cdot 121 \cdot 19$

Решение:

В данном произведении множители 37 и 19 являются простыми числами, а множитель 121 является квадратом

простого числа 11, следовательно, произведение не будет делиться ни на 4, ни на 56, ни на 9, ни на 18.

Задача 4. Выписать все числа, заключенные между числами 120 и 150, которые делятся на 3, на 4, на 5, на 9.

Решение:

Найдем первое число, заключенное между 120 и 150, которое делится на 3. Этим числом будет 123. Далее, последовательно прибавляя 3, мы выпишем все необходимые числа:

123, 126, 129, 132, 135, 138, 141, 143, 145, 147 — делятся на 3.

Аналогично поступаем при поиске чисел, заключенных между 120 и 150, которые делятся на 4, на 5 и на 9.

124, 128, 132, 136, 140, 144, 148 — делятся на 4.

125, 130, 135, 140, 145 — делятся на 5.

126, 135, 144 — делятся на 9.

Задача 5. Составить из цифр 1, 5, 6, 9 три четырехзначных числа, которые делятся:

а) на 2; б) на 5; в) на 3.

Решение:

а) Так как среди перечисленных цифр только 6 — четная цифра, то при составлении четырехзначных чисел мы должны поставить ее на последнюю позицию, а цифры 1, 5, 9 будем менять местами. Например: 1596, 9516, 1956 — делятся на 2.

б) Аналогично будем составлять четырехзначные числа, которые делятся на 5. Только в этом случае на последнюю позицию мы должны поставить цифру 5. Например: 1695, 9615, 6195 — делятся на 5.

в) Сумма цифр 1, 5, 6, 9 делится на 3, следовательно, меняя местами эти цифры, мы составим четырехзначные числа, которые делятся на 3. Например: 1569, 9651, 1659 — делятся на 3.

II. Деление с остатком

При делении целых чисел, если делимое не кратно делителю, получается остаток.

Разделить с остатком целое число a на целое число b — значит найти два таких целых числа c и d , что $a = b \cdot c + d$ и $d < b$, где a — делимое, b — делитель, c — неполное частное, d — остаток.

Чтобы найти делимое при делении с остатком, надо умножить неполное частное на делитель и к полученному произведению прибавить остаток. Например: $28 : 5 = 5$, остаток 3, где 28 — делимое, 5 — делитель, 5 — неполное частное, 3 — остаток, $28 = 5 \cdot 5 + 3$.

Задача 1. Выполнить деление с остатком:

а) $2352 : 25$;

Решение:

Будем выполнять деление столбиком:

$$\begin{array}{r|l} 2352 & 25 \\ - 225 & 94 \\ \hline 102 & \\ - 100 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

2352 — делимое, 25 — делитель, 94 — неполное частное, 2 — остаток.

Проверка: $94 \cdot 25 + 2 = 2352$.

б) $456820 : 333$;

Решение:

Будем выполнять деление столбиком:

$$\begin{array}{r|l} 456820 & 333 \\ - 333 & 1371 \\ \hline 1238 & \\ - 999 & \\ \hline 2392 & \\ - 2331 & \\ \hline 610 & \\ - 333 & \\ \hline 277 & \end{array}$$

456820 — делимое, 333 — делитель, 1371 — неполное частное, 277 — остаток.

Проверка: $333 \cdot 1371 + 277 = 456820$.

Задача 2. Найти делимое, если частное равно 35, остаток равен 27, а делитель равен 43.

Решение:

Для того, чтобы найти делимое, умножим частное на делитель и к полученному произведению прибавим остаток:

$$35 \cdot 43 + 27 = 1532.$$

Ответ: 1532 — искомое делимое.

Задача 3. Найти делитель, если делимое равно 20090, неполное частное равно 200, а остаток равен 90.

Решение:

Воспользуемся формулой $a = b \cdot c + d$, где a — делимое, b — делитель, c — неполное частное, d — остаток.

Чтобы найти делитель, из делимого вычтем остаток, а полученную разность разделим на неполное частное:

$$(20090 - 90) : 200 = 100$$

Ответ: 100 — искомый делитель.

Задача 4. Найти остаток, если делимое равно 1045, делитель равен 14, а неполное частное равно 74.

Решение:

Чтобы найти остаток, умножим делитель на неполное частное и полученное произведение вычтем из делимого:

$$1045 - 14 \cdot 74 = 9$$

Ответ: 9 — искомый остаток.

Задача 5. Найти четырехзначное число, которое делилось бы на 9, а при делении на 5 давало остаток 4.

Решение:

Так как искомое четырехзначное число при делении на 5 дает в остатке 4, следовательно, на последней позиции этого числа должна быть либо цифра 4, либо цифра 9. Так как искомое число должно делиться на 9, следовательно, сумма цифр этого числа делится на 9. Приведем несколько примеров таких чисел: 9999, 5454, 8199, 1854 и т.д.

Задача 6. Найти такое трехзначное число, которое делилось бы на 5 и при делении на 3 давало бы остаток 2.

Решение:

Так как искомое число делится на 5, следовательно, оно должно оканчиваться на 0 или на 5. Также искомое число при делении на 3 дает 2, следовательно, сумма цифр этого числа в сумме с числом 1 должна делиться на 3, т.е. сумма цифр искомого числа может быть равна 2, 5, 8, 11 и т.д. Приведем несколько примеров чисел, удовлетворяющих этим условиям: 110, 410, 710, 305, 335 и т.д.

III. Нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного

При нахождении наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного необходимо уметь раскладывать числа на простые множители. Разложить число на простые множители — значит представить его в виде произведения простых чисел.

Например:

$$28 = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^2 \cdot 7, \text{ или}$$

$$\begin{array}{r|l} 510 & 2 \\ 255 & 3 \\ 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \quad 510 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$$

Задача 1. Найти наибольший общий делитель чисел 105 и 135.

Решение:

Разложим на простые множители 105 и 135:

$$\begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \quad \begin{array}{r|l} 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad 135 = 3^3 \cdot 5$$

Запишем все простые числа, которые являются множителями и первого, и второго чисел, причем каждое из них в той степени, которая является минимальной из двух встречающихся, и найдем их произведение:

$$\text{НОД}(105; 135) = 3 \cdot 5 = 15$$

Наибольший общий делитель чисел 105 и 135 равен 15.

Задача 2. Найти наименьшее общее кратное чисел 154 и 210.

Решение:

Разложим на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 154 & 2 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \quad 154 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \quad \begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Запишем все простые числа, которые являются множителями хотя бы одного из чисел, причем каждое из них в максимальной встречающейся степени.

$$\text{НОК}(210; 154) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 210 \cdot 11 = 2310$$

Наименьшее общее кратное чисел 154 и 210 равно 2310.

Задача 3. Наименьшее общее кратное двух чисел равно 600, их наибольший общий делитель в десять раз меньше. Одно из чисел 120. Определить другое число.

Решение:

Чтобы найти дополнительный множитель для второго числа, разделим наименьшее общее кратное на первое число:

$$600 : 120 = 5$$

5 — дополнительный множитель для второго числа. Далее умножим наибольший общий делитель на найденный дополнительный множитель и получим искомое второе число:

$$60 \cdot 5 = 300$$

300 — искомое число.

Задача 4. Отношение двух чисел равно наибольшему общему делителю чисел 56 и 77, а их сумма равна наименьшему общему кратному чисел 168 и 224. Найти эти числа.

Решение:

Найдем наибольший общий делитель чисел 56 и 77:

$$56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$$

$$77 = 7 \cdot 11$$

$$\text{НОД}(56; 77) = 7$$

Найдем наименьшее общее кратное чисел 168 и 224:

$$168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$224 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$$

$$\text{НОК}(168; 224) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 = 672$$

Про искомые числа мы выяснили, что их отношение равно 7, т.е. одно больше другого в семь раз, и что их сумма равна 672.

Меньшее число будет составлять восьмую часть суммы этих чисел. Найдем меньшее число:

$$672 : 8 = 84$$

84 — меньшее их искомым чисел.

Другое число в семь раз больше, следовательно:

$$84 \cdot 7 = 588 \text{ — другое число.}$$

Ответ: 84 и 588 — искомые числа.

Задача 5. Отношение двух чисел равно наибольшему делителю чисел 154 и 14, а их разность равна 260. Найти эти числа.

Решение:

Найдем наибольший общий делитель чисел 154 и 14:

$$154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$$

$$14 = 2 \cdot 7$$

$$\text{НОД}(154; 14) = 14$$

Отношение искомых чисел равно 14, следовательно, одно число больше другого в четырнадцать раз. Меньшее число будет составлять тринадцатую часть от разности искомых чисел. Найдем меньшее число:

$$260 : 13 = 20$$

20 — меньшее число.

Другое число на 260 больше, следовательно:

$$20 + 260 = 280 \text{ — другое число.}$$

Ответ: 20 и 280 — искомые числа.

IV. Приведение обыкновенных дробей к наименьшему общему знаменателю

Наименьший общий знаменатель — это наименьшее общее кратное чисел, которые являются знаменателями данных дробей.

Задача 1. Привести к наименьшему знаменателю следующие дроби:

а) $\frac{5}{18}$ и $\frac{23}{24}$

Решение:

Найдем наименьшее общее кратное знаменателей данных дробей:

$$\text{НОК}(18; 24) = 72$$

72 — наименьший общий знаменатель для $\frac{5}{18}$ и $\frac{23}{24}$.

Для каждой из дробей найдем дополнительные множители. Чтобы найти дополнительные множители, необходимо разделить наименьший общий знаменатель на знаменатели данных дробей:

$$72 : 18 = 4 \text{ — дополнительный множитель для дроби } \frac{5}{18};$$

$$72 : 24 = 3 \text{ — дополнительный множитель для дроби } \frac{23}{24}$$

Умножив числитель и знаменатель каждой дроби на ее дополнительный множитель, мы приведем дроби к наименьшему общему знаменателю 72:

$$\frac{5}{18} = \frac{5 \cdot 4}{18 \cdot 4} = \frac{20}{72}$$

$$\frac{23}{24} = \frac{23 \cdot 3}{24 \cdot 3} = \frac{69}{72}$$

$$\text{б) } \frac{31}{60}, \frac{11}{40} \text{ и } \frac{13}{72}$$

Решение:

$$\text{НОК } (60; 40; 72) = 720$$

720 — наименьший общий знаменатель для $\frac{31}{60}$, $\frac{11}{40}$ и $\frac{13}{72}$

$$720 : 60 = 12 \text{ — дополнительный множитель для } \frac{31}{60}$$

$$\frac{31}{60} = \frac{31 \cdot 12}{60 \cdot 12} = \frac{372}{720}$$

$$720 : 40 = 18 \text{ — дополнительный множитель для } \frac{11}{40}$$

$$\frac{11}{40} = \frac{11 \cdot 18}{40 \cdot 18} = \frac{198}{720}$$

$$720 : 72 = 10 \text{ — дополнительный множитель для } \frac{13}{72}$$

$$\frac{13}{72} = \frac{13 \cdot 10}{72 \cdot 10} = \frac{130}{720}$$

V. Сравнение, сложение, вычитание, умножение и деление обыкновенных дробей

Сравнение дробей

Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, числитель которой больше. Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, знаменатель которой меньше. Чтобы сравнить дроби с разными знаменателями,

нужно привести их к общему знаменателю и применить правило сравнения с одинаковыми знаменателями.

Сложение дробей

При сложении дробей с одинаковыми знаменателями складывают числители слагаемых, а знаменатель оставляют тем же, т.е.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

При сложении дробей с разными знаменателями сначала приводят дроби к наименьшему общему знаменателю, а затем складывают как дроби с одинаковыми знаменателями.

Вычитание дробей

При вычитании дробей с одинаковыми знаменателями из числителя уменьшаемого вычитают числитель вычитаемого, а знаменатель оставляют тем же, т.е.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

При вычитании дробей с разными знаменателями сначала приводят дроби к наименьшему общему знаменателю, а затем вычитают как дроби с одинаковыми знаменателями.

Умножение дробей

При умножении обыкновенных дробей получается дробь, числитель которой равен произведению числителей множителей, а знаменатель равен произведению знаменателей множителей, т.е.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Деление дробей

Чтобы разделить одну дробь на другую, необходимо дробь, являющуюся делимым, умножить на дробь, обратную делителю, т.е.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Основное свойство дроби

Величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, т.е.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$$

Задача 1. Сравнить дроби $\frac{23}{36}$ и $\frac{19}{24}$.

Решение:

Приведем дроби к наименьшему общему знаменателю:

$$\text{НОК}(24; 36) = 72$$

3 — дополнительный множитель для дроби $\frac{19}{24}$;

2 — дополнительный множитель для дроби $\frac{23}{36}$;

$$\frac{23}{36} = \frac{23 \cdot 2}{36 \cdot 2} = \frac{46}{72}, \quad \frac{19}{24} = \frac{19 \cdot 3}{24 \cdot 3} = \frac{57}{72}$$

Так как $\frac{46}{72} < \frac{57}{72}$, то $\frac{23}{36} < \frac{19}{24}$.

Ответ: $\frac{23}{36} < \frac{19}{24}$.

Задача 2. Сравнить дроби $\frac{13}{17}$ и $\frac{26}{35}$, уравнивая числители.

Решение:

Найдем наименьшее общее кратное чисел, являющихся числителями данных дробей:

$$\text{НОК}(13; 26) = 26$$

2 — дополнительный множитель для дроби $\frac{13}{17}$;

$$\frac{13}{17} = \frac{13 \cdot 2}{17 \cdot 2} = \frac{26}{34}$$

1 — дополнительный множитель для дроби $\frac{26}{35}$.

Сравним дроби $\frac{26}{34} > \frac{26}{35}$, значит $\frac{13}{17} > \frac{26}{35}$.

Ответ: $\frac{13}{17} > \frac{26}{35}$.

Задача 3. Выполнить сложение:

а) $\frac{5}{12} + \frac{7}{18}$

Решение:

$$\text{НОК}(12; 18) = 36$$

$$\frac{5}{12} + \frac{7}{18} = \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{15}{36} + \frac{14}{36} = \frac{29}{36}$$

Ответ: $\frac{29}{36}$.

б) $\frac{2}{15} + \frac{7}{18} + \frac{4}{21}$

Решение:

$$\text{НОК}(15; 18; 21) = 630$$

$$\frac{2 \cdot 42}{15 \cdot 42} + \frac{7 \cdot 35}{18 \cdot 35} + \frac{4 \cdot 30}{21 \cdot 30} = \frac{84}{630} + \frac{245}{630} + \frac{120}{630} = \frac{449}{630}$$

Ответ: $\frac{449}{630}$.

в) $4\frac{1}{15} + 3\frac{2}{25} + \frac{9}{20}$

Решение:

$$\text{НОК}(15; 25; 20) = 300$$

$$4\frac{1 \cdot 20}{15 \cdot 20} + 3\frac{2 \cdot 12}{25 \cdot 12} + \frac{9 \cdot 15}{20 \cdot 15} = 4\frac{20}{300} + 3\frac{24}{300} + \frac{135}{300} = 7\frac{179}{300}$$

Ответ: $7\frac{179}{300}$.

Задача 4. Выполнить вычитание:

а) $\frac{1}{33} - \frac{1}{55}$

Решение:

Приведем дроби к наименьшему общему знаменателю:

$$\text{НОК}(33; 55) = 165$$

5 — дополнительный множитель для дроби $\frac{1}{33}$;

3 — дополнительный множитель для дроби $\frac{1}{55}$;

$$\frac{1}{33} - \frac{1}{55} = \frac{1 \cdot 5}{33 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 3}{55 \cdot 3} = \frac{5 - 3}{165} = \frac{2}{165}$$

Ответ: $\frac{2}{165}$.

б) $28 - 20 \frac{2}{15}$

Решение:

$$28 - 20 \frac{2}{15} = 27 \frac{15}{15} - 20 \frac{2}{15} = 7 \frac{13}{15}$$

Ответ: $7 \frac{13}{15}$.

Задача 5. Выполнить умножение:

а) $\frac{7}{9} \cdot \frac{2}{21}$

Решение:

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{2}{21} = \frac{7 \cdot 2}{9 \cdot 21} = \frac{1 \cdot 2}{9 \cdot 3} = \frac{2}{27}$$

Ответ: $\frac{2}{27}$.

б) $4 \frac{4}{15} \cdot 1 \frac{3}{4}$

Решение:

$$4 \frac{4}{15} \cdot 1 \frac{3}{4} = \frac{64}{15} \cdot \frac{7}{4} = \frac{64 \cdot 7}{15 \cdot 4} = \frac{16 \cdot 7}{15 \cdot 4} = \frac{112}{15} = 7 \frac{7}{15}$$

Ответ: $7 \frac{7}{15}$.

Задача 6. Выполнить деление:

а) $\frac{5}{6} : \frac{19}{24}$

Решение:

$$\frac{5}{6} : \frac{19}{24} = \frac{5}{6} \cdot \frac{24}{19} = \frac{5 \cdot 24}{6 \cdot 19} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 19} = \frac{20}{19} = 1 \frac{1}{19}$$

Ответ: $1 \frac{1}{19}$

б) $1 : 1 \frac{3}{4}$

Решение:

$$1 : 1 \frac{3}{4} = 1 : \frac{7}{4} = 1 \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$$

Ответ: $\frac{4}{7}$

в) $8 \frac{13}{16} : \frac{47}{64} : 1 \frac{1}{35} : 3 \frac{1}{2}$

Решение:

$$\begin{aligned} 8 \frac{13}{16} : \frac{47}{64} : 1 \frac{1}{35} : 3 \frac{1}{2} &= \frac{141}{16} : \frac{47}{64} : \frac{36}{35} : \frac{7}{2} = \frac{141}{16} \cdot \frac{64}{47} \cdot \frac{35}{36} \cdot \frac{2}{7} = \\ &= \frac{141 \cdot 64 \cdot 35 \cdot 2}{16 \cdot 47 \cdot 36 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 18 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 5}{6} = \frac{2 \cdot 5}{3} = \frac{10}{3} = 3 \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ответ: $3 \frac{1}{3}$

VI. Сложение, вычитание, умножение и деление десятичных дробей

Сложение и вычитание дробей

Десятичные дроби складываются и вычитаются аналогично сложению и вычитанию целых чисел, только необходимо следить, чтобы при записи разряд стоял под разрядом, запятая под запятой.

Умножение дробей

При умножении десятичных дробей их умножают как целые числа, не обращая внимания на запятые, а затем в полученном результате отделяют справа столько десятичных знаков, сколько их содержится в обоих множителях вместе.

Деление на десятичную дробь

Чтобы разделить число на десятичную дробь, надо в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько знаков, сколько их содержится после запятой в делителе, а затем выполнить деление получившихся чисел.

Задача 1. Выполнить сложение:

а) $4,245 + 5,807$

Решение:

$$\begin{array}{r} 4,245 \\ + 5,807 \\ \hline 10,052 \end{array}$$

Ответ: 10,052.

б) $0,0349 + 156,99$

Решение:

$$\begin{array}{r} 0,0349 \\ + 156,9900 \\ \hline 157,0249 \end{array}$$

Ответ: 157,0249.

в) $5,877 + 9,978 + 4,123 + 14,022$

Решение:

Выполним сложение, используя переместительный и сочетательный законы сложения:

$$(5,877 + 4,123) + (9,978 + 14,022) = 10 + 24 = 34$$

Ответ: 34.

Задача 2. Выполнить вычитание:

а) $7,1 - 6,937$

Решение:

$$\begin{array}{r} - 7,100 \\ 6,937 \\ \hline 0,163 \end{array}$$

Ответ: 0,163.

б) $15,29944 - 6,845$

Решение:

$$\begin{array}{r} - 15,29944 \\ 6,845 \\ \hline 8,45444 \end{array}$$

Ответ: 8,45444.

Задача 3. Выполните умножение:

а) $5,872 \cdot 0,45$

Решение:

$$\begin{array}{r} \times 5,872 \\ 0,45 \\ \hline + 29360 \\ 23488 \\ \hline 2,64240 \end{array}$$

Ответ: 2,64240.

б) $45,891 \cdot 121$

Решение:

$$\begin{array}{r} \times 45,891 \\ 121 \\ \hline 45891 \\ + 91782 \\ 45891 \\ \hline 5552,811 \end{array}$$

Ответ: 5552,811.

в) $0,25 \cdot 5,37 \cdot 0,04$

Решение:

Применяя законы умножения, вычисления можно выполнить устно.

$$0,25 \cdot 5,37 \cdot 0,04 = 0,25 \cdot 0,04 \cdot 5,37 = 0,01 \cdot 5,37 = 0,0537.$$

Ответ: 0,0537.

Задача 4. Выполнить деление:

а) $1,5 : 0,03$

Решение:

$$1,5 : 0,03 = 150 : 3 = 50.$$

Ответ: 50.

б) $1,016 : 8$

Решение:

$$\begin{array}{r} 1,016 \overline{) 8} \\ \underline{0} \\ 10 \\ \underline{8} \\ 21 \\ \underline{16} \\ 56 \\ \underline{56} \\ 0 \end{array}$$

Ответ: 0,127.

в) $3 : 625$

Решение:

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 625} \\ \underline{0} \\ 30 \\ \underline{0} \\ 300 \\ \underline{0} \\ 3000 \\ \underline{2500} \\ 5000 \\ \underline{5000} \\ 0 \end{array}$$

Ответ: 0,0048.

г) $5,9827 : 0,2063$

Решение:

$$5,9827 : 0,2063 = 59827 : 2063$$

$$\begin{array}{r|l} 59827 & 2063 \\ - 4126 & 29 \\ \hline 18567 & \\ - 18567 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ответ: 29.

VII. Совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями

Замечание:

1. При выполнении арифметических действий необходимо учитывать порядок работы с ними. Напомним, что сначала необходимо выполнить умножение и деление, а затем сложение и вычитание. Если имеются скобки, то в первую очередь необходимо выполнить действия в них. Если имеются круглые, квадратные и фигурные скобки, то начинают с выполнения действий в круглых скобках, затем переходят к квадратным, далее к фигурным скобкам.
2. При выполнении действий с обыкновенными и десятичными дробями необходимо переходить либо к десятичным дробям, либо к обыкновенным. Переход к обыкновенным дробям возможен всегда. Обыкновенную несократимую дробь можно перевести в конечную десятичную, если знаменатель обыкновенной дроби не содержит других простых множителей, кроме 2 и 5.
3. Дробная черта в числовых выражениях выполняет роль знака деления.

Задача 1. Вычислить:

$$a) \left(2\frac{1}{4} - \frac{5}{6} \right) : \left(3 - \frac{1}{6} \right) + 29,75 : 6,8 - 1,2 : 0,64$$

Решение:

Определим порядок выполнения действий:

$$\left(2\frac{1}{4} - \frac{5}{6}\right) : \left(3 - \frac{1}{6}\right) + 29,75 : 6,8 - 1,2 : 0,64$$

$$1) \quad 2\frac{1}{4} - \frac{5}{6} = 2\frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = 2\frac{3}{12} - \frac{10}{12} = 1\frac{15}{12} - \frac{10}{12} = 1\frac{5}{12}$$

$$2) \quad 3 - \frac{1}{6} = 2\frac{5}{6}$$

$$3) \quad 1\frac{5}{12} : 2\frac{5}{6} = \frac{17}{12} : \frac{17}{6} = \frac{17 \cdot 6}{12 \cdot 17} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$4) \quad 29,75 : 6,8 = 297,5 : 68 = 4,375$$

$$\begin{array}{r} 297,5 \overline{) 68} \\ \underline{272} \\ 255 \\ \underline{204} \\ 510 \\ \underline{476} \\ 340 \\ \underline{340} \\ 0 \end{array}$$

$$5) \quad 1,2 : 0,64 = 120 : 64 = 1,875$$

$$\begin{array}{r} 120 \overline{) 64} \\ \underline{64} \\ 560 \\ \underline{512} \\ 480 \\ \underline{448} \\ 320 \\ \underline{320} \\ 0 \end{array}$$

$$6) \quad \frac{1}{2} + 4,375 = 0,5 + 4,375 = 4,875$$

$$7) \quad 4,875 - 1,875 = 3$$

Ответ: 3.

$$6) \quad 1,58 \cdot 1,65 + \frac{8,92 - 7\frac{7}{25}}{5\frac{1}{2} - 3,9} + \frac{0,21 : \frac{4}{5}}{23,6 - 21,1}$$

Решение:

$$\begin{array}{r}
 1) \quad \times \quad 1,58 \\
 \quad \quad 1,65 \\
 \quad \quad \hline
 \quad \quad 790 \\
 + \quad 948 \\
 \quad \quad 158 \\
 \quad \quad \hline
 \quad \quad 2,6070
 \end{array}$$

$$2) \quad 8,92 - 7\frac{7}{25} = 8,92 - 7,28 = 1,64$$

$$3) \quad 5\frac{1}{2} - 3,9 = 5,5 - 3,9 = 1,6$$

$$4) \quad \frac{1,64}{1,6} = 1,64 : 1,6 = 16,4 : 16 = 1,025$$

$$5) \quad 0,21 : \frac{4}{5} = 0,21 : 0,8 = 2,1 : 8 = 0,2625$$

$$6) \quad 23,6 - 21,1 = 2,5$$

$$7) \quad \frac{0,2625}{2,5} = 0,2625 : 2,5 = 0,105$$

$$8) \quad 2,607 + 1,025 = 3,632$$

$$9) \quad 3,632 + 0,105 = 3,737$$

Ответ: 3,737.

$$в) \left\{ \left[\left(0,5 : 1\frac{1}{4} + 1\frac{2}{5} : 1\frac{4}{7} - \frac{3}{11} \right) \cdot 3 \right] : \left(1,5 + \frac{1}{4} \right) \right\} \cdot 18\frac{1}{3}$$

Решение:

$$1) \quad 0,5 : 1\frac{1}{4} = \frac{1}{2} : \frac{5}{4} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 5} = \frac{2}{5}$$

$$2) \quad 1\frac{2}{5} : 1\frac{4}{7} = \frac{7}{5} : \frac{11}{7} = \frac{7 \cdot 7}{5 \cdot 11} = \frac{49}{55}$$

$$3) \quad \frac{2}{5} + \frac{49}{55} = \frac{2 \cdot 11}{5 \cdot 11} + \frac{49}{55} = \frac{22 + 49}{55} = \frac{71}{55} = 1\frac{16}{55}$$

$$4) \quad 1\frac{16}{55} - \frac{3}{11} = 1\frac{16}{55} - \frac{3 \cdot 5}{11 \cdot 5} = 1\frac{16}{55} - \frac{15}{55} = 1\frac{1}{55}$$

$$5) \quad 1\frac{1}{55} \cdot 3 = \left(1 + \frac{1}{55} \right) \cdot 3 = 3 + \frac{3}{55} = 3\frac{3}{55}$$

$$6) \quad 1,5 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$$

$$7) \quad 3\frac{3}{55} : 1\frac{3}{4} = \frac{168}{55} : \frac{7}{4} = \frac{168 \cdot 4}{55 \cdot 7} = \frac{24 \cdot 4}{55} = \frac{96}{55} = 1\frac{41}{55}$$

$$8) \quad 1 \frac{41}{55} \cdot 18 \frac{1}{3} = \frac{96}{55} \cdot \frac{55}{3} = \frac{96 \cdot 55}{55 \cdot 3} = \frac{32 \cdot 1}{1 \cdot 1} = 32$$

Ответ: 32.

Задача 2. Вычислите x , если:

$$\frac{\left[\left(4,625 - \frac{13}{18} \cdot \frac{9}{26} \right) : x + (2,5 : 1,25 : 6,75) \right] : 1 \frac{53}{68}}{\left(\frac{1}{2} - 0,375 \right) : 0,125 + \left(\frac{5}{6} - \frac{7}{12} \right) : (0,358 - 1,4796 : 13,7)} = \frac{17}{27}$$

Решение.

Выполним промежуточные действия в левой части равенства:

$$1) \quad \frac{13}{18} \cdot \frac{9}{26} = \frac{13 \cdot 9}{18 \cdot 26} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$2) \quad 4,625 - 0,25 = 4,375$$

$$3) \quad 2,5 : 1,25 = 2$$

$$4) \quad 2 : 6,75 = 2 : 6 \frac{3}{4} = 2 : \frac{27}{4} = \frac{2 \cdot 4}{27} = \frac{8}{27}$$

$$5) \quad \frac{1}{2} - 0,375 = 0,5 - 0,375 = 0,125$$

$$6) \quad 0,125 : 0,125 = 1$$

$$7) \quad \frac{5}{6} - \frac{7}{12} = \frac{10}{12} - \frac{7}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$8) \quad 1,4796 : 13,7 = 0,108$$

$$9) \quad 0,358 - 0,108 = 0,25$$

$$10) \quad 0,25 : 0,25 = 1$$

$$11) \quad 1 + 1 = 2$$

Наше равенство принимает следующий вид:

$$\frac{\left[4,375 : x + \frac{8}{27} \right] : 1 \frac{53}{68}}{2} = \frac{17}{27}$$

Обе части равенства умножаем на 2 и получаем:

$$\left(4,375 : x + \frac{8}{27} \right) : 1 \frac{53}{68} = \frac{34}{27}$$

Обе части равенства умножаем на $1 \frac{53}{68}$ и получаем:

$$4,375 : x + \frac{8}{27} = \frac{34}{27} \cdot 1 \frac{53}{68}$$

Выполним умножение в правой части равенства, получая:

$$4,375 : x + \frac{8}{27} = \frac{121}{54}$$

Далее из обеих частей равенства вычитаем $\frac{8}{27}$. Равенство принимает вид:

$$4,375 : x = \frac{121}{54} - \frac{8}{27} \text{ или } 4,375 : x = \frac{35}{18}$$

Чтобы найти неизвестный делитель, нужно делимое разделить на частное:

$$x = 4,375 : \frac{35}{18}$$

$$x = 4 \frac{3}{8} : \frac{35}{18}$$

$$x = \frac{18}{8} = 2,25$$

Ответ: $x = 2,25$.

Задача 3. Найти число, 3,6% которого составляют

$$\frac{3 + 4,2 : 0,1}{\left(1 : 0,3 - 2 \frac{1}{3}\right) \cdot 0,3125}$$

Решение:

Найдем значение дробного выражения

$$\frac{3 + 4,2 : 0,1}{\left(1 : 0,3 - 2 \frac{1}{3}\right) \cdot 0,3125} = \frac{3 + 42}{\left(3 \frac{1}{3} - 2 \frac{1}{3}\right) \cdot 0,3125} = \frac{45}{0,3125} = 144$$

Выразим проценты десятичной дробью (см. *Проценты*):
 $3,6\% = 0,036$

Разделив 144 на полученную дробь, мы найдем неизвестное число:

$$144 : 0,036 = 144000 : 36 = 4000$$

Ответ: 4000 — искомое число.

VIII. Сравнение, сложение, вычитание, умножение, деление положительных и отрицательных чисел

Сравнение чисел

Любое положительное число больше любого отрицательного числа. Из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше.

Сложение чисел

При сложении двух чисел с разными знаками сначала определяют знак суммы. Он будет совпадать со знаком слагаемого, модуль которого больше. Затем находят разность модулей.

Сумма двух или нескольких отрицательных чисел — число отрицательное, а модуль суммы равен сумме модулей.

Вычитание чисел

Чтобы из одного числа вычесть другое, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Умножение чисел

При умножении чисел с разными знаками знак произведения определяют по отрицательным множителям. Произведение четного числа отрицательных множителей есть число положительное. Произведение нечетного числа отрицательных множителей есть число отрицательное.

Деление чисел

При делении чисел $a : b$ имеем:

1. если $a > 0$, $b < 0$, то $a : b < 0$;
2. если $a < 0$, $b > 0$, то $a : b < 0$;
3. если $a < 0$, $b < 0$, то $a : b > 0$;

Задача 1. Сравнить числа:

а) $-0,345$ и $0,345$; б) $-1,257$ и $-1,26$

Решение:

Пользуясь правилами сравнения чисел, получаем:

а) $-0,345 < 0,345$;

б) $-1,257 > -1,26$

Задача 2. Расположите в порядке возрастания числа $-4,23$; $5,6$; 0 ; $-2,5$; $0,678$.

Решение:

Пользуясь правилами сравнения чисел, расположим их в порядке возрастания: $-4,32$; $-2,5$; 0 ; $0,678$; $5,6$.

Задача 3. Сравните значения выражений: $3\frac{8}{11} + \left(-5\frac{4}{9}\right)$

и $1\frac{2}{9} + \frac{10}{11}$.

Решение:

Найдем значения каждого выражения:

$$3\frac{8}{11} + \left(-5\frac{4}{9}\right) = 3\frac{72}{99} + \left(-5\frac{44}{99}\right) = -\left(5\frac{44}{99} - 3\frac{72}{99}\right) =$$

$$= -\left(4\frac{143}{99} - 3\frac{72}{99}\right) = -1\frac{71}{99}$$

$$1\frac{2}{9} + \frac{10}{11} = 1\frac{22}{99} + \frac{90}{99} = 1\frac{112}{99} = 2\frac{13}{99}$$

Сравним их значения

$$-1\frac{71}{99} < 2\frac{13}{99}$$

Можно сравнить значения выражений и не выполняя вычислений. Очевидно, что значение первого выражения — число отрицательное, а значение второго выражения — число положительное.

Задача 4. Вычислите:

а) $14,3 + (-17,4) + 5,24 + (-0,123) + 1,07$

Решение:

Удобно отдельно сложить положительные и отрицательные числа, а затем найти сумму полученных результатов.

$$(14,3 + 5,24 + 1,07) + (-17,4 + (-0,123)) = 20,61 + \\ + (-17,523) = 3,087$$

Ответ: 3,087.

б) $2,4 - 56,35$

Решение:

Заменим вычитание сложением и по правилу сложения чисел с разными знаками найдем значение данного выражения:

$$2,4 + (-56,35) = -53,95$$

Ответ: $-53,95$.

в) $0,72 - 0,37 - (-5,45) + 8,7 - 2,23$

Решение:

$$0,72 + (-0,37) + 5,45 + 8,7 + (-2,23) = (0,72 + 5,45 + 8,7) + \\ + (-0,37 + (-2,23)) = 14,87 + (-2,6) = 12,27$$

Ответ: 12,27.

г) $(-3,34) \cdot 4,71$

Решение:

Произведение будет иметь знак минус. Найдем произведение модулей этих чисел:

$$\begin{array}{r} \times 3,34 \\ 4,71 \\ \hline 334 \\ + 2338 \\ \hline 1336 \\ 15,7314 \end{array}$$

Ответ: $-15,7314$

д) $\left(-1\frac{4}{7}\right) : \left(-\frac{3}{14}\right)$

Решение:

Частное будет числом положительным. Найдем частное модулей этих чисел:

$$1\frac{4}{7} : \frac{3}{14} = \frac{11}{7} \cdot \frac{14}{3} = \frac{11 \cdot 14}{7 \cdot 3} = \frac{11 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}$$

Ответ: $7\frac{1}{3}$.

$$e) \frac{\left(6,25 - \frac{5}{8}\right) : \frac{5}{8}}{(0,85 - 3) \cdot \frac{3}{5}} + \frac{\left(203 + 7\frac{3}{5}\right) : 12}{(-4,2 + 6) \cdot 10\frac{3}{4}}$$

Решение:

$$1) \quad 6,25 - \frac{5}{8} = 6\frac{1}{4} - \frac{5}{8} = 6\frac{2}{8} - \frac{5}{8} = 5\frac{10}{8} - \frac{5}{8} = 5\frac{5}{8}$$

$$2) \quad 5\frac{5}{8} : \frac{5}{8} = \frac{45}{8} \cdot \frac{8}{5} = 9$$

$$3) \quad 0,85 - 3 = -2,15$$

$$4) \quad -2,15 \cdot \frac{3}{5} = -(2,15 \cdot 3 : 5) = -1,29$$

$$5) \quad 9 : (-1,29) = -\frac{9 \cdot 100}{129} = -\frac{3 \cdot 100}{43} = -\frac{300}{43} = -6\frac{42}{43}$$

$$6) \quad 203 + 7\frac{3}{5} = 210\frac{3}{5}$$

$$7) \quad 210\frac{3}{5} : 12 = \frac{1053 \cdot 1}{5 \cdot 12} = \frac{351}{5 \cdot 4} = \frac{351}{20}$$

$$8) \quad -4,2 + 6 = 1,8$$

$$9) \quad 1,8 \cdot 10\frac{3}{4} = 1\frac{8}{10} \cdot 10\frac{3}{4} = 1\frac{4}{5} \cdot 10\frac{3}{4} = \frac{9}{5} \cdot \frac{43}{4} = \frac{387}{20}$$

$$10) \quad \frac{351}{20} : \frac{387}{20} = \frac{351 \cdot 20}{20 \cdot 387} = \frac{39}{43}$$

$$11) \quad -6\frac{42}{43} + \frac{39}{43} = -6\frac{3}{43}$$

Ответ: $-6\frac{3}{43}$

IX. Проценты

Процент числа — сотая часть этого числа, т.е. $1\% = 0,01$.

Нахождение процентов данного числа

Чтобы найти какой-либо процент от данного числа, необходимо это число разделить на 100. Этим мы найдем, сколько приходится на 1%. А затем надо умножить получившееся частное на количество процентов. Или выразить проценты десятичной дробью и умножить данное число на эту дробь.

Задача 1. Найти:

а) 33% от 95.

Решение:

Выразим 33 процента десятичной дробью:

$$33\% = 0,33$$

Умножим число 95 на 0,33:

$$95 \cdot 0,33 = 31,35$$

Ответ: 31,35 — 33% от 95.

б) $2\frac{1}{4}\%$ от 12 л.

Решение:

$$2\frac{1}{4}\% = 2,25\% = 0,0225$$

$$12 \cdot 0,0225 = 0,27$$

Ответ: 0,27 л — $2\frac{1}{4}\%$ от 12 л.

в) 120% от 55 км.

Решение:

$$120\% = 1,2$$

$$55 \cdot 1,2 = 66$$

Ответ: 66 км — 120% от 55 км.

Задача 2. Фасоль содержит 23% белка, 55% крахмала и 1,8% жиров. Сколько килограммов белка, крахмала и жиров содержится в 15 килограммах фасоли?

Решение:

$$23\% = 0,23; 55\% = 0,55; 1,8\% = 0,018$$

- 1) $15 \cdot 0,23 = 3,45$ (кг) белка содержится в 15 кг фасоли.
- 2) $15 \cdot 0,55 = 8,25$ (кг) крахмала содержится в 15 кг фасоли.
- 3) $15 \cdot 0,018 = 0,27$ (кг) жиров содержится в 15 кг фасоли.

Ответ: 3,45 кг белка; 8,25 кг крахмала; 0,27 кг жиров содержится в 15 кг фасоли.

Задача 3. На заочных курсах иностранного языка занимаются 4800 учащихся. Английский язык изучают 40% всех учащихся, немецкий язык — 25%, французский — 13%, а остальные — испанский. Сколько учащихся изучают испанский язык?

Решение:

- 1) $100\% - (40\% + 25\% + 13\%) = 22\%$ учащихся изучают испанский язык
 $22\% = 0,22$

- 2) $4800 \cdot 0,22 = 1056$ (уч.) изучают испанский язык

Ответ: 1056 учащихся.

Нахождение числа по его процентам

Чтобы найти все число по заданной величине его процентов, необходимо эту величину разделить на количество процентов. Этим мы найдем, сколько приходится на 1%. А затем надо умножить получившееся частное на 100. Или выразим десятичной дробью и разделим данное число на полученную дробь.

Задача 1. Найти число, если:

- а) 15% его равны 24.

Решение:

$$24 : 15 \cdot 100 = 160$$

160 — искомое число.

б) 750% его равны 450.

Решение:

$$750\% = 7,5$$

$$450 : 7,5 = 60$$

60 — искомое число.

Задача 2. Школьная команда набрала в шахматном турнире 40 очков, что составило 80% сыгранных партий. Сколько партий сыграли на турнире шахматисты школы?

Решение:

$$80\% = 0,8$$

$$40 : 0,8 = 50 \text{ (партий)}$$

Ответ: 50 партий сыграли на турнире шахматисты школы.

Более сложные задачи на проценты

Задача 1. На сколько процентов увеличится площадь прямоугольника со сторонами 9 см и 7 см, если каждую сторону увеличить на 10%?

Решение:

Так как каждую сторону увеличили на 10%, то новая длина равна 110% старой длины. Получаем:

$$9 \cdot 1,1 = 9,9 \text{ (см)} \text{ — стала равна длина одной стороны;}$$

$$7 \cdot 1,1 = 7,7 \text{ (см)} \text{ — стала равна длина другой стороны.}$$

Найдем площадь прямоугольника с увеличенными сторонами:

$$9,9 \cdot 7,7 = 76,23 \text{ (см}^2\text{)}$$

Найдем площадь прямоугольника до увеличения сторон:

$$9 \cdot 7 = 63 \text{ (см}^2\text{)}$$

Найдем, на сколько квадратных сантиметров увеличилась площадь:

$$76,23 - 63 = 13,23 \text{ (см}^2\text{)}$$

Найдем, на сколько процентов увеличилась площадь:

$$13,23 : 63 \cdot 100\% = 21\%$$

Ответ: на 21%.

Задача 2. В школе 700 учащихся. Среди них 357 мальчиков. Сколько процентов учащихся этой школы составляют девочки?

Решение:

- 1) $700 - 357 = 343$ (дев.) учатся в этой школе
- 2) $700 : 100 = 7$ (уч.) — 1%
- 3) $343 : 7 = 49\%$ учащихся школы составляют девочки

Ответ: 49%.

Задача 3. В июне цена 1 л молока повысилась на 20%, в июле цена повысилась еще на 30%, а в августе цена повысилась еще на 50%. На сколько процентов повысилась цена 1 л молока за лето?

Решение:

Пусть в мае цена 1 л молока была равна k рублей.

1. Найдем цену 1 л молока в июне.

Так как $20\% = 0,2$, то цена на молоко в июне повысилась на $0,2k$ рублей и стала равна:

$$k + 0,2k = 1,2k \text{ (руб.)}$$

2. Найдем цену 1 л молока в июле.

Так как $30\% = 0,3$, то цена на молоко в июле повысилась на $1,2k \cdot 0,3$ рублей и стала равна:

$$1,2k + 1,2k \cdot 0,3 = 1,56k \text{ (руб.)}$$

3. Найдем цену 1 л молока в августе.

Так как $50\% = 0,5$, то цена на молоко в августе повысилась на $1,56k \cdot 0,5$ рублей и стала равна:

$$1,56k + 1,56k \cdot 0,5 = 2,34k \text{ (руб.)}$$

4. Найдем, на сколько рублей повысилась цена 1 л молока за лето:

$$2,34k - k = 1,34k \text{ (руб.)}$$

Так как k рублей соответствует 100%, $1,34k$ рублей соответствует 134%. Цена 1 л молока повысилась за лето на 134%.

Задача 4. Банк выплачивает своим вкладчикам по вкладам 120% годовых. Пенсионер положил в этот банк 850 тысяч рублей. Через восемь месяцев ему потребовались деньги, и он решил снять свой вклад. Какую сумму ему выдали в банке?

Решение:

Если за год пенсионер имел бы 120%, то за один месяц — 10%.

Выразим проценты десятичной дробью:

$$10\% = 0,1$$

Найдем доход за один месяц в рублях:

$$850000 \cdot 0,1 = 85000 \text{ (руб.)}$$

Найдем доход за восемь месяцев:

$$85000 \cdot 8 = 680000 \text{ (руб.)}$$

Пенсионеру выдали в банке вложенные им 850000 рублей и 680000 рублей дохода. Всего он получил:

$$850000 + 680000 = 1530000 \text{ (руб.)}$$

Ответ: 1530000 рублей выдали пенсионеру в банке.

Задача 5. Молоко дает 25% сливок, сливки дают 20% масла. Сколько масла получается из 240 кг молока?

Решение:

Выразим проценты дробями:

$$25\% = 0,25 = \frac{1}{4}; \quad 20\% = 0,2$$

Найдем, сколько сливок получается из 240 кг молока:

$$240 \cdot \frac{1}{4} = 60 \text{ (кг) сливок}$$

Найдем, сколько масла получается из 60 кг сливок или 240 кг молока:

$$60 \cdot 0,2 = 12 \text{ (кг) масла}$$

Ответ: Из 240 кг молока получается 12 кг масла.

Х. Пропорции, основное свойство пропорции. Масштаб. Прямо пропорциональные и обратно пропорциональные величины

Пропорцией называется равенство двух отношений.

Основное свойство пропорции: произведение средних членов равно произведению крайних членов.

Отношение прямо пропорциональных величин — число постоянное.

Произведение обратно пропорциональных величин — число постоянное.

Задача 1. Найти неизвестный член пропорции:

$$\frac{1}{8} : \frac{1}{3} = \frac{3}{7} : x$$

Решение:

Для нахождения неизвестного члена пропорции воспользуемся основным свойством пропорции:

$$\frac{1}{8} \cdot x = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7}; \quad \frac{1}{8} x = \frac{1}{7}; \quad x = \frac{8}{7}$$

$$\text{Проверка: } \frac{1}{8} : \frac{1}{3} = \frac{3}{7} : \frac{8}{7}; \quad \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \text{ — верное равенство}$$

Ответ: $\frac{8}{7}$ или $1 \frac{1}{7}$.

Задача 2. Найти x , если $\frac{5}{6} = \frac{10}{2x-3}$

Решение:

Воспользуемся основным свойством пропорции:

$$5 \cdot (2x - 3) = 10 \cdot 6$$

$$2x - 3 = \frac{60}{5}$$

$$2x = 12 + 3$$

$$x = 7,5$$

$$\text{Проверка: } \frac{10}{2 \cdot 7,5 - 3} = \frac{10}{15 - 3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Ответ: 7,5.

Задача 3. Составить пропорцию чисел: 18; 27; 9; 6.

Решение:

Из этих чисел можно составить четыре пропорции:

$$\frac{18}{27} = \frac{6}{9}, \quad \frac{27}{18} = \frac{9}{6}, \quad \frac{18}{6} = \frac{27}{9}, \quad \frac{6}{18} = \frac{9}{27}$$

Задача 4. Заменить отношение дробных чисел отношением целых чисел: $7\frac{1}{2} : 5,1$.

Решение:

Заменим $7\frac{1}{2}$ в данном отношении десятичной дробью и получим отношение:

$$7,5 : 5,1$$

Величина отношения не изменяется, если оба члена его умножить или разделить на одно и то же число. Это свойство называется главным свойством отношения.

Умножим каждый член нашего отношения на 10, а затем каждый член отношения разделим на 3.

Получаем:

$$7,5 : 5,1 = 75 : 51 = 25 : 17$$

Ответ: $7\frac{1}{2} : 5,1 = 25 : 17$.

Задача 5. Два маляра покрасили 19 квадратных метров стен за некоторое время. Сколько потребуется рабочих, чтобы покрасить 133 квадратных метра за то же время?

Решение:

Пусть необходимо пригласить x рабочих. Составим пропорцию:

$$\frac{19}{2} = \frac{133}{x}; \quad 19x = 133 \cdot 2; \quad x = \frac{133 \cdot 2}{19} = 14$$

14 рабочих необходимо пригласить, чтобы покрасить 133 м^2 стен за то же время.

Ответ: 14 рабочих.

Задача 6. Расстояние на карте между поселками 6,4 см. Масштаб карты 1 : 50000. Сколько времени потребуется пешеходу, чтобы попасть из одного поселка в другой, если он будет двигаться со скоростью 5 км в час?

Решение:

Обозначим расстояние между поселками как x см. Составим пропорцию:

$$1 : 50000 = 6,4 : x$$

$$x = 6,4 \cdot 50000$$

$$x = 320000$$

$$320000 \text{ см.} = 3,2 \text{ км} — \text{расстояние между поселками}$$

$$3,2 : 5 = 0,64 \text{ (ч)} \text{ потребуется пешеходу}$$

Ответ: 0,64 ч.

Задача 7. Расстояние от Москвы до Нижнего Новгорода 440 км. Каким должен быть масштаб карты, чтобы это расстояние на ней имело длину 8,8 см?

Решение:

Выразим расстояние между Москвой и Нижним Новгородом в сантиметрах:

$$440 \text{ км} = 44000000 \text{ см}$$

Составим пропорцию:

$$1 : x = 8,8 : 44000000, \text{ где}$$

x — расстояние, соответствующее 1 см на карте

$$x = 44000000 : 8,8$$

$$x = 5000000$$

Ответ: 1 : 5000000 — масштаб карты.

Задача 8. Мясо теряет при варке 35% своего веса. Сколько потребуется хозяйке сырого мяса, чтобы получить 780 г вареного?

Решение:

Задачи на проценты можно решать с помощью пропорций.

Пусть потребуется x г сырого мяса.

Запишем условие:

x г — 100%

780 г — 65%

Составим пропорцию:

$$x : 780 = 100 : 65$$

$$x = \frac{780 \cdot 100}{65}$$

$$x = 1200$$

1200 г сырого мяса потребуется хозяйке, чтобы получить 780 г вареного мяса.

Ответ: 1200 г.

Задача 9. В 2 л раствора содержится 10 г питьевой соды. Сколько соды содержится в 7 л раствора такой же концентрации?

Решение:

Если имеется раствор определенной концентрации, то количество раствора и количество питьевой соды — величины прямо пропорциональные.

Из соответствующих значений прямо пропорциональных величин можно составить пропорцию:

$$\frac{2}{7} = \frac{10}{x}, \text{ где}$$

x — количество питьевой соды в 7 л раствора.

Найдем неизвестный член пропорции, используя основное свойство пропорций:

$$2x = 10 \cdot 7$$

$$x = \frac{10 \cdot 7}{2} = 35$$

В 7 л раствора содержится 35 г питьевой соды.

Ответ: 35 г соли.

Задача 10. Для кругосветного путешествия был заготовлен запас продовольствия на 96 дней для 45 членов экипажа. В плавание отправилось всего 30 человек. На сколько дней хватит этого запаса продовольствия?

Решение:

Так как мы имеем определенный запас продовольствия, то чем меньше экипаж, тем на большее количество дней хватит продовольствия. Количество дней и количество членов экипажа — величины обратно пропорциональные. Произведение обратно пропорциональных величин является числом постоянным. Исходя из этого, составим равенство:

$$96 \cdot 45 = 30 \cdot x, \text{ где}$$

x — количество дней, на которое хватит запаса продовольствия

$$x = \frac{96 \cdot 45}{30}$$

$$x = 144$$

Запаса продовольствия хватит на 144 дня.

Ответ: 144 дня.

XI. Среднее арифметическое

Среднее арифметическое нескольких чисел — число, которое получается при делении суммы этих чисел на число слагаемых.

Задача 1. Найти среднее арифметическое чисел:

а) 40, 60, 95

Решение:

Найдем сумму этих чисел:

$$40 + 60 + 95 = 195$$

Разделим получившуюся сумму на число слагаемых:

$$195 : 3 = 65$$

Ответ: 65 — среднее арифметическое чисел 40, 60, 95.

б) 15,8; 19,2; 47,4; 1,24

Решение:

Найдем сумму этих чисел:

$$15,8 + 19,2 + 47,4 + 1,24 = 83,64$$

Разделим получившуюся сумму на число слагаемых:

$$83,64 : 4 = 20,91$$

Ответ: 20,91 — среднее арифметическое чисел 15,8; 19,2; 47,4; 1,24.

Задача 2. Среднее арифметическое двух чисел 75,7. Одно из этих чисел 94,2. Найти другое число.

Решение:

Сумма двух чисел равна их удвоенному среднему арифметическому. Найдём сумму этих чисел:

$$75,2 \cdot 2 = 151,4$$

Так как одно из чисел равно 94,2, то другое будет равно:

$$151,4 - 94,2 = 57,2$$

Ответ: 57,2 — искомое число.

Задача 3. Температура больного утром была равна $36,6^\circ$; днем — $37,5^\circ$, а вечером поднялась до $39,6^\circ$. Найти среднюю температуру тела больного за день.

Решение:

$$(36,6^\circ + 37,5^\circ + 39,6^\circ) : 3 = 37,9^\circ$$

Ответ: $37,9^\circ$ — средняя температура тела больного за день.

Задача 4. За первый час автомобиль проехал 80,5 км, во второй — 78,9 км, а в третий — 85,1 км. Найти среднюю скорость автомобиля.

Решение:

$$(80,5 + 78,9 + 85,1) : 3 = 81,5 \text{ (км)}$$

Ответ: 81,5 км/ч — средняя скорость автомобиля.

Задача 5. С первого поля площадью 5 гектаров собрали 124 центнера ржи, со второго поля площадью 3 гектара собрали 71 центнер ржи, а с третьего поля площадью 7 гек-

таров собрали 154 центнера ржи. Найти среднюю урожайность ржи.

Решение:

Найдем площадь трех полей:

$$5 + 3 + 7 = 15 \text{ (га)}$$

Найдем, сколько центнеров ржи собрали с трех полей:

$$124 + 71 + 154 = 349 \text{ (ц)}$$

Вычислим среднюю урожайность ржи на этих полях:

$$349 : 15 = 23 \frac{4}{15} \text{ (ц)}$$

Ответ: $23 \frac{4}{15}$ ц ржи с одного гектара убрали в среднем на этих полях.

XII. Текстовые задачи

Текстовые задачи довольно трудно подразделять на арифметические и алгебраические, так как задачи, решаемые арифметически, всегда можно решить и алгебраически, т.е. с помощью составления уравнения. Случается так, что задачи из курса алгебры решаются арифметически, по действиям.

Арифметические текстовые задачи можно условно разбить на следующие типы:

- задачи на арифметические действия;
- задачи на движение;
- задачи на части и проценты;
- задачи на составление выражений;
- другие задачи.

Некоторые текстовые задачи были разобраны в разделах «Проценты», «Пропорции», «Среднее арифметическое».

Задачи на арифметические действия

Такие задачи решаются путем последовательного выполнения арифметических действий с целью нахождения неизвестной величины.

Задача 1. В одной коробке $6\frac{7}{15}$ кг конфет. Во второй коробке на $\frac{4}{15}$ кг больше. Сколько килограммов конфет в двух коробках?

Решение:

1 способ.

$$1. \quad 6\frac{7}{15} + \frac{4}{15} = 6\frac{11}{15} \text{ (кг)}$$

конфет было во второй коробке

$$2. \quad 6\frac{7}{15} + 6\frac{11}{15} = 12\frac{18}{15} = 13\frac{3}{15} = 13\frac{1}{5} \text{ (кг)}$$

конфет было в двух коробках

2 способ.

Решим задачу, составив числовое выражение и найдя его значение:

$$\left(6\frac{7}{15} + \frac{4}{15}\right) + 6\frac{7}{15} = 13\frac{1}{5} \text{ (кг)}$$

Ответ: В двух коробках было $13\frac{1}{5}$ кг конфет.

Задача 2. Царь-колокол и Царь-пушка весят вместе 230,4 т. Царь-колокол весит на 153,6 т больше, чем Царь-пушка. Сколько весит Царь-пушка и сколько весит Царь-колокол?

Решение:

1 способ.

$$1) \quad 230,4 - 153,6 = 76,8 \text{ (т)} \text{ — удвоенный вес Царь-пушки}$$

$$2) \quad 76,8 : 2 = 38,4 \text{ (т)} \text{ — весит Царь-пушка}$$

$$3) \quad 38,4 + 153,6 = 192 \text{ (т)} \text{ — весит Царь-колокол.}$$

2 способ.

$$1) \quad 230,4 + 153,6 = 384 \text{ (т)} \text{ — удвоенный вес Царь-колокола}$$

$$2) \quad 384 : 2 = 192 \text{ (т)} \text{ — весит Царь-колокол}$$

$$3) \quad 230,4 - 192 = 38,4 \text{ (т)} \text{ — весит Царь-пушка.}$$

Ответ: 38,4 т весит Царь-пушка, 192 т весит Царь-колокол.

Задача 3. В первый день на склад доставили 345 т груза, во второй день на 19 т меньше, чем в первый, а в третий на 111 т меньше, чем в два первых дня. Сколько тонн грузов доставили на склад за три дня?

Решение:

- 1) $345 - 19 = 326$ (т) грузов доставили на склад во второй день
- 2) $345 + 326 = 671$ (т) грузов доставили на склад за два первых дня
- 3) $671 - 111 = 560$ (т) грузов доставили на склад в третий день
- 4) $671 + 560 = 1231$ (т) грузов доставили на склад за три дня

Ответ: 1231 т грузов.

Задача 4. Двенадцать трехтонных автомашин возили зерно с поля на станцию, делая за один час четыре рейса каждая. Сколько тонн зерна было доставлено на станцию за восьмичасовой рабочий день при полной загрузке каждой автомашины?

Решение:

- 1) $3 \cdot 4 = 12$ (т) зерна перевозит одна автомашина за один час
- 2) $12 \cdot 8 = 96$ (т) зерна перевозит одна автомашина за один восьмичасовой рабочий день
- 3) $96 \cdot 12 = 1152$ (т) зерна перевозят двенадцать трехтонных автомашин за один восьмичасовой рабочий день

Ответ: 1152 т зерна.

Задача 5. В большом англо-русском словаре на 30450, или в 6 раз, слов больше, чем в школьном. Сколько слов в каждом словаре?

Решение:

Такие задачи, как правило, решаются алгебраически, но можно решить ее и арифметически.

Так как разность слов в словарях равна 30450, то, разделив ее на 5, мы узнаем количество слов в школьном англо-русском словаре:

$$30450 : 5 = 6090 \text{ (слов)}$$

Чтобы узнать количество слов в большом англо-русском словаре, нужно к 6090 прибавить 30450, или 6090 умножить на 6:

$$6090 + 30450 = 36540 \text{ или } 6090 \cdot 6 = 36540 \text{ (слов)}$$

Ответ: 36540 слов в большом англо-русском словаре, 6090 слов в школьном англо-русском словаре.

Задача 6. В двух типовых шестнадцатиэтажных домах 192 квартиры. В одном доме два подъезда, а в другом — один подъезд. Сколько квартир в каждом доме?

Решение:

Так как подъездов в одном доме в два раза больше, чем в другом, то и квартир в одном доме в два раза больше, чем в другом. Чтобы найти количество квартир в одно-подъездном доме, нужно 192 разделить на 3:

$$192 : 3 = 64 \text{ (кв.)}$$

Чтобы найти количество квартир во втором доме, можно из 192 вычесть 64, или 64 умножить на 2:

$$192 - 64 = 128 \text{ или } 64 \cdot 2 = 128 \text{ (кв.)}$$

Ответ: 64 квартиры, 128 квартир.

Задачи на движение

При решении задач на движение используется одна из трех формул:

$$S = v \cdot t; v = \frac{S}{t}; t = \frac{S}{v}, \text{ где}$$

S — пройденный путь, v — скорость движения, t — время, затраченное на прохождение данного пути.

Необходимо помнить, что величины должны быть в одной системе единиц. Часто большую помощь при решении задач на движение оказывает рисунок, график или таблица.

Задача 1. Из двух городов, расстояние между которыми 1540 км, вышли одновременно два автомобиля и встретились через 10 часов. Первый автомобиль, проехав за 3 часа 240 км, сделал остановку на один час. Определите скорость второго автомобиля.

Решение:

- 1) $240 : 3 = 80$ (км/ч) — скорость первого автомобиля
- 2) $10 - 1 = 9$ (ч) — был в пути без остановки первый автомобиль
- 3) $80 \cdot 9 = 720$ (км) — проехал до встречи первый автомобиль
- 4) $1540 - 720 = 820$ (км) — проехал до встречи второй автомобиль
- 5) $820 : 10 = 82$ (км/ч) — скорость второго автомобиля

Ответ: 82 км/ч — скорость второго автомобиля.

Задача 2. Расстояние между городами 270 км. Автобус проезжает это расстояние с постоянной скоростью за 4 часа. Скорость легкового автомобиля равна 75 км/ч. Скорость какой машины больше и на сколько?

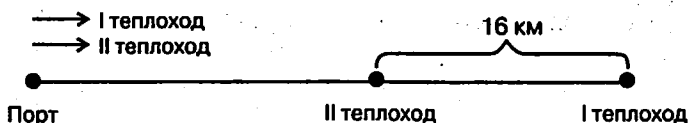
Решение:

- 1) $270 : 4 = 67,5$ (км/ч) — скорость автобуса
- 2) $75 > 67,5$, следовательно, скорость легкового автомобиля больше.
- 3) Найдем, на сколько:
 $75 - 67,5 = 7,5$ (км/ч)

Ответ: скорость легкового автомобиля на 7,5 км/ч больше скорости автобуса.

Задача 3. Два теплохода вышли одновременно из одного порта и идут в одном направлении. Первый в каждые 1,5 часа проходит 25,5 км, а второй — 19,5 км. Через сколько часов первый теплоход обгонит второй на 16 км?

Решение:



1 способ.

- 1) $25,5 : 1,5 = 17$ (км/ч) — скорость первого теплохода
- 2) $19,5 : 1,5 = 13$ (км/ч) — скорость второго теплохода
- 3) $17 - 13 = 4$ (км/ч) — разность скоростей теплоходов
- 4) $16 : 4 = 4$ (ч)

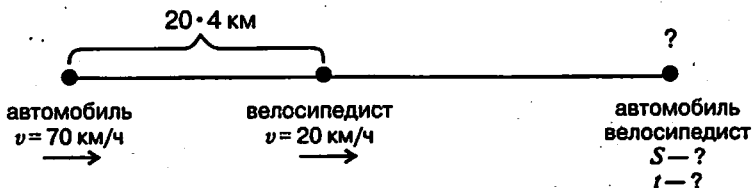
2 способ.

- 1) $25,5 - 19,5 = 6$ (км) — на столько километров увеличивается расстояние между теплоходами через каждые 1,5 часа
- 2) $6 : 1,5 = 4$ (км) — на столько километров увеличивается расстояние между теплоходами через каждый час
- 3) $16 : 4 = 4$ (ч)

Ответ: первый теплоход обгонит второй на 16 км через 4 часа.

Задача 4. Из одного населенного пункта выехал велосипедист со скоростью 20 км/ч. Через 4 часа из того же пункта за ним выехал автомобиль со скоростью 70 км/ч. Через сколько часов и на каком расстоянии от этого населенного пункта автомобиль догонит велосипедиста?

Решение:



- 1) $20 \cdot 4 = 80$ (км) — было между велосипедистом и автомобилем, когда автомобиль тронулся в путь
- 2) $70 - 20 = 50$ (км) — на столько километров сближаются автомобиль и велосипедист каждый час
- 3) $80 : 50 = 1,6$ (ч) — через такое время автомобиль догонит велосипедиста.
- 4) $70 \cdot 1,6 = 112$ (км) — на таком расстоянии от населенного пункта автомобиль догонит велосипедиста

Ответ: 1,6 часа; 112 км.

Задача 5. От двух пристаней, расстояние между которыми равно 360 километров, отправились баржа и теплоход. Собственная скорость баржи составляет 80% собственной скорости теплохода. Скорость теплохода равна 20 км/ч, а скорость течения реки 2 км/ч. Через сколько часов теплоход и баржа встретятся, если они отправились одновременно навстречу друг другу, причем баржа идет вверх по течению?

Решение:

- 1) $20 \cdot 0,8 = 16$ (км/ч) — скорость баржи в стоячей воде
- 2) $20 + 2 = 22$ (км/ч) — скорость теплохода по течению
- 3) $16 - 2 = 14$ (км/ч) — скорость баржи против течения
- 4) $22 + 14 = 36$ (км) — на столько километров сближаются баржа и теплоход за один час
- 5) $360 : 36 = 10$ (ч) — через столько часов встретятся баржа и теплоход

Ответ: через 10 часов.

Задача 6. Поезд в 1 час 20 минут проезжает 80 километров. Сколько километров проедет он в сутки при десяти остановках, каждая по 7,5 минут?

Решение:

$$1 \text{ ч } 20 \text{ мин} = 1 \frac{1}{3} \text{ ч}$$

- 1) $80 : 1 \frac{1}{3} = 60$ (км/ч) — скорость поезда
- 2) $7,5 \cdot 10 = 75$ (мин) $= 1 \frac{1}{4}$ (ч) — потратил поезд на стоянки
- 3) $24 - 1 \frac{1}{4} = 22 \frac{3}{4}$ (ч) — находился поезд в пути за сутки
- 4) $60 \cdot 22 \frac{3}{4} = 1365$ (км) — проедет поезд в сутки

Ответ: 1365 км.

Задача 7. Автомобиль преодолел расстояние между городами за 7 часов, двигаясь с постоянной скоростью. В дороге после трех часов езды он сделал получасовую остановку.

Каково расстояние между городами, если известно, что после остановки автомобиль проехал на 42,5 км больше, чем до остановки?

Решение:

- 1) $7 - 3 - 0,5 = 3,5$ (ч) — был в пути автомобиль после остановки
- 2) $3,5 - 3 = 0,5$ (ч) — на столько часов был больше в пути автомобиль после остановки, чем до нее
- 3) $42,5 : 0,5 = 85$ (км/ч) — скорость автомобиля
- 4) $7 - 0,5 = 6,5$ (ч) — находился в движении автомобиль
- 5) $85 \cdot 6,5 = 552,5$ (км) — расстояние между городами

Ответ: 552,5 км.

Задача 8. Расстояние между пристанями 160 км. Катер проходит это расстояние за 6 часов 40 минут, а против течения за 10 часов. Найти собственную скорость катера и скорость течения реки.

Решение:

- 1) $6 \text{ ч } 40 \text{ мин} = 6 \frac{2}{3} \text{ ч}$
- 2) $160 : 6 \frac{2}{3} = 24$ (км/ч) — скорость катера по течению
- 3) $160 : 10 = 16$ (км/ч) — скорость катера против течения
- 4) $(24 + 16) : 2 = 20$ (км/ч) — скорость катера в стоячей воде
- 5) $24 - 20 = 4$ (км/ч) — скорость течения реки

Ответ: 20 км/ч; 4 км/ч.

Задача 9. Поезд должен был пройти 1350 км за 30 часов. Пройдя 0,4 этого расстояния, он был задержан на 1,8 часа. С какой скоростью поезд должен продолжать путь, чтобы прийти к месту назначения без опоздания?

Решение:

- 1) $1350 : 30 = 45$ (км/ч) — скорость, с какой должен был двигаться поезд

- 2) $1350 \cdot 0,4 = 540$ (км) — прошел поезд до непредвиденной остановки
- 3) $540 : 45 = 12$ (ч) — был в пути поезд до непредвиденной остановки
- 4) $1350 - 540 = 810$ (км) — осталось пройти поезду после остановки
- 5) $12 + 1,8 = 13,8$ (ч) — время, которое затратил поезд на остановку и первую часть пути
- 6) $30 - 13,8 = 16,2$ (ч) — время, которое должен затратить поезд на вторую часть пути, чтобы прийти к месту назначения без опоздания
- 7) $810 : 16,2 = 50$ (км/ч) — скорость, с которой поезд должен продолжить путь, чтобы прийти к месту назначения без опоздания

Ответ: 50 км/ч.

Задача 10. Из двух городов, расстояние между которыми 1200 км, выехали навстречу друг другу одновременно два мотоциклиста. Скорость одного из них была на 10 км/ч больше скорости другого. Через 6 часов между ними было расстояние на 360 км меньше пройденного. Найти скорость каждого мотоциклиста.

Решение:

- 1) $1200 + 360 = 1560$ (км) — удвоенный путь, пройденный двумя мотоциклистами за 6 часов
- 2) $1560 : 2 = 780$ (км) — путь, пройденный двумя мотоциклистами за 6 часов
- 3) $780 : 6 = 130$ (км) — проходят мотоциклисты за один час
- 4) $130 - 10 = 120$ км/ч — удвоенная скорость мотоциклиста, скорость которого меньше
- 5) $120 : 2 = 60$ (км/ч) — скорость одного из мотоциклистов
- 6) $60 + 10 = 70$ (км/ч) — скорость второго мотоциклиста

Ответ: 60 км/ч; 70 км/ч.

Задачи на части и проценты

Несколько задач на проценты были рассмотрены в разделе «Проценты». Подход к решению задач на части и проценты одинаков. Зная, что процентом называется сотая часть, можно свести задачу на проценты к задаче на части. При решении задач на части и проценты необходимо помнить:

- чтобы найти дробь от числа, нужно умножить число на эту дробь;
- чтобы найти число по его дроби, можно разделить на эту дробь число, соответствующее дроби;
- процентом называется одна сотая часть, т.е.

$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Задача 1. В магазин привезли 602 кг бананов. В первый день продали $\frac{3}{14}$ всех бананов, во второй $\frac{5}{11}$ остатка, а в третий — все остальные. Сколько килограммов бананов продали в третий день?

Решение:

- 1) $602 \cdot \frac{3}{14} = 129$ (кг) — бананов продали в первый день
- 2) $602 - 129 = 473$ (кг) — бананов осталось после первого дня торговли
- 3) $473 \cdot \frac{5}{11} = 215$ (кг) — бананов продали во второй день
- 4) $473 - 215 = 258$ (кг) бананов продали в третий день

Ответ: 258 кг бананов

Задача 2. Опытное поле занимает 60 га. Зерном засеяно $\frac{2}{5}$ всей площади, цветами — $\frac{3}{10}$, а остальное горохом. Какую площадь занимает горох?

Решение:

1 способ.

- 1) $60 \cdot \frac{2}{5} = 24$ (га) — засеяно зерном
- 2) $60 \cdot \frac{3}{10} = 18$ (га) — засеяно цветами
- 3) $24 + 18 = 42$ (га) — засеяно зерном и цветами
- 4) $60 - 42 = 18$ (га) — засеяно горохом

2 способ.

- 1) $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ — всего поля засеяно зерном и цветами
- 2) $1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$ — всего поля засеяно горохом
- 3) $60 \cdot \frac{3}{10} = 18$ (га) — засеяно горохом

Ответ: 18 га.

Задача 3. В школе 75 учащихся пятых классов изучают английский язык, $\frac{2}{7}$ всех пятиклассников — немецкий язык. Сколько учащихся школы обучаются в пятых классах?

Решение:

- 1) $1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$ — всех учащихся пятых классов изучают английский язык
- 2) $75 : \frac{5}{7} = 105$ (уч.) — обучаются в пятых классах

Ответ: 105 учащихся.

Задача 4. Шоколадный батончик изготовлен из шоколада, карамели и орехов. Найти вес шоколадного батончика, если шоколадная оболочка весит 5 г, вес карамели составляет $\frac{2}{3}$ веса всего батончика, а вес орехов составляет $\frac{1}{4}$ веса всего батончика.

Решение:

1) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$ веса всего батончика составляет вес карамели и орехов вместе

2) $1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$ веса всего батончика составляет вес шоколадной оболочки

3) $5 : \frac{1}{12} = 60$ (г) — весит шоколадный батончик

Ответ: 60 г.

Задача 5. Велопробег продолжался три дня. В первый день велосипедисты преодолели 36% всего пути, во второй — $\frac{8}{9}$ расстояния, пройденного в первый день, а в третий день велосипедисты прибыли в намеченный пункт. Сколько километров велосипедисты проехали в каждый из дней пробега, если за первый день они проехали на 10 км больше, чем в третий?

Решение:

1) $36\% = 0,36$

2) $0,36 \cdot \frac{8}{9} = 0,32$ всего пути проехали велосипедисты за второй день

3) $0,36 + 0,32 = 0,68$ всего пути проехали велосипедисты за первых два дня пути

4) $1 - 0,68 = 0,32$ всего пути проехали велосипедисты за третий день пути

5) $0,36 - 0,32 = 0,04$ — на такую часть пути велосипедисты проехали больше в первый день, чем в третий

6) $10 : 0,04 = 250$ (км) — проехали велосипедисты за весь пробег

7) $250 \cdot 0,36 = 90$ (км) — проехали велосипедисты в первый день велопробега

8) $250 \cdot 0,32 = 80$ (км) — проехали велосипедисты, столько же они проехали и за третий день

Ответ: 90 км, 80 км, 80 км.

Задача 6. Переводчику необходимо перевести с английского языка на русский детективный роман. В первый день он перевел 0,25 всего романа, во второй день 0,5 оставшейся части, а в третий — остальные 36 страниц. Сколько страниц было в детективном романе?

Решение:

В первый день переводчик перевел 0,25, или $\frac{1}{4}$ всего детективного романа. После этого ему осталось перевести:
 $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ всего детективного романа

Во второй день переводчик перевел 0,5, или $\frac{1}{2}$ оставшейся части, что составляет $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ всего детективного романа. На третий день ему осталось перевести столько же страниц, сколько и во второй день. Нам известно из условия задачи, что в третий день он перевел 36 страниц. Следовательно, мы можем найти количество страниц в детективном романе:

$$36 : \frac{3}{8} = 96 \text{ (стр.)}$$

Ответ: в детективном романе было 96 страниц.

Задача 7. Из 80 учащихся девятых классов на экзамене по математике 10% всех учащихся получили оценку «5», 5% всех учащихся получили оценку «2», оценку «4» получило учащихся в три раза больше, чем оценку «3». Составьте отчетную ведомость экзамена по математике.

Решение:

- 1) $80 \cdot 0,1 = 8$ (уч.) — получили оценку «5»
- 2) $8 : 2 = 4$ (уч.) — получили оценку «2»
- 3) $8 + 4 = 12$ (уч.) — получили оценку «5» и «2»
- 4) $80 - 12 = 68$ (уч.) — получили оценку «3» и «4»
- 5) $68 : 4 = 17$ (уч.) — получили оценку «3»
- 6) $68 - 17 = 51$ (уч.) — получили оценку «4»

Оценка	«5»	«4»	«3»	«2»
Количество учащихся	8	51	17	4

Задача 8. Когда утром из гаража выехала $\frac{1}{3}$ всех машин и еще 4 машины, то в гараже осталось 0,4 всех машин и еще 16 машин. Сколько машин было в гараже?

Решение:

Для того чтобы узнать, какую часть всех машин составляют $16+4=20$ (маш.), необходимо:

$$1 - \left(\frac{1}{3} + 0,4 \right) = 1 - \frac{11}{15} = \frac{4}{15} \text{ всех машин}$$

Зная, что 20 машин составляют $\frac{4}{15}$ всех машин, мы можем узнать, сколько машин было в гараже:

$$20 : \frac{4}{15} = 75 \text{ (маш.)}$$

Ответ: В гараже было 75 машин.

Задача 9. Цех завода должен был изготовить некоторое количество деталей в течение месяца. В первую декаду он выполнил $\frac{2}{5}$ всего заказа, во вторую декаду $\frac{4}{15}$ оставшейся части заказа и еще 26 деталей, а в каждый из оставшихся 8 рабочих дней последней декады он изготовлял по 27 деталей в день. Какое количество деталей должен был изготовить цех для выполнения заказа?

Решение:

Найдем количество деталей, изготовленных за 8 последних рабочих дней месяца:

$$27 \cdot 8 = 216 \text{ (дет.)}$$

К 216 деталям прибавим 26 деталей, изготовленных во второй декаде:

$$216 + 26 = 242 \text{ (дет.)}$$

Зная, что во второй декаде кроме 26 деталей цех изготовил $\frac{4}{15}$ оставшейся части заказа после первой декады, найдем, какую часть всего заказа составляют эти детали:

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} -$$

всех деталей осталось выполнить после первой декады;

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{15} = \frac{12}{75} -$$

всех деталей и еще 26 деталей изготовил цех во второй декаде.

Теперь мы можем найти, какую часть всех деталей составляют 242 детали:

$$1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{12}{75} \right) = \frac{33}{75} \text{ всех деталей}$$

Зная, что 242 детали составляют $\frac{33}{75}$ всех деталей, находим, какое количество деталей должен был изготовить цех для выполнения заказа:

$$242 : \frac{33}{75} = 550 \text{ (дет.)}$$

Ответ: Цех за месяц должен был изготовить 550 деталей.

Задача 10. Три брата получили в наследство от отца 120 овец. Если старший брат отдаст младшему 20% всех своих овец, то у всех трех братьев овец станет поровну. Сколько овец получил каждый брат?

Решение:

Для того чтобы у братьев овец стало поровну, делиться должен старший брат с младшим, следовательно, у среднего брата овец было:

$$120 : 3 = 40 \text{ (овец)}$$

40 овец составляют 80% овец, которые получил в наследство старший брат. Найдем, сколько овец было у старшего брата:

$$80\% = 0,8$$

$$40 : 0,8 = 50 \text{ (овец)}$$

Следовательно, у младшего брата было:

$$120 - (40 + 50) = 30 \text{ (овец)}$$

Ответ: 50 овец получил старший брат, 40 овец получил средний брат и 30 овец получил младший брат.

Задачи с геометрическим содержанием

При решении таких текстовых задач используются геометрические формулы. Например, формулы для нахождения периметров, площадей, объемов фигур.

Задача 1. Длина бассейна, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, 25 м, ширина 10 м и глубина 1,8 м. Сколько времени потребуется, чтобы заполнить бассейн на 1,5 м, если ежеминутно в бассейн поступает $2,5 \text{ м}^3$ воды?

Решение:

- 1) $25 \cdot 10 \cdot 1,5 = 375 \text{ (м}^3\text{)}$ — объем части бассейна, которую нужно заполнить водой
- 2) $375 : 2,5 = 150 \text{ (мин)} = 2,5 \text{ (ч)}$

Ответ: чтобы заполнить бассейн водой на 1,5 м, потребуется 2,5 часа.

Задача 2. На сколько поперечник одного дерева больше другого, если первое дерево имеет в обхвате 176 см, а второе — 132 см, считая $\pi = \frac{22}{7}$?

Решение:

Так как поперечное сечение дерева представляет круг, то поперечник равен диаметру этого круга, а обхват равен длине соответствующей окружности. Используя формулу длины окружности $C = 2\pi R = \pi d$, можно составить следующее выражение для решения данной задачи:

$$176 : \frac{22}{7} - 132 : \frac{22}{7} = (176 - 132) \cdot \frac{22}{7} = \frac{(176 - 132) \cdot 7}{22} = 14 \text{ (см)}$$

Ответ: поперечник первого дерева больше второго на 14 см.

Задача 3. Пришкольный участок имеет форму прямоугольника, периметр которого равен 560 м. Ширина участка составляет $\frac{2}{5}$ длины. Какую площадь занимает школьный участок?

Решение:

Зная, что пришкольный участок имеет форму прямоугольника с периметром 560 м, а периметр прямоугольника равен удвоенной сумме длины и ширины прямоугольника, мы можем найти сумму длины и ширины:

$$560 : 2 = 280 \text{ (м)}$$

Ширина участка составляет $\frac{2}{5}$ длины, следовательно, сумма длины и ширины составляет:

$$1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} \text{ длины участка}$$

Найдем длину пришкольного участка:

$$280 : \frac{7}{5} = 200 \text{ (м)}$$

Следовательно, ширина участка будет равна:

$$280 - 200 = 80 \text{ (м)}$$

Площадь прямоугольника равна произведению длины и ширины. Найдем площадь пришкольного участка:

$$200 \cdot 80 = 16000 \text{ (м}^2\text{)} = 1,6 \text{ (га)}$$

Ответ: 1,6 га — площадь пришкольного участка.

Задача 4. Длина прямоугольного параллелепипеда равна 40 см, ширина равна 20 см, а высота — 10 см. Насколько уменьшится объем прямоугольного параллелепипеда, если его измерения уменьшить в два раза?

Решение:

1 способ.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений. Объем данного прямоугольного параллелепипеда равен:

$$40 \cdot 20 \cdot 10 = 8000 \text{ (см}^3\text{)}$$

Если каждое измерение прямоугольного параллелепипеда уменьшить в два раза, то его объем уменьшится в восемь раз. Найдем объем прямоугольного параллелепипеда, измерения которого в два раза меньше измерений данного прямоугольного параллелепипеда:

$$8000 : 8 = 1000 \text{ (см}^3\text{)}$$

Остается найти разницу найденных объемов:

$$8000 - 1000 = 7000 \text{ (см}^3\text{)}$$

2 способ.

Выведем общую закономерность для решения задач с подобным условием. Пусть объем данного параллелепипеда равен V , тогда объем прямоугольного параллелепипеда, измерения которого в два раза меньше, равен $\frac{V}{8}$. Тогда разность объемов таких прямоугольных параллелепипедов будет равна:

$$V - \frac{V}{8} = \frac{7}{8} V$$

В нашей задаче, найдя объем прямоугольного параллелепипеда, достаточно умножить его на $\frac{7}{8}$, и мы найдем, насколько уменьшится объем данного прямоугольного параллелепипеда, если его измерения уменьшить в два раза, т.е.

$$8000 \cdot \frac{7}{8} = 7000 \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: объем прямоугольного параллелепипеда уменьшится на 7000 см^3 .

Задача 5. Необходимо оклеить обоями комнату, длина которой 6 м, ширина 3,5 м, а высота 2,5 м. В комнате имеется одно окно, размеры которого равны $1,2 \times 1,4$ м, и дверь, размеры которой равны $2 \times 0,8$ м. Сколько потребуется рулонов обоев для оклеивания этой комнаты, если длина рулонов обоев равна 10 м и ширина 0,7 м?

Решение:

Найдем площадь стен комнаты, которые необходимо оклеить обоями:

$$(2,5 \cdot 6 + 3,5 \cdot 2,5) \cdot 2 = 47,5 \text{ (м}^2\text{)}$$

Из этой площади необходимо вычесть площадь окна и площадь двери.

$$1,2 \cdot 1,4 = 1,68 \text{ (м}^2\text{)} \text{ — площадь окна}$$

$$2 \cdot 0,8 = 1,6 \text{ (м}^2\text{)} \text{ — площадь двери}$$

$$47,5 - (1,68 + 1,6) = 44,22 \text{ (м}^2\text{)} \text{ — площадь стен}$$

Найдем, сколько квадратных метров обоев в одном рулоне:

$$10 \cdot 0,7 = 7 \text{ (м}^2\text{)}$$

Для того чтобы узнать, сколько рулонов необходимо для оклеивания комнаты, нужно разделить площадь стен без двери и окна на площадь обоев в одном рулоне:

$$44,22 : 7 = 6,3 \text{ (рулона)}$$

Следовательно, необходимо купить семь таких рулонов обоев.

Ответ: 7 рулонов.

Задача 6. Садовод решил огородить свой садовый участок, имеющий прямоугольную форму, забором из металлической сетки. Для этого он вкопал 46 столбиков через каждые 3 метра. Сколько рулонов сетки садоводу нужно купить в магазине, если в каждом рулоне по 15 м?

Решение:

Так как 46 столбов находятся на расстоянии 3 м друг от друга, можно найти периметр садового участка:

$$3 \cdot 46 = 138 \text{ (м)}$$

Зная, что в каждом рулоне 10 м сетки, мы можем определить, сколько таких рулонов необходимо для забора:

$$138 : 10 = 13,8 \text{ (рул.)}$$

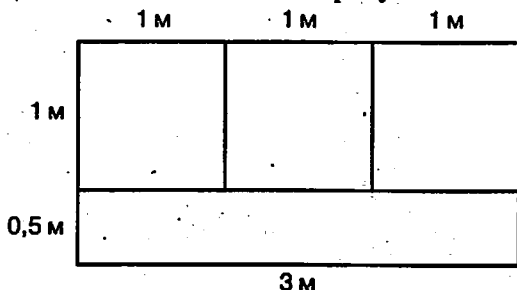
Следовательно, садоводу необходимо приобрести в магазине 14 рулонов сетки.

Ответ: 14 рулонов.

Задача 7. Из листа фанеры, длина которого равна 3 м, а ширина 1,5 м, необходимо вырезать квадраты со стороной 1 м. Сколько таких квадратов получится и сколько процентов составят обрезки?

Решение:

Для наглядности сделаем рисунок.



Очевидно, что из листа фанеры можно вырезать три квадрата со стороной 1 м.

Найдем площадь листа фанеры:

$$3 \cdot 1,5 = 4,5 \text{ (м}^2\text{)}$$

Так как площадь трех квадратов со стороной 1 м равна 3 м^2 , то площадь обрезков будет равна:

$$4,5 - 3 = 1,5 \text{ (м}^2\text{)}$$

Найдем, сколько процентов будут составлять обрезки:

$$4,5 \text{ м}^2 - 100\%$$

$$1,5 \text{ м}^2 - x \%$$

$$x = \frac{1,5 \cdot 100}{4,5} = \frac{100}{3} = 33 \frac{1}{3} \%$$

Ответ: из листа фанеры можно вырезать три квадрата со стороной 1 м; обрезки составляют $33 \frac{1}{3} \%$.

Задача 8. Архитектор проектирует школьное здание. Классная комната по его проекту имеет в длину 8 м, а в ширину 5 м. Какова должна быть высота потолка в классной комнате, если в среднем в каждом классе по 35 учащихся и на одного ученика необходимо $3,6 \text{ м}^3$ воздуха?

Решение:

Во время урока в классной комнате находятся 35 учеников и один учитель. Найдем, сколько кубических метров воздуха необходимо для 36 человек:

$$3,6 \cdot 36 = 129,6 \text{ (м}^3\text{) воздуха}$$

Вычислим площадь пола классной комнаты:

$$8 \cdot 5 = 40 \text{ (м}^2\text{)}$$

Найдем высоту потолка:

$$129,6 : 40 = 3,24 \text{ (м)}$$

Высота должна быть не ниже, чем 3,24 м. Учитывая, что в классе учеников может быть больше 35, высоту классной комнаты делают больше допустимой величины.

Ответ: не ниже 3,24 м.

Задачи на составление буквенного выражения

В таких задачах некоторые данные величины могут быть выражены буквами. Решение задач сводится к составлению буквенного выражения.

Задача 1. Из доски вырезали 5 квадратики со стороной x см и 3 квадратика со стороной y см. Какова площадь доски?

Решение:

x см² — площадь каждого из 5 квадратики

y см² — площадь каждого из 3 квадратики

$5x$ см² — площадь 5 квадратики

$3y$ см² — площадь 3 квадратики

$(5x + 3y)$ см² — площадь всей доски

Ответ: $(5x + 3y)$ см².

Задача 2. Скорость катера в стоячей воде $18\frac{1}{2}$ км/ч, а скорость течения $2\frac{3}{5}$ км/ч. Катер прошел $1\frac{1}{3}$ ч в стоячей воде и еще t ч против течения. Составь выражение для

вычисления всего пути, пройденного катером. Вычисли его значение, если: 1. $t = \frac{1}{2}$ ч; 2. $t = 1\frac{1}{3}$ ч

Решение:

1) $18\frac{1}{2} - 2\frac{3}{5}$ (км/ч) — скорость катера против течения

2) $18\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3}$ (км) — прошел катер в стоячей воде

3) $\left(18\frac{1}{2} - 2\frac{3}{5}\right) \cdot t$ (км) — прошел катер против течения

Следовательно, $18\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} + \left(18\frac{1}{2} - 2\frac{3}{5}\right) \cdot t$ (км) — путь, пройденный катером

Упростим полученное выражение:

$$18\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} + \left(18\frac{1}{2} - 2\frac{3}{5}\right) \cdot t = 24\frac{1}{3} + 15\frac{9}{10} \cdot t$$

$$\text{если } t = \frac{1}{2} \text{ ч, то } S = 24\frac{1}{3} + 15\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2} = 32\frac{17}{60} \text{ (км)}$$

$$\text{если } t = 1\frac{1}{3} \text{ ч, то } S = 24\frac{1}{3} + 15\frac{9}{10} \cdot 1\frac{1}{3} = 45\frac{8}{15} \text{ (км)}$$

Ответ: $S = 24\frac{1}{3} + 15\frac{9}{10} \cdot t$; $S_1 = 32\frac{17}{60}$ км; $S_2 = 45\frac{8}{15}$ км.

Задача 3. Мотоциклист за a часов преодолел 250 км. Сколько километров он преодолеет за b часов, если увеличит скорость на 10 км/ч?

Решение:

Скорость мотоциклиста равна $\frac{250}{a}$ км/ч. Новая скорость мотоциклиста равна $\left(\frac{250}{a} + 10\right)$ км/ч. Следовательно, за b часов он преодолеет $\left(\frac{250}{a} + 10\right) \cdot b$ км.

Ответ: за b часов мотоциклист преодолеет $\left(\frac{250}{a} + 10\right) \cdot b$ километров.

Задача 4. Периметр прямоугольника равен p см. Длина прямоугольника в два раза больше ширины. Найти площадь прямоугольника.

Решение:

Сумма длины и ширины прямоугольника равна полупериметру, т.е. $\frac{p}{2}$ см. Так как длина в два раза больше ширины, то ширина будет равна:

$$\frac{p}{2} : 3 = \frac{p}{6} \text{ (см)}$$

Тогда длина прямоугольника будет равна:

$$\frac{p}{6} \cdot 2 = \frac{p}{3} \text{ (см)}$$

Площадь прямоугольника равна произведению длины и ширины:

$$\frac{p}{6} \cdot \frac{p}{3} = \frac{p^2}{18} \text{ (см}^2\text{)}$$

Ответ: $S = \frac{p^2}{18} \text{ (см}^2\text{)}$.

Задача 5. Сколько дверных звонков должны установить электрики в новом доме, если в этом доме y подъездов, в каждом подъезде x однокомнатных квартир, двухкомнатных квартир в два раза больше, чем однокомнатных, а трехкомнатных квартир на 6 меньше, чем двухкомнатных?

Решение:

Так как в каждом подъезде x однокомнатных квартир, тогда двухкомнатных квартир в каждом подъезде $2x$, а трехкомнатных $(2x - 6)$. Найдем, сколько всего квартир было в каждом подъезде:

$$x + 2x + 2x - 6 = 5x - 6 \text{ (квартир)}$$

Так как в новом доме y подъездов, следовательно, всего в новом доме $y \cdot (5x - 6)$ квартир. Столько же дверных звонков должны установить электрики.

Ответ: $y \cdot (5x - 6)$ дверных звонков должны установить электрики в новом доме.

Задача 6. Картофельное поле имеет прямоугольную форму. Длина поля равна a м, а ширина составляет $\frac{5}{8}$ длины. За неделю студенты собрали картофель с 75% площади поля. Сколько тонн картофеля собрали студенты за неделю, если урожайность картофеля составила 20 т с 1 га?

Решение:

Так как длина поля равна a м, то ширина, составляющая $\frac{5}{8}$ длины, будет равна $\frac{5}{8}a$ м.

Найдем площадь картофельного поля:

$$S = a \cdot \frac{5}{8}a = \frac{5}{8}a^2 \text{ (м}^2\text{)}$$

Студенты собрали картофель с 75%, или с $\frac{3}{4}$ площади поля. Найдем эту площадь:

$$\frac{5}{8}a^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{32}a^2 \text{ (м}^2\text{)}$$

Выразим найденную площадь в гектарах:

$$\frac{15}{32}a^2 \text{ (м}^2\text{)} = \frac{15}{32 \cdot 10000}a^2 \text{ (га)}$$

Так как с каждого гектара собрали 20 т картофеля, следовательно, за неделю студенты собрали:

$$\frac{15}{32 \cdot 10000}a^2 \cdot 20 = \frac{3 \cdot 20 \cdot a^2}{32 \cdot 2000} = \frac{3 \cdot a^2}{32 \cdot 100} = \frac{3}{3200}a^2 \text{ (т)}$$

Ответ: $\frac{3}{3200}a^2$ т картофеля собрали студенты за неделю.

Другие задачи

Некоторые текстовые задачи можно отнести сразу к нескольким типам. В этом разделе мы рассмотрим несколько задач на совместную работу, которые будут более подробно разобраны в алгебраических задачах, и задачи повышенной трудности.

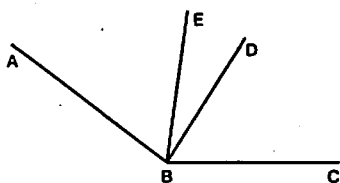
Задача 1. Тупой угол разделили на три части. Один из образовавшихся углов составляет 40% тупого угла, второй составляет 20% первого угла, а третий равен 78° . Вычислите величину тупого угла.

Решение: $\angle ABE$ — 40% от $\angle ABC$; $\angle EBD$ — 20% от $\angle ABE$; $\angle DBC = 78^\circ$ Примем $\angle ABC$ за 100%. $\angle ABE$ составляет 40% от $\angle ABC$. Найдем, сколько процентов будет составлять $\angle EBD$ от $\angle ABC$.Так как $20\% = \frac{1}{5}$, то $40\% \cdot \frac{1}{5} = 8\%$.Следовательно, $\angle EBD$ составляет 8% от $\angle ABC$. Найдем, сколько процентов будет составлять $\angle DBC$ от $\angle ABC$:

$$100\% - (40\% + 8\%) = 52\%$$

 $\angle DBC$ составляет 52% от $\angle ABC$.По условию задачи $\angle DBC = 78^\circ$ Чтобы найти число по его дроби, нужно разделить на эту дробь соответствующее число. Выразим 52% десятичной дробью: $52\% = 0,52$ Найдем величину $\angle ABC$:

$$\angle ABC = 78^\circ : 0,52 = 150^\circ$$

Ответ: $\angle ABC = 150^\circ$.**Задача 2.** Бассейн при одновременном включении 4 кранов заполняется водой за 45 минут. За сколько минут тот же бассейн может заполниться водой при одновременном включении 6 таких кранов?**Решение:****1 способ.**Так как 4 крана заполняют бассейн за 45 минут, следовательно, 1 кран за 45 минут заполняет $\frac{1}{4}$ часть бассейна. Найдем время, необходимое для заполнения бассейна одним краном:

$$45 \cdot 4 = 180 \text{ (мин)}$$

Следовательно, 1 кран за 1 минуту заполняет $\frac{1}{180}$ часть бассейна. Тогда 6 кранов за 1 минуту заполняют:

$$\frac{1}{180} \cdot 6 = \frac{1}{30} \text{ часть бассейна}$$

Очевидно, что для заполнения всего бассейна 6 кранам необходимо 30 минут.

2 способ.

Можно заметить, что количество кранов и количество времени, необходимое для заполнения бассейна водой, — величины обратно пропорциональные. Чем больше кранов, тем меньше времени необходимо. Зная, что произведение обратно пропорциональных величин — число постоянное, мы можем составить равенство:

$$4 \cdot 45 = 6 \cdot x, \text{ где}$$

x — время, необходимое для заполнения бассейна 6 кранами (мин)

Получаем:

$$x = \frac{4 \cdot 45}{6}$$

$$x = 30$$

Ответ: 30 минут необходимо для заполнения бассейна при одновременном включении 6 кранов.

Задача 3. Из двух городов навстречу друг другу отправились два поезда и встретились через 18 часов после своего выхода. Первый поезд прибыл в конечный пункт через 27 часов после встречи. Через сколько часов после встречи прибыл в конечный пункт второй поезд?

Решение:

Так как два поезда вышли одновременно и встретились через 18 часов, следовательно, за один час вместе они проходят $\frac{1}{18}$ всего пути. Первому поезду, чтобы попасть из одного города в другой, необходимо:

$$18 + 27 = 45 \text{ (ч)}$$

Следовательно, за один час он проходит $\frac{1}{45}$ всего пути.

Найдем, какую часть пути проходит второй поезд за один час:

$$\frac{1}{18} - \frac{1}{45} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30} \text{ всего пути}$$

Так как за один час второй поезд проходит $\frac{1}{30}$ всего пути, следовательно, весь путь он проходит за 30 часов.

До встречи второй поезд прошел 18 часов, следовательно, чтобы попасть в конечный пункт, ему надо было пройти еще:

$$30 - 18 = 12 \text{ (ч)}$$

Ответ: через 12 часов после встречи с первым поездом прибыл в конечный пункт второй поезд.

Задача 4. Одному туристу, чтобы попасть из пункта А в пункт В, необходимо 6 часов, а другому 8 часов. Через сколько часов они встретятся, если выйдут одновременно навстречу друг другу?

Решение:

Первый турист проходит весь путь из пункта А в пункт В за 6 часов, следовательно, за один час он проходит $\frac{1}{6}$ всего пути.

Второй турист проходит весь путь из пункта В в пункт А за 8 часов, следовательно, за один час он проходит $\frac{1}{8}$ всего пути.

Найдем, какую часть пути туристы проходят вместе за один час:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24} \text{ всего пути}$$

Чтобы найти, через сколько часов туристы встретятся, нужно весь путь, принятый за 1, разделить на ту часть пути, которую проходят за один час два туриста вместе:

$$1 : \frac{7}{24} = \frac{24}{7} = 3 \frac{3}{7} \text{ (ч)}$$

Ответ: Туристы встретятся через $3 \frac{3}{7}$ часа.

Задача 5. За какое время может пройти пешеход расстояние, выраженное на карте отрезком 7,2 см, если масштаб карты 1:50000, а скорость пешехода равна 6 км/ч?

Решение:

Отрезок, равный 7,2 см, в действительности представляет собой расстояние, равное:

$$7,2 \cdot 50000 = 360000 \text{ (см)} = 3,6 \text{ (км)}$$

Пешеходу необходимо пройти 3,6 км. Зная скорость его движения, найдем время:

$$3,6 : 6 = 0,6 \text{ (ч)}$$

Ответ: Пешеход пройдет это расстояние за 0,6 часа.

Задача 6. Колхоз собрал с 1 га 400 ц сахарной свеклы на участке прямоугольной формы, длина которого 2 км, а ширина — 12,5% длины. Сколько сахара можно получить из собранной сахарной свеклы, если она содержит воды 76% своего веса, а вес сахара составляет $\frac{2}{3}$ веса оставшегося вещества?

Решение:

Выразим длину участка в метрах: 2 км = 2000 м и найдем ширину участка:

$$2000 \cdot 0,125 = 250 \text{ (м)}$$

Следовательно, площадь участка будет равна:

$$2000 \cdot 250 = 500000 \text{ (м}^2\text{)} = 50 \text{ (га)}$$

Так как с одного гектара собрали 400 ц сахарной свеклы, то со всего участка собрали:

$$400 \cdot 50 = 20000 \text{ (ц) сахарной свеклы}$$

Вода составляет 76% от веса сахарной свеклы, следовательно, на оставшееся вещество приходится 24%. Найдем его вес в собранной свекле:

$$20000 \cdot 0,24 = 4800 \text{ (ц)}$$

Вес сахара составляет $\frac{2}{3}$ веса оставшегося вещества, следовательно, можно найти вес сахара, полученного из собранной сахарной свеклы:

$$4800 \cdot \frac{2}{3} = 3200 \text{ (ц)}$$

Ответ: Из собранной сахарной свеклы можно получить 3200 ц сахара.

Задача 7. Бассейн имеет форму прямоугольного параллелепипеда, длина основания которого 5,8 м, а ширина — 3,5 м. Две трубы наполняют его водой в течение 13 ч 32 мин, причем через одну из них вливается 25 л воды в минуту, а через вторую — 0,75 этого количества. Определить глубину бассейна.

Решение:

Найдем, сколько литров в минуту вливается через вторую трубу:

$$25 \cdot 0,75 = 18,75 \text{ (л)}$$

Тогда через две трубы за минуту в бассейн вливается:

$$25 + 18,75 = 43,75 \text{ (л) воды}$$

По условию задачи бассейн наполняется за 13 ч 32 мин; выразим данное время в минутах:

$$13 \text{ ч } 32 \text{ мин} = 812 \text{ мин}$$

Найдем, сколько литров воды вмещается в бассейне:

$$43,75 \cdot 812 = 35525 \text{ (л) воды}$$

Так как один литр воды равен 1 дм^3 , мы можем найти объем бассейна:

$$35525 \text{ дм}^3 = 35,525 \text{ м}^3$$

Найдем площадь основания бассейна:

$$5,8 \cdot 3,5 = 20,3 \text{ (м}^2\text{)}$$

Зная площадь основания бассейна и его объем, можно найти глубину:

$$35,525 : 20,3 = 1,75 \text{ (м)}$$

Ответ: 1,75 м — глубина бассейна.

Задача 8. Сторож охраняет склад, длина которого на 20 м больше ширины, причем отношение длины и ширины равно отношению 5:3. Сколько времени потребуется сторожу, чтобы обойти здание склада, если его скорость 1 км/ч?

Решение:

Так как на длину склада приходится 5 частей, а на ширину 3 части, то разность длины и ширины — 2 части. По условию разность равна 20 м, следовательно:

$$20 : 2 = 10 \text{ (м)} \text{ — длина одной части}$$

Можем найти длину и ширину склада:

$$10 \cdot 5 = 50 \text{ (м)} — \text{длина склада}$$

$$10 \cdot 3 = 30 \text{ (м)} — \text{ширина склада}$$

Найдем периметр склада:

$$(50 + 30) \cdot 2 = 160 \text{ (м)} = 0,16 \text{ (км)}$$

Обходя здание склада по периметру, сторож проделывает путь в 0,16 км. Зная расстояние и скорость, найдем время:

$$0,16 : 1 = 0,16 \text{ (ч)}$$

Ответ: 0,16 часа потребуется сторожу, чтобы обойти здание склада.

Задача 9. Первая бригада может выполнить некоторую работу за 6 дней, вторая — за 7 дней, а третья — за время в два раза большее, чем вторая бригада. После совместной работы двух первых бригад в течение двух дней к ним присоединилась третья бригада, и работа была закончена. Сколько дней все три бригады работали вместе?

Решение:

Третья бригада может выполнить работу за:

$$7 \cdot 2 = 14 \text{ (дней)}$$

Так как всю работу первая бригада может выполнить за 6 дней, то за один день она выполняет $\frac{1}{6}$ всей работы.

Так как всю работу вторая бригада может выполнить за 7 дней, то за один день она выполняет $\frac{1}{7}$ всей работы.

Так как третья бригада всю работу может выполнить за 14 дней, то за один день она выполняет $\frac{1}{14}$ всей работы.

Найдем, какую часть работы выполняют две первые бригады за один день:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{13}{42} \text{ всей работы}$$

Тогда за два дня эти бригады выполняют:

$$\frac{13}{42} \cdot 2 = \frac{26}{42} = \frac{13}{21} \text{ всей работы}$$

После двух дней работы осталось выполнить:

$$1 - \frac{13}{21} = \frac{8}{21} \text{ всей работы}$$

Найдем, какую часть работы могут выполнить три бригады, работая вместе:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} = \frac{16}{42} = \frac{8}{21} \text{ всей работы}$$

Очевидно, что трем бригадам необходимо было работать вместе всего один день, т.к.

$$\frac{8}{21} : \frac{8}{21} = 1 \text{ (день)}$$

Ответ: Три бригады работали вместе 1 день.

Задача 10. На ремонте дороги работало 15 человек, и они должны были закончить работу за 12 дней. На пятый день утром подошли еще несколько рабочих, и оставшаяся работа была выполнена за 6 дней. Сколько рабочих прибыло дополнительно?

Решение:

Так как 15 рабочих должны были выполнить работу за 12 дней, то за один день они должны были выполнять $\frac{1}{12}$ всей работы. 15 рабочих работали 4 дня, следовательно, они выполнили:

$$\frac{1}{12} \cdot 4 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \text{ всей работы}$$

Найдем, какую часть работы им осталось выполнить после четырех дней работы:

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ всей работы}$$

После того, как к ним прибыли в помощь несколько рабочих, они стали выполнять за один день:

$$\frac{2}{3} : 6 = \frac{2}{18} = \frac{1}{9} \text{ всей работы}$$

Зная, что 15 рабочих за один день выполняют $\frac{1}{12}$ всей работы, найдем, какую часть работы выполняет один рабочий за один день:

$$\frac{1}{12} : 15 = \frac{1}{180} \text{ всей работы}$$

Найдем, сколько рабочих работало последние 6 дней:

$$\frac{1}{9} : \frac{1}{180} = 20 \text{ (чел.)}$$

Следовательно, дополнительно прибыло:

$$20 - 15 = 5 \text{ (чел.)}$$

Ответ: 5 рабочих прибыли дополнительно.

Задача 11. Две машинистки могут выполнить некоторую работу за 8 дней, если будут работать вместе. Выполнив 50% всей работы, одна из машинисток заболела, и оставшуюся часть закончила вторая, на что ушло 6 дней. За сколько дней могла закончить эту работу заболевшая машинистка?

Решение:

Так как всю работу могут выполнить две машинистки за 8 дней, то за один день они могут выполнить $\frac{1}{8}$ всей работы.

Работая вместе, машинистки выполнили 50%, или $\frac{1}{2}$ всей работы. Второй машинистке осталось выполнить $\frac{1}{2}$ всей работы. Так как она одна работала 6 дней, следовательно, за один день она может выполнить:

$$\frac{1}{2} : 6 = \frac{1}{12} \text{ всей работы}$$

Найдем, какую часть работы может выполнить за один день заболевшая машинистка:

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24} \text{ всей работы}$$

Так как за один день заболевшая машинистка может выполнить $\frac{1}{24}$ всей работы, то $\frac{1}{2}$ всей работы она может выполнить за:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{24} = 12 \text{ (дней)}$$

Ответ: Заболевшая машинистка могла бы выполнить оставшуюся часть работы за 12 дней.

Задача 12. Бассейн заполняется двумя трубами. Сначала открыли первую трубу, а затем через $3\frac{3}{4}$ часа, когда наполнилась половина бассейна, открыли вторую трубу. Через $2\frac{1}{2}$ часа совместной работы бассейн наполнился. Определить объем бассейна, если через вторую трубу вливается 2000 л воды за час.

Решение:

Первую половину бассейна наполняла одна труба в течение $3\frac{3}{4}$ часа, следовательно, за один час эта труба может наполнить:

$$\frac{1}{2} : 3\frac{3}{4} = \frac{1}{2} : \frac{15}{4} = \frac{2}{15} \text{ всего бассейна}$$

Вторую половину бассейна наполняли две трубы в течение $2\frac{1}{2}$ часа, следовательно, за один час две трубы могут наполнить:

$$\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2} = \frac{1}{2} : \frac{5}{2} = \frac{1}{5} \text{ всего бассейна}$$

Найдем, какую часть бассейна наполняет за один час вторая труба:

$$\frac{1}{5} - \frac{2}{15} = \frac{1}{15} \text{ всего бассейна}$$

Следовательно, весь бассейн вторая труба наполняет за 15 часов.

По условию задачи, через вторую трубу за час вливается 2000 л воды. Найдем, сколько литров воды вливается через вторую трубу за 15 часов:

$$2000 : 15 = 30000 \text{ (л) воды}$$

Один литр воды равен 1 дм^3 . Следовательно, объем бассейна равен:

$$30000 \text{ дм}^3 = 30 \text{ м}^3$$

Ответ: 30 м^3 — объем бассейна.

Задача 13. Сплав меди и цинка, взятых в равных объемах, весит 120 кг. Какое количество по весу взято того и другого металла, если вес цинка и вес меди в равных объемах относятся как 0,9:1,1?

Решение:

Определим, сколько частей приходится на весь сплав:

$$0,9 + 1,1 = 2 \text{ части}$$

Так как вес сплава равен 120 кг, то:

$$120 : 2 = 60 \text{ (кг)} — \text{приходится на 1 часть}$$

Найдем вес меди и вес цинка в сплаве:

$$60 \cdot 0,9 = 54 \text{ (кг)} — \text{вес цинка в сплаве}$$

$$60 \cdot 1,1 = 66 \text{ (кг)} — \text{вес меди в сплаве}$$

Ответ: 54 кг — вес цинка, 66 кг — вес меди в сплаве.

Задача 14. (Старинная задача Л.Ф.Магницкого.) Спросил некто учителя: «Сколько у тебя в классе учеников, так как хочу отдать к тебе в учение своего сына?» Учитель ответил: «Если придет учеников столько же, сколько имею, и пол-столько, и четвертая часть, и твой сын, тогда будет у меня 100 учеников». Сколько учеников было в классе у учителя?

Решение:

Примем количество учеников в классе за 1. Тогда 99 учеников — это:

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4} \text{ всего класса}$$

Чтобы найти число по его дроби, можно разделить на эту дробь соответствующее ей число:

$$99 : 2\frac{3}{4} = 36 \text{ (уч.)}$$

Ответ: 36 учеников было в классе у учителя.

Задача 15. (Старинная задача Л.Ф.Магницкого.) Един человек выпьет кадь питья в 14 дней, а со женою выпьет тоеже кадь в 10 дней, и ведательно есть, в колико дней жена его способно выпьет тоеже кадь?

Решение:

Так как муж выпивает кадь питья за 14 дней, то за один день он выпивает $\frac{1}{14}$ кади. Вместе с женой они выпивают кадь питья за 10 дней, следовательно, за один день они выпивают $\frac{1}{10}$ кади.

Найдем, какую часть питья жена выпивает за один день:

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{14} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35} \text{ кади}$$

Следовательно, всю кадь питья жена выпивает за 35 дней.

Ответ: Жена способна выпить кадь питья за 35 дней.

Задача 16. (Старинная задача среднеазиатского ученого Бируни.) Если 10 дирхемов приносят доход 5 дирхемов в два месяца, какой доход принесут 8 дирхемов за три месяца?

Решение:

Найдем, сколько дирхемов дохода приносят 10 дирхемов за один месяц:

$$5 : 2 = 2,5 \text{ (дирх.)}$$

Тогда один дирхем за один месяц приносит доход:

$$2,5 : 10 = 0,25 \text{ (дирх.)}$$

Найдем, какой доход приносят 8 дирхемов за один месяц:

$$8 : 0,25 = 2 \text{ (дирх.)}$$

Тогда за три месяца 8 дирхемов приносят доход:

$$2 \cdot 3 = 6 \text{ (дирх.)}$$

Ответ: 8 дирхемов приносят доход 6 дирхемов за 3 месяца.

Задача 17. (Старинная армянская задача.) Один купец прошел три города, и взыскали с него в первом городе пошлины половину и треть имущества, и во втором городе половину и треть с того, что у него осталось, и в третьем городе снова взыскали половину и треть. И когда он прибыл домой, у него осталось 11 монет. Сколько монет было у купца?

Решение:

Примем количество монет, которое было у купца, за 1. В первом городе с него взыскали половину и одну треть. Найдем ту часть монет, которая у него осталась:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ всех монет}$$

Во втором городе с него взыскали половину и одну треть с того, что у него осталось. Найдем, какая часть монет осталась у купца:

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{18} = \frac{1}{36} \text{ всех монет}$$

В третьем городе с него снова взыскали половину и треть с того, что у него осталось. Найдем, какая часть монет осталась у купца:

$$\frac{1}{36} - \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{36} - \frac{1}{72} - \frac{1}{108} = \frac{1}{216} \text{ всех монет}$$

Так как домой он вернулся, имея 11 монет, то 11 монет — это $\frac{1}{216}$ всех монет, которые были у купца.

Найдем, сколько монет было у купца:

$$11 : \frac{1}{216} = 11 \cdot 216 = 2376 \text{ (монет)}$$

Ответ: У купца было 2376 монет.

Алгебра и начала анализа

1. Выражения с переменными. Тождества. Тождественные преобразования выражения. Одночлены. Многочлены

Примеры выражений с переменными:

$$2x, a^2 + b^2; \sqrt{x-2}; y+4; S \cdot t.$$

Значение переменной — это число, которое подставляется вместо переменной.

Допустимые значения переменных — значения переменных; при которых выражения с переменными имеют смысл.

Область определения выражения с переменными — множество всех допустимых значений переменных.

Значение выражения с переменными. Если вместо переменных в выражение с переменными подставить допустимые значения, то получится числовое выражение, значение которого и будет называться значением выражения с переменными.

Тождество — равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Тождественно равные выражения — выражения, содержащие одни и те же переменные, у которых равны значения при всех допустимых значениях переменных. Если одно выражение заменить другим, тождественно равным ему, то такое преобразование называется тождественным преобразованием выражения.

Одночлен — выражение, представляющее собой произведение чисел и переменных в натуральной степени.

Например:

$$5x, a^5b^7, \frac{1}{2}c^2k, -2ab.$$

Если в одночлене произведение всех чисел записать перед переменными, а произведение каждой его переменной и ее степеней представить в натуральной степени этой переменной, то одночлен считается записанным в стандартном виде, а его числовой множитель называется *коэффициентом одночлена*.

Например:

$$5 \text{ — коэффициент одночлена } 5x;$$

$$1 \text{ — коэффициент одночлена } a^5b^7.$$

Одночлены называются подобными, если имеют одинаковые буквенные множители.

Например:

$$5ab \text{ и } -ab \text{ — подобные одночлены.}$$

Если мы имеем выражение, состоящее из суммы одночленов, в котором имеются подобные одночлены, то сложение подобных одночленов называется приведением подобных слагаемых.

Степенью одночлена называется сумма показателей степеней входящих в него переменных.

Многочлен — сумма одночленов. Одночлены, из которых состоит многочлен, называются членами многочлена. Чтобы привести многочлен к стандартному виду, необходимо записать в стандартном виде каждый его член и привести подобные слагаемые.

Степенью многочлена стандартного вида называется наибольшая из степеней входящих в него одночленов.

Задача 1. При каких значениях переменных выражение имеет смысл:

а) $2x + 2y$

Решение:

Выражение $2x + 2y$ имеет смысл при всех значениях переменных.

б) $\frac{1}{a}$

Решение:

Выражение $\frac{1}{a}$ при $a = 0$ не имеет смысла. При всех остальных значениях оно имеет смысл.

в) $\frac{x}{x-5}$

Решение:

Выражение $\frac{x}{x-5}$ имеет смысл при всех значениях переменной x , кроме $x = 5$.

г) $\frac{5}{(a-2)(b+4)}$

Решение:

Выражение $\frac{5}{(a-2)(b+4)}$ имеет смысл при всех значениях переменных a и b , кроме $a = 2$ и $b = -4$.

Задача 2. Найти значение выражения:

а) $2xy - 5$ при $x = 7$; $y = -3$

Решение:

Если $x = 7$, $y = -3$, то

$$2xy - 5 = 2 \cdot 7 \cdot (-3) - 5 = -42 - 5 = -47$$

б) $\frac{b}{b-7}$ при $b = 4$

Решение:

Число 4 является допустимым значением переменной b , так как $4 - 7 \neq 0$.

Если $b = 4$, то

$$\frac{b}{b-7} = \frac{4}{4-7} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$

в) $\frac{xy}{x+y}$ при $x = 2\frac{1}{2}$; $y = \frac{2}{3}$

Решение:

Число $2\frac{1}{2}$ является допустимым значением переменной x , число $\frac{2}{3}$ является допустимым значением переменной y , так как $2\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \neq 0$.

$$\text{Если } x = 2\frac{1}{2}; y = \frac{2}{3}, \text{ то } \frac{xy}{x+y} = \frac{2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}}{2\frac{1}{2} + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{3\frac{1}{6}} = \frac{10}{19}.$$

г) $\sqrt{a^2 - b^2}$ при $a = 13$; $b = 5$

Решение:

Число 13 является допустимым значением переменной a , число 5 является допустимым значением переменной b , так как $13^2 - 5^2 \geq 0$.

Если $a = 13$; $b = 5$, то

$$\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12.$$

д) $\frac{n^3}{1 - n^2}$ при $n = 0,1$

Решение:

Число 0,1 является допустимым значением переменной n , так как $1 - 0,1^2 \neq 0$.

$$\text{Если } n = 0,1, \text{ то } \frac{n^3}{1 - n^2} = \frac{0,1^3}{1 - 0,1^2} = \frac{0,001}{1 - 0,01} = \frac{0,001}{0,99} = \frac{1}{990}.$$

Задача 3. Представьте выражение в виде одночлена стандартного вида и укажите его коэффициент и его степень:

а) $(-2) \cdot 5x$

Решение:

Упростим выражение:

$$(-2) \cdot 5x = -10x$$

Выражение $-10x$ является одночленом стандартного вида, коэффициент которого равен -10 , а степень равна 1.

$$\text{б) } (-2,3) \cdot a^2 \cdot 6,5 \cdot b^3$$

Решение:

Упростим выражение:

$$(-2,3) \cdot a^2 \cdot 6,5 \cdot b^3 = -14,95a^2b^3$$

Выражение $-14,95a^2b^3$ является одночленом стандартного вида, коэффициент которого равен $-14,95$, а степень равна 5.

$$\text{в) } -0,15 \cdot m \cdot n \cdot \left(2\frac{1}{3} \cdot m \cdot n \cdot k \right) \cdot 9 \cdot n \cdot k$$

Решение:

Упростим выражение:

$$-0,15 \cdot m \cdot n \cdot \left(2\frac{1}{3} \cdot m \cdot n \cdot k \right) \cdot 9 \cdot n \cdot k =$$

$$= -0,15 \cdot 2\frac{1}{3} \cdot 9 \cdot m^2 \cdot n^3 \cdot k^2 = -3,15 \cdot m^2 \cdot n^3 \cdot k^2$$

Выражение $-3,15m^2n^3k^2$ является одночленом стандартного вида, коэффициент которого равен $-3,15$, а степень равна 7.

$$\text{г) } -5,6 \cdot x^5 \cdot y^7 \cdot \left(-3\frac{1}{7} \cdot x^2 \cdot y \right)$$

Решение:

Упростим выражение:

$$-5,6 \cdot x^5 \cdot y^7 \cdot \left(-3\frac{1}{7} \cdot x^2 \cdot y \right) = 17,6x^7y^8$$

Выражение $17,6x^7y^8$ является одночленом стандартного вида, коэффициент которого равен $17,6$, а степень равна 15.

Задача 4. Преобразуйте выражение в тождественно равный одночлен стандартного вида:

а) $(-3a^2b)^2$

Решение:

$$(-3a^2b)^2 = 9a^4b^2;$$

выражение $9a^4b^2$ — одночлен стандартного вида.

б) $(-0,5m^3n^2)^3$

Решение:

$$(-0,5m^3n^2)^3 = -0,125m^9n^6$$

выражение $-0,125m^9n^6$ — одночлен стандартного вида.

в) $(-0,2x^2y^3z)^4$

Решение:

$$(-0,2x^2y^3z)^4 = 0,0016x^8y^{12}z^4$$

выражение $0,0016x^8y^{12}z^4$ — одночлен стандартного вида.

г) $\left(\frac{2}{3}p^5q^4r^3\right)^3$

Решение:

$$\left(\frac{2}{3}p^5q^4r^3\right)^3 = \frac{8}{27}p^{15}q^{12}r^9$$

выражение $\frac{8}{27}p^{15}q^{12}r^9$ — одночлен стандартного вида.**Задача 5.** Приведите подобные слагаемые:

а) $3y + 6x - 2y$

Решение:Подобными слагаемыми являются $3y$ и $-2y$

$$3y + 6x - 2y = y + 6x$$

б) $1,7a + 3,5b - 2,3a - 5,7b$

Решение:Подобные слагаемые: $1,7a$ и $-2,3a$; $3,5b$ и $-5,7b$

$$1,7a + 3,5b - 2,3a - 5,7b = -0,6a - 2,2b$$

$$в) \frac{1}{6}x + 1\frac{2}{5}y - \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}y$$

Решение:

Подобные слагаемые: $\frac{1}{6}x$ и $-\frac{2}{3}x$; $1\frac{2}{5}y$ и $\frac{4}{5}y$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}x + 1\frac{2}{5}y - \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}y &= \left(\frac{1}{6}x - \frac{2}{3}x\right) + \left(1\frac{2}{5}y + \frac{4}{5}y\right) = -\frac{3}{6}x + 1\frac{6}{5}y = \\ &= -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{5}y\end{aligned}$$

$$г) 15ab + 13xy - 16ab - 18xy$$

Решение:

Подобные слагаемые: $15ab$ и $-16ab$; $13xy$ и $-18xy$

$$15ab + 13xy - 16ab - 18xy = -ab - 5xy$$

Задача 6. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

$$а) (-3) \cdot (-x + 4) - (25 - x)$$

Решение:

$$(-3) \cdot (-x + 4) - (25 - x) = 3x - 12 - 25 + x = 4x - 37$$

$$б) (-5a) \cdot (1,3 - b) - b \cdot (a - 3,1)$$

Решение:

$$\begin{aligned}(-5a) \cdot (1,3 - b) - b \cdot (a - 3,1) &= -6,5a + 5ab - ba + 3,1b = \\ &= 4ab - 6,5a + 3,1b\end{aligned}$$

Задача 7. Найдите значение выражения $5m - 2(3n - 1) - (m - n)$ при $m = 0,1$; $n = 7,2$.

Решение:

Упростим данное выражение. Для этого раскроем скобки и приведем подобные слагаемые.

$$5m - 2 \cdot (3n - 1) - (m - n) = 5m - 6n + 2 - m + n = 4m - 5n + 2$$

Если $m = 0,1$; $n = 7,2$, то

$$\begin{aligned}4m - 5n + 2 &= 4 \cdot 0,1 - 5 \cdot 7,2 + 2 = 0,4 - 36 + 2 = \\ &= 2,4 - 36 = -33,6\end{aligned}$$

Ответ: Значение выражения $5m - 2 \cdot (3n - 1) - (m - n)$ при $m = 0,1$; $n = 7,2$ равно $-33,6$.

Задача 8. Докажите тождество $7a - (9a - (2a - 5)) + 5 = 0$.

Доказательство:

Рассмотрим левую часть равенства и упростим ее. Для этого раскроем скобки и приведем подобные слагаемые.

$$\begin{aligned} 7a - (9a - (2a - 5)) + 5 &= 7a - (9a - 2a + 5) + 5 = \\ &= 7a - (7a + 5) + 5 = 7a - 7a - 5 + 5 = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Очевидно, что равенство верно при всех значениях переменной a . Следовательно, данное равенство является тождеством.

Задача 9. Определить степень многочлена:

а) $5x + 7$

Решение:

Степень многочлена $5x + 7$ равна 1.

б) $0,3y^{10} - 4y^7 + 2y^6 + 9$

Решение:

Степень многочлена $0,3y^{10} - 4y^7 + 2y^6 + 9$ равна 10.

в) $6a^2b + 4,3a^5b^2 - 7$

Решение:

Степень многочлена $6a^2b + 4,3a^5b^2 - 7$ равна 7.

Задача 10. Приведите многочлен к стандартному виду:

а) $x^2y + y^2 - 2x^2y + xy^2 - 4xy^2 - 12xy^2$

Решение:

$$\begin{aligned} x^2y + y^2 - 2x^2y + xy^2 - 4xy^2 - 12xy^2 &= (x^2y - 2x^2y) + \\ &+ (xy^2 - 4xy^2 - 12xy^2) + y^2 = -x^2y - 15xy^2 + y^2 \end{aligned}$$

б) $\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}a^2 + 0,3a + 7a - \frac{1}{6}a^2$

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}a^2 + 0,3a + 7a - \frac{1}{6}a^2 &= \left(\frac{1}{2}a + 0,3a + 7a \right) + \left(-\frac{1}{3}a^2 - \frac{1}{6}a^2 \right) = \\ &= 7,8a - \frac{3}{6}a^2 = 7,8a - \frac{1}{2}a^2 = 7,8a - 0,5a^2 \end{aligned}$$

Задача 11. Найдите значение многочлена, предварительно приведя его к стандартному виду:

$$x^3y - x^2y + 2xy^2 - 3x^2y + 5xy^2 \text{ при } x = 1; y = -2.$$

Решение:

Приведем многочлен к стандартному виду:

$$\begin{aligned} x^3y - x^2y + 2xy^2 - 3x^2y + 5xy^2 &= x^3y + (-x^2y - 3x^2y) + \\ &+ (2xy^2 + 5xy^2) = x^3y - 4x^2y + 7xy^2. \end{aligned}$$

Если $x = 1; y = -2$, то

$$\begin{aligned} x^3y - 4x^2y + 7xy^2 &= 1^3 \cdot (-2) - 4 \cdot 1^2 \cdot (-2) + 7 \cdot 1^2 \cdot (-2)^2 = \\ &= -2 + 8 + 28 = 34 \end{aligned}$$

Ответ: Значение многочлена $x^3y - x^2y + 2xy^2 - 3x^2y + 5xy^2$ при $x = 1; y = -2$ равно 34.

II. Сумма и разность многочленов.

Произведение одночлена и многочлена.

Произведение многочленов

При сложении и вычитании многочленов пользуются правилом раскрытия скобок. Если перед скобками стоит знак «плюс», то, раскрывая скобки, следует сохранить знак каждого слагаемого суммы, заключенной в скобки. Если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого, заключенного в скобки. Если в получившемся многочлене имеются подобные слагаемые (члены), то их необходимо привести.

Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно каждый член многочлена умножить на одночлен и полученные произведения сложить.

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член первого многочлена на каждый член второго многочлена и полученные произведения сложить.

Задача 1. Выполнить сложение:

а) $(3x + 5y) + (y - 2x)$

Решение:

$$3x + 5y + y - 2x = (3x - 2x) + (y + 5y) = x + 6y;$$

б) $(-5ab - 7a) + (-0,4ab - 3,5b)$

Решение:

$$\begin{aligned} (-5ab - 7a) + (-0,4ab - 3,5b) &= -5ab - 7a - 0,4ab - 3,5b = \\ &= (-5ab - 0,4ab) - 7a - 3,5b = -5,4ab - 7a - 3,5b; \end{aligned}$$

в) $(x^3 + y^3 - x + 5) + (-x^3 - 9y^3 - y + 2)$

Решение:

$$\begin{aligned} (x^3 + y^3 - x + 5) + (-x^3 - 9y^3 - y + 2) &= x^3 + y^3 - x + 5 + -x^3 - \\ - 9y^3 - y + 2 &= (x^3 - x^3) + (y^3 - 9y^3) - x - y + (5 + 2) = \\ &= -8y^3 - x - y + 7 \end{aligned}$$

Задача 2. Найдите разность многочленов:

а) $7a^3 + 5a^2 + 3a + 7$ и $6a^3 + 4a^2 - 9a - 2$

Решение:

$$\begin{aligned} (7a^3 + 5a^2 + 3a + 7) - (6a^3 + 4a^2 - 9a - 2) &= 7a^3 + 5a^2 + 3a + 7 - \\ - 6a^3 - 4a^2 + 9a + 2 &= (7a^3 - 6a^3) + (5a^2 - 4a^2) + (3a + 9a) + \\ + (7 + 2) &= a^3 + a^2 + 12a + 9 \end{aligned}$$

б) $-5a^2b + ab + 7$ и $-9ab^2 + 2ab - 2$

$$\begin{aligned} (-5a^2b + ab + 7) - (-9ab^2 + 2ab - 2) &= -5a^2b + ab + 7 + 9ab^2 - \\ - 2ab + 2 &= -5a^2b + 9ab^2 - ab + 9 \end{aligned}$$

Задача 3. Представьте в виде многочлена стандартного вида: $(a^2 + 5x^2) - (2a^2 - 0,2ax + (1,5x^2 - (0,5ax - 3x^2)))$

Решение:

$$\begin{aligned} (a^2 + 5x^2) - (2a^2 - 0,2ax + (1,5x^2 - (0,5ax - 3x^2))) &= a^2 + 5x^2 - \\ - (2a^2 - 0,2ax + 1,5x^2 - (0,5ax - 3x^2)) &= a^2 + 5x^2 - (2a^2 - 0,2ax + \\ + 1,5x^2 - 0,5ax + 3x^2) &= a^2 + 5x^2 - 2a^2 + 0,2ax - 1,5x^2 + 0,5ax - \\ - 3x^2 &= -a^2 + 0,5x^2 + 0,7ax \end{aligned}$$

Задача 4. Представьте многочлен $7x^2y + 5yx^2 - 2x + 5y - 9$

а) в виде суммы трехчлена и двучлена;

б) в виде разности двучлена и трехчлена.

Решение:

- а) Представим многочлен $7x^2y + 5yx^2 - 2x + 5y - 9$ в виде суммы трехчлена и двучлена:

$$7x^2y + 5yx^2 - 2x + (5y - 9)$$

- б) Представим многочлен $7x^2y + 5yx^2 - 2x + 5y - 9$ в виде разности двучлена и трехчлена;

$$7x^2y + 5yx^2 - (2x - 5y + 9)$$

Задача 5. Докажите тождество:

$$1,5 - 9a^2 - (2 - 4a^2) + (0,5 + 5a^2) = 0$$

Доказательство:

Преобразуем левую часть равенства, используя правила сложения и вычитания многочленов:

$$1,5 - 9a^2 - (2 - 4a^2) + (0,5 + 5a^2) = 1,5 - 9a^2 - 2 + 4a^2 + 0,5 +$$

$$+ 5a^2 = (-9a^2 + 4a^2 + 5a^2) + (1,5 - 2 + 0,5) = 0$$

Значение выражения $1,5 - 9a^2 - (2 - 4a^2) + (0,5 + 5a^2)$ не зависит от значения переменной a , оно равно нулю при любом значении переменной. Следовательно, данное равенство является тождеством.

Задача 6. Выполнить умножение:

- а) $4xy \cdot (x + y)$

Решение:

$$4xy \cdot (x + y) = 4x^2y + 4xy^2$$

- б) $0,5a^2(0,2a^3 - 4a^5)$

Решение:

$$0,5a^2(0,2a^3 - 4a^5) = 0,1a^5 - 2a^7$$

- в) $-\frac{2}{7}a^2b^2(-2,17a^3b^3 - 7a^2b^2 + 14ab)$

Решение:

$$-\frac{2}{7}a^2b^2(-2,17a^3b^3 - 7a^2b^2 + 14ab) = 0,62a^5b^5 + 2a^4b^4 - 4a^3b^3$$

Задача 7. Упростите выражение:

а) $5a \cdot (x + y) - a \cdot (x - y)$

Решение:

$$5a(x + y) - a(x - y) = 5ax + 5ay - ax + ay = (5ax - ax) + (5ay + ay) = 4ax + 6ay.$$

б) $9m^2n^3 - n^2(2m^2n + m - 1)$

Решение:

$$9m^2n^3 - n^2(2m^2n + m - 1) = 9m^2n^3 - 2m^2n^3 - n^2m + n^2 = 7m^2n^3 - n^2m + n^2$$

в) $(0,1b)^3 - 0,02c^2(2c^4 - 10)$

Решение:

$$(0,1b)^3 - 0,02c^2(2c^4 - 10) = 0,001b^9 - 0,04c^6 + 0,2c^2$$

Задача 8. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $(a + b)(c + d)$

Решение:

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

б) $(x - a)(x + a)$

Решение:

$$(x - a)(x + a) = x^2 - ax + ax - a^2 = x^2 - a^2 + (ax - ax) = x^2 - a^2$$

в) $(x + y - 2)(x - y)$

Решение:

$$(x + y - 2)(x - y) = x^2 + xy - 2x - xy - y^2 + 2y = x^2 - 2x - y^2 + 2y$$

Задача 9. Раскройте скобки:

а) $(a + 2y)(3a^3 + 4y^2 - 7)$

Решение:

$$(a + 2y)(3a^3 + 4y^2 - 7) = 3a^4 + 6a^3y + 4ay^2 + 8y^3 - 7a - 14y$$

б) $a(a - 2)(a + 5)$

Решение:

$$a(a - 2)(a + 5) = (a^2 - 2a)(a + 5) = a^3 - 2a^2 + 5a^2 - 10a = a^3 + 3a^2 - 10a$$

в) $(x+2)(x-3)(x-1)$

Решение:

Будем выполнять умножение последовательно. Сначала перемножим выражения в двух первых скобках, а затем получившееся выражение умножим на выражение в третьей скобке

$$\begin{aligned}(x+2)(x-3)(x-1) &= (x^2 + 2x - 3x - 6)(x-1) = \\ &= (x^2 - x - 6)(x-1) = x^3 - x^2 - 6x - x^2 + x + 6 = \\ &= x^3 - 2x^2 - 5x + 6\end{aligned}$$

Задача 10. Упростите выражение:

а) $(2x-y)(y+5) - 4y(x-2)$

Решение:

$$\begin{aligned}(2x-y)(y+5) - 4y(x-2) &= 2xy - y^2 + 10x - 5y - 4xy + 8y = \\ &= -2xy - y^2 + 10x + 3y\end{aligned}$$

б) $(x-2)(x-1) + (x+3)(x+4)$

Решение:

$$\begin{aligned}(x-2)(x-1) + (x+3)(x+4) &= x^2 - 2x - x + 2 + x^2 + 3x + 4x + \\ &+ 12 = 2x^2 + 4x + 14\end{aligned}$$

Задача 11. Докажите, что при всех целых m значение выражения $m(m-2) - (m+4)(m+2)$ делится на 8.

Доказательство:

Преобразуем данное выражение. Для этого раскроем скобки и приведем подобные слагаемые.

$$\begin{aligned}m(m-2) - (m+4)(m+2) &= m^2 - 2m - m^2 - 4m - 2m - 8 = \\ &= -8m - 8\end{aligned}$$

Представим получившееся выражение в виде произведения числа 8 и многочлена $(-m-1)$, то есть

$$-8m - 8 = 8(-m - 1).$$

Значение выражения $(-m-1)$ при любом целом m является целым числом. Следовательно, значение выражения можно представить в виде произведения целых множителей, один из которых будет равен 8. Значение такого произведения будет делиться на 8.

Так как выражение $8(-m - 1)$ мы получили путем тождественного преобразования выражения $m(m - 2) - (m + 4)(m + 2)$, то значение этого выражения также будет делиться на 8 при всех целых m . Что и требовалось доказать.

III. Формулы сокращенного умножения

Формулы сокращенного умножения — тождества, позволяющие упрощать преобразования многочленов.

1. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ — разность квадратов.
2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — квадрат суммы.
3. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ — квадрат разности.
4. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ — сумма кубов.
5. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ — разность кубов.
6. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ — куб суммы.
7. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ — куб разности.
8. $(a + x + y)^2 = a^2 + x^2 + y^2 + 2ax + 2ay + 2xy$ — квадрат трехчлена.
9. $(a - x - y)^2 = a^2 + x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + 2xy$ — квадрат трехчлена.

Задача 1. Выполнить умножение многочленов:

а) $(a + 1)(a - 1)$

Решение:

Выполним умножение многочленов, используя формулу (1).

$$(a + 1)(a - 1) = a^2 - 1$$

б) $(0,3p - q)(q + 0,3p)$

Решение:

Выполним умножение многочленов, используя формулу (1).

$$(0,3p - q)(q + 0,3p) = (0,3p - q)(0,3p + q) = (0,3p)^2 - q^2 = 0,09p^2 - q^2$$

Задача 2. Вычислите:

а) $21 \cdot 19$

Решение:

Представим число 21 в виде суммы чисел 20 и 1, а число 19 в виде разности чисел 20 и 1. Применим формулу разности квадратов.

$$21 \cdot 19 = (20 + 1) \cdot (20 - 1) = 20^2 - 1^2 = 400 - 1 = 399$$

б) $93 \cdot 87$

Решение:

Представим число 93 в виде суммы чисел 90 и 3, а число 87 в виде разности этих чисел. Применим формулу разности квадратов.

$$93 \cdot 87 = (90 + 3) \cdot (90 - 3) = 90^2 - 3^2 = 8100 - 9 = 8091$$

в) $35^2 - 32^2$

Решение:

Применим формулу разности квадратов.

$$35^2 - 32^2 = (35 + 32)(35 - 32) = 67 \cdot 3 = 201$$

г) $4,7^2 - 4,6^2$

Решение:

Применим формулу разности квадратов.

$$4,7^2 - 4,6^2 = (4,7 + 4,6)(4,7 - 4,6) = 9,3 \cdot 0,1 = 0,93$$

Задача 3. Выполнить умножение:

а) $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$

Решение:

Найдем произведение многочленов, находящихся в двух первых скобках, используя формулу (1). Далее полученное произведение умножим на выражение, находящееся в третьей скобке, используя также формулу (1).

$$(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9) = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = (x^4 - 81)$$

$$б) (b + 1)^2(1 - b)^2$$

Решение:

Выполним умножение, используя свойства степени и формулы сокращенного умножения (1) и (2).

$$\begin{aligned}(b + 1)^2(1 - b)^2 &= (1 + b)^2(1 - b)^2 = ((1 + b)(1 - b))^2 = (1 - b^2)^2 = \\ &= 1 - 2b^2 + b^4\end{aligned}$$

Задача 4. Представьте в виде многочлена квадрат двучлена:

$$а) (2x + 3)^3$$

Решение:

Применим формулу (2) сокращенного умножения:

$$(2x + 3)^3 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$б) (10 - 2x)^2$$

Решение:

Применим формулу (3) сокращенного умножения:

$$(10 - 2x)^2 = 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 2x + (2x)^2 = 100 - 40x + 4x^2$$

Задача 5. Представьте в виде произведения:

$$а) 4a^2 - (1 - 2b)^2$$

Решение:

Представим в виде произведения данное выражение, используя формулу разности квадратов.

$$\begin{aligned}4a^2 - (1 - 2b)^2 &= (2a)^2 - (1 - 2b)^2 = (2a + (1 - 2b)) \cdot \\ &\cdot (2a - (1 - 2b)) = (2a + 1 - 2b)(2a - 1 + 2b)\end{aligned}$$

$$б) (a - b)^2 - (c - d)^2$$

Решение:

Представим в виде произведения данное выражение, используя формулу разности квадратов.

$$\begin{aligned}(a - b)^2 - (c - d)^2 &= ((a - b) + (c - d)) = \\ &= (a - b + c - d)(a - b - c + d)\end{aligned}$$

в) $27x^3 + 8$

Решение:

Представим в виде произведения данное выражение, используя формулу суммы кубов.

$$27x^3 + 8 = (3x)^3 + 2^3 = (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)$$

г) $1 - 125a^3$

Решение:

Представим в виде произведения данное выражение, используя формулу разности кубов.

$$1 - 125a^3 = 1^3 - (5a)^3 = (1 - 5a)(1 + 5a + 25a^2)$$

Задача 6. Представьте в виде многочлена:

а) $(2a + 1)^3$

Решение:

Применим формулу (6) сокращенного умножения.

$$\begin{aligned} (2a + 1)^3 &= (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2a \cdot 1^2 + 1^3 = \\ &= 8a^3 + 12a^2 + 6a + 1 \end{aligned}$$

б) $(0,1x - y)^3$

Решение:

Применим формулу (7) сокращенного умножения.

$$\begin{aligned} (0,1x - y)^3 &= (0,1x)^3 - 3 \cdot (0,1x)^2 \cdot y + 3 \cdot 0,1x \cdot y^2 - y^3 = \\ &= 0,001x^3 - 0,03x^2y + 0,3xy^2 - y^3 \end{aligned}$$

г) $(a(a + 2b) + b^2)(a(a - 2b) + b^2)((a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2)$

Решение:

Используя правило раскрытия скобок, свойства степени и формулы (1), (2), (3) сокращенного умножения, преобразуем данное выражение.

$$\begin{aligned} &(a(a + 2b) + b^2)(a(a - 2b) + b^2)((a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2) = \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 - 2ab + b^2)(a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2) = \\ &= ((a^2 + b^2) + 2ab)((a^2 + b^2) - 2ab)(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) = \\ &= ((a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2)(a^2 + b^2)^2 = (a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2) \cdot \\ &\cdot (a^2 + b^2)^2 = (a^4 - 2a^2b^2 + b^4)(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2(a^2 + b^2)^2 = \\ &= ((a^2 - b^2)(a^2 + b^2))^2 = (a^4 - b^4)^2 = a^8 - 2a^4b^4 + b^8 \end{aligned}$$

IV. Разложение многочлена на множители

Разложить многочлен на множители — это значит представить его в виде произведения многочленов или многочленов и одночленов. Разложить многочлен на множители можно способом вынесения за скобки общего множителя, способом группировки или с помощью формул сокращенного умножения.

Задача 1. Вынесите за скобки общий множитель:

а) $2a + 2b$

Решение:

Общий множитель — 2.

$$2a + 2b = 2(a + b)$$

б) $5x^2 - 5xy$

Решение:

Общий множитель — $5x$.

$$5x^2 - 5xy = 5x(x - y)$$

в) $15m^3n^3 + 10m^2n - 5mn^2$

Решение:

$5mn$ — общий множитель

$$15m^3n^3 + 10m^2n - 5mn^2 = 5mn(3m^2n^2 + 2m - n)$$

г) $32a^3b^6 + 48a^5b^2 - 80a^4b^3$

Решение:

$16a^3b^2$ — общий множитель.

$$32a^3b^6 + 48a^5b^2 - 80a^4b^3 = 16a^3b^2(2b^4 + 3a^2 - 5ab)$$

Задача 2. Разложите многочлен на множители:

а) $2a^2 - 2b^2$

Решение:

Вынесем за скобки общий множитель 2, получим $2(a^2 - b^2)$. Выражение $a^2 - b^2$ можно разложить на множители по формуле разности квадратов:

$$2(a^2 - b^2) = 2(a - b)(a + b)$$

б) $a^4 + a$

Решение:

Вынесем за скобки общий множитель a , выражение, оставшееся в скобках, разложим на множители по формуле суммы кубов.

$$a^4 + a = a(a^3 + 1) = a(a + 1)(a^2 - a + 1)$$

в) $by^2 + 6by + 9b$

Решение:

Вынесем за скобки общий множитель b . Выражение, оставшееся в скобках, является квадратом суммы y и 3 .

$$by^2 + 6by + 9b = b(y^2 + 6y + 9) = b(y + 3)^2$$

г) $x^6 - y^6$

Решение:

$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &= (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = \\ &= (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2) \end{aligned}$$

Задача 3. Представь в виде произведения:

а) $a(x + y) + b(y + x)$

Решение:

$$a(x + y) + b(y + x) = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$$

б) $(a - x) - b(a - x)$

Решение:

$$(a - x) - b(a - x) = (a - x)(1 - b)$$

Задача 4. Разложите на множители способом группировки:

а) $2(x + y) + x + y$

Решение:

$$2(x + y) + x + y = 2(x + y) + (x + y) = (x + y)(2 + 1) = 3(x + y)$$

б) $ab + bc + a + c$

Решение:

$$ab + bc + a + c = b(a + c) + (a + c) = (a + c)(b + 1).$$

в) $x^3 - 5x^2 - 5x + 1$

Решение:

$$x^3 - 5x^2 - 5x + 1 = (x^3 + 1) + (-5x^2 - 5x) = (x + 1)(x^2 - x + 1) - 5x(x + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1 - 5x) = (x + 1)(x^2 - 6x + 1)$$

г) $n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$

Решение:

$$\begin{aligned} n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 &= (n^6 - n^4) + (2n^3 + 2n^2) = n^4(n^2 - 1) + \\ &+ 2n^2(n + 1) = n^4(n + 1)(n - 1) + 2n^2(n + 1) = \\ &= n^2(n + 1)(n^3 - n^2 + 2) \end{aligned}$$

Задача 5. Разложить на множители, применяя формулы сокращенного умножения:

а) $16 - 25x^2$

Решение:

$$16 - 25x^2 = (4 - 5x)(4 + 5x)$$

б) $49a^2 - b^4$

Решение:

$$49a^2 - b^4 = (7a)^2 - (b^2)^2 = (7a - b^2)(7a + b^2)$$

в) $a^4 + 16 + 8a^2$

Решение:

$$a^4 + 16 + 8a^2 = a^4 + 8a^2 + 16 = (a^2)^2 + 2 \cdot 4 \cdot a^2 + 4^2 = (a^2 + 4)^2$$

г) $x^4 + x^2y^2 + y^4$

Решение:

Прибавим и вычтем из данного выражения x^2y^2 . Выражение примет вид:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 + x^2y^2 - x^2y^2 \text{ или } x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2$$

Используя формулы сокращенного умножения, преобразуем получившееся выражение:

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 &= (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 = \\ &= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy) \end{aligned}$$

V. Степень с целым показателем и ее свойства. Степень с рациональным показателем и ее свойства

Определение степени:

1. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}$ — степень с натуральным показателем n .
2. $a^1 = a$ — степень с показателем, равным 1.
3. $a^0 = 1, a \neq 0$ — степень с нулевым показателем.
4. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$ — степень с отрицательным показателем.
5. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0, n$ — натуральное число, m — целое число — степень с рациональным показателем.

Свойства степени с натуральным показателем:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, m \in N; n \in N$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}, m \in N; n \in N$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}, m \in N; n \in N$
4. $a^n \cdot b^n = (ab)^n, n \in N$
5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, b \neq 0, n \in N$

Свойства степени с рациональным показателем:

1. $a^p \cdot a^s = a^{p+s}, a > 0, p \in Q, s \in Q$
2. $\frac{a^p}{a^s} = a^{p-s}, a > 0, p \in Q, s \in Q$
3. $(a^p)^s = a^{p \cdot s}, a > 0, p \in Q, s \in Q$
4. $(ab)^p = a^p \cdot b^p, a > 0, b > 0, p \in Q$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}, a > 0, b > 0, p \in Q$$

Задача 1. Запишите в виде степени:

а) $x^8 y^8$; б) $4^3 a^6$; в) $(-y)^4 \cdot (-y)^7$; г) $b^3 \cdot b^{n+1}$

Решение:

а) $x^8 y^8 = (xy)^8$

б) $4^3 \cdot a^6 = (2^2)^3 \cdot a^6 = 2^6 \cdot a^6 = (2a)^6$

в) $(-y)^4 \cdot (-y)^7 = (-1)^4 \cdot y^4 \cdot (-1)^7 \cdot y^7 = -y^{11}$

г) $b^3 \cdot b^{n+1} = b^{3+n+1} = b^{n+4}$

Задача 2. Запишите частное в виде степени:

а) $a^{26} : a^5$; б) $x^{5n} : x^{3n}$; в) $y^{15} : (y^3 \cdot y^4)$; г) $-y^{19} : y^{10}$

Решение:

а) $a^{26} : a^5 = a^{26-5} = a^{21}$

б) $x^{5n} : x^{3n} = x^{5n-3n} = x^{2n}$

в) $y^{15} : (y^3 \cdot y^4) = y^{15} : y^7 = y^{15-7} = y^8$

г) $-y^{19} : y^{10} = -y^{19-10} = -y^9$

Задача 3. Упростите выражение:

а) $\frac{(a^3)^5 \cdot b^9}{a^{10} \cdot b^2}$

Решение:

$$\frac{(a^3)^5 \cdot b^9}{a^{10} \cdot b^2} = \frac{a^{15} \cdot b^9}{a^{10} \cdot b^2} = \frac{a^{15}}{a^{10}} \cdot \frac{b^9}{b^2} = a^{15-10} \cdot b^{9-2} = a^5 \cdot b^7$$

б) $a^2 - (-a)^2$

Решение:

$$a^2 - (-a)^2 = a^2 - (-1) \cdot a^2 = a^2 - a^2 = 0$$

в) $a^7 - (-a)^7$

Решение:

$$a^7 - (-a)^7 = a^7 + a^7 = 2a^7$$

$$г) \frac{x^7 \cdot x^n}{x^{n+3} \cdot x^4}$$

Решение:

$$\frac{x^7 \cdot x^n}{x^{n+3} \cdot x^4} = \frac{x^{7+n}}{x^{n+3+4}} = \frac{x^{7+n}}{x^{n+7}} = x^{7+n-(n+7)} = x^0 = 1$$

Задача 4. Найдите значение выражения:

$$а) 1,25^4 \cdot 8^4$$

Решение:

$$1,25^4 \cdot 8^4 = (1,25 \cdot 8)^4 = 10^4 = 10000$$

$$б) \frac{81^3 \cdot 27^2}{9^9}$$

Решение:

$$\frac{81^3 \cdot 27^2}{9^9} = \frac{(3^4)^3 \cdot (3^3)^2}{(3^2)^9} = \frac{3^{12} \cdot 3^6}{3^{18}} = \frac{3^{18}}{3^{18}} = 1$$

$$в) \frac{24^4 \cdot 6^3}{48^3 \cdot 3^4}$$

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{24^4 \cdot 6^3}{48^3 \cdot 3^4} &= \frac{(3 \cdot 8)^4 \cdot (2 \cdot 3)^3}{(3 \cdot 16)^3 \cdot 3^4} = \frac{(3 \cdot 2^3)^4 \cdot 2^3 \cdot 3^3}{(3 \cdot 2^4)^3 \cdot 3^4} = \frac{3^4 \cdot 2^{12} \cdot 2^3 \cdot 3^3}{3^3 \cdot 2^{12} \cdot 3^4} = \\ &= \frac{2^3 \cdot 3^7}{3^7} = 2^3 = 8 \end{aligned}$$

Задача 5. Сравните значения выражений:

$$а) (0,25)^5 \text{ и } 0,5^9$$

Решение:

Так как $0,25 = 0,5^2$, то $(0,25)^5 = (0,5^2)^5 = 0,5^{10}$.

Оценим разность данных чисел:

$$0,5^{10} - 0,5^9 = 0,5^9(0,5 - 1) = 0,5^9(-0,5) < 0,$$

следовательно, $(0,25)^5 < 0,5^9$.

б) 16^9 и 32^7

Решение:

Так как $16 = 2^4$ и $32 = 2^5$, то

$$16^9 = (2^4)^9 = 2^{36} \text{ и } (2^5)^7 = 2^{35}.$$

Очевидно, что $2^{36} > 2^{35}$. Следовательно, $16^9 > 32^7$.

Задача 6. Освободите выражения от нулевых и отрицательных показателей:

а) $a \cdot b^{-2}$; б) $a^n : a^{-n}$; в) $a^{-1} \cdot b^0$; г) $5^0 \cdot (x-y)^0 \cdot y^{-2}$

Решение:

$$\text{а) } a \cdot b^{-2} = a \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{a}{b^2}$$

$$\text{б) } a^n : a^{-n} = a^n : \frac{1}{a^n} = a^n \cdot a^n = a^{2n}$$

$$\text{в) } a^{-1} \cdot b^0 = \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{1}{a}$$

$$\text{г) } 5^0 \cdot (x-y)^0 \cdot y^{-2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^2} \text{ при условии } x \neq 0, y \neq 0$$

Задача 7. Представьте выражение в виде степени с основанием x :

а) $((-x)^{2n})^{n+1}$;

$$\text{б) } \left(x^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{9}} \cdot x^{\frac{7}{12}}$$

Решение:

$$\text{а) } ((-x)^{2n})^{n+1} = (((-x)^2)^n)^{n+1} = ((x^2)^n)^{n+1} = (x^{2n})^{n+1} = x^{2n^2 + 2n}$$

$$\text{б) } \left(x^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{9}} \cdot x^{\frac{7}{12}} = x^{-\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 9}} \cdot x^{\frac{7}{12}} = x^{-\frac{5}{12}} \cdot x^{\frac{7}{12}} = x^{-\frac{5}{12} + \frac{7}{12}} = x^{\frac{2}{12}} = x^{\frac{1}{6}}$$

Задача 8. Сократите дробь:

$$\text{а) } \frac{x - 16x^{0,5}}{5x^{0,25} + 20}$$

Решение:

$$\frac{x - 16x^{0,5}}{5x^{0,25} + 20} = \frac{x^{0,5}(x^{0,5} - 16)}{5(x^{0,25} + 4)} = \frac{x^{0,5}((x^{0,25})^2 - 4^2)}{5(x^{0,25} + 4)} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot x^{0,5} \cdot (x^{0,25} - 4)$$

$$\text{б)} \frac{(x^{\frac{1}{2}} + 1) \cdot (x^{1,5} - 1)}{x + x^{\frac{1}{2}} + 1}$$

Решение:

$$\frac{(x^{\frac{1}{2}} + 1) \cdot (x^{1,5} - 1)}{x + x^{\frac{1}{2}} + 1} = \frac{(x^{\frac{1}{2}} + 1) \cdot (x^{\frac{3}{2}} - 1)}{x + x^{\frac{1}{2}} + 1} = \frac{(x^{\frac{1}{2}} + 1) \cdot ((x^{\frac{1}{2}})^3 - 1)}{x + x^{\frac{1}{2}} + 1} =$$

$$= (x^{\frac{1}{2}} + 1) \cdot (x^{\frac{1}{2}} - 1) = ((x^{\frac{1}{2}})^2 - 1^2) = x - 1$$

Задача 8. Выполните действия:

$$\text{а)} 15 \cdot a^{-5} : \frac{1}{3} \cdot a^4;$$

$$\text{б)} \frac{3}{4} \cdot x \cdot y^{-2} \cdot 6 \cdot x^{-3} \cdot y;$$

$$\text{в)} 12 c^2 p^4 : 4 c^{-2} p^{-2};$$

$$\text{г)} 0,8x^{-1} : 0,4x^{n-1}$$

Решение:

$$\text{а)} 15 \cdot a^{-5} \cdot \frac{1}{3} \cdot a^4 = 15 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^{-5} \cdot a^4 = 5 \cdot a^{-5+4} = 5 \cdot a^{-1}$$

$$\text{б)} \frac{3}{4} \cdot x \cdot y^{-2} \cdot 6 \cdot x^{-3} \cdot y = \frac{3}{4} \cdot 6 \cdot x^1 \cdot x^{-3} \cdot y^{-2} \cdot y^1 = 4,5 \cdot x^{-2} \cdot y^{-1}$$

$$\text{в)} 12^2 p^4 : 4 c^{-2} p^{-2} = 3 \cdot c^{2-(-2)} \cdot p^{4-(-2)} = 3 \cdot c^4 \cdot p^6$$

$$\text{г)} 0,8x^{-1} : 0,4x^{n-1} = 2x^{-1-(n-1)} = 2x^{-1-n+1} = 2x^{-n}$$

Задача 9. Упростите выражение:

$$\frac{x^{-2}y^{-1} + x^{-1}y^{-2}}{x^{-2} - y^{-2}} + x^3(x^2 - 2xy + y^2)^{-2}$$

и найдите его значение при $x = 1$; $y = 2$.

Решение:

Упростите данное выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{x^{-2}y^{-1} + x^{-1}y^{-2}}{x^{-2} - y^{-2}} + x^3(x^2 - 2xy + y^2)^{-2} = \\ & = \frac{x^{-2}y^{-2}(y+x)}{x^{-2}y^{-2}(y^2 - x^2)} + x^3((x-y)^2)^{-2} = \\ & = \frac{y+x}{(y-x)(y+x)} + x^3(x-y)^{-4} = \frac{1}{(y-x)} + \frac{x^3}{(x-y)^4} = \\ & = \frac{1}{(y-x)} + \frac{x^3}{(y-x)^4} = \frac{(y-x)^3 + x^3}{(y-x)^4} = \\ & = \frac{y^3 - 3y^2x + 3yx^2 - x^3 + x^3}{(y-x)^4} = \frac{y^3 - 3y^2x + 3yx^2}{(y-x)^4} = \\ & = \frac{y \cdot (y^2 - 3xy + 3x^2)}{(y-x)^4} \end{aligned}$$

Если $x = 1$; $y = 2$, то

$$\begin{aligned} & \frac{y \cdot (y^2 - 3xy + 3x^2)}{(y-x)^4} = \frac{2 \cdot (2^2 - 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2)}{(2-1)^4} = \\ & = \frac{2 \cdot (4 - 6 + 3)}{1} = 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

Ответ: значение данного выражения при $x = 1$; $y = 2$ равно 2.

VI. Определение арифметического корня. Свойства арифметических корней. Корень нечетной степени из отрицательного числа

Определение арифметического корня: арифметическим корнем n -ой степени из неотрицательного числа a назы-

вается неотрицательное число b , n -ая степень которого равна a , причем n — натуральное число, большее 1.

Обозначение: $\sqrt[n]{a} = b$; $a = b^n$; $a \geq 0$; $b \geq 0$; $n > 1$; $n \in \mathbb{N}$.

Свойства арифметических корней:

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, $a \geq 0$ — основное свойство корня;
2. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$, $a \geq 0$ — изменение степени корня;
3. $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k = \sqrt[n]{a^{mk}}$, $a \geq 0$ — возведение в степень;
4. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $a \geq 0$; $b \geq 0$ — корень из произведения;
5. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \geq 0$; $b \geq 0$ — корень из частного;
6. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, $a \geq 0$; $b > 0$ — извлечение корня из корня;
7. Тожество для корней четных степеней: $\sqrt{a^2} = |a|$;
 $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$; $a \geq 0$; $2k$ — четное число.

Если n — нечетное число, то корень из любого числа a существует. В случае, когда n — нечетное и $a < 0$, можно использовать знак корня (радикала) и для неарифметического корня. Это число обозначают $\sqrt[n]{a}$ и называют корнем нечетной степени из отрицательного числа a .

Задача 1. Найти значение выражения:

а) $\sqrt{0,0121}$; б) $\sqrt[8]{81^2}$; в) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$; г) $\sqrt[3]{27 \cdot 125}$

Решение:

а) $\sqrt{0,0121} = \sqrt{0,11^2} = 0,11$

б) $\sqrt[8]{81^2} = \sqrt[4 \cdot 2]{81^2} = \sqrt[4]{81} = 3$

$$в) \sqrt{5\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}} = \frac{9}{4} = 2,25$$

$$г) \sqrt[3]{27 \cdot 125} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{5^3} = 3 \cdot 5 = 15$$

Задача 2. Вынести множитель за знак корня:

$$а) \sqrt{288}; б) \sqrt[n]{x^{n+1}}; x \geq 0; в) \sqrt[3]{81a^4b^{3n}}; a \geq 0; b \geq 0;$$

$$г) \sqrt[4]{a^9b^{10}}; a \geq 0; b \geq 0$$

Решение:

$$а) \sqrt{288} = \sqrt{144 \cdot 2} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{12^2} \cdot \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

$$б) \sqrt[n]{x^{n+1}} = \sqrt[n]{x^n \cdot x} = \sqrt[n]{x^n} \cdot \sqrt[n]{x} = x \sqrt[n]{x}; x \geq 0$$

$$в) \sqrt[3]{81 \cdot a^4 \cdot b^{3n}} = \sqrt[3]{27 \cdot 3 \cdot a \cdot a^3 \cdot (b^n)^3} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{(b^n)^3} \cdot \sqrt[3]{3a} = \\ = 3 \cdot a \cdot b^n \cdot \sqrt[3]{3a}; a \geq 0; b \geq 0$$

$$г) \sqrt[4]{a^9 \cdot b^{10}} = \sqrt[4]{a^8 \cdot a \cdot b^8 \cdot b^2} = \sqrt[4]{(a^2)^4 \cdot (b^2)^4 \cdot a \cdot b^2} = \\ = \sqrt[4]{(a^2)^4} \cdot \sqrt[4]{(b^2)^4} \cdot \sqrt[4]{a \cdot b^2} = a^2 b^2 \sqrt[4]{ab^2}; a \geq 0; b \geq 0$$

Задача 3. Внесите множитель под знак корня:

$$а) 2\sqrt{5}; б) 3\sqrt[3]{2}; в) 2ab^3\sqrt{a}; a \geq 0; b \geq 0$$

$$г) 2x^2y\sqrt{\frac{1}{2xy}}, x > 0, y > 0$$

Решение:

$$а) 2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$$

$$б) 3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{54}$$

$$в) 2ab^3\sqrt{a} = \sqrt{2^2 a^2 (b^3)^2 \cdot a} = \sqrt{4a^3 b^6}; a \geq 0; b \geq 0$$

$$г) 2x^2y\sqrt{\frac{1}{2xy}} = \sqrt{2^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 \cdot \frac{1}{2xy}} = \sqrt{\frac{8x^6 y^3}{2xy}} = \sqrt{4x^5 y^2}, x > 0, y > 0$$

Задача 4. Приведите выражение к виду $a^{\frac{n}{b}}$, где a — рациональное число, b — натуральное число:

а) $\frac{5}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{15}{\sqrt[4]{27}}$

Решение:

а) $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2} = 2,5 \cdot \sqrt{2}$

б) $\frac{15}{\sqrt[4]{27}} = \frac{15 \cdot \sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3}} = \frac{15 \cdot \sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{15\sqrt[4]{3}}{3} = 5\sqrt[4]{3}$

Задача 5. Вычислить: $\left[a^{-\frac{3}{2}} b (ab^{-2})^{-\frac{1}{2}} (a^{-1})^{-\frac{2}{3}} \right]^3$ при $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Решение:

Упростим данное выражение:

$$\left[a^{-\frac{3}{2}} b (ab^{-2})^{-\frac{1}{2}} (a^{-1})^{-\frac{2}{3}} \right]^3 = \left[a^{-\frac{3}{2}} b a^{-\frac{1}{2}} b a^{\frac{2}{3}} \right]^3 = \left[a^{-\frac{4}{3}} b^2 \right]^3 =$$

$$= a^{-4} b^6 = \frac{b^6}{a^4}$$

Если $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, то

$$\frac{b^6}{a^4} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^6 : \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{2} \right)^6} : \frac{(\sqrt{2})^4}{2^4} = \frac{1}{4} : \frac{1}{4} = 1.$$

Ответ: 1.

Задача 6. Упростите выражения:

а) $(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)$; $a \geq 0$

Решение:

Упростим выражения, используя формулы сокращенного умножения:

$$(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1) = (\sqrt{a})^2 - 1^2 = a - 1, a \geq 0$$

б) $\sqrt[4]{x} \sqrt[3]{x}$, где $x \geq 0$

Решение:

$$\sqrt[4]{x} \sqrt[3]{x} = \sqrt[4]{x^3 \cdot x} = \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[12]{x^4} = \sqrt[3]{x}$$

в) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{7}(\sqrt{7} - \sqrt{3}) + \sqrt{3}(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})} = \\ &= \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{7 + 3}{7 - 3} = \frac{10}{4} = 2,5 \end{aligned}$$

г) $\sqrt{\frac{x}{x - a^2}} : \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x - a^2}}{\sqrt{x} + \sqrt{x - a^2}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x - a^2}}{\sqrt{x} - \sqrt{x - a^2}} \right)$

Решение:

Чтобы все корни были арифметическими, должно выполняться условие $x - a^2 > 0$.

Упростим данное выражение:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x}{x - a^2}} : \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x - a^2}}{\sqrt{x} + \sqrt{x - a^2}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x - a^2}}{\sqrt{x} - \sqrt{x - a^2}} \right) &= \\ = \sqrt{\frac{x}{x - a^2}} : \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x - a^2})^2 - (\sqrt{x} + \sqrt{x - a^2})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{x - a^2})(\sqrt{x} - \sqrt{x - a^2})} &= \\ = \sqrt{\frac{x}{x - a^2}} : \frac{(\sqrt{x})^2 - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x - a^2} + (\sqrt{x - a^2})^2 - (\sqrt{x})^2 -}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x - a^2})^2} &= \\ - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x - a^2} - (\sqrt{x - a^2})^2 &= \sqrt{\frac{x}{x - a^2}} : \frac{-4 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x - a^2}}{x - (x - a^2)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{x - a^2} : \frac{-4 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x - a^2}}{a^2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x - a^2}} \cdot \frac{a^2}{-4 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x - a^2}} =$$

$$= - \frac{\sqrt{x} \cdot a^2}{\sqrt{x - a^2} \cdot 4 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x - a^2}} = - \frac{a^2}{4(\sqrt{x - a^2})^2} = - \frac{a^2}{4(x - a^2)}$$

Ответ: $-\frac{a^2}{4(x - a^2)}$ при условии $x - a^2 > 0$, $a \neq 0$.

Задача 7. Исключите иррациональность в знаменателе:

а) $\frac{2x^2}{\sqrt{x}}; x > 0$

Решение:

Воспользуемся основным свойством дроби. Умножим числитель и знаменатель данной дроби на $\sqrt{x}$.

$$\frac{2x^2}{\sqrt{x}} = \frac{2 \cdot x^2 \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{2x^2\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{2x^2\sqrt{x}}{x} = 2x\sqrt{x}; x > 0$$

б) $\frac{a + b}{2\sqrt{a - b}}; a > b$

Решение:

Умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{a - b}$.

$$\frac{a + b}{2\sqrt{a - b}} = \frac{(a + b) \cdot \sqrt{a - b}}{2 \cdot \sqrt{a - b} \cdot \sqrt{a - b}} = \frac{(a + b) \cdot \sqrt{a - b}}{2(a - b)}; a > b.$$

в) $\frac{x}{\sqrt{x} + 1}; x \geq 0$

Решение:

Умножим числитель и знаменатель дроби на $(\sqrt{x} - 1)$

$$\frac{x}{\sqrt{x} + 1} = \frac{x \cdot (\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1) \cdot (\sqrt{x} - 1)} = \frac{x(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x})^2 - 1^2} = \frac{x \cdot (\sqrt{x} - 1)}{x - 1}; x \geq 0, x \neq 1$$

г) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}$

Решение:

Умножим числитель и знаменатель данной дроби на $(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}} &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}}{(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})} = \\ &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{7})^2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}}{3 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + 5 - 7} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}}{2\sqrt{15} + 1} \end{aligned}$$

Умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}}{2\sqrt{15} + 1}$ на $(2\sqrt{15} - 1)$.

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7})(2\sqrt{15} - 1)}{(2\sqrt{15} + 1)(2\sqrt{15} - 1)} &= \frac{2\sqrt{45} + 2\sqrt{75} - 2\sqrt{105} - \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7}}{(2\sqrt{15})^2 - 1^2} = \\ &= \frac{6\sqrt{5} + 10\sqrt{3} - 2\sqrt{105} - \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7}}{60 - 1} = \frac{5\sqrt{5} + 9\sqrt{3} + \sqrt{7} - 2\sqrt{105}}{59} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{5} + 9\sqrt{3} + \sqrt{7} - 2\sqrt{105}}{59}$.

Задача 8. Выполнить указанные действия:

а) $\left(6\sqrt[6]{a^5} - 3\sqrt[4]{a^3} - 2\sqrt[3]{a^2} \right) : 0,5\sqrt{a}$

Решение:

Для того чтобы выполнить указанные действия, необходимо от корней перейти к степеням.

$$\begin{aligned} \left(6\sqrt[6]{a^5} - 3\sqrt[4]{a^3} - 2\sqrt[3]{a^2} \right) : 0,5\sqrt{a} &= \left(6 \cdot a^{\frac{5}{6}} - 3 \cdot a^{\frac{3}{4}} - 2 \cdot a^{\frac{2}{3}} \right) : 0,5 \cdot a^{\frac{1}{2}} = \\ &= 12a^{\frac{5}{6} - \frac{1}{2}} - 6a^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} - 4a^{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} = 12a^{\frac{1}{3}} - 6a^{\frac{1}{4}} - 4a^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

При записи результата можно опять перейти к корням:

$$12a^{\frac{1}{3}} - 6a^{\frac{1}{4}} - 4a^{\frac{1}{6}} = 12\sqrt[3]{a} - 6\sqrt[4]{a} - 4\sqrt[6]{a}$$

Ответ: $12\sqrt[3]{a} - 6\sqrt[4]{a} - 4\sqrt[6]{a}$.

б) $\left(\sqrt[3]{-a^{-1}} \sqrt{b^{-\frac{1}{2}}} \cdot a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{a^{-1} b^{\frac{1}{3}}} \right)^4, a > 0, b > 0$

Решение:

Перейдем от корней к степеням:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt[3]{-a^{-1}} \sqrt{b^{-\frac{1}{2}}} \cdot a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{a^{-1} b^{\frac{1}{3}}} \right)^4 = \left(\sqrt[3]{-a^{-1} b^{-\frac{1}{4}}} \cdot a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{12}} \right)^4 = \\ & = \left(-a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{12}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{12}} \right)^4 = \left(-a \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{4}} \right)^4 = \\ & = \left(-a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \right)^4 = a^3 b^{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

Ответ: $a^3 b^{\frac{4}{3}}$.

$$в) \frac{1}{ab} \left(b^2 \sqrt[12]{\frac{a^5}{b^5}} \right)^3 + a^2 b \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{b}{a}}; a > 0, b > 0$$

Решение:

Перейдем от корней к степеням:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{ab} \left(b^2 \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{5}{12}} \right)^3 + a^2 \cdot b \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{4}} = \\ & = \frac{1}{ab} \cdot b^6 \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{5}{4}} + a^2 \cdot b \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{4}} = \\ & = b^5 \cdot a^{-1} \cdot a^{\frac{5}{4}} \cdot b^{-\frac{5}{4}} + a^{\frac{2}{4}} \cdot b^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{2}{4}} \cdot b^{\frac{3}{4}} = \\ & = a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{3}{4}} \cdot (b^3 + a^3) \end{aligned}$$

Ответ: $a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{3}{4}} \cdot (b^3 + a^3)$.

$$г) \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + 4\sqrt{a} \right) \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$$

Решение:Допустимые значения переменной a : $a > 0, a \neq 1$

$$\left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + 4\sqrt{a} \right) \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\sqrt{a} + 1)^2 - (\sqrt{a} - 1)^2 + 4\sqrt{a}(a - 1)}{a - 1} \cdot \frac{a - 1}{\sqrt{a}} = \\
 &= \frac{a + 2\sqrt{a} + 1 - a + 2\sqrt{a} - 1 + 4a\sqrt{a} - 4\sqrt{a}}{a - 1} \cdot \frac{a - 1}{\sqrt{a}} = \\
 &= \frac{4a\sqrt{a}}{a - 1} \cdot \frac{a - 1}{\sqrt{a}} = \frac{4 \cdot a \cdot \sqrt{a} \cdot (a - 1)}{(a - 1) \cdot \sqrt{a}} = 4a
 \end{aligned}$$

Ответ: $4a$ при $a > 0$; $a \neq 1$.

VII. Алгебраические выражения.

Тождественные преобразования алгебраических выражений

Алгебраические выражения могут быть рациональными и иррациональными. Рациональные и иррациональные выражения разделяются на целые и дробные.

Целые рациональные выражения — многочлены и одночлены.

Дробные рациональные выражения — рациональные дроби и выражения, к ним приводящиеся.

Рациональная дробь — выражение вида $\frac{a}{b}$, где a и b — многочлены одной или нескольких переменных.

Основное свойство алгебраической дроби аналогично основному свойству обыкновенной дроби: при любых значениях a , b , c , где $b \neq 0$, $c \neq 0$, верно равенство

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

Сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень рациональных дробей производится так же, как и сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень обыкновенных дробей.

Целое рациональное выражение имеет смысл при любых значениях переменных, входящих в него. Дробное рациональное выражение имеет смысл при тех значениях

переменных, которые не обращают знаменатель в выражение, значение которого равно нулю.

Иррациональные выражения — алгебраические выражения, в которых используется извлечение корня из переменных или возведение переменных в дробную степень. При преобразовании иррациональных выражений используются свойства корней и свойства степеней с рациональным показателем.

Задача 1. Произвести указанные действия:

$$а) \frac{a}{x^2y} + \frac{a}{xy^2}$$

Решение:

Приведем алгебраические дроби к общему знаменателю и выполним сложение:

$$\frac{a}{x^2y} + \frac{a}{xy^2} = \frac{ay + ax}{x^2y^2} = \frac{a(x+y)}{x^2y^2}$$

Допустимые значения переменных: $x \neq 0$; $y \neq 0$.

$$б) \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}$$

Решение:

Приведем алгебраические дроби к общему знаменателю и выполним вычитание:

$$\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \frac{x+y-x-y}{(x-y)(x+y)} = \frac{2y}{x^2-y^2}$$

Допустимые значения переменных: $x \neq \pm y$.

$$в) \frac{a+2b}{3a-3b} - \frac{3c-a}{2a-2c} + \frac{a^2-bc}{a^2-ac+bc-ab}$$

Решение:

Приведем дроби к общему знаменателю и выполним указанные действия:

$$\begin{aligned} & \frac{a+2b}{3a-3b} - \frac{3c-a}{2a-2c} + \frac{a^2-bc}{a^2-ac+bc-ab} = \\ & = \frac{a+2b}{3(a-b)} - \frac{3c-a}{2(a-c)} + \frac{a^2-bc}{a(a-c)+b(c-a)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a+2b}{3(a-b)} - \frac{3c-a}{2(a-c)} + \frac{a^2-bc}{a(a-c)-b(a-c)} = \\
 &= \frac{a+2b}{3(a-b)} - \frac{3c-a}{2(a-c)} + \frac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)} = \\
 &= \frac{2(a+2b)(a-c) - 3(a-b)3c-a + 6(a^2-bc)}{6(a-b)(a-c)} = \\
 &= \frac{2(a^2+2ab-ac-2bc) - 3(3ac-3bc-a^2+ab) + 6a^2-6bc}{6(a-b)(a-c)} = \\
 &= \frac{2a^2+4ab-2ac-4bc-9ac+9bc+3a^2-3ab+6a^2-6bc}{6(a-b)(a-c)} = \\
 &= \frac{11a^2+ab-11ac-bc}{6(a-b)(a-c)} = \frac{11a(a-c)+b(a-c)}{6(a-b)(a-c)} = \\
 &= \frac{(11a+b)(a-c)}{6(a-b)(a-c)} = \frac{11a+b}{6(a-b)}
 \end{aligned}$$

Допустимые значения переменных: $a \neq b$; $a \neq c$.

$$\text{г) } \frac{m-n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} - \frac{m^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}}{m-n}$$

Решение:

Заменим корни степенями, приведем дроби к общему знаменателю и выполним вычитание:

$$\begin{aligned}
 &\frac{m-n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} - \frac{m^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}}{m-n} = \frac{m-n}{\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}} - \frac{m^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}}{m-n} = \\
 &= \frac{(m-n)(m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}) - (m^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}})}{m-n} = \\
 &= \frac{m \cdot m^{\frac{1}{2}} - n \cdot m^{\frac{1}{2}} + m \cdot n^{\frac{1}{2}} - n \cdot n^{\frac{1}{2}} - m^{\frac{3}{2}} + n^{\frac{3}{2}}}{m-n} = \\
 &= \frac{m^{\frac{3}{2}} - n \cdot m^{\frac{1}{2}} + m \cdot n^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{3}{2}} - m^{\frac{3}{2}} + n^{\frac{3}{2}}}{m-n} = \frac{m \cdot n^{\frac{1}{2}} - n \cdot m^{\frac{1}{2}}}{m-n} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{m^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot (m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}})}{m - n} = \frac{m^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot (m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}})}{(m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}) \cdot (m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}})} = \frac{m^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}}$$

Можно записать получившийся результат с помощью корней:

$$\frac{m^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{m} + \sqrt{n}}$$

Допустимые значения переменных: $m \geq 0$, $n \geq 0$,
 $m \neq n$.

Задача 2. Упростить выражения и найти их значения при заданных значениях переменных:

а) $\frac{b+2}{b} \cdot \frac{b^2}{(b+2)^2}$ при $b=6$

Решение:

Упростим данное выражение:

$$\frac{b+2}{b} \cdot \frac{b^2}{(b+2)^2} = \frac{(b+2) \cdot b^2}{b \cdot (b+2)^2} = \frac{b}{b+2}$$

Число 6 является допустимым значением переменной b .

Если $b=6$, то

$$\frac{b}{b+2} = \frac{6}{6+2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Ответ: значение данного выражения при $b=6$ равно 0,75.

б) $\frac{x^2}{6y(x+y)} - \left(\frac{x-y}{2x+2y} + \frac{xy}{x^2-y^2} \right) \cdot \frac{x-y}{3y}$ при $x=3$; $y=-2$

Решение:

Упростим данное выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{6y(x+y)} - \left(\frac{x-y}{2x+2y} + \frac{xy}{x^2-y^2} \right) \cdot \frac{x-y}{3y} = \\ & = \frac{x^2}{6y(x+y)} - \left(\frac{x-y}{2(x+y)} + \frac{xy}{(x+y)(x-y)} \right) \cdot \frac{x-y}{3y} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^2}{6y(x+y)} - \frac{(x-y)^2 + 2xy}{2(x+y)(x-y)} \cdot \frac{x-y}{3y} = \\
 &= \frac{x^2}{6y(x+y)} - \frac{x^2 - 2xy + y^2 + 2xy}{2(x+y)(x-y)} \cdot \frac{x-y}{3y} = \\
 &= \frac{x^2}{6y(x+y)} - \frac{(x^2 + y^2) \cdot (x-y)}{2 \cdot (x+y) \cdot (x-y) \cdot 3y} = \\
 &= \frac{x^2}{6y(x+y)} - \frac{x^2 + y^2}{6y(x+y)} = \frac{x^2 - x^2 - y^2}{6y(x+y)} = \frac{-y^2}{6y(x+y)} = -\frac{y}{6y(x+y)}
 \end{aligned}$$

Число 3 является допустимым значением переменной x .
Число -2 является допустимым значением переменной y .

Если $x = 3$; $y = -2$, то

$$-\frac{y}{6y(x+y)} = -\frac{-2}{6(3-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: при $x = 3$; $y = -2$ значение данного выражения равно $\frac{1}{3}$.

$$\text{в) } \left(\frac{3a^{\frac{1}{6}} - 2b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}} - \frac{3}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}} \right) : \frac{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{5}{6}}} \text{ при } a=1; b=2.$$

Решение:

Упростим данное выражение:

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{3a^{\frac{1}{6}} - 2b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}} - \frac{3}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}} \right) : \frac{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{5}{6}}} = \\
 &= \frac{(3a^{\frac{1}{6}} - 2b^{\frac{1}{6}})(a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}) - 3(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})}{(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}})} : \frac{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{5}{6}}} = \\
 &= \frac{3a^{\frac{1}{3}} - 2b^{\frac{1}{6}}a^{\frac{1}{6}} + 3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}} - 2b^{\frac{1}{3}} - 3a^{\frac{1}{3}} + 3b^{\frac{1}{3}}}{(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}})} : \frac{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{5}{6}}} = \\
 &= \frac{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}}}{(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}})} : \frac{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{5}{6}}} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{b^{\frac{1}{6}}(a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}})b^{\frac{5}{6}}}{(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})} = \\
 &= \frac{b}{(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})} = \frac{b}{a - b}
 \end{aligned}$$

Число 1 допустимое значение переменной a .

Число 2 допустимое значение переменной b .

Если $a = 1$; $b = 2$, то

$$\frac{b}{a - b} = \frac{2}{1 - 2} = -2.$$

Ответ: при $a = 1$; $b = 2$ значение данного выражения равно -2 .

$$\begin{aligned}
 \text{г) } &\frac{m^{-2}n^{-1} - m^{-1}n^{-2}}{m^{-2} - n^{-2}} - \frac{1}{m}(mn^{-1} + 2 + m^{-1}n)^{-1} \text{ при} \\
 &m = 0,003; n = 0,007.
 \end{aligned}$$

Решение:

Упростим данное выражение, используя свойства степеней, формулы сокращенного умножения.

$$\begin{aligned}
 &\frac{m^{-2}n^{-1} - m^{-1}n^{-2}}{m^{-2} - n^{-2}} - \frac{1}{m}(mn^{-1} + 2 + m^{-1}n)^{-1} = \\
 &= \frac{m^{-2}n^{-2}(n - m)}{m^{-2}n^{-2}(n^2 - m^2)} - \frac{1}{m(mn^{-1} + 2 + m^{-1}n)} = \\
 &= \frac{n - m}{(n - m)(n + m)} - \frac{1}{m \cdot m^{-1} \cdot n^{-1} \cdot (m^2 + 2mn + n^2)} = \\
 &= \frac{1}{n + m} - \frac{n}{(n + m)^2} = \frac{n + m - m}{(n + m)^2} = \frac{m}{(n + m)^2}
 \end{aligned}$$

Число 0,003 допустимое значение переменной m .

Число 0,007 допустимое значение переменной n .

Если $m = 0,003$; $n = 0,007$, то

$$\frac{m}{(n + m)^2} = \frac{0,003}{(0,003 + 0,007)^2} = \frac{0,003}{0,01^2} = 30.$$

Ответ: при $m = 0,003$; $n = 0,007$ значение данного выражения равно 30.

VIII. Линейные уравнения. Системы линейных уравнений

Линейное уравнение с одной переменной — уравнение вида: $ax + b = 0$, где a и b — некоторые постоянные.

Если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственный корень

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Если $a = 0$ и $b = 0$, то корнем уравнения является любое действительное число.

Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение не имеет корней.

Линейное уравнение с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ — уравнение вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, где $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ — некоторые постоянные.

Система линейных уравнений — система, все уравнения которой линейные. В школьной программе изучаются в основном системы из двух уравнений с двумя переменными. Прежде чем решать систему линейных уравнений, можно определить число ее решений.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное решение.

Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений.

Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечное множество решений.

Способы решения систем уравнений:

1. Способ подстановки заключается в том, что в одном из уравнений выражают одну переменную через другую. Полученное выражение подставляют в другое уравнение, которое после этого обращается в уравнение с одной переменной, а затем решают его. Получившееся

- значение этой переменной подставляют в любое уравнение исходной системы и находят значение второй переменной.
2. Способ сложения заключается в том, что если данная система состоит из уравнений, которые при почленном сложении образуют уравнение с одной переменной, то, решив это уравнение, мы получим значение одной из переменных. Значение второй переменной находят как и в способе подстановки.
 3. Графический способ заключается в том, что в одной системе координат строятся графики уравнений. Если графики пересекаются, то координаты точки пересечения являются решением данной системы. Если графики уравнений являются параллельными прямыми, то система не имеет решений. Если графики уравнений сольются в одну прямую, то система имеет бесконечное множество решений.

Задача 1. Решить уравнение:

а) $5x + 4 = 0$

Решение:

Коэффициент при переменной не равен нулю, следовательно, уравнение имеет единственный корень:

$$x = -\frac{4}{5}.$$

Ответ: $x = -\frac{4}{5}.$

б) $11x + 5 = 5x - 12 - 4 - x$

Решение:

Упростим выражение, стоящее в правой части уравнения:

$$11x + 5 = 4x - 16$$

Соберем слагаемые с переменной в левой части, а числа в правой. Напомним, что при переносе слагаемого

из одной части в другую знак слагаемого меняется на противоположный.

$$11x - 4x = -16 - 5$$

Приведем подобные слагаемые:

$$7x = -21$$

Разделив обе части уравнения на 7, найдем решение уравнения.

$$x = -3$$

Ответ: 3.

$$\text{в) } \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 7$$

Решение:

Преобразуем выражение, стоящее в левой части уравнения:

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 7;$$

$$\frac{3x - 2x}{6} = 7;$$

$$\frac{x}{6} = 7$$

Умножив обе части уравнения на 6, найдем решение уравнения.

$$x = 42.$$

Ответ: 42.

$$\text{г) } 8x - (x - 1) = 5 + 7x$$

Решение:

Упростим выражение, стоящее в левой части уравнения:

$$8x - x + 1 = 5 + 7x;$$

$$7x + 1 = 5 + 7x$$

Соберем слагаемые с переменной в левой части, а числа в правой части уравнения. Приведем подобные слагаемые.

$$7x - 7x = 5 - 1;$$

$$0x = 4$$

Очевидно, что уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений.

$$д) 2x(3x - 2) - 3 \left[1 - (2 - x)(2x + 3) - \frac{x - 3}{2} \right] = 13$$

Решение:

Упростим выражение, стоящее в левой части уравнения:

$$6x^2 - 4x - 3 \left(1 - 4x + 2x^2 - 6 + 3x - \frac{x - 3}{2} \right) = 13;$$

$$6x^2 - 4x - 3 \left(-5 - x + 2x^2 - \frac{x - 3}{2} \right) = 13;$$

$$15 - x + \frac{3(x - 3)}{2} = 13;$$

$$\frac{30 - 2x + 3x - 9}{2} = 13;$$

$$\frac{21 + x}{2} = 13$$

Умножим обе части уравнения на 2:

$$21 + x = 26.$$

Перенесем число 21 в правую часть уравнения, изменив при этом знак:

$$x = 26 - 21;$$

$$x = 5.$$

Ответ: 5.

Задача 2. Решить уравнение с параметрами:

$$а) 6(ax - 1) - a = 2(a + x) - 7$$

Решение:

Преобразуем левую и правую части уравнения:

$$6ax - 6 - a = 2a + 2x - 7;$$

$$6ax - 2x = 2a + a + 6 - 7;$$

$$6ax - 2x = 3a - 1$$

$$2x(3a - 1) = 3a - 1$$

Если $3a - 1 \neq 0$, то есть $a \neq \frac{1}{3}$, то

$$x = \frac{3a - 1}{2(3a - 1)} = \frac{1}{2}$$

Если $a = \frac{1}{3}$, то $3a - 1 = 0$ и уравнение принимает вид:

$$x \cdot 0 = 0$$

Такое уравнение имеет бесконечно много решений.

Ответ: если $a \neq \frac{1}{3}$, то $x = \frac{1}{2}$; если $a = \frac{1}{3}$, то x — любое число.

$$б) \frac{x}{a} - 1 : \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) = 1 : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$$

Решение:

При $a = 0$ уравнение не имеет смысла.

При $b = 0$ уравнение не имеет смысла.

При $a = \pm b$ значения выражений $1 - \frac{a^2}{b^2}$ и $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ равны нулю, следовательно, уравнение не имеет смысла.

Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq \pm b$, то преобразуем правую и левую части уравнения и найдем единственное решение.

$$\frac{x}{a} - 1 : \frac{b^2 - a^2}{b^2} = 1 : \frac{a^2 - b^2}{ab};$$

$$\frac{x}{a} - \frac{b^2}{b^2 - a^2} = \frac{ab}{a^2 - b^2};$$

$$\frac{x}{a} = \frac{ab}{a^2 - b^2} + \frac{b^2}{b^2 - a^2};$$

$$\frac{x}{a} = \frac{ab}{a^2 - b^2} - \frac{b^2}{a^2 - b^2};$$

$$\frac{x}{a} = \frac{b(a - b)}{a^2 - b^2};$$

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{a + b};$$

$$x = \frac{ab}{a + b}$$

Ответ: при $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq \pm b$; $x = \frac{ab}{a+b}$;

при $a = 0$ уравнение не имеет смысла;

при $b = 0$ уравнение не имеет смысла;

при $a = b$ уравнение не имеет смысла;

при $a = -b$ уравнение не имеет смысла.

в) $a^2x = a(x+2) - 2$

Решение:

Преобразуем правую и левую части уравнения:

$$a^2x = ax + 2a - 2;$$

$$a^2x - ax = 2a - 2;$$

$$x(a^2 - a) = 2a - 2$$

Рассмотрим значения параметра a , при которых значение выражения $a^2 - a$ равно нулю.

1. Если $a = 0$, то $a^2 - a = 0$ и $2a - 2 = -2$. Уравнение принимает вид:

$$x \cdot 0 = -2$$

Такое уравнение не имеет решений.

2. Если $a = 1$, то $a^2 - a = 0$ и $2a - 2 = 0$. Уравнение принимает вид:

$$x \cdot 0 = 0$$

Такое уравнение имеет бесконечно много решений.

3. Если $a \neq 0$ и $a \neq 1$, то уравнение имеет единственное решение:

$$x = \frac{2a - a}{a^2 - a} = \frac{2(a - 1)}{a(a - 1)} = \frac{2}{a}.$$

Ответ: при $a = 0$ уравнение не имеет решений;

при $a = 1$ x — любое число;

при $a \neq 0$, $a \neq 1$; $x = \frac{2}{a}$.

$$\begin{aligned} \text{г) } [(n-1)^2 + n] : \left[\frac{(n+1)^3}{3n} - n - 1 \right] = \\ = x : \left[\frac{(n-1)^2}{4n} + 1 \right] \end{aligned}$$

Решение:

Найдем значения параметра n , при которых уравнение не имеет смысла:

1. Очевидно, что при $n = 0$ уравнение теряет смысл, так как на ноль делить нельзя.

2. Выражение $\frac{(n+1)^3}{3n} - n - 1$ не должно принимать значение, равное нулю, так как на ноль делить нельзя. Найдем значения n , при которых это выражение будет равно нулю.

$$\frac{(n+1)^3}{3n} - n - 1 = 0;$$

$$\frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 3n^2 - 3n}{3n} = 0;$$

$$\frac{n^3 + 1}{3n} = 0;$$

$$n^3 + 1 = 0;$$

$$n^3 = -1;$$

$$n = -1$$

При $n = -1$ значение выражения $\frac{(n+1)^3}{3n} - n - 1$ равно нулю, следовательно, при $n = -1$ уравнение теряет смысл.

3. Также не должно равняться нулю значение выражения $\frac{(n-1)^2}{4n} + 1$. Найдем значения n , при которых это выражение равно нулю.

$$\frac{(n-1)^2}{4n} + 1 = 0;$$

$$\frac{n^2 - 2n + 1 + 4n}{4n} = 0;$$

$$\frac{n^2 + 2n + 1}{4n} = 0;$$

$$\frac{(n+1)^2}{4n} = 0;$$

$$n + 1 = 0;$$

$$n = -1$$

При $n = -1$ значение выражения $\frac{(n-1)^2}{4n} + 1$ равно нулю. Мы уже выяснили, что при $n = -1$ уравнение теряет смысл.

4. Найдем решение уравнения при $n \neq 0, n \neq -1$.

Преобразуем правую и левую части уравнения:

$$(n^2 - 2n + 1 + n) : \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 3n^2 - 3n}{3n} =$$

$$= x : \frac{n^2 - 2n + 1 + 4n}{4n};$$

$$\frac{(n^2 - n + 1) \cdot 3n}{n^3 + 1} = x \cdot \frac{4n}{(n+1)^2};$$

$$x = \frac{3n(n+1)^2}{(n+1)4n};$$

$$x = \frac{3}{4}(n+1)$$

Ответ: при $n = 0$ уравнение не имеет смысла;
при $n = -1$ уравнение не имеет смысла;
при $n \neq -1, n \neq 0; x = \frac{3}{4}(n+1)$.

Задача 3. При каком значении параметра b уравнение $bx + 7 = 4x$ имеет корень, равный 10?

Решение:

Перенесем 7 в правую часть уравнения, $4x$ перенесем в левую часть уравнения, поменяв при этом знак на противоположный:

$$bx - 4x = -7; x(b-4) = -7.$$

Если $b-4 \neq 0$, то есть $b \neq 4$, то уравнение имеет единственный корень:

$$x = -\frac{7}{b-4} = \frac{7}{4-b}$$

Найдем, при каком значении параметра $b, x = 10$.

$$10 = \frac{7}{4-b}$$

Решим получившееся уравнение относительно b :

$$10b - 40 = -7;$$

$$10b = 40 - 7;$$

$$10b = 33; b = 3,3.$$

Ответ: при $b = 3,3$, $x = 10$.

Задача 4. Решить уравнение $a - \frac{a+b}{c} = b - \frac{a-b}{c}$:

а) относительно a ; б) относительно b .

Решение:

а) Решим уравнение относительно a , a будем считать переменной, b и c — параметрами.

При $c = 0$ уравнение не имеет смысла. Если $c \neq 0$, то уравнение имеет смысл. Решим его.

$$\frac{ac - a - b}{c} = \frac{bc - a + b}{c};$$

$$ac - a - b = bc - a + b;$$

$$ac - a + a = b + bc + b;$$

$$ac = 2b + bc;$$

$$a = \frac{b(2 + a)}{c}$$

б) Решим уравнение $a - \frac{a+b}{c} = b - \frac{a-b}{c}$ относительно

b , b будем считать переменной, a и c — параметрами.

При $c = 0$ уравнение не имеет смысла. Если $c \neq 0$, то уравнение имеет смысл. Решим его.

$$\frac{ac - a - b}{c} = \frac{bc - a + b}{c};$$

$$bc + b + b = ac;$$

$$2b + bc = ac;$$

$$b(2 + c) = ac$$

1. При $c = -2$ и $a = 0$ уравнение принимает вид:

$$b \cdot 0 = 0$$

Такое уравнение имеет бесконечно много решений.

2. При $c = -2$ и $a \neq 0$ уравнение принимает вид:

$$b \cdot 0 = -2a$$

Такое уравнение не имеет решений.

3. При $c \neq -2$ и $a \neq 0$ уравнение имеет единственное решение:

$$b = \frac{ac}{2 + c}$$

Задача 5. Решить систему линейных уравнений:

$$a) \begin{cases} 5x - y = 5 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Решение:

Определим, сколько решений имеет система.

$$\frac{5}{1} \neq \frac{-1}{1},$$

следовательно, система имеет единственное решение.

Решим систему способом подстановки. Выразим переменную y из первого уравнения:

$$y = 5x - 5$$

Подставим во второе уравнение системы вместо y выражение $5x - 5$, получим уравнение с одной переменной:

$$x + (5x - 5) = 1$$

Найдем из этого уравнения значение переменной x :

$$x + 5x - 5 = 1;$$

$$6x = 5 + 1;$$

$$6x = 6;$$

$$x = 1.$$

Так как $y = 5x - 5$, а $x = 1$, найдем значение переменной y :

$$y = 5 \cdot 1 - 5$$

$$y = 0.$$

Пара $(1; 0)$ — решение системы.

Ответ: $(1; 0)$.

$$б) \begin{cases} 3x + 4y = 17 \\ 10x - 4y = 9 \end{cases}$$

Решение:

Определим, сколько решений имеет система.

$$\frac{3}{10} \neq \frac{4}{-4},$$

следовательно, система имеет единственное решение.

Решим систему способом сложения. Сложив почленно уравнения системы, получим:

$$13x = 26;$$

$$x = 2.$$

Подставим это значение переменной x в первое (или второе) уравнение системы и получим уравнение с одной переменной:

$$3 \cdot 2 + 4y = 17;$$

$$6 + 4y = 17;$$

$$4y = 11;$$

$$y = 2,75.$$

Пара $(2; 2,75)$ — решение системы.

Ответ: $(2; 2,75)$.

$$\text{в) } \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 1 \end{cases}$$

Решение:

Определим, сколько решений имеет система.

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{7}{1},$$

следовательно, данная система не имеет решений.

Ответ: нет решений.

$$\text{г) } \begin{cases} 0,5x - y = 4 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$$

Решение:

Определим, сколько решений имеет система.

$$\frac{0,5}{1} = \frac{-1}{-2} = \frac{4}{8},$$

следовательно, данная система имеет бесконечно много решений.

Переменные связаны следующей зависимостью:

$$x = 2y + 8.$$

Любая пара $(2t + 8; t)$, где $t \in R$, является решением данной системы.

Ответ: $(2t + 8; t)$, где $t \in R$.

$$д) \begin{cases} \frac{1}{2} \left(y + \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{5} (x + 2) = 1,1 \\ x - 2y + 4 = \frac{1}{4} \left[2x + 3 \left(y - \frac{1}{2} \right) \right] \end{cases}$$

Решение:

Преобразуем правые и левые части уравнений.

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}x - \frac{2}{5} = 1,1 \\ x - 2y + 4 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - \frac{3}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y}{2} + \frac{x}{20} = \frac{3}{2} \\ \frac{x}{2} - \frac{11y}{4} = -\frac{35}{8} \end{cases}$$

Приведем дроби в первом уравнении к знаменателю 20, а во втором уравнении к знаменателю 8:

$$\begin{cases} \frac{10y}{20} + \frac{x}{20} = \frac{30}{20} \\ \frac{4x}{8} - \frac{22y}{8} = -\frac{35}{8} \end{cases}$$

Каждый член первого уравнения умножим на 20, а второго уравнения умножим на 8, получим:

$$\begin{cases} 10y + x = 30 \\ 4x - 22y = -35 \end{cases}$$

Решим полученную систему способом подстановки. Выразим переменную x из первого уравнения и подставим во второе:

$$\begin{cases} x = 30 - 10y \\ 4(30 - 10y) - 22y = -35 \\ x = 30 - 10y \\ 62y = 155 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 30 - 10y \\ y = 2,5 \\ x = 5 \\ y = 2,5 \end{cases}$$

Ответ: (5; 2,5).

Задача 6. Решите систему графически:

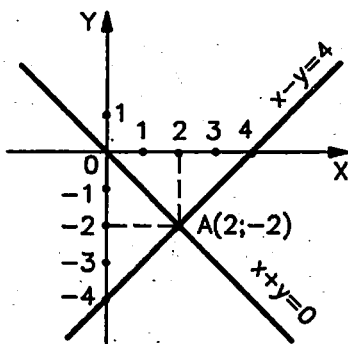
а) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 4 \end{cases}$

Решение:

Построим в одной системе координат графики уравнений системы. Графиками линейных уравнений являются прямые. Для построения прямых достаточно знать координаты двух точек.

$x + y = 0$		
x	0	2
y	0	-2

$x - y = 4$		
x	0	4
y	-4	0



$A(2; -2)$ — точка пересечения графиков.

Пара (2; -2) — решение данной системы.

Ответ: (2; -2).

б) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 0,5y = 5 \end{cases}$

Решение:

Построим в одной системе координат графики уравнений системы.

$$2x - y = 1$$

x	0	2
y	-1	3

$$x - 0,5y = 5$$

x	0	5
y	-10	0

Так как графики уравнений являются параллельными прямыми, данная система не имеет решений.

Ответ: нет решений.

$$\text{в) } \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

Решение:

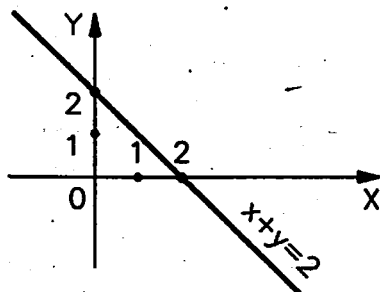
Построим в одной системе координат графики уравнений.

$$x + y = 2$$

x	0	2
y	2	0

$$2x + 2y = 4$$

x	0	2
y	2	0



Так как графики уравнений слились в одну прямую, данная система имеет бесконечно много решений вида $(t, 2 - t)$, где $t \in R$.

Ответ: бесконечно много решений вида $(t, 2 - t)$, где $t \in R$.

Задача 7. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} ax - (a + 1)y = b \\ 7ax - 28y = 6(a + 4) \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

Решение:

Если коэффициенты при переменных x и y и свободные члены пропорциональны, то система имеет бесконечное множество решений, то есть должно выполняться:

$$\frac{a}{7a} = \frac{a+1}{28} = \frac{6}{6(a+4)} \text{ или } \frac{1}{7} = \frac{a+1}{28} = \frac{1}{a+4}$$

Рассмотрим пропорцию

$$\frac{a+1}{28} = \frac{1}{7}$$

Найдем из нее значение a :

$$a+1=4;$$

$$a=3.$$

Рассмотрим пропорцию

$$\frac{1}{a+4} = \frac{1}{7}$$

Найдем из нее значение a :

$$a+4=7;$$

$$a=3.$$

Равенство $\frac{a}{7a} = \frac{a+1}{28} = \frac{6}{6(a+4)}$ верно при $a=3$.

Ответ: при $a=3$ система имеет бесконечно много решений.

IX. Квадратные уравнения. Уравнения, сводящиеся к квадратным уравнениям. Дробные уравнения. Разложение квадратного трехчлена на множители. Система уравнений второй степени

Квадратное уравнение — уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$. Корнями квадратного уравнения называются значения переменной, при которых уравнение обращается в верное равенство. Квадратное уравнение может иметь два, один или ни одного корня. Чтобы определить количество корней квадратного уравнения, необходимо найти дискриминант квадратного уравнения $D = b^2 - 4ac$.

Если $D > 0$, то уравнение имеет два корня.

Если $D = 0$, то уравнение имеет один корень.

Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

Корни квадратного уравнения можно найти по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Если второй коэффициент b равен четному числу, то корни квадратного уравнения можно найти по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ где } k = \frac{b}{2}, D_1 = k^2 - ac.$$

Если первый коэффициент a равен единице, то уравнение называется приведенным.

Если $b = 0$ или $c = 0$, то квадратное уравнение называется неполным. Неполное квадратное уравнение удобно решать, разложив на множители левую часть уравнения.

С квадратными уравнениями связана теорема Виета.

Прямая теорема Виета утверждает: если у квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ есть корни x_1 и x_2 , то выполняются соотношения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Иногда с помощью обратной теоремы Виета удобно находить корни квадратного уравнения. Обратная теорема Виета утверждает: если для некоторых постоянных a , b , c существуют числа x_1 и x_2 , удовлетворяющие соотношениям:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases},$$

то эти числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

Биквадратное уравнение — уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$.

Дробное уравнение — уравнение вида $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$, то $p(x)$

и $q(x)$ — некоторые многочлены. Дробное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} p(x) = 0 \\ q(x) \neq 0 \end{cases}$$

Решение дробного уравнения можно разбить на два этапа:

- 1) решить уравнение $p(x) = 0$;
- 2) проверить условие $q(x) \neq 0$.

Квадратный трехчлен — многочлен второй степени с одной переменной $ax^2 + bx + c$, где x — переменная, a , b — коэффициенты, c — свободный член, $a \neq 0$.

Корнями квадратного трехчлена являются значения переменной, при которых значение квадратного трехчлена равно нулю.

Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена, то его можно разложить на множители следующим способом:

$$ax^2 + bx + c = 0 = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Система уравнений второй степени — система, состоящая из двух уравнений второй степени или из одного уравнения первой степени, а другого — второй степени. При решении уравнений второй степени используются

способ подстановки, способ сложения, графический способ (см. *Линейные уравнения. Системы линейных уравнений*), способ введения новых переменных.

Способ введения новых переменных заключается в том, что вводится новая переменная только в одно уравнение или две новые переменные сразу для обоих уравнений, далее уравнение или уравнения решаются относительно новых переменных, после этого остается уже решить более простую систему уравнений, из которой находят искомое решение.

Задача 1. Решить неполное квадратное уравнение:

а) $4x^2 - 1 = 0$

Решение:

Решим данное уравнение, разложив на множители выражение $4x - 1$:

$$4x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1)$$

Получим уравнение:

$$(2x - 1)(2x + 1) = 0$$

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другой при этом не теряет смысл.

$$2x - 1 = 0 \text{ или } 2x + 1 = 0$$

$$x = 0,5 \text{ или } x = -0,5$$

Ответ: $-0,5; 0,5$

б) $x^2 + 3x = 0$

Решение:

Решим данное уравнение, разложив на множители выражение $x^2 + 3x$:

$$x^2 + 3x = x(x + 3)$$

Получим равносильное уравнение:

$$x(x + 3) = 0.$$

Следовательно, $x = 0$ или $x = -3$.

Ответ: $-3; 0$.

в) $x^2 + 7 = 0$

Решение:

Рассмотрим выражение, стоящее в левой части уравнения.

$x^2 \geq 0$ при любом значении x , следовательно, $x^2 + 7 > 0$ при любом значении x .

Можно сделать вывод, что данное уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Задача 2. Вычислите дискриминант и укажите число корней уравнения:

а) $x^2 + x + 2 = 0$

Решение:

Вычислим дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac$$

$$b = 1; a = 1; c = 2;$$

$$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7 < 0$$

Так как дискриминант меньше нуля, следовательно, уравнение не имеет корней.

Ответ: $D = -7$; корней нет.

б) $5x^2 - 3x - 4 = 0$

Решение:

Вычислим дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac; a = 5; b = -3; c = -4.$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4) = 9 + 80 = 89 > 0$$

Так как дискриминант больше нуля, следовательно, уравнение имеет два корня.

Ответ: $D = 89$; два корня.

в) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

Решение:

Вычислим дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac; a = 9; b = 6; c = 1.$$

$$D = 36 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$$

Так как дискриминант равен нулю, следовательно, уравнение имеет один корень.

Ответ: $D = 0$; один корень.

Задача 3. Решите уравнение:

а) $2x^2 - 9x - 5 = 0$

Решение:

Вычислим дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac; a = 2; b = 9; c = -5$$

$$D = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 81 + 40 = 121 > 0$$

Так как дискриминант больше нуля, то уравнение имеет два корня. Найдем по формуле корни данного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{9 + 11}{4} = \frac{20}{4} = 5;$$

$$x_2 = \frac{9 - 11}{4} = -\frac{2}{4} = -0,5$$

Ответ: $-0,5$; 5 .

б) $4x^2 - 8x + 3 = 0$

Решение:

Второй коэффициент в уравнении является четным числом. Найдем дискриминант для четного второго коэффициента:

$$D_1 = k^2 - ac; a = 4; k = -4; c = 3;$$

$$D_1 = 16 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$

Так как дискриминант больше нуля, то уравнение имеет два корня. Найдем корни по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

$$x_1 = \frac{4 + 2}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5;$$

$$x_2 = \frac{4-2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Ответ: 0,5; 1,5.

$$в) \frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{x+5}{6}$$

Решение:

Приведем данное уравнение к виду $ax^2 + bx + c = 0$.

Для этого приведем дроби к наименьшему общему знаменателю 30:

$$\frac{6x^2}{30} - \frac{20x}{30} = \frac{5(x+5)}{30}$$

Умножим каждый член уравнения на 30 и получим равносильное уравнение:

$$6x^2 - 20x = 5x + 25$$

Соберем все члены уравнения в левую часть и приведем подобные слагаемые:

$$6x^2 - 25x - 25 = 0$$

Найдем дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac; a = 6; b = -25; c = -25.$$

$$D = 625 - 4 \cdot 6 \cdot (-25) = 625 + 600 = 1225 = 35^2.$$

Так как дискриминант больше нуля, то уравнение имеет два корня.

Найдем корни уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{25 + 35}{12} = \frac{60}{12} = 5;$$

$$x_2 = \frac{25 - 35}{12} = \frac{-10}{12} = -\frac{5}{6}$$

Ответ: $-\frac{5}{6}; 5$.

$$г) (x+5)^2 + (x-2)^2 + (x-7)(x+7) = 11x + 30$$

Решение:

Используя формулы сокращенного умножения, преобразуем левую часть уравнения:

$$(x+5)^2 + (x-2)^2 + (x-7)(x+7) = x^2 + 10x + 25 + x^2 - 4x + 4 + x^2 - 49 = 3x^2 + 6x - 20$$

Уравнение принимает вид:

$$3x^2 + 6x - 20 = 11x + 30$$

Соберем все члены уравнения в левую часть и приведем подобные слагаемые:

$$3x^2 + 6x - 20 - 11x - 30 = 0$$

$$3x^2 - 5x - 50 = 0$$

Найдем дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac; a = 3; b = -5; c = -50.$$

$$D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot (-50) = 25 + 600 = 625 > 0.$$

Так как дискриминант больше нуля, то уравнение имеет два корня.

Вычислим корни:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{5 + 25}{6} = \frac{30}{6} = 5;$$

$$x_2 = \frac{5 - 25}{6} = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3} = -3\frac{1}{3}$$

Ответ: $-3\frac{1}{3}; 5$.

Задача 4. Решить дробное уравнение:

$$a) \frac{x}{x-3} - \frac{5}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}$$

Решение:

Соберем дроби в левую часть уравнения и приведем их к общему знаменателю:

$$\frac{x}{x-3} - \frac{5}{x+3} - \frac{18}{x^2-9} = 0$$

$$\frac{x(x+3) - 5(x-3) - 18}{x^2-9} = 0;$$

$$\frac{x^2 + 3x - 5x + 15 - 18}{x^2-9} = 0;$$

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} = 0$$

Получившееся уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x^2 - 9 \neq 0 \end{cases}$$

Решим уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$D_1 = k^2 - ac; a = 1; k = -1; c = -3$$

$$D_1 = 1 - 1 \cdot (-3) = 1 + 3 = 4 > 0$$

Уравнение имеет два корня.

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

$$x_1 = \frac{1 + 2}{1} = 3;$$

$$x_2 = \frac{1 - 2}{1} = -1$$

Проверим корни на выполнение второго условия системы.

Если $x = 3$, то $x^2 - 9 = 0$, следовательно, число 3 является посторонним корнем данного уравнения.

Если $x = -1$, то $x^2 - 9 \neq 0$, следовательно, число -1 является корнем данного уравнения.

Ответ: -1 .

$$б) \frac{1}{2-x} - 1 = \frac{1}{x-2} - \frac{6-x}{3x^2-12}$$

Решение:

Преобразуем левую и правую части уравнения:

$$\frac{1 - (2-x)}{2-x} = \frac{1}{x-2} - \frac{6-x}{3(x^2-4)};$$

$$\frac{x-1}{2-x} - \frac{1}{x-2} + \frac{6-x}{3(x-2)(x+2)} = 0;$$

$$\frac{1-x}{x-2} - \frac{1}{x-2} + \frac{6-x}{3(x-2)(x+2)} = 0;$$

$$\frac{1-x-1}{x-2} + \frac{6-x}{3(x-2)(x+2)} = 0;$$

$$\frac{-x}{x-2} + \frac{6-x}{3(x-2)(x+2)} = 0;$$

$$\frac{-3x(x+2) + 6-x}{3(x-2)(x+2)} = 0;$$

$$\frac{-3x^2 - 6x + 6 - x}{3(x-2)(x+2)} = 0;$$

$$\frac{-3x^2 - 7x + 6}{3(x-2)(x+2)} = 0;$$

$$\frac{3x^2 + 7x - 6}{(x-2)(x+2)} = 0$$

Полученное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 3x^2 + 7x - 6 = 0 \\ (x-2)(x+2) \neq 0 \end{cases}$$

Решим уравнение $3x^2 + 7x - 6 = 0$

$$D = b^2 - 4ac; a = 3; b = 7; c = -6; D = 49 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 121 > 0:$$

Уравнение имеет два корня.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-7 + 11}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

$$x_2 = \frac{-7 - 11}{6} = \frac{-18}{6} = -3$$

Проверим корни на выполнение второго условия системы.

Если $x = \frac{2}{3}$, то $(x-2)(x+2) \neq 0$, следовательно, число $\frac{2}{3}$ является корнем данного уравнения.

Если $x = -3$, то $(x-2)(x+2) \neq 0$, следовательно, число -3 является корнем данного уравнения.

Ответ: $-3; \frac{2}{3}$.

$$\text{в) } \frac{3,75x + \frac{3}{4}(8 - 5x) - 6,25}{2x + 3} = 0$$

Решение:

Преобразуем числитель дроби, стоящей в левой части уравнения:

$$3,75x + \frac{3}{4} \cdot 8 - \frac{3}{4} \cdot 5x - 6,25 = 3,75x + 6 - 3,75x - 6,25 = -0,25$$

Так как числитель дроби $\frac{-0,25}{2x+3}$ равен $-0,25$, то дробь

ни при каких допустимых значениях переменной x не будет принимать значение, равное нулю. Следовательно, исходное уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений.

$$г) \frac{1,5 - 3,6x}{x+2} - \frac{3-7x}{2x+4} = 0$$

Решение:

Преобразуем выражение, стоящее в левой части уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{1,5 - 3,6x}{x+2} - \frac{3-7x}{2x+4} &= \frac{1,5 - 3,6x}{x+2} - \frac{3-7x}{2(x+2)} = \\ &= \frac{3-7x-3+7x}{2(x+2)} = \frac{0}{2(x+2)} \end{aligned}$$

Уравнение принимает вид:

$$\frac{0}{2(x+2)} = 0$$

Корнем данного уравнения является любое действительное число, кроме -2 .

Ответ: любое действительное число, кроме $x = -2$.

Задача 5. Найдите корни уравнения:

$$а) x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

Решение:

Данное уравнение является биквадратным. Решим уравнение. Для этого введем новую переменную, обозначив x^2 через y :

$$x^2 = y.$$

Получим квадратное уравнение с переменной y :

$$y^2 - 10y + 9 = 0$$

Решим это уравнение:

$$D_1 = 25 - 1 \cdot 9 = 16 > 0;$$

Уравнение $y^2 - 10y + 9 = 0$ имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

$$y_1 = \frac{5 + 4}{1} = 9;$$

$$y_2 = \frac{5 - 4}{1} = 1$$

Зная, что $y = x^2$, получим:

$$x^2 = 9 \text{ или } x^2 = 1$$

Из уравнения $x^2 = 9$ находим: $x_1 = 3$; $x_2 = -3$.

Из уравнения $x^2 = 1$ находим: $x_3 = 1$; $x_4 = -1$.

Ответ: ± 1 ; ± 3 .

$$6) x^4 + 9x^2 = 0$$

Решение:

Данное уравнение является биквадратным. Решим уравнение. Для этого разложим на множители многочлен, стоящий в левой части уравнения:

$$x^4 + 9x^2 = x^2(x^2 + 9)$$

Получаем равносильное уравнение $x^2(x^2 + 9) = 0$

Так как произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другой при этом не теряет смысл, то получаем:

$$x^2 = 0 \text{ или } x^2 + 9 = 0$$

Из уравнения $x^2 = 0$ находим $x = 0$.

Выражение $x^2 + 9 > 0$ при любом x .

Ответ: 0.

$$в) (x^2 + 2x)^2 - 14(x^2 + 2x) - 15 = 0$$

Решение:

Решим уравнение. Для этого введем новую переменную, обозначив $x^2 + 2x$ через y : $x^2 + 2x = y$

Получим квадратное уравнение с переменной y :

$$y^2 - 14y - 15 = 0$$

Решим это уравнение:

$$D_1 = k^2 - ac; a = 1; k = -7; c = -15; D_1 = 49 + 15 = 64 > 0;$$

Уравнение имеет два корня:

$$y_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

$$y_1 = \frac{7 + 8}{1} = 15;$$

$$y_2 = \frac{7 - 8}{1} = -1$$

Так как $y = x^2 + 2x$, получаем:

$$x^2 + 2x = 15 \text{ или } x^2 + 2x = -1.$$

Из уравнения $x^2 + 2x = 15$ находим: $x_1 = 3$; $x_2 = -5$.

Из уравнения $x^2 + 2x = -1$ находим $x_3 = -1$.

Ответ: -5 ; -1 ; 3 .

$$г) x^4 + x^3 - x - 1 = 0$$

Решение:

Для того чтобы решить данное уравнение, удобно разложить многочлен, стоящий в левой части уравнения, на множители способом группировки:

$$x^4 + x^3 - x - 1 = x^3(x + 1) - 1 \cdot (x + 1) = (x + 1)(x^3 - 1)$$

Получим уравнение:

$$(x + 1)(x^3 - 1) = 0.$$

Так как произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другой при этом не теряет смысл, получаем:

$$x + 1 = 0 \text{ или } x^3 - 1 = 0.$$

Из уравнения $x + 1 = 0$ находим: $x = -1$.

Из уравнения $x^3 - 1 = 0$ находим: $x = 1$.

Ответ: -1 ; 1 .

$$д) x^3 - 43x + 42 = 0$$

Решение:

Для того чтобы решить данное уравнение, удобно разложить многочлен, стоящий в левой части уравнения на множители. Представим $-43x$ в виде суммы двух слагаемых $-x$ и $-42x$:

$$x^3 - 43x + 42 = x^3 - x - 42x + 42.$$

Разложим получившийся многочлен на множители способом группировки:

$$\begin{aligned} x^3 - x - 42x + 42 &= x(x^2 - 1) - 42(x - 1) = x(x - 1)(x + 1) - \\ &- 42(x - 1) = (x - 1)(x(x + 1) - 42) = (x - 1)(x^2 + x - 42). \end{aligned}$$

$$\text{Получили уравнение } (x - 1)(x^2 + x - 42) = 0$$

Так как произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другой при этом не теряет смысл, получаем:

$$x - 1 = 0 \text{ или } x^2 + x - 42 = 0.$$

$$\text{Из уравнения } x - 1 = 0 \text{ находим: } x = 1.$$

$$\text{Из уравнения } x^2 + x - 42 = 0 \text{ находим: } x = -7 \text{ или } x = 6.$$

Ответ: $-7; 1; 6$.

Задача 6. Составить квадратное уравнение, корнями которого являются числа $\frac{1}{6 - \sqrt{32}}$ и $\frac{1}{6 + \sqrt{32}}$.

Решение:

Согласно теореме Виета, если у квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ есть корни x_1 и x_2 , то выполняются соотношения

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ и } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

$$\text{В нашем случае } x_1 = \frac{1}{6 - \sqrt{32}}; x_2 = \frac{1}{6 + \sqrt{32}}, \text{ следова-}$$

тельно:

$$\frac{b}{a} = -\left(\frac{1}{6 - \sqrt{32}} + \frac{1}{6 + \sqrt{32}}\right) = -\frac{6 + \sqrt{32} + 6 - \sqrt{32}}{36 - 32} = -\frac{12}{4} = -3;$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{6 - \sqrt{32}} \cdot \frac{1}{6 + \sqrt{32}} = \frac{1}{36 - 32} = \frac{1}{4}$$

Искомое уравнение:

$$x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0 \text{ или } 4x^2 - 12x + 1 = 0.$$

Ответ: $4x^2 - 12x + 1 = 0$.

Задача 7. При каких значениях a уравнение имеет два равных корня:

а) $x^2 + 5x + a = 0$

Решение:

Уравнение имеет два равных корня, когда дискриминант равен нулю. Найдем дискриминант данного уравнения:

$$D = 25 - 4a.$$

$$D = 0; 25 - 4a = 0; 4a = 25; a = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}.$$

Ответ: при $a = 6\frac{1}{4}$ уравнение $x^2 + 5x + a = 0$ имеет два равных корня.

б) $4x^2 + ax + 1 = 0$

Решение:

Уравнение имеет два равных корня, когда дискриминант равен нулю. Найдем дискриминант данного уравнения:

$$D = a^2 - 16; D = 0; a^2 - 16 = 0.$$

Из уравнения $a^2 - 16 = 0$ находим: $a = \pm 4$.

Ответ: при $a = \pm 4$ уравнение $4x^2 + ax + 1 = 0$ имеет два равных корня.

Задача 8. Разложить на множители квадратный трехчлен:

а) $x^2 + 6x - 91$

Решение:

Для того чтобы разложить квадратный трехчлен на множители, необходимо найти его корни, если они существуют.

Решим уравнение $x^2 + 6x - 91 = 0$:

$$D_1 = k^2 - ac; k = 3; a = 1; c = -91;$$

Уравнение $x^2 + 6x - 91 = 0$ имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 10}{1} = 7;$$

$$x_2 = \frac{-3 - 10}{1} = -13$$

Разложим многочлен $x^2 + 6x - 91$ на множители:

$$x^2 + 6x - 91 = (x - 7)(x + 13).$$

Ответ: $(x - 7)(x + 13)$.

б) $9x^2 - 6x + 1 = 0$.

Решение:

Решим уравнение: $9x^2 - 6x + 1 = 0$

Дискриминант уравнения равен нулю, значит, уравнение имеет два равных корня:

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{3}.$$

Разложим многочлен на множители:

$$9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = (3x - 1)^2$$

Ответ: $(3x - 1)^2$.

в) $2x^2 + x + 5$

Решение:

Найдем дискриминант данного трехчлена:

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 1 - 40 = -39.$$

Так как дискриминант меньше нуля, то квадратный трехчлен не имеет корней. Такой квадратный трехчлен нельзя представить в виде произведения многочленов первой степени.

Задача 9. Сократить дробь:

а) $\frac{x^2 - 8x - 9}{x^2 + 9x + 8}$

Решение:

Разложим на множители квадратные трехчлены, стоящие в числителе и знаменателе дроби:

$$x^2 - 8x - 9 = (x - 9)(x + 1);$$

$$x^2 + 9x + 8 = (x + 8)(x + 1).$$

Дробь принимает вид:

$$\frac{(x - 9)(x + 1)}{(x + 8)(x + 1)}$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на общий множитель $x + 1$, получим дробь $\frac{x - 9}{x + 8}$.

Сокращение данной дроби можно выполнить при условии, что x не будет принимать значение, равное -1 .

б) $\frac{a^2 - 6a + 5}{a^2 - 1}$

Решение:

Разложим числитель и знаменатель на множители, используя формулу разложения квадратного трехчлена на множители и формулу разности квадратов:

$$a^2 - 6a + 5 = (a - 5)(a - 1);$$

$$a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1)$$

Дробь принимает вид: $\frac{(a - 5)(a - 1)}{(a + 1)(a - 1)}$

Разделим числитель и знаменатель дроби на общий множитель $a - 1$, получим дробь $\frac{a - 5}{a + 1}$.

Сокращение данной дроби можно выполнить при условии, что a не будет принимать значение, равное 1 .

$$в) \frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^4 - 12x^2 + 27}$$

Решение:

Введем новую переменную, обозначив x^2 через y .
 $x^2 = y$.

Получим рациональную дробь с переменной y :

$$\frac{y^2 - 4y + 3}{y^2 - 12y + 27}$$

Разложим на множители квадратные трехчлены, стоящие в числителе и знаменателе получившейся дроби:

$$y^2 - 4y + 3 = (y - 3)(y - 1);$$

$$y^2 - 12y + 27 = (y - 9)(y - 3)$$

$$\text{Дробь принимает вид: } \frac{(y - 3)(y - 1)}{(y - 9)(y - 3)}$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на общий множитель $y - 3$, получим дробь: $\frac{y - 1}{y - 9}$.

$$\text{Вернемся к переменной } x: \frac{x^2 - 1}{x^2 - 9}$$

Сокращение данной дроби можно выполнить при условии, что $x^2 - 3 \neq 0$, то есть $x \neq \pm \sqrt{3}$.

Задача 10. Решить систему:

$$а) \begin{cases} x^2 + y + 8 = xy \\ y - 2x = 0 \end{cases}$$

Решение:

Решим систему способом подстановки. Выразим из второго уравнения системы переменную y :

$$y = 2x.$$

Подставим в первое уравнение системы вместо переменной y выражение $2x$, получим квадратное уравнение

$$x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Из квадратного уравнения находим: $x_1 = -2$; $x_2 = 4$.

Подставив полученные значения переменной x во второе уравнение, получим: $y_1 = -4$; $y_2 = 8$.

Пары чисел $(-2; -4)$; $(4; 8)$ являются решениями данной системы.

Ответ: $(-2; -4)$; $(4; 8)$.

$$6) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Решение:

Введем новую переменную, обозначив $\frac{x}{y}$ через z

$$\frac{x}{y} = z, \text{ тогда } \frac{y}{x} = \frac{1}{z}$$

Первое уравнение системы принимает вид:

$$z + \frac{1}{z} = \frac{13}{6}$$

Из этого уравнения находим:

$$z_1 = \frac{2}{3}; z_2 = \frac{3}{2}$$

Тогда $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ или $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, другими словами, первое уравнение распалось на два уравнения.

Имеем две системы:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \\ x + y = 5 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Решения этих систем являются решениями данной системы. Решением первой системы является пара чисел $(2; 3)$, решением второй системы является пара чисел $(3; 2)$.

Следовательно, решениями исходной системы

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$$

являются пары чисел $(2; 3)$; $(3; 2)$.

Рассмотренная система является симметричной системой уравнений, так как если вместо переменной x в

уравнения подставить переменную y , а вместо переменной y подставить переменную x , то система не изменится.

Ответ: (2; 3); (3; 2).

$$\text{в) } \begin{cases} 2x - 2y - xy = 11 \\ 2xy + 3(x - y) = 6 \end{cases}$$

Решение:

Раскроем скобки во втором уравнении системы:

$$\begin{cases} 2x - 2y - xy = 11 \\ 2xy + 3x - 3y = 6 \end{cases}$$

Каждый член первого уравнения умножим на 2 и почленно сложим первое и второе уравнение, получим систему:

$$\begin{cases} 7x - 7y = 28 \\ 2xy + 3x - 3y = 6 \end{cases}$$

Выразим переменную x из первого уравнения:

$$x = 4 + y.$$

Подставив во второе уравнение вместо переменной x выражение $4 + y$, получим уравнение с одной переменной:

$$2(4 + y) \cdot y + 3(4 + y) - 3y = 6.$$

После преобразований уравнение принимает вид:

$$y^2 + 4y + 3 = 0$$

Из этого уравнения находим: $y_1 = -1$; $y_2 = -3$.

Подставив полученные значения переменной y в уравнение $x = 4 + y$, находим: $x_1 = 3$; $x_2 = 1$.

Следовательно, решениями исходной системы являются пары чисел: (3; -1); (1; -3).

Ответ: (3; -1); (1; -3).

$$\text{г) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Решение:

Преобразуем первое уравнение системы:

$$x^2 + y^2 = 2xy + 4;$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 4;$$

$$(x - y)^2 = 4$$

Откуда $x - y = 2$ или $x - y = -2$.

Наша система распалась на две линейные системы:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x - y = -2 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

Из системы

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

находим: $x_1 = 4$; $y_1 = 2$.

Из системы

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

находим: $x_2 = 2$; $y_2 = 4$.

Ответ: (4; 2); (2; 4).

Задача 11. Решить систему графически:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$$

Решение:

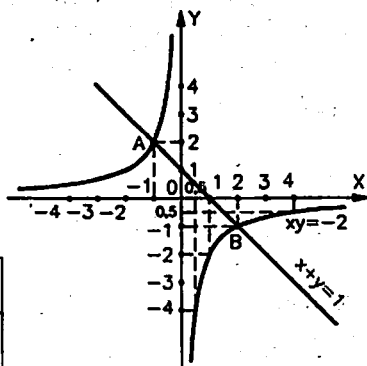
Построим в одной системе координат графики уравнений системы. Графиком первого уравнения системы является прямая. Графиком второго уравнения системы является гипербола.

$$x + y = 1$$

x	0	1
y	1	0

$$xy = -2$$

x	1	2	4	0,5
y	-2	-1	-0,5	-4



При построении гиперболы достаточно по точкам построить одну ветвь, вторая ветвь будет симметрична ей относительно начала координат.

Графики уравнений пересекаются в двух точках: $A(-1; 2); B(2; -1)$.

Система имеет два решения: $(-1; 2); (2; -1)$.

Ответ: $(-1; 2); (2; -1)$.

$$6) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

Решение:

Построим графики уравнений системы в одной системе координат.

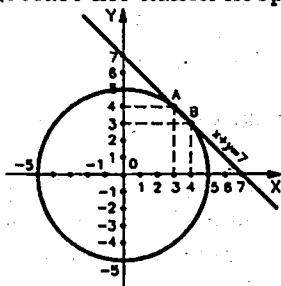
Графиком уравнения $x^2 + y^2 = 25$ является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 5.

Графиком уравнения $x + y = 7$ является прямая.

График первого уравнения удобно строить с помощью циркуля. Для построения прямой достаточно найти координаты двух точек.

$$x + y = 7$$

x	0	2
y	7	5



Графики уравнений пересекаются в двух точках: $A(3; 4); B(4; 3)$.

Система имеет два решения: $(3; 4); (4; 3)$.

Ответ: $(3; 4); (4; 3)$.

$$в) \begin{cases} y - x^2 = 0 \\ x + y = -3 \end{cases}$$

Решение:

Построим в одной системе координат графики уравнений данной системы.

Графиком первого уравнения является парабола с вершиной в начале координат, ветви которой направлены вверх.

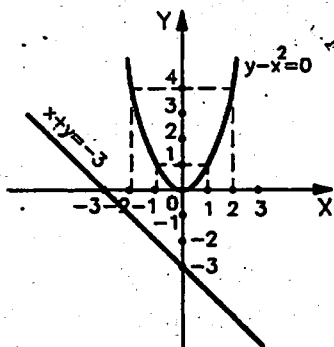
$$y - x^2 = 0.$$

x	0	1	2	-1	-2
y	0	1	4	1	4

Графиком второго уравнения является прямая.

$$x + y = -3.$$

x	-3	0
y	0	-3



Так как графики уравнений не пересекаются, то система не имеет решений.

Ответ: нет решений.

$$\Gamma) \begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4 \\ y + (x - 2)^2 = 0 \end{cases}$$

Решение:

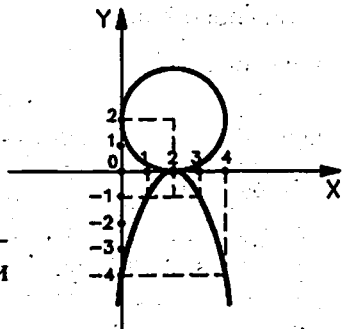
Построим в одной системе координат графики уравнений.

Графиком первого уравнения системы является окружность с центром в точке с координатами (2; 2) и радиусом, равным 2.

Графиком второго уравнения системы является парабола с вершиной в точке с координатами (2; 0), ветви которой направлены вниз.

$$y = (x - 2)^2 = 0$$

x	0	1	2	3	4
y	-4	-1	0	-1	-4



Окружность и парабола касаются в точке с координатами (2; 0).

Система имеет единственное решение: $(2; 0)$.

Ответ: $(2; 0)$.

Х. Задачи на составление уравнений и систем уравнений

Алгоритм решения задач с помощью уравнений и систем уравнений:

- обозначить неизвестную величину переменной (при решении задачи с помощью системы уравнений вводят несколько переменных);
- выразить через нее другие величины;
- составить уравнение (или систему уравнений), показывающее зависимость неизвестной величины от других величин;
- решить уравнение (или систему уравнений);
- сделать проверку при необходимости;
- выбрать из решений уравнения (или системы уравнений) те, которые подходят по смыслу задачи;
- оформить ответ.

1. Задачи на движение

Задача 1. Катер прошел расстояние между пристанями по течению за 2 часа, а обратно против течения за 3 часа. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки 2 км/ч.

Решение:

Пусть x км/ч — собственная скорость катера, тогда $(x + 2)$ км/ч — скорость катера по течению, $(x - 2)$ км/ч — скорость катера против течения.

Так как по течению катер прошел расстояние между пристанями за 2 часа, а против течения — за 3 часа, то расстояние между пристанями можно выразить двумя выражениями: $(2x + 2)$ и $(3x - 2)$. Приравняв эти выражения, получим уравнение:

$$2x + 2 = 3x - 2;$$

$$2x + 4 = 3x - 6;$$

$$x = 10$$

10 км/ч — собственная скорость катера.

Ответ: 10 км/ч.

Задача 2. Из пункта *A* в пункт *B* вышел товарный поезд. Спустя 3 часа вслед за ним вышел пассажирский поезд, скорость которого на 30 км/ч больше скорости товарного поезда. Через 15 часов после своего выхода пассажирский поезд оказался впереди товарного на 300 км. Определите скорость товарного поезда.

Решение:

Составим таблицу:

Товарный поезд	Пассажирский поезд
$v_T = x$ км/ч	$v_{П} = (x + 30)$ км/ч
$t_T = (15 + 3)$ ч	$t_{П} = 15$ ч
$S_T = 18x$ км	$S_{П} = 15(x + 30)$ км

Так как пассажирский поезд прошел на 300 км больше товарного, получаем уравнение:

$$15(x + 30) - 18x = 300;$$

$$15x + 450 - 18x = 300;$$

$$-3x = -150;$$

$$x = 50$$

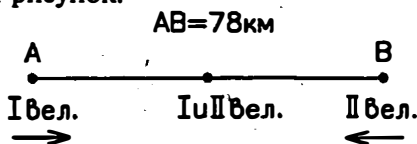
50 км/ч — скорость товарного поезда.

Ответ: 50 км/ч.

Задача 3. Расстояние между пунктами *A* и *B* равно 78 км. Из пункта *A* выезжает велосипедист по направлению к *B*. Через один час ему навстречу отправляется из *B* другой велосипедист, проезжающий в час на 4 км больше первого. Встреча произошла на расстоянии 36 км от пункта *B*. Сколько времени до встречи ехал каждый из них и с какой скоростью?

Решение:

Сделаем рисунок:



Пусть первый велосипедист ехал x часов, тогда второй велосипедист ехал $(x - 1)$ часов. До места встречи первый велосипедист проехал $78 - 36 = 42$ (км), а второй 36 км.

Значит, скорость первого велосипедиста равна $\frac{42}{x}$ км/ч,

второго — $\frac{36}{x-1}$ км/ч. По условию задачи скорость второго

велосипедиста больше скорости первого на 4 км/ч, поэтому можем составить следующее уравнение:

$$\frac{36}{x-1} - \frac{42}{x} = 4$$

Решим уравнение:

$$\frac{36}{x-1} - \frac{42}{x} - 4 = 0$$

$$\frac{36x - 42(x-1) - 4x(x-1)}{x(x-1)} = 0;$$

$$\frac{36x - 42x + 42 - 4x^2 + 4x}{x(x-1)} = 0;$$

$$\frac{-4x^2 - 2x + 42}{x(x-1)} = 0;$$

$$\frac{2x^2 + x - 21}{x(x-1)} = 0$$

Из уравнения $2x^2 + x - 21 = 0$ находим:

$$x_1 = -\frac{14}{4}; x_2 = 3.$$

Если $x = -\frac{14}{4}$, то $x(x-1) \neq 0$. Значит, число $-\frac{14}{4}$

является корнем уравнения $\frac{36}{x-1} - \frac{42}{x} = 4$

Если $x = 3$, то $x(x - 1) \neq 0$. Значит, число 3 является корнем уравнения $\frac{36}{x-1} - \frac{42}{x} = 4$.

Корень $-\frac{14}{4}$ не удовлетворяет условию задачи.

Получили, что первый велосипедист ехал до встречи 3 часа, второй $3 - 1 = 2$ (ч). Тогда скорость первого велосипедиста равна $42 : 3 = 14$ (км/ч), а скорость второго велосипедиста равна $14 + 4 = 18$ (км/ч).

Ответ: первый велосипедист ехал до встречи 3 часа со скоростью 14 км/ч, а второй — 2 часа со скоростью 18 км/ч.

Задача 4. Два велосипедиста выехали навстречу друг другу одновременно из пунктов, расстояние между которыми 180 км. После встречи первый велосипедист прибыл в конечный пункт через 2 часа, а второй велосипедист через 4,5 часа. Найти скорость каждого велосипедиста.

Решение:

Пусть x км/ч — скорость первого велосипедиста; y км/ч — скорость второго велосипедиста. Тогда $2x$ км проехал первый велосипедист после встречи, $4,5y$ км проехал второй велосипедист после встречи. Так как вместе они проехали 180 км, можно составить следующее уравнение:

$$2x + 4,5y = 180.$$

Первый велосипедист до встречи проехал $4,5y$ км со скоростью x км/ч, значит, это расстояние он преодолел за $\frac{4,5y}{x}$ часов.

Второй велосипедист до встречи проехал $2x$ км со скоростью y км/ч, значит, это расстояние он преодолел за $\frac{2x}{y}$ часов.

Так как оба велосипедиста до встречи были в пути одно и то же время, можно составить следующее уравнение:

$$\frac{4,5y}{x} = \frac{2x}{y}$$

Объединим два получившихся уравнения в систему:

$$\begin{cases} 2x + 4,5y = 180 \\ \frac{4,5y}{x} = \frac{2x}{y} \end{cases}$$

Решим систему:

$$\begin{cases} 2x + 4,5y = 180 \\ \frac{4,5y}{x} = \frac{2x}{y} \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение системы:

$$\frac{4,5y}{x} = \frac{2x}{y}$$

Введем новую переменную, обозначив $\frac{y}{x}$ через z :

$$\frac{y}{x} = z, \text{ тогда } \frac{y}{x} = \frac{1}{z}$$

Уравнение принимает вид:

$$4,5z = \frac{2}{z}$$

Из этого уравнения находим: $z_1 = \frac{2}{3}$, $z_2 = -\frac{2}{3}$.

Решение $-\frac{2}{3}$ можно не рассматривать, так как оно не удовлетворяет условию задачи.

$$\text{Имеем: } \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$$

Система принимает вид:

$$\begin{cases} 2x + 4,5y = 180 \\ \frac{y}{x} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Решив систему, находим: $x = 36$; $y = 24$.

36 км/ч — скорость первого велосипедиста.

24 км/ч — скорость второго велосипедиста.

Ответ: 36 км/ч, 24 км/ч.

Задача 5. Расстояние между двумя пристанями по реке 80 км. Теплоход проходит этот путь туда и обратно за $8\frac{1}{3}$ часа. Определить скорость теплохода по течению и против течения, если скорость течения реки 4 км/ч.

Решение:

Пусть x км/ч — скорость теплохода по течению, тогда $(x - 8)$ км/ч — скорость теплохода против течения.

Так как расстояние между пристанями равно 80 км, то это расстояние теплоход проходит по течению за $\frac{80}{x}$ часов, а против течения за $\frac{80}{x-8}$ часов. Зная, что на путь туда и обратно он потратил $8\frac{1}{3}$ часа, можно составить следующее уравнение:

$$\frac{80}{x} + \frac{80}{x-8} = 8\frac{1}{3}$$

Решим уравнение:

$$\frac{80}{x} + \frac{80}{x-8} - \frac{25}{3} = 0;$$

$$\frac{80 \cdot 3 \cdot (x-8) + 80 \cdot 3 \cdot x - 25 \cdot x \cdot (x-8)}{3x(x-8)} = 0;$$

$$\frac{240x - 1920 + 240x - 25x^2 + 200x}{3x(x-8)} = 0;$$

$$\frac{5x^2 - 136x + 384}{3x(x-8)} = 0;$$

Из уравнения $5x^2 - 136x + 384 = 0$ находим:

$$x_1 = 24; x_2 = 3,2.$$

Если $x_1 = 24$, то $3x(x-8) \neq 0$, значит, число 24 является решением уравнения $\frac{80}{x} + \frac{80}{x-8} = 8\frac{1}{3}$.

Если $x_2 = 3,2$, то $3x(x-8) \neq 0$, значит, число 3,2 является решением уравнения $\frac{80}{x} + \frac{80}{x-8} = 8\frac{1}{3}$.

Но решение 3,2 не удовлетворяет условию задачи, так как скорость течения реки равна 4 км/ч.

Получили, что 24 км/ч — скорость теплохода по течению. $24 - 8 = 16$ (км/ч) — скорость теплохода против течения.

Ответ: 24 км/ч; 16 км/ч.

Задача 6. Турист прошел 240 км, закончив путешествие на 6 дней раньше, так как проходил в день на 2 км больше, чем планировал. Сколько дней путешествовал турист и сколько километров в день он проходил?

1 способ:

Решение:

Пусть турист проходил x км в день, тогда он планировал проходить $(x - 2)$ км в день. Так как он прошел 240 км, то на все путешествие ему понадобилось $\frac{240}{x}$ дней,

хотя планировал он быть в пути $\frac{240}{x-2}$ дней. Зная, что турист закончил путешествие на 6 дней раньше, можем составить следующее уравнение:

$$\frac{240}{x-2} - \frac{240}{x} = 6$$

Решим уравнение:

$$\frac{240x - 240(x-2) - 6x(x-2)}{x(x-2)} = 0$$

Преобразовав числитель дроби, получим:

$$\frac{6x^2 - 12x - 480}{x(x-2)} = 0;$$

$$\frac{x^2 - 2x - 80}{x(x-2)} = 0$$

Из уравнения $x^2 - 2x - 80$ находим: $x_1 = 10$; $x_2 = -8$.

Полученные корни являются корнями уравнения

$$\frac{240}{x-2} - \frac{240}{x} = 6, \text{ так как при } x_1 = 10 \text{ и } x_2 = -8, \\ x \cdot (x-2) \neq 0.$$

Корень -8 не удовлетворяет условию задачи.

Получается, что турист проходил 10 км в день.

$240 : 10 = 24$ (дня) потратил турист на путешествие.

Ответ: 24 дня; 10 км.

2 способ:

Решение:

Пусть турист путешествовал x дней, тогда он должен был путешествовать $x + 6$ дней. Так как прошел он 240 км, то в день он проходил $\frac{240}{x}$ км, хотя планировал проходить в день $\frac{240}{x+6}$ км. Зная, что он проходил в день на 2 км больше, чем планировал, можем составить следующее уравнение:

$$\frac{240}{x} - \frac{240}{x+6} = 2$$

Решим уравнение:

$$\frac{240}{x} - \frac{240}{x+6} = 2$$

После преобразований уравнение принимает вид:

$$\frac{x^2 + 6x - 720}{x(x+6)} = 0$$

Из уравнения $x^2 + 6x - 720 = 0$ находим: $x_1 = 24$; $x_2 = -30$.

Полученные корни являются корнями уравнения $\frac{240}{x} - \frac{240}{x+6} = 2$, так как при $x_1 = 24$ и $x_2 = -30$; $x \cdot (x+6) \neq 0$.

Корень -30 не удовлетворяет условию задачи.

Получается, что турист потратил на путешествие 24 дня.

$240 : 24 = 10$ (км) в день проходил турист.

Ответ: 24 дня; 10 км.

Задача 7. Из города А в город В, расстояние между которыми 110 км, на машине отправился курьер. Через 0,2 часа

после этого вслед за ним выехал мотоциклист, который, догнав курьера и передав ему дополнительное поручение, немедленно с той же скоростью двинулся обратно и возвратился в A в тот момент, когда курьер прибыл в B . Какова скорость курьера, если скорость мотоциклиста равна 60 км/ч ?

Решение:

Пусть $x \text{ км/ч}$ — скорость курьера. Так как расстояние между городами равно 110 км , то на весь путь курьер потратил $\frac{110}{x}$ часов.

$0,2x \text{ км}$ проехал курьер на тот момент, когда мотоциклист выехал из города A .

$(60 - x) \text{ км}$ — на такое расстояние сближаются курьер и мотоциклист за 1 час .

$\frac{0,2x}{60 - x}$ часов необходимо мотоциклисту, чтобы догнать курьера.

Так как мотоциклист после того, как догнал курьера, немедленно вернулся в город B , то на весь путь он потратил

$$2 \cdot \frac{0,2x}{60 - x} \text{ часов.}$$

Зная, что курьер был в пути на $0,2 \text{ часа}$ больше, можем составить следующее уравнение:

$$\frac{110}{x} - \frac{0,4x}{60 - x} = 0,2$$

Решим уравнение:

$$\frac{110}{x} - \frac{0,4x}{60 - x} = 0,2$$

После преобразований уравнение принимает вид:

$$\frac{0,2x^2 + 122x - 6600}{x(60 - x)} = 0$$

Из уравнения $0,2x^2 + 122x - 6600 = 0$ находим:

$$x_1 = 50; x_2 = -264.$$

Полученные корни являются корнями уравнения $\frac{110}{x} - \frac{0,4x}{60-x} = 0,2$, так как при $x_1 = 50$ и $x_2 = -264$, $x(60-x) \neq 0$.

Но корень -264 не удовлетворяет условию задачи.

Имеем: 50 км/ч — скорость курьера.

Ответ: 50 км/ч.

2. Задачи на совместную работу

В таких задачах фигурируют работа, время и производительность труда. Объем работы, которую необходимо выполнить, принимают за единицу. Если время, необходимое для выполнения этой работы равно t , то производительность труда находится по формуле: $\frac{1}{t}$.

Задача 1. Двое рабочих, работая вместе, выполняют некоторую работу за 8 часов. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 12 часов скорее, чем второй рабочий, если этот последний будет работать отдельно. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, может выполнить работу?

Решение:

Примем объем работы, которую должны выполнить рабочие, за 1. Пусть первый рабочий выполняет всю работу за x часов, работая отдельно, тогда второму для выполнения этой работы необходимо $(x + 12)$ часов.

Получаем:

$\frac{1}{x}$ — производительность первого рабочего;

$\frac{1}{x+12}$ — производительность второго рабочего.

Так как двое рабочих, работая вместе, выполняют всю работу за 8 часов, то за 1 час они выполняют $\frac{1}{8}$ всей работы.

На основании этого составим следующее уравнение:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+12} = \frac{1}{8}$$

Решим уравнение:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+12} = \frac{1}{8}$$

После преобразований уравнение принимает вид:

$$\frac{x^2 - 4x - 96}{8(x+12) \cdot x} = 0$$

Из уравнения $x^2 - 4x - 96 = 0$ находим: $x_1 = 12$; $x_2 = -8$.

Полученные корни являются корнями уравнения $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+12} = \frac{1}{8}$, так как при $x_1 = 12$ и $x_2 = -8$, $8x(x+12) \neq 0$.

Но корень -8 не удовлетворяет условию задачи.

Значит, первый рабочий может выполнить всю работу за 12 часов, работая один.

За $12 + 12 = 24$ (ч) может выполнить всю работу второй рабочий, работая один.

Ответ: 12 ч; 24 ч.

Задача 2. Двум машинисткам было поручено выполнить некоторую работу. Вторая из них приступила к работе на 1 час позднее первой. Через 3 часа после того, как первая начала работу, им оставалось выполнить еще $\frac{9}{20}$ всей работы. По окончании работы оказалось, что каждая машинистка выполнила половину всей работы. За сколько часов каждая из них в отдельности могла бы выполнить всю работу?

Решение:

1 — объем всей работы.

Пусть за x часов выполнит всю работу первая машинистка и за y часов вторая машинистка, работая отдельно.

Тогда $\frac{1}{x}$ — производительность первой машинистки и $\frac{1}{y}$ — производительность второй. К моменту, когда первая ма-

машинистка проработала 3 часа, а вторая 2 часа, ими обеими было выполнено $1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$ всей работы. На основании этого составим первое уравнение:

$$3 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{y} = \frac{11}{20}$$

Каждая машинистка выполнила половину работы. Следовательно, первая машинистка потратила $\frac{x}{2}$ часов, а вторая $\frac{y}{2}$ часов. Так как первая работала на 1 час дольше, чем вторая, можем составить второе уравнение:

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1$$

Из полученных уравнений составим систему:

$$\begin{cases} 3 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{y} = \frac{11}{20} \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$$

Решив систему, находим:

$$x_1 = 1\frac{1}{11}; y_1 = -\frac{10}{11}; x_2 = 10, y_2 = 8.$$

Условию задачи удовлетворяет только второе решение.

Значит, первая машинистка может выполнить всю работу за 10 часов, а вторая машинистка может выполнить всю работу за 8 часов.

Ответ: 10 ч, 8 ч.

Задача 3. Бассейн наполняется двумя трубами за 2 часа 55 минут. Первая труба может наполнить его на 2 часа быстрее, чем вторая. За сколько часов может наполнить бассейн каждая труба в отдельности?

Решение:

Пусть за x часов наполняет бассейн первая труба, тогда вторая труба наполняет бассейн за $(x + 2)$ часа.

$\frac{1}{x}$ — такую часть бассейна наполняет первая труба за один час.

$\frac{1}{x+2}$ — такую часть бассейна наполняет за один час вторая труба.

Так как бассейн наполняется двумя трубами за 2 часа 55 минут, то за один час две трубы наполняют $1 : 2\frac{55}{60} = \frac{12}{35}$ всего бассейна.

Составим уравнение:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{35}$$

Решим уравнение:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{35}$$

После преобразований уравнение принимает вид:

$$\frac{6x^2 - 23x - 35}{35x(x+2)} = 0$$

Из уравнения: $6x^2 - 23x - 35 = 0$ находим:

$$x_1 = 5, x_2 = -\frac{6}{7}.$$

Полученные корни являются корнями уравнения

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{35}, \text{ так как при } x = 5; x = -\frac{6}{7}, 35x(x+2) \neq 0.$$

Но корень $-\frac{6}{7}$ не удовлетворяет условию задачи.

Значит, первая труба наполняет бассейн за 5 часов.

$5 + 2 = 7$ (ч) необходимо второй трубе, чтобы наполнить бассейн.

Ответ: 5 ч, 7 ч.

Задача 4. Баржу должны были разгрузить двумя кранами за 12 часов. После 8 часов совместной работы один кран сломался, поэтому оставшуюся часть работы выполнили вторым краном за 7 часов. За сколько часов может разгрузить баржу каждый кран в отдельности?

Решение:

Принимаем объем работы за 1.

Пусть за x часов может разгрузить баржу кран, который сломался. Так как баржу двумя кранами можно разгрузить за 12 часов, то за один час ими можно разгрузить $\frac{1}{12}$ баржи.

Краны работали вместе 8 часов, за это время они разгрузили $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ всей баржи. После этого осталось разгрузить $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ баржи. Оставшуюся часть работы выполнили вторым краном за 7 часов, поэтому за один час второй кран разгружает $\frac{1}{3} : 7 = \frac{1}{21}$ баржи.

Первый кран может разгрузить баржу за x часов, поэтому за один час он разгружает $\frac{1}{x}$ баржи.

Составим уравнение:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{21} = \frac{1}{12}$$

Решим уравнение:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{12} - \frac{1}{21},$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{28},$$

$$x = 28$$

Значит, первый кран может разгрузить баржу за 28 часов.

Второй кран за один час разгружает $\frac{1}{21}$ баржи, поэтому всю баржу он может разгрузить за 21 час.

Ответ: 28 ч, 21 ч.

Задача 5. Из пункта A в пункт B выехал мотоциклист. Через 2 часа из пункта A в пункт B выехал автомобиль, который прибыл в B одновременно с мотоциклом. Если бы автомобиль и мотоцикл одновременно выехали из A и B навстречу друг другу, то они встретились бы через 1 ч 20 мин. после

выезда. Сколько времени провел в пути из A в B мотоцикл, если скорости автомобиля и мотоцикла постоянные?

Решение:

Так как в условии задачи нет данных о пройденном пути, то мы весь путь примем за 1. И будем решать задачу как задачу на совместную работу.

Пусть x часов провел в пути мотоциклист, тогда $(x - 2)$ часов провел в пути автомобиль.

$\frac{1}{x}$ всего пути проходит за один час мотоцикл.

$\frac{1}{x - 2}$ всего пути проходит за один час автомобиль.

Мы знаем, что если автомобиль и мотоцикл выедут навстречу друг другу одновременно, то встретятся через 1 ч 20 мин $= 1\frac{1}{3}$. Значит, за один час автомобиль и мотоцикл

вместе проходят $1 : 1\frac{1}{3} = \frac{3}{4}$ всего пути.

Составим уравнение:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x - 2} = \frac{3}{4}$$

После преобразований уравнение принимает вид:

$$\frac{3x^2 - 14x + 8}{4x(x - 2)} = 0$$

Из уравнения $3x^2 - 14x + 8 = 0$ находим:

$$x_1 = 4; x_2 = \frac{2}{3}$$

Полученные корни являются корнями уравнения $\frac{1}{x} - \frac{1}{x - 2} = \frac{3}{4}$, так как при $x = 4$; $x = \frac{2}{3}$, $4x(x - 2) \neq 0$.

Но корень $\frac{2}{3}$ не удовлетворяет условию задачи.

Значит, мотоцикл провел в пути из пункта A в пункт B 4 часа.

Ответ: 4 ч.

Задача 6. Трое рабочих могут совместно выполнить некоторую работу за t часов. Первый из них, работая один, может выполнить эту работу вдвое быстрее третьего и на один час быстрее второго. За какое время каждый из них может выполнить эту работу в отдельности?

Решение:

Примем работу за 1.

Пусть за x часов может выполнить всю работу первый рабочий, тогда второй рабочий может выполнить всю работу за $(x + 1)$ часов, а третий за $2x$ часов.

$\frac{1}{x}$ — производительность первого рабочего.

$\frac{1}{x+1}$ — производительность второго рабочего.

$\frac{1}{2x}$ — производительность третьего рабочего.

Так как всю работу совместно рабочие могут выполнить за t часов, то за один час они могут выполнить $\frac{1}{t}$ всей работы.

Составим уравнение:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{t}$$

Из этого уравнения находим:

$$x_1 = \frac{5t - 2 + \sqrt{25t^2 + 4t + 4}}{4};$$

$$x_2 = \frac{5t - 2 - \sqrt{25t^2 + 4t + 4}}{4}$$

По условию задачи $x > 0$, поэтому корень $x_2 = \frac{5t - 2 - \sqrt{25t^2 + 4t + 4}}{4}$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $x = \frac{5t - 2 + \sqrt{25t^2 + 4t + 4}}{4}$.

3. Задачи на проценты

Задача 1. Автомобиль выехал из пункта А в пункт В. За первый час он проехал 40% пути, за второй час на 4 км меньше, чем в первый, после чего ему осталось проехать еще 48 км. Найти расстояние между городами.

Решение:

Пусть расстояние между городами — x км. Так как за первый час он проехал 40% пути, то можно выразить расстояние, которое автомобиль проехал за первый час, как $0,4x$ км. За второй час он проехал $(0,4x - 4)$ км.

Зная, что после двух часов езды ему осталось проехать еще 48 км, мы можем составить следующее уравнение:

$$0,4x + (0,4x - 4) + 48 = x;$$

$$0,8x + 44 = x;$$

$$0,2x = 44;$$

$$x = 220.$$

Расстояние между городами — 220 км.

Ответ: 220 км.

Задача 2. В магазин привезли платья. Так как они плохо раскупались, то цену снизили на 20%, через некоторое время цену снизили еще на 15%. После этого цена платья стала равна 23800 рублей. Определить первоначальную цену платья.

Решение:

Пусть первоначальная цена платья — x рублей. После снижения цены на 20% новая цена стала равна 80% первоначальной цены, то есть $0,8x$ рублей. После снижения цены еще на 15% новая цена платья стала равна 85% цены платья после первого понижения, то есть $0,8x \cdot 0,85$ рублей.

Так как цена платья после двух понижений стала равна 23800 рублей, то можем составить следующее уравнение:

$$0,8x \cdot 0,85 = 23800;$$

$$0,68x = 23800;$$

$$x = 35000.$$

35000 рублей — первоначальная цена платья.

Ответ: 35000 рублей.

Задача 3. Две бригады отремонтировали 19,8 км дороги. Причем одна из них отремонтировала на 20% больше другой. Сколько километров отремонтировала каждая бригада?

Решение:

Пусть x км отремонтировала бригада, которая сделала меньшую часть работы. Так как другая бригада отремонтировала на 20% больше, то $1,2x$ км — длина участка дороги, отремонтированного ею.

Зная, что две бригады вместе отремонтировали вместе 19,8 км дороги, можем составить уравнение:

$$x + 1,2x = 19,8$$

Из уравнения находим:

$$x = 9$$

Значит, 9 км отремонтировала бригада, которая сделала меньшую часть работы.

$19,8 - 9 = 10,8$ (км) отремонтировала другая бригада.

Ответ: 10,8 км; 9 км.

Задача 4. Две бригады отремонтировали 19,8 км дороги. Причем участок, который отремонтировала одна из них, оказался на 20% короче участка, который отремонтировала другая бригада. Сколько километров дороги отремонтировала каждая бригада?

Решение:

Пусть x км отремонтировала вторая бригада, тогда первая бригада отремонтировала $0,8x$ км дороги.

Так как вместе они отремонтировали 19,8 км дороги, можем составить следующее уравнение:

$$x + 0,8x = 19,8$$

Из уравнения находим:

$$x = 11$$

Значит, 11 км отремонтировала вторая бригада.

$19,8 - 11 = 8,8$ (км) отремонтировала первая бригада.

Ответ: 8,8 км; 11 км.

Задача 5. Сумма двух чисел равна 24. Найти эти числа, если 35% одного из них равны 85% другого.

Решение:

Пусть x — первое число, y — второе число. Так как сумма чисел равна 24, можем составить первое уравнение:

$$x + y = 24$$

Так как 35% одного из чисел равны 85% другого, составим второе уравнение:

$$0,35x = 0,85y$$

Из полученных уравнений составим систему:

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ 0,35x = 0,85y \end{cases}$$

Решив систему, находим:

$$x = 17; y = 7.$$

Ответ: 17; 7.

Задача 6. В двух корпусах пансионата было 720 мест для отдыхающих. После реконструкции в первом корпусе число мест увеличилось на 15%, а во втором — на 10%. Сколько мест для отдыхающих стало в каждом корпусе, если общее число мест в обоих корпусах увеличилось на 80?

Решение:

Пусть x мест было в первом корпусе, тогда $(720 - x)$ мест было во втором корпусе.

После реконструкции число мест в первом корпусе увеличилось на 15% и стало равно $1,15x$ мест.

После реконструкции число мест во втором корпусе увеличилось на 10% и стало равно $1,1(720 - x)$ мест.

Число мест в двух корпусах стало равно $720 + 80 = 800$ (мест).

На основании этого составим уравнение:

$$1,15x + 1,1(720 - x) = 800$$

Из уравнения находим:

$$x = 160$$

Значит, в первом корпусе было 160 мест и стало $160 \cdot 1,15 = 184$ (места).

$$800 - 184 = 616 \text{ (мест) стало во втором корпусе.}$$

Ответ: 184 места; 616 мест.

4. Задачи на смеси и сплавы

Задача 1. Имеется руда из двух пластов с содержанием меди 6% и 11%. Сколько «бедной» руды надо взять, чтобы получить при смешивании с «богатой» 20 т руды с содержанием меди 8%?

Решение:

Переведем проценты в дроби:

$$6\% = 0,06; 11\% = 0,11; 8\% = 0,08$$

Пусть необходимо взять x т «бедной» руды, которая будет содержать $0,06x$ т меди. Тогда «богатой» руды необходимо взять $(20 - x)$ т, которая будет содержать $0,11(20 - x)$ т меди.

Так как получившиеся 20 т руды будут содержать $20 \cdot 0,08$ т меди, то можем составить следующее уравнение:

$$0,06x + 0,11(20 - x) = 20 \cdot 0,08$$

Решив это уравнение, находим:

$$x = 12$$

Значит, 12 т «бедной» руды надо взять, чтобы получить при смешивании с «богатой» 20 т руды с содержанием меди 8%.

Ответ: 12 т руды.

Задача 2. Имеются два сплава золота и серебра; в одном количество этих металлов находится в отношении 2:3, а в другом — в отношении 3:7. Сколько нужно взять от каждого сплава, чтобы получилось 8 кг нового сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 5:11?

Решение:

Проанализируем условие задачи. Так как в первом сплаве золото и серебро находятся в отношении 2:3, значит, этот сплав содержит $\frac{2}{5}$ золота. Так как во втором сплаве золото и серебро находятся в отношении 3:7, значит, этот сплав содержит $\frac{3}{10}$ золота. В новом сплаве золото и серебро должны быть в отношении 5:11, значит, он должен содержать $\frac{5}{16}$ золота.

Пусть взяли x кг первого сплава, который содержит $\frac{2}{5}x$ кг золота. Тогда $(8 - x)$ кг второго сплава содержат $\frac{3}{10}(8 - x)$ кг золота.

По условию задачи в 8 кг нового сплава должно содержаться $8 \cdot \frac{5}{16} = 2,5$ (кг) золота.

Составим уравнение:

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}(8 - x) = 2,5$$

Из уравнения находим:

$$x = 1$$

Значит, первого сплава необходимо взять 1 кг, а второго $(8 - 1) = 7$ (кг), чтобы получить новый сплав, в котором золото и серебро были бы в отношении 5:11.

Ответ: 1 кг; 7 кг.

Задача 3. В сосуде содержится 10,5 л 40%-ного раствора серной кислоты. Сколько нужно влить в сосуд 75%-ного раствора той же кислоты, чтобы получить 50%-ный раствор?

Решение:

Найдем, сколько серной кислоты содержится в 10,5 л 40%-ного раствора:

$$10,5 \cdot 0,4 = 4,2 \text{ (л)}$$

Пусть x л 75%-ного раствора серной кислоты добавили в сосуд. Этот раствор будет содержать $0,75x$ л серной кислоты.

После добавления x л 75%-ного раствора к 10,5 л 40%-ного раствора серной кислоты получилось $(10,5 + x)$ л 50%-ного раствора той же кислоты, этот раствор будет содержать $(10,5 + x) \cdot 0,5$ л серной кислоты.

Составим уравнение:

$$4,2 + 0,75x = (10,5 + x) \cdot 0,5$$

Из уравнения находим:

$$x = 4,2$$

Значит, 4,2 л 75%-ного раствора добавили в сосуд и получили 50%-ный раствор серной кислоты.

Ответ: 4,2 л.

Задача 4. Смешивали некоторое количество 72%-ного раствора кислоты и некоторое количество 58%-ного раствора кислоты и в результате получили 62%-ный раствор. Если бы каждого раствора было взято на 15 л больше, то получили бы 63,25%-ный раствор. Сколько литров каждого раствора было взято первоначально для составления первой смеси?

Решение:

Пусть было взято x л 72%-ного раствора, в котором содержится $0,72x$ л кислоты.

Пусть было взято y л 58%-ного раствора, в котором содержится $0,58y$ л кислоты.

Тогда получили $(x + y)$ л 62%-ного раствора, в котором содержится $0,62(x + y)$ л кислоты.

Составим первое уравнение:

$$0,72x + 0,58y = 0,62(x + y)$$

Если взять $(x + 15)$ л 72%-ного раствора кислоты, то в нем будет $0,72(x + 15)$ л кислоты.

Если взять $(y + 15)$ л 58%-ного раствора кислоты, то в нем будет $0,58(y + 15)$ л кислоты.

Тогда получим $(x + y + 30)$ л 63,25%-ного раствора кислоты, в котором будет $0,6325(x + y + 30)$ л кислоты.

Составим второе уравнение:

$$0,72(x + 15) + 0,58(y + 15) = 0,6325(x + y + 30)$$

Из полученных уравнений составим систему:

$$\begin{cases} 0,72x + 0,58y = 0,62(x + y) \\ 0,72(x + 15) + 0,58(y + 15) = 0,6325(x + y + 30) \end{cases}$$

После преобразований система принимает вид:

$$\begin{cases} 0,1x = 0,04y \\ 0,0875x + 0,525 = 0,0525y \end{cases}$$

Из системы находим:

$$x = 12; y = 30$$

Значит, взяли 12 л 72%-ного раствора и 30 л 58%-ного раствора.

Ответ: 12 л; 30 л.

5. Задачи с геометрическим содержанием

Задача 1. Найти площадь прямоугольника, длина которого в 4 раза больше, чем ширина, а площадь численно равна периметру, если измерения проводить в сантиметрах.

Решение:

Пусть x см — ширина прямоугольника, тогда $4x$ см — длина прямоугольника, $2(4x + x)$ см — периметр прямоугольника, $(4x \cdot x)$ см² — площадь прямоугольника.

Так как площадь численно равна периметру, можем составить следующее уравнение:

$$2(4x + x) = 4x \cdot x$$

После преобразований уравнение принимает вид:

$$4x^2 - 10x = 0$$

Из этого уравнения находим:

$$x_1 = 0; x_2 = 2,5$$

Корень 0 не удовлетворяет условию задачи.

Значит, ширина прямоугольника равна 2,5 см, длина равна $2,5 \cdot 4 = 10$ (см), а площадь равна $2,5 \cdot 10 = 25$ (см²).

Ответ: 25 см².

Задача 2. Ширина прямоугольника составляет 75% длины. Найти периметр этого прямоугольника, зная, что площадь прямоугольника равна 48 см^2 .

Решение:

Пусть $x \text{ см}$ — длина прямоугольника, тогда ширина, составляющая 75% длины, равна $0,75x \text{ см}$.

Так как площадь прямоугольника равна 48 см^2 , то можем составить следующее уравнение:

$$x \cdot 0,75x = 48$$

После преобразования уравнение принимает вид:

$$x^2 = 64$$

Из уравнения находим:

$$x_1 = 8; x_2 = -8$$

Корень -8 не удовлетворяет условию задачи.

Значит, длина прямоугольника равна 8 см , ширина равна $8 \cdot 0,75 = 6 \text{ (см)}$, а периметр равен

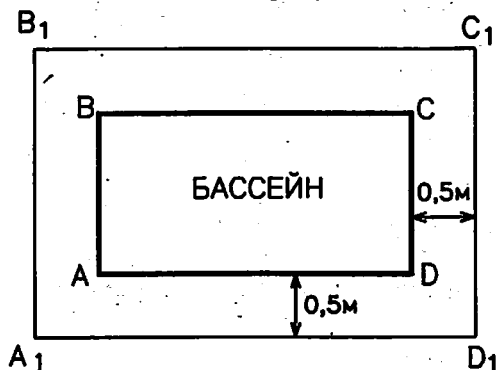
$$(8 + 6) \cdot 2 = 28 \text{ (см)}.$$

Ответ: 28 см .

Задача 3. Бассейн имеет прямоугольную форму. Одна из его сторон на 6 м длиннее другой. Вокруг него проходит дорожка, ширина которой $0,5 \text{ м}$. Найти стороны бассейна, если площадь окружающей его дорожки равна 15 м^2 .

Решение:

Для наглядности сделаем рисунок:



$$AB = x \text{ (м)}; BC = (x + 6) \text{ (м)};$$

$$A_1B_1 = (x + 0,5 + 0,5) \text{ (м)}; B_1C_1 = (x + 6 + 0,5 + 0,5) \text{ (м)};$$

$$S_{ABCD} = x(x + 6) \text{ (м}^2\text{)};$$

$$S_{A_1B_1C_1D_1} = (x + 1) \cdot (x + 7) \text{ (м}^2\text{)}.$$

Так как площадь дорожки равна 15 м^2 , можем составить следующее уравнение:

$$(x + 1)(x + 7) - x(x + 6) = 15$$

После преобразований уравнение принимает вид:

$$x - 4 = 0$$

Из уравнения находим:

$$x = 4$$

Значит, одна из сторон бассейна равна 4 м, а другая $4 + 6 = 10 \text{ (м)}$.

Ответ: 4 м; 10 м.

Задача 4. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 41 см, а его площадь 180 см^2 . Найти катеты.

Решение:

Пусть x см длина одного катета, y см длина другого катета. Так как гипотенуза равна 41 см, то можем составить первое уравнение:

$$x^2 + y^2 = 41^2$$

Так как площадь прямоугольного треугольника равна 180 см^2 , то можем составить второе уравнение:

$$\frac{x \cdot y}{2} = 180$$

Из полученных уравнений составим систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 41^2 \\ x \cdot y = 360 \end{cases}$$

Из системы находим решения: (40; 9); (9; 40); (-40; -9) и (-9; -40).

Решения: (-40; -9) и (-9; -40) не удовлетворяют условию задачи.

Значит, длина одного катета 40 см, длина другого катета 9 см.

Ответ: 40 см; 9 см.

Задача 5. Сумма двух углов треугольника 120° , а один из этих углов меньше другого на 50° . Найти углы треугольника.

Решение:

Пусть x градусов равен один угол, тогда $(x + 50^\circ)$ градусов равен другой угол. Так как сумма этих углов равна 120° , то можем составить следующее уравнение:

$$x + (x + 50^\circ) = 120^\circ$$

Из уравнения находим:

$$x = 35^\circ$$

Значит, один угол равен 35° , другой угол

$$35^\circ + 50^\circ = 85^\circ,$$

третий угол равен

$$180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Ответ: 35° , 85° , 60° .

Задача 6. Стороны двух квадратов пропорциональны числам 5 и 4. Если стороны каждого из квадратов уменьшить на 2 см, то разность площадей полученных квадратов будет равна 28 см^2 . Найдите стороны данных квадратов.

Решение:

Пусть x см сторона первого квадрата, y см сторона второго квадрата. Так как стороны квадратов пропорциональны числам 5 и 4, можем составить первое уравнение:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$$

$(x - 2)$ см стала равна сторона первого квадрата, площадь стала равна $(x - 2)^2 \text{ см}^2$.

$(y - 2)$ см стала равна сторона второго квадрата, площадь квадрата стала равна $(y - 2)^2 \text{ см}^2$.

Так как разность площадей полученных квадратов равна 28 см^2 , то можем составить второе уравнение:

$$(x - 2)^2 - (y - 2)^2 = 28$$

Составим систему из полученных уравнений:

$$\begin{cases} 4x = 5y \\ (x - 2)^2 - (y - 2)^2 = 28 \end{cases}$$

Из системы находим:

$$x_1 = 10; y_1 = 8; x_2 = -\frac{70}{9}; y_2 = -\frac{56}{9}$$

$$x_2 = -\frac{70}{9}; y_2 = -\frac{56}{9} \text{ не удовлетворяют условию задачи.}$$

Значит, сторона первого квадрата равна 10 см, сторона второго квадрата равна 8 см.

Ответ: 10 см; 8 см.

6. Другие задачи

Задача 1. Рыбу разделили на пять кусков в отношении по весу 14:12:11:9:15, причем второй кусок весил 112 г. Сколько весила вся рыба?

Решение:

Пусть x г — вес одной части, тогда:

14 x г — вес первого куска;

12 x г — вес второго куска;

11 x г — вес третьего куска;

9 x г — вес четвертого куска;

15 x г — вес пятого куска;

61 x г — вес всей рыбы.

Так как второй кусок весил 112 г, можем составить следующее уравнение:

$$12x = 112$$

Из уравнения находим:

$$x = \frac{28}{3}$$

$$61x = 61 \cdot \frac{28}{3} = 569\frac{1}{3}$$

Значит, вся рыба весила $569\frac{1}{3}$ г.

Ответ: $569\frac{1}{3}$ г.

Задача 2. Среднее арифметическое двух чисел равно 7, а разность квадратов этих чисел равна 14. Найдите сумму квадратов этих чисел.

Решение:

Пусть x — первое число, y — второе число.

Так как среднее арифметическое чисел равно 7, можем составить первое уравнение:

$$\frac{x+y}{2} = 7$$

Так как разность квадратов чисел равна 14, можем составить второе уравнение:

$$x^2 - y^2 = 14$$

Из полученных уравнений составим систему:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 7 \\ x^2 - y^2 = 14 \end{cases}$$

После преобразований система принимает вид:

$$\begin{cases} x+y = 14 \\ (x-y)(x+y) = 14 \end{cases}$$

Очевидно, что эта система равносильна линейной системе:

$$\begin{cases} x+y = 14 \\ x-y = 1 \end{cases}$$

Из полученной системы находим:

$$x = 7,5; y = 6,5$$

Значит, первое число равно 7,5; второе число равно 6,5.

Найдем сумму квадратов этих чисел:

$$7,5 + 6,5 = 98,5.$$

Ответ: 98,5.

Задача 3. В кинотеатре было 320 мест. После капитального ремонта число мест в каждом ряду увеличилось на 4, а число рядов увеличилось на 1. Определить, сколько рядов стало в кинотеатре, если мест в нем стало 420, а число рядов больше десяти.

Решение:

Пусть x мест стало в каждом ряду в зрительном зале кинотеатра, y рядов стало в кинотеатре.

Так как после ремонта в кинотеатре стало 420 мест, можем составить следующее уравнение:

$$x \cdot y = 420$$

$(x - 4)$ мест было в каждом ряду, $(y - 1)$ рядов было в кинотеатре до ремонта.

Так как в кинотеатре до ремонта было 320 мест, можем составить второе уравнение:

$$(x - 4)(y - 1) = 320$$

Из полученных уравнений составим систему:

$$\begin{cases} x \cdot y = 420 \\ (x - 4)(y - 1) = 320 \end{cases}$$

Из системы находим:

$$x_1 = 20; y_1 = 21; x_2 = 84; y_2 = 5$$

$x_2 = 84; y_2 = 5$ не удовлетворяют условию задачи.

Значит, в каждом ряду в кинотеатре 20 мест, всего 21 ряд.

Ответ: 21 ряд.

Задача 4. Бригада трактористов должна была вспахать 600 га к определенному сроку, но уже за 3 дня до срока задание было выполнено, так как бригада перевыполняла ежедневную норму на 10 га. За сколько дней бригада вспахала 600 га?

Решение:

Пусть за x дней бригада вспахала 600 га. Так как она выполнила задание за 3 дня до срока, то она должна была вспахать 600 га за $(x + 3)$ дня.

$$\frac{600}{x} \text{ вспахала бригада за один день.}$$

$$\frac{600}{x + 3} \text{ должна была вспахать бригада за один день.}$$

Так как бригада перевыполняла ежедневную норму на 10 га, можем составить следующее уравнение:

$$\frac{600}{x} - \frac{600}{x+3} = 10.$$

После преобразований уравнение принимает вид:

$$\frac{x^2 + 3x - 180}{x(x+3)} = 0$$

Из уравнения $x^2 + 3x - 180 = 0$ находим:

$$x_1 = 12; x_2 = -15.$$

Корень -15 не удовлетворяет условию задачи.

Значит, бригада вспахала 600 га за 12 дней.

Ответ: 12 дней.

XI. Линейные неравенства с одной переменной.

Дробно-линейные неравенства. Системы линейных неравенств с одной переменной

Линейные неравенства — неравенства вида:

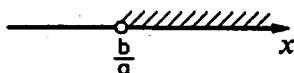
$$ax > b; ax < b; ax \geq b; ax \leq b$$

Рассмотрим решение неравенства $ax > b$.

1. Если $a > 0$, то, разделив обе части неравенства $ax > b$ на

a , получим $x > \frac{b}{a}$. Значит, множеством решений этого

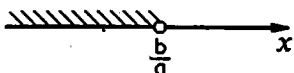
неравенства является интервал $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$.



2. Если $a < 0$, то, разделив обе части неравенства $ax > b$ на

a , получим $x < \frac{b}{a}$. Значит, множеством решений этого

неравенства является интервал $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$.



Аналогично решаются неравенства вида:

$$ax < b; ax \geq b; ax \leq b.$$

Дробно-линейные неравенства — неравенства вида:

$$\frac{ax+b}{cx+d} > 0; \frac{ax+b}{cx+d} < 0; \frac{ax+b}{cx+d} \geq 0; \frac{ax+b}{cx+d} \leq 0$$

Решить систему неравенств с одной переменной — это значит найти все общие решения заданных неравенств.

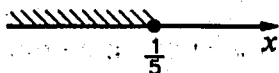
Задача 1. Решить неравенство:

а) $5x \leq 1$

Решение:

Разделим обе части неравенства на 5 и получим:

$$x \leq \frac{1}{5}$$



Ответ: $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right]$.

б) $\frac{4x - 0,5}{4,4} > 2,2$

Решение:

Умножим обе части неравенства на 4,4 и получим неравенство:

$$4x - 0,5 > 9,68$$

К обеим частям неравенства прибавим 0,5. Получим:

$$4x > 10,18$$

Обе части неравенства разделим на 4. Получим:

$$x > 2,545$$

Значит, $x \in (2,545; +\infty)$

Ответ: $(2,545; +\infty)$.

в) $\frac{2,78 - 2x}{0,75} \leq 4$

Решение:

Обе части неравенства умножим на 0,75. Получим: /

$$2,78 - 2x \leq 3$$

К обеим частям неравенства прибавим $-2,78$. Получим:

$$-2x \leq 0,22$$

Обе части неравенства разделим на -2 , поменяв при этом знак неравенства на противоположный. Получим:

$$x \geq -0,11$$

Значит, $x \in [-0,11; +\infty)$.

Ответ: $[-0,11; +\infty)$.

$$г) x - \frac{x - 3,73}{5} + \frac{2x - 1,86}{10} < 4$$

Решение:

Преобразуем выражение, стоящее в левой части неравенства. Получим:

$$\frac{10x + 5,6}{10} < 4$$

Обе части неравенства умножим на 10. Получим:

$$10x + 5,6 < 40$$

К обеим частям неравенства прибавим $-5,6$. Получим:

$$10x < 34,4$$

Обе части неравенства разделим на 10. Получим:

$$x < 3,44$$

Значит, $x \in (-\infty; 3,44)$.

Ответ: $(-\infty; 3,44)$.

$$д) x - \frac{x - 1}{2} \geq \frac{x - 3}{4} - \frac{x - 2}{3}$$

Решение:

Преобразуем правую и левую части неравенства. Получим:

$$\frac{x + 1}{2} \geq \frac{-x - 1}{12}$$

Обе части неравенства умножим на 12. Получим:

$$6x + 6 \geq -x - 1$$

Перенесем слагаемые с переменной в левую часть неравенства, а слагаемые без переменных в правую часть, поменяв знак слагаемых на противоположный. Получим:

$$6x + x \geq -1 - 6$$

Приведем подобные слагаемые. Получим:

$$7x \geq -7$$

Разделим обе части неравенства на 7. Получим:

$$x \geq -1$$

Значит, $x \in [-1; +\infty)$.

Ответ: $[-1; +\infty)$.

Задача 2. Найти наименьшее целое решение неравенства:

$$a) \frac{1 - 3x}{8} < \frac{3 - 5x}{20}$$

Решение:

Приведем дроби к общему знаменателю. Получим:

$$\frac{5 - 15x}{40} < \frac{6 - 10x}{40}$$

Обе части уравнения умножим на 40. Получим:

$$5 - 15x < 6 - 10x$$

Перенесем слагаемые с переменной в левую часть неравенства, а слагаемые без переменных в правую часть, поменяв знак слагаемых на противоположный. Получим:

$$-15x + 10x < 6 - 5$$

Приведем подобные слагаемые. Получим:

$$-5x < 1$$

Разделим обе части неравенства на -5 , поменяв при этом знак неравенства на противоположный. Получим:

$$x > -0,2$$

Значит, $x \in (-0,2; +\infty)$.

Наименьшее целое число этого множества равно 0.

Ответ: 0 — наименьшее целое решение.

$$б) 7x - 3(2x + 3) < 2(x - 18)$$

Решение:

Преобразуем правую и левую части неравенства. Получим:

$$x - 9 < 2x - 36$$

Перенесем слагаемые с переменной в левую часть неравенства, а слагаемые без переменных в правую часть, поменяв знак слагаемых на противоположный. Получим:

$$x - 2x < 9 - 36$$

Приведем подобные слагаемые:

$$-x < -27$$

Разделим обе части неравенства на -1 , поменяв при этом знак неравенства на противоположный. Получим:

$$x > 27$$

Значит, $x \in (27; +\infty)$.

28 — наименьшее целое решение неравенства.

Ответ: 28 — наименьшее целое решение неравенства.

Задача 3. Найти наибольшее целое решение неравенства:

$$(x - 3)(x - 4) \geq (x + 1)(x + 2)$$

Решение:

Преобразуем правую и левую части неравенства. Получим:

$$x^2 - 7x + 12 \geq x^2 + 3x + 2$$

Перенесем слагаемые с переменной в левую часть неравенства, а слагаемые без переменных в правую часть, поменяв знак слагаемых на противоположный. Получим:

$$x^2 - 7x - x^2 - 3x \geq 2 - 12$$

Приведем подобные слагаемые. Получим:

$$-10x \geq -10$$

Разделим обе части неравенства на -10 , поменяв знак неравенства на противоположный. Получим:

$$x \leq 1$$

Значит, $x \in (-\infty; 1]$.

Наибольшее целое решение неравенства равно 1.

Ответ: 1 — наибольшее целое решение.

Задача 4. Решить дробно-линейное неравенство и указать его целые решения:

а) $\frac{5x+8}{3x-1} \leq 0$

Решение:

Неравенство $\frac{5x+8}{3x-1} \leq 0$ равносильно совокупности

двух систем линейных неравенств:

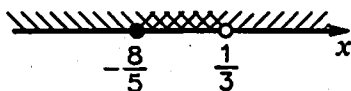
$$\begin{cases} 5x+8 \geq 0 \\ 3x-1 < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 5x+8 \leq 0 \\ 3x-1 > 0 \end{cases}$$

Решим каждую систему:

1) $\begin{cases} 5x+8 \geq 0 \\ 3x-1 < 0 \end{cases}$

Преобразовав систему, получаем:

$$\begin{cases} x \geq -\frac{8}{5} \\ x < \frac{1}{3} \end{cases}$$



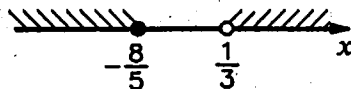
$$-\frac{8}{5} \leq x < \frac{1}{3}$$

Значит, $x \in \left[-\frac{8}{5}; \frac{1}{3}\right)$.

2) $\begin{cases} 5x+8 \leq 0 \\ 3x-1 > 0 \end{cases}$

Преобразовав систему, получим:

$$\begin{cases} x \leq -\frac{8}{5} \\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$$



Значит, система $\begin{cases} 5x + 8 \leq 0 \\ 3x - 1 > 0 \end{cases}$ не имеет решений.

Решением неравенства $\frac{5x + 8}{3x - 1} \leq 0$ является $\left[-\frac{8}{5}; \frac{1}{3}\right)$.

Целые решения неравенства: $-1; 0$.

Ответ: $\left[-\frac{8}{5}; \frac{1}{3}\right)$; $-1; 0$ — целые решения.

$$б) \frac{4 - 2x}{1 + 3x} > 0$$

Решение:

Неравенство $\frac{4 - 2x}{1 + 3x} > 0$ равносильно совокупности

двух систем линейных неравенств:

$$\begin{cases} 4 - 2x > 0 \\ 1 + 3x > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 4 - 2x < 0 \\ 1 + 3x < 0 \end{cases}$$

Решим каждую систему:

$$1) \begin{cases} 4 - 2x > 0 \\ 1 + 3x > 0 \end{cases}$$

Преобразовав систему, получаем:

$$\begin{cases} x < 2 \\ x > -\frac{1}{3} \end{cases}$$



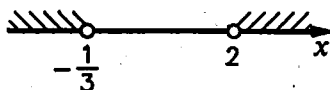
$$-\frac{1}{3} < x < 2$$

Значит, $x \in \left(-\frac{1}{3}; 2\right)$.

$$2) \begin{cases} 4 - 2x < 0 \\ 1 + 3x < 0 \end{cases}$$

Преобразовав систему, получаем:

$$\begin{cases} x > 2 \\ x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$



Значит, система $\begin{cases} 4 - 2x < 0 \\ 1 + 3x < 0 \end{cases}$ не имеет решений.

Решением неравенства $\frac{4 - 2x}{1 + 3x} > 0$ является $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$.

Целые решения: 0; 1.

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$; 0, 1 — целые решения.

Задача 5. Решить неравенство с параметром a :

а) $(a - 1)x > 2$

Решение:

Если $a - 1 = 0$, то есть $a = 1$, то неравенство принимает вид:

$$0 \cdot x > 2$$

Такое неравенство не имеет решений.

Если $a - 1 > 0$, то есть $a > 1$, то, разделив обе части неравенства на $(a - 1)$, получим:

$$x > \frac{2}{a - 1}$$

Значит, $x \in \left(\frac{2}{a - 1}; +\infty\right)$.

Если $a - 1 < 0$, то есть $a < 1$, то, разделив обе части неравенства на $(a - 1)$ и поменяв знак неравенства на противоположный, получаем:

$$x < \frac{2}{a - 1}$$

Значит, $x \in \left(-\infty; \frac{2}{a - 1}\right)$.

Ответ: при $a = 1$ неравенство не имеет решений;

при $a > 1$ $x \in \left(\frac{2}{a - 1}; +\infty\right)$;

при $a < 1$ $x \in \left(-\infty; \frac{2}{a - 1}\right)$.

$$б) (a + 5)x > -2$$

Решение:

Если $a + 5 = 0$, то есть $a = -5$, то неравенство принимает вид:

$$0 \cdot x > -2$$

Значит, x — любое действительное число.

Если $a + 5 > 0$, то есть $a > -5$, то, разделив обе части неравенства на $(a + 5)$, получаем:

$$x > -\frac{2}{a+5}$$

$$\text{Значит, } x \in \left(-\frac{2}{a+5}; +\infty \right).$$

Если $a + 5 < 0$, то есть $a < -5$, то, разделив обе части неравенства на $(a + 5)$ и поменяв знак неравенства на противоположный, получаем:

$$x < -\frac{2}{a+5}$$

$$\text{Значит, } x \in \left(-\infty; -\frac{2}{a+5} \right).$$

Ответ: при $a = -5$, x — любое действительное число;

$$\text{при } a > -5, x \in \left(-\frac{2}{a+5}; +\infty \right);$$

$$\text{при } a < -5, x \in \left(-\infty; -\frac{2}{a+5} \right).$$

Задача 6. Решить систему неравенств:

$$а) \begin{cases} 5x + 2 \geq 0 \\ x < 2x + 1 \\ x - 4 > 2 \end{cases}$$

Решение:

Преобразуем каждое неравенство и получим равносильную систему неравенств:

$$\begin{cases} x \geq -\frac{2}{5} \\ x > -1 \\ x > 6 \end{cases}$$

Очевидно, что система неравенств равносильна неравенству $x > 6$

Значит, $x \in (6; +\infty)$.

Ответ: $(6; +\infty)$.

$$6) \begin{cases} 5(x+1) + 6(x+2) > 9(x+3) \\ 7x - 3(2x+3) > 2(x-18) \end{cases}$$

Решение:

Преобразуем каждое неравенство системы, получим:

$$\begin{cases} x > 5 \\ x < 27 \end{cases}$$



$$5 < x < 27.$$

Значит, $x \in (5; 27)$.

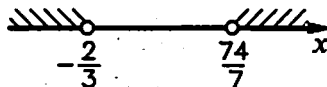
Ответ: $(5; 27)$.

$$в) \begin{cases} 5x - \frac{3-2x}{2} < \frac{7x-5}{2} + x \\ \frac{7x-2}{3} - 2x > 5 - \frac{x-2}{4} \end{cases}$$

Решение:

Преобразуем каждое неравенство системы, получим:

$$\begin{cases} x < -\frac{2}{3} \\ x > \frac{74}{7} \end{cases}$$



Система не имеет решений.

Ответ: нет решений.

ХII. Понятие функции. Линейная функция и ее график. Квадратичная функция и ее график. Функция обратная пропорциональности и ее график

Функция — зависимость переменной y от переменной x , если каждому значению x соответствует единственное значение y . Обозначается: $y = f(x)$. Переменная x называется независимой переменной, или аргументом, а переменная y называется зависимой переменной.

Область определения функции — все значения, которые принимает независимая переменная. Обозначается: D_f .

Область (множество) значений функции — все значения, которые принимает зависимая переменная. Обозначается: E_f .

График функции — множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты равны соответствующим значениям функции.

Линейная функция — функция, заданная формулой $y = kx + b$, где k и b — некоторые действительные числа.

Графиком линейной функции является прямая, для построения которой достаточно определить координаты двух точек.

Число k называется угловым коэффициентом прямой. Угловым коэффициентом равен тангенсу угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox : $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Частные случаи линейной функции:

1. Если $b = 0$, то линейная функция называется прямой пропорциональностью.
2. Если $k = 0$, то линейная функция называется постоянной.

Квадратичная функция — функция, заданная формулой $y = ax^2 + bx + c$, где x — независимая переменная, a ,

b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$. Графиком квадратичной функции является парабола.

Обратная пропорциональность — функция, заданная формулой $y = \frac{k}{x}$, где k — число, отличное от нуля.

Графиком обратной пропорциональности является гипербола.

Задача 1. Построить график линейной функции:

а) $y = 2x + 1$

Решение:

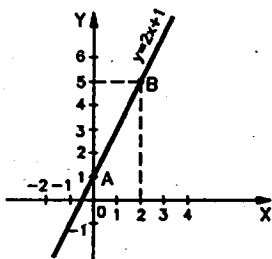
Найдем координаты двух точек:

если $x = 0$, то $y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$;

если $x = 2$, то $y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

Имеем $A(0; 1)$ и $B(2; 5)$. Отметим эти точки на координатной плоскости и проведем через них прямую.

Построенная прямая является графиком функции $y = 2x + 1$.



б) $y = -0,5x - 3$

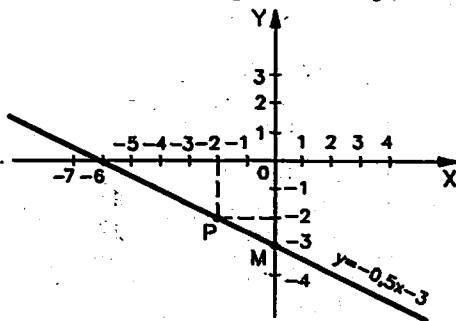
Решение:

Найдем координаты двух точек:

если $x = 0$, то $y = -0,5 \cdot 0 - 3 = -3$;

если $x = -2$, то $y = -0,5 \cdot (-2) - 3 = 1 - 3 = -2$.

Имеем $M(0; -3)$ и $P(-2; -2)$. Отметим эти точки на координатной плоскости и проведем через них прямую.



Построенная прямая является графиком функции $y = -0,5x - 3$.

в) $y = 3x$

Решение:

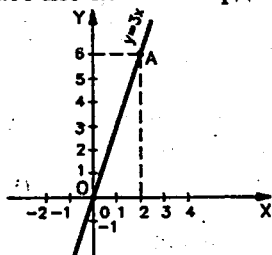
Данная функция — прямая пропорциональность. Так как графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат, то для построения графика данной функции достаточно найти координаты одной точки.

Если $x = 2$, то $y = 3 \cdot 2 = 6$.

Имеем точку $A(2; 6)$.

Отметим на координатной плоскости точки $O(0; 0)$ и $A(2; 6)$ и проведем через них прямую.

Построенная прямая является графиком функции $y = 3x$.



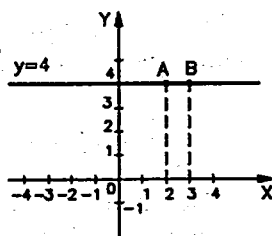
г) $y = 4$

Решение:

Данная функция — постоянная. Любому значению x соответствует одно и то же значение y , равное 4.

Отметим на координатной плоскости точки $A(2; 4)$ и $B(3; 4)$ и проведем через них прямую.

Построенная прямая является графиком функции $y = 4$.



Задача 2. Не выполняя построения, найти координаты точек пересечения с осями координат графика функции $y = -0,5x - 2,5$

Решение:

Пусть точка A — точка пересечения графика функции $y = -0,5x - 2,5$ с осью Ox . Ордината точки A равна 0. Найдем абсциссу этой точки:

$$0 = -0,5x - 2,5;$$

$$x = -5$$

Имеем $A(-5; 0)$ — точка пересечения графика функции $y = -0,5x - 2,5$ с осью Ox .

Пусть точка B — точка пересечения графика функции $y = -0,5x - 2,5$ с осью Oy . Абсцисса точки B равна 0. Найдем ординату точки B :

$$y = -0,5 \cdot 0 - 2,5;$$

$$y = -2,5.$$

Имеем $B(0; -2,5)$ — точка пересечения графика функции $y = -0,5x - 2,5$ с осью Oy .

Задача 3. Найти координаты точки пересечения графиков функций:

а) $y = -3x + 9$ и $y = -0,5x - 2$

Решение:

Приравниваем правые части уравнений $y = -3x + 9$ и $y = -0,5x - 2$:

$$-3x + 9 = -0,5x - 2$$

Получили линейное уравнение с одной переменной x . Решив уравнение, получим:

$$x = 4,4$$

4,4 — абсцисса точки пересечения графиков функций $y = -3x + 9$ и $y = -0,5x - 2$.

Поставим значение переменной x в уравнение $y = 3x + 9$ (или $y = -0,5x - 2$) и получим: $y = -4,2$.

-4,2 — ордината точки пересечения графиков функций $y = -3x + 9$ и $y = -0,5x - 2$.

Ответ: (4,4; -4,2) — координаты точки пересечения графиков функций $y = -3x + 9$ и $y = -0,5x - 2$.

б) $y = 2x + 4$ и $y = 3x - 3$

Решение:

Приравняем правые части уравнений $y = 2x + 4$ и $y = 3x - 3$:

$$2x + 4 = 3x - 3$$

Получили линейное уравнение с одной переменной x , которое не имеет решений. Значит, графики данных функций не пересекаются, то есть они параллельны.

Вообще, можно определить, будут ли графики функций пересекаться, без решения уравнения. Если угловые коэффициенты различны, то графики функций пересекаются.

Задача 4. Написать уравнение прямой, которая проходит через начало координат и имеет угловой коэффициент, равный 7.

Решение:

Запишем уравнение прямой в общем виде: $y = kx + b$.

Так как прямая проходит через начало координат, то она является графиком прямой пропорциональности, то есть $b = 0$.

Угловой коэффициент прямой равен 7, то есть $k = 7$.

$y = 7x$ — уравнение прямой, которая проходит через начало координат и имеет угловой коэффициент, равный 7.

Задача 5. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $A(2; 3)$ и $B(-5; -4)$.

Решение:

Запишем уравнение прямой в общем виде: $y = kx + b$.

Необходимо найти k и b .

Подставим координаты точек A и B вместо x и y в уравнение $y = kx + b$ и получим систему из двух линейных уравнений с переменными k и b .

Решим полученную систему:

$$\begin{cases} 3 = k \cdot 2 + b \\ -4 = k \cdot (-5) + b \\ k = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$y = x + 1$ — уравнение прямой, проходящей через точки $A(2; 3)$ и $B(-5; -4)$.

Задача 6. Построить график квадратичной функции:

а) $y = 1,5x^2$

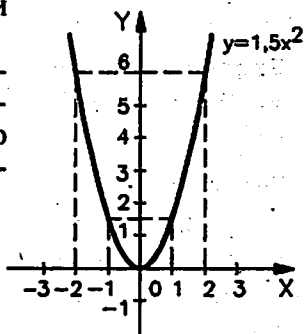
Решение:

Графиком функции $y = 1,5x^2$ является парабола, вершина которой находится в начале координат. Значит, ветви параболы симметричны относительно Oy .

Так как $a = 1,5 > 0$, то ветви параболы направлены вверх.

Построим ветвь параболы, которая лежит в первой координатной четверти по точкам, а другую ветвь симметрично первой относительно оси Oy .

x	0	1	2
y	0	1,5	6



б) $y = -0,5x^2$

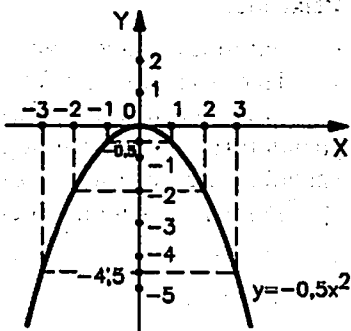
Решение:

Графиком функции $y = -0,5x^2$ является парабола, вершина которой находится в начале координат. Значит, ветви параболы симметричны относительно оси Oy .

Так как $a = -0,5 < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Построим ветвь параболы, которая лежит в четвертой координатной четверти по точкам, а другую ветвь симметрично первой относительно оси Oy .

x	0	1	2	3
y	0	-0,5	-2	-4,5



в) $y = x^2 - 4x - 1$

Решение:

Графиком функции $y = x^2 - 4x - 1$ является парабола.

Пусть точка $A(x_0; y_0)$ — вершина параболы, найдем координаты точки A :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; x_0 = -\frac{-4}{2} = 2;$$

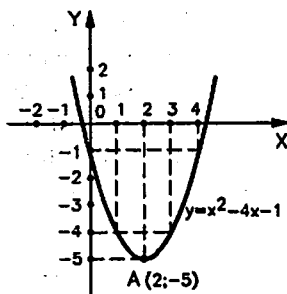
$$y_0 = y(x_0); y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 - 1 = -5$$

Точка $A(2; -5)$ — вершина параболы, значит, парабола симметрична относительно прямой $x = 2$.

Так как $a = 1 > 0$, то ветви параболы направлены вверх.

Для построения графика функции найдем координаты нескольких точек:

x	0	1	2	3	4
y	-1	-4	-5	-4	-1



г) $y = -x^2 + 2$

Решение:

График функции $y = -x^2 + 2$ можно получить из графика $y = -x^2$ с помощью параллельного переноса вдоль оси Oy на 2 единицы вверх.

Построим график функции $y = -x^2$. Графиком этой функции является парабола с вершиной в начале координат, ветви которой направлены вниз.

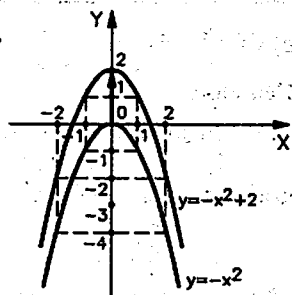
Для построения графика функции найдем координаты нескольких точек:

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	-1	-4

В этой же системе координат построим график функции $y = -x^2 + 2$. Для этого возьмем значения аргумента, как и для функции $y = -x^2$, но им будут соответствовать

значения функции, большие на 2, чем значения функции $y = -x^2$:

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	-1	-4



д) $y = -(x+3)^2$

Решение:

График функции $y = -(x+3)^2$ можно получить из графика функции $y = -x^2$ с помощью параллельного переноса вдоль оси Ox на 3 единицы влево.

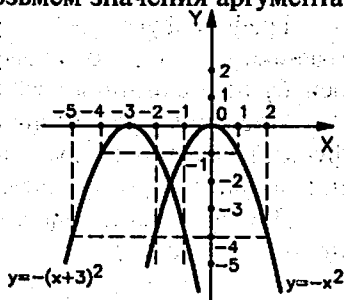
Построим график функции $y = -x^2$. Графиком этой функции является парабола с вершиной в начале координат, ветви которой направлены вниз.

Для построения графика функции найдем координаты нескольких точек:

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	0	-1	-4

В этой же системе координат построим график функции $y = -(x+3)^2$. Для этого возьмем значения аргумента, меньшие на 3, чем значения аргумента функции $y = -x^2$, им будут соответствовать значения функции, как и для функции $y = -x^2$:

x	-5	-4	-3	-2	-1
y	-4	-1	0	-1	-4

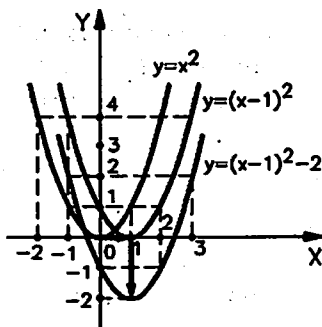


е) $y = (x-1)^2 - 2$

Решение:

График функции $y = (x-1)^2 - 2$ можно получить из графика функции $y = x^2$ с помощью двух параллельных

переносов. Сначала получим график функции $y = (x - 1)^2$ из графика $y = x^2$ с помощью параллельного переноса вдоль оси Ox на 1 единицу вправо, затем из полученного графика с помощью параллельного переноса вдоль оси Oy на 2 единицы вниз получаем график функции $y = (x - 1)^2 - 2$.



Задача 7. Постройте график функции $y = 2x^2 + 4x - 6$. Найдите по графику, при каких значениях x значение y равно нулю, больше нуля, меньше нуля. Укажите множество значений.

Решение:

Графиком функции $y = 2x^2 + 4x - 6$ является парабола, ветви которой направлены вверх, так как $a = 2 > 0$.

Пусть точка $A(x_0; y_0)$ — вершина параболы, найдем координаты точки A .

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; x_0 = -\frac{4}{4} = -1$$

$$y_0 = y(x_0); y_0 = 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 6 = -8$$

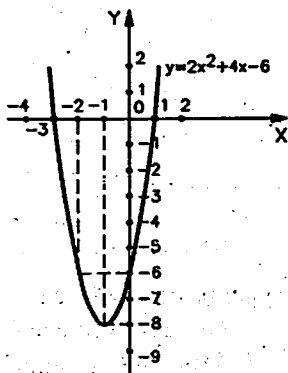
Точка $A(-1; -8)$ — вершина параболы, значит, парабола симметрична относительно прямой $x = -1$.

Для построения графика найдем координаты нескольких точек:

x	-3	-2	-1	0	1
y	0	-6	-8	-6	0

При $x = -3$ и $x = 1$ $y = 0$.

При $x < -3$; $y > 0$.



При $-3 < x < 1$; $y < 0$.

При $x > 1$; $y > 0$.

Множество значений функции: $E_f = [-8; +\infty)$.

Задача 8. Постройте график функции:

а) $y = \frac{2}{x}$

Решение:

Функция $y = \frac{2}{x}$ — обратная пропорциональность, ее графиком является гипербола.

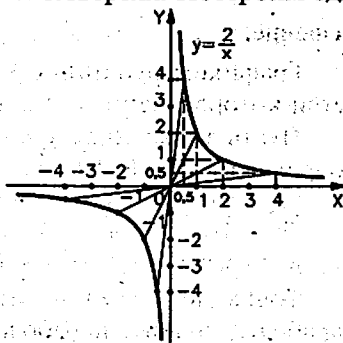
Область определения: $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Множество значений: $E_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Так как $k = 2 > 0$, то ветви гиперболы находятся в первой и третьей координатных четвертях. Построим одну ветвь гиперболы по точкам, другая будет ей симметрична относительно начала координат.

Для построения графика функции найдем координаты нескольких точек:

x	0,5	1	2	4
y	4	2	1	0,5



б) $y = -\frac{4}{x}$

Решение:

Функция $y = -\frac{4}{x}$ — обратная пропорциональность, ее графиком является гипербола.

Область определения: $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

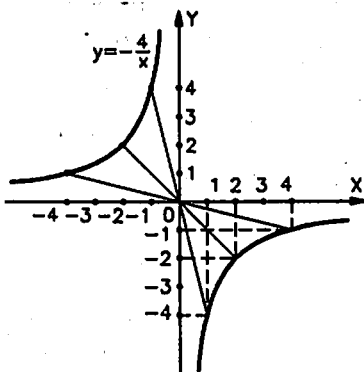
Множество значений: $E_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Так как $k = -4 < 0$, то ветви гиперболы находятся во второй и четвертой координатных четвертях. Построим

одну ветвь гиперболы по точкам, другая будет ей симметрична относительно начала координат.

Для построения графика функции найдем координаты нескольких точек:

x	1	2	4
y	-4	-2	-1



Задача 9. Найти точки пересечения графика функции $y = x^2 - 2x - 3$ с осями координат.

Решение:

Можно найти координаты точек пересечения с осями координат графика функции $y = x^2 - 2x - 3$, не выполняя построения.

Абсцисса точки пересечения графика функции с осью ординат равна нулю. Найдем ординату этой точки:

если $x = 0$, то $y(0) = 0 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$.

$(0; -3)$ — координаты точки пересечения графика функции $y = x^2 - 2x - 3$ с осью ординат.

Графиком функции является парабола. Парабола может пересекать ось абсцисс в двух точках, может касаться оси абсцисс, а может не иметь с ней общих точек. Если такие точки существуют, то их ординаты равны нулю. Чтобы найти абсциссы, нужно решить квадратное уравнение $y = x^2 - 2x - 3$.

Так как дискриминант этого уравнения равен 16, то уравнение имеет два корня: $x_1 = 3$; $x_2 = -1$.

$(3; 0)$, $(-1; 0)$ — координаты точек пересечения графика функции $y = x^2 - 2x - 3$ с осью абсцисс.

Задача 10. Постройте в одной системе координат графики функций и найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = x^2 - 4$ и $y = x - 2$

Решение:

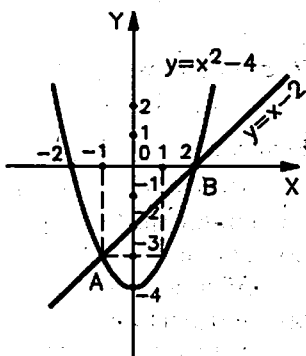
Графиком функции $y = x^2 - 4$ является парабола, ветви которой направлены вверх. $(0; -4)$ — координаты вершины параболы. Для построения графика функции найдем координаты точек:

x	-2	-1	0	1	2
y	0	-3	-4	-3	0

Графиком функции $y = x - 2$ является прямая. Для построения графика функции достаточно найти координаты двух точек:

x	0	2
y	-2	0

$A(-1; -3)$; $B(2; 0)$ — точки пересечения графиков функций $y = x^2 - 4$ и $y = x - 2$.



б) $y = -\frac{1}{x}$ и $y = -4x$

Решение:

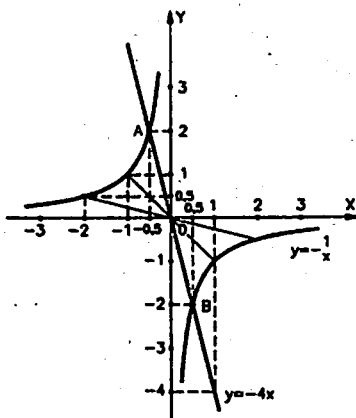
Графиком функции $y = -\frac{1}{x}$ является гипербола, ветви которой находятся во второй и четвертой координатных четвертях, так как $k = -1 < 0$. Построим одну ветвь гиперболы по точкам, другая будет ей симметрична относительно начала координат. Для построения графика функции найдем координаты нескольких точек:

x	-2	-1	-0,5
y	0,5	1	2

Графиком функции $y = -4x$ является прямая, проходящая через начало координат. Для построения графика функции достаточно найти координаты еще одной точки:

если $x = 1$, $y = -4$.

$A(-0,5; 2)$; $B(0,5; -2)$ — точки пересечения графиков функций $y = -\frac{1}{x}$ и $y = -4x$.



в) $y = x^2 + 2x + 1$ и $y = \frac{4}{x}$

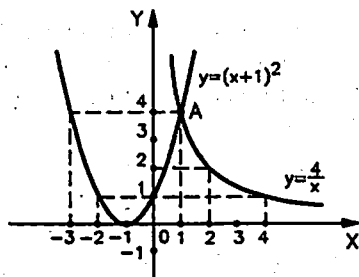
Решение:

Графиком функции $y = x^2 + 2x + 1$ является парабола. Запишем формулу, которой задана функция, в виде: $y = (x + 1)^2$. График функции $y = (x + 1)^2$ можно получить из графика функции $y = x^2$ с помощью параллельного переноса вдоль оси Ox на 1 единицу влево.

Графиком функции $y = \frac{4}{x}$ является гипербола, ветви которой находятся в первой и третьей координатных четвертях.

Так как вершина параболы лежит на оси абсцисс, а ветви параболы направлены вверх, то график функции $y = (x + 1)^2$ расположен в первой и второй координатных четвертях. Поэтому достаточно построить только одну ветвь гиперболы, которая находится в первой координатной четверти. Для построения этой ветви найдем координаты нескольких точек:

x	1	2	4
y	4	2	1



Точка $A(1;4)$ — точка пересечения графиков функций $y = x^2 + 2x + 1$ и $y = \frac{4}{x}$.

ХIII. Квадратные неравенства. Системы неравенств второй степени

Квадратное неравенство — неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$ (< 0 ; ≥ 0 ; ≤ 0); $a \neq 0$.

Рассмотрим решение неравенства $ax^2 + bx + c > 0$.

1 способ

Найдем дискриминант квадратного трехчлена. Если дискриминант меньше нуля, а коэффициент a больше нуля, то решением неравенства является любое действительное число. Если дискриминант меньше нуля и коэффициент a меньше нуля, то неравенство не имеет решений.

Если дискриминант больше или равен нулю, то разложим на множители квадратный трехчлен по формуле: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 ; x_2 — корни квадратного трехчлена.

Неравенство принимает вид: $a(x - x_1)(x - x_2) > 0$

Разделим обе части неравенства на a . Если $a > 0$, то неравенство принимает вид: $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Чтобы решить неравенство, можно перейти к решению совокупности двух систем линейных неравенств:

$$\begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases}$$

Если $a < 0$, то неравенство принимает вид: $(x - x_1)(x - x_2) < 0$. Чтобы решить неравенство, переходим к решению совокупности двух систем линейных неравенств:

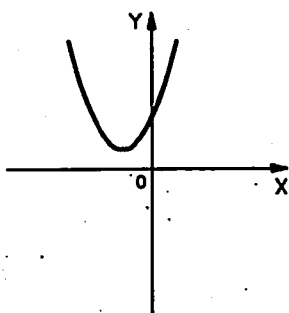
$$\begin{cases} x - x_1 > 0 \\ x - x_2 < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - x_1 < 0 \\ x - x_2 > 0 \end{cases}$$

2 способ (графический)

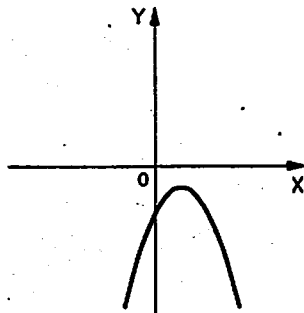
Изобразив схематично график функции $y = ax^2 + bx + c$, можно решить квадратное неравенство.

Имеем шесть различных вариантов расположения параболы относительно оси Ox .

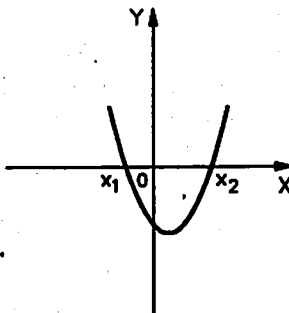
$$D < 0; a > 0$$



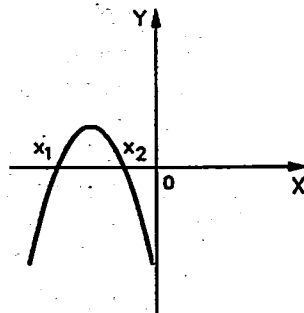
$$D < 0; a < 0$$



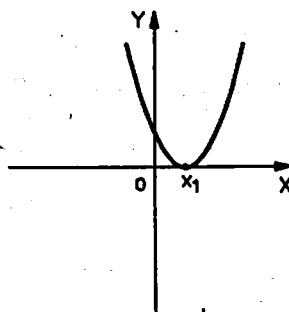
$$D > 0; a > 0$$



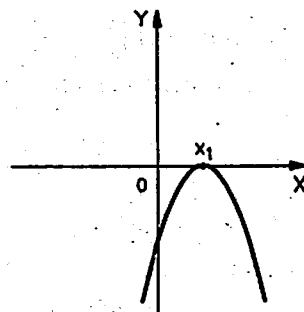
$$D > 0; a < 0$$



$$D = 0; a > 0$$



$$D = 0; a < 0$$



3 способ

Квадратные неравенства можно решать методом интервалов (см. *Решение неравенств методом интервалов*).

Система неравенств второй степени — система, состоящая из квадратных неравенств.

Чтобы решить систему неравенств второй степени, необходимо решить каждое неравенство, а затем найти их общее решение.

Задача 1. Решить неравенство:

а) $x^2 - 5x + 6 > 0$

Решение:

Найдем дискриминант квадратного трехчлена

$$x^2 - 5x + 6: D = 5^2 - 4 \cdot 6 = 1.$$

Так как дискриминант больше нуля, то квадратный трехчлен имеет два корня. Найдя корни квадратного трехчлена: $x_1 = 3$; $x_2 = 2$, разложим его на множители:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

Неравенство принимает вид: $(x - 3)(x - 2) > 0$

Перейдем к решению совокупности систем линейных неравенств:

$$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - 3 < 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$$

Из системы $\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$ находим $x > 3$.

Из системы $\begin{cases} x - 3 < 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$ находим: $x < 2$.

Множество решений неравенства $x^2 - 5x + 6 > 0$:

$$(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.

б) $12x^2 - x - 6 < 0$

Решение:

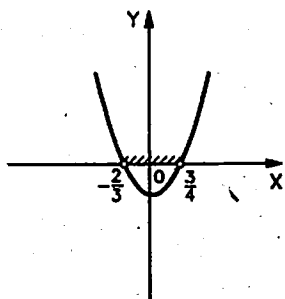
Рассмотрим функцию $y = 12x^2 - x - 6$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдём нули функции, для этого решим уравнение

$12x^2 - x - 6 = 0$. Из уравнения находим: $y = 0$ при $x_1 = \frac{3}{4}$ и

$$x_2 = -\frac{2}{3}.$$

Изобразим схематично график функции $y = 12x^2 - x - 6$:

$$y < 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right).$$



Множество решений неравенства $12x^2 - x - 6 < 0$: $\left(-\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right)$.

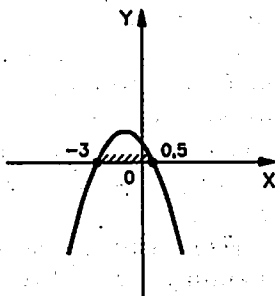
в) $-2x^2 - 5x + 3 \geq 0$

Решение:

Рассмотрим функцию $y = -2x^2 - 5x + 3$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вниз. Из уравнения $-2x^2 - 5x + 3 = 0$ находим нули функции: $y = 0$ при $x_1 = -3$; $x_2 = 0,5$.

Изобразим схематично график функции $y = -2x^2 - 5x + 3$:

$$y \geq 0 \text{ при } x \in [-3; 0,5]$$



Множество решений неравенства $-2x^2 - 5x + 3 \geq 0$: $[-3; 0,5]$

Ответ: $[-3; 0,5]$.

г) $7x^2 - 4x + 1 > 0$

Решение:

Найдем дискриминант квадратного трехчлена

$$7x^2 - 4x + 1: D = 4^2 - 7 \cdot 4 = -12.$$

Так как дискриминант меньше нуля, а коэффициент a больше нуля, то решением неравенства $7x^2 - 4x + 1 > 0$ является любое действительное число.

Множество решений неравенства: $(-\infty; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

д) $x^2 - 8x + 17 < 0$.

Решение:

Найдем дискриминант квадратного трехчлена

$$x^2 - 8x + 17: D = 8^2 - 4 \cdot 17 = -4.$$

Так как дискриминант меньше нуля, а коэффициент a больше нуля, то неравенство $x^2 - 8x + 17 < 0$ не имеет решений.

Ответ: нет решений.

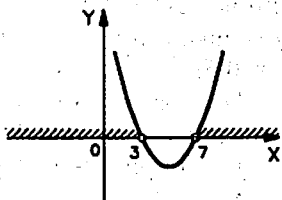
Задача 2. Решить систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - 10x + 21 > 0 \\ x^2 - 16 < 0 \end{cases}$$

Решение:

1) Решим первое неравенство $x^2 - 10x + 21 > 0$.

Рассмотрим функцию $y = x^2 - 10x + 21$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Из уравнения $x^2 - 10x + 21 = 0$ находим нули функции: $y = 0$ при $x_1 = 3$ и $x_2 = 7$.



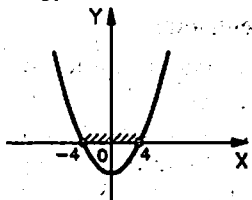
Изобразим схематично график функции $y = x^2 - 10x + 21$:

$$y > 0 \text{ при } x \in (-\infty; 3) \cup (7; +\infty)$$

Множество решений неравенства $x^2 - 10x + 21 > 0$: $(-\infty; 3) \cup (7; +\infty)$.

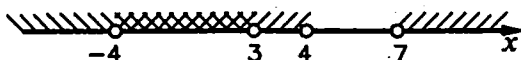
2) Решим второе неравенство $x^2 - 16 < 0$.

Рассмотрим функцию $y = x^2 - 16$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Из уравнения $x^2 - 16 = 0$ находим нули функции: $y = 0$ при $x_1 = 4$ и $x_2 = -4$.



Изобразим схематично график функции $y = x^2 - 16$:
 Множество решений неравенства $x^2 - 16 < 0$: $(-4; 4)$.

3) Найдем общее решение неравенства системы:



Множество решений системы неравенств: $(-4; 3)$

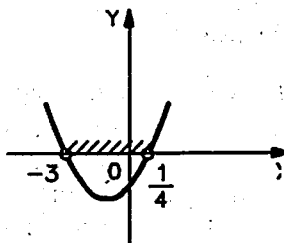
Ответ: $(-4; 3)$.

$$6) \begin{cases} 4x^2 + 11x - 3 < 0 \\ 5x - x^2 > 0 \end{cases}$$

Решение:

1) Решим первое неравенство $4x^2 + 11x - 3 < 0$.

Рассмотрим функцию $y = 4x^2 + 11x - 3$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Из уравнения $4x^2 + 11x - 3 = 0$ находим нули функции: $y = 0$ при $x_1 = -3$ и $x_2 = \frac{1}{4}$.

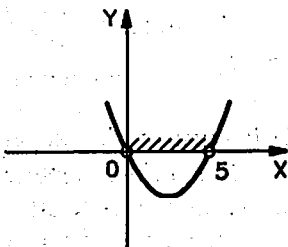


Изобразим схематично график функции $y = 4x^2 + 11x - 3$:

Множество решений неравенства $4x^2 + 11x - 3 < 0$:
 $\left(-3; \frac{1}{4}\right)$.

2) Решим второе неравенство $5x - x^2 > 0$.

Разделим обе части неравенства на -1 . Неравенство принимает вид: $x^2 - 5x < 0$. Рассмотрим функцию $y = x^2 - 5x$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх. Из уравнения $x^2 - 5x = 0$ находим нули функции: $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 5$.

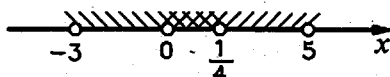


Изобразим схематично график функции $y = x^2 - 5x$:

Множество решений неравенства $x^2 - 5x < 0$: $(0; 5)$.

Так как неравенства $x^2 - 5x < 0$ и $5x - x^2 > 0$ равносильны, то множество решений неравенства $5x - x^2 > 0$: $(0; 5)$.

3) Найдем общее решение системы неравенств:



Множество решений системы неравенств: $\left(0; \frac{1}{4}\right)$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{4}\right)$.

$$в) \begin{cases} x^2 \leq 9 \\ 3x^2 \geq x \end{cases}$$

Решение:

1) Решим первое неравенство $x^2 \leq 9$.

Перенесем 9 в левую часть неравенства, поменяв при этом знак числа на противоположный, и разложим многочлен, получившийся в левой части, на множители. Неравенство принимает вид: $(x - 3)(x + 3) \leq 0$.

Перейдем к решению совокупности систем линейных неравенств:

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x + 3 \leq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - 3 \leq 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases}$$

Система $\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x + 3 \leq 0 \end{cases}$ не имеет решений.

Из системы $\begin{cases} x - 3 \leq 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases}$ находим: $-3 \leq x \leq 3$.

Множество решений неравенства $x^2 \leq 9$: $[-3; 3]$.

2) Решим второе неравенство $3x^2 \geq x$.

Перенесем переменную x в левую часть неравенства, поменяв при этом знак переменной на противоположный, и разложим многочлен, получившийся в левой части, на множители. Неравенство принимает вид:

$$x(3x - 1) \geq 0$$

Перейдем к решению совокупности систем линейных неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 3x - 1 \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \leq 0 \\ 3x - 1 \leq 0 \end{cases}$$

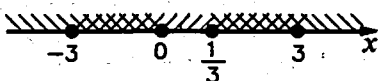
Из системы $\begin{cases} x \geq 0 \\ 3x - 1 \geq 0 \end{cases}$ находим: $x \geq \frac{1}{3}$.

Из системы $\begin{cases} x \leq 0 \\ 3x - 1 \leq 0 \end{cases}$ находим: $x \leq 0$.

Множество решений неравенства $3x^2 \geq x$:

$$(-\infty; 0] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

3) Найдем общее решение системы неравенств:



Множество решений системы неравенств:

$$[-3; 0] \cup \left[\frac{1}{3}; 3\right].$$

Ответ: $[-3; 0] \cup \left[\frac{1}{3}; 3\right]$.

XIV. Неравенства и системы неравенств с двумя переменными

Решением неравенства с двумя переменными называется упорядоченная пара значений переменных, обращающая неравенство в верное числовое неравенство.

Решением системы неравенств с двумя переменными называется упорядоченная пара значений переменных, удовлетворяющая каждому неравенству этой системы.

Решения неравенства или системы неравенств с двумя переменными изображают геометрически, в виде некоторого множества точек координатной плоскости.

Задача 1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

ву, и найдите какие-нибудь две пары значений x и y , удовлетворяющих неравенству:

а) $y + 2 \geq x$

Решение:

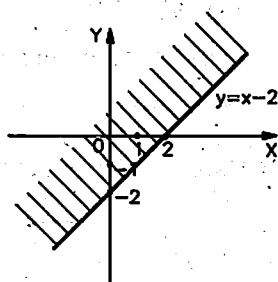
После преобразований неравенство принимает вид:

$$y \geq x - 2$$

Построим в координатной плоскости график функции $y = x - 2$. Графиком этой функции является прямая.

Множеством решений неравенства являются координаты точек заштрихованной полуплоскости.

Пары $(0; 0)$, $(2; 4)$ удовлетворяют неравенству $y + 2 \geq x$.

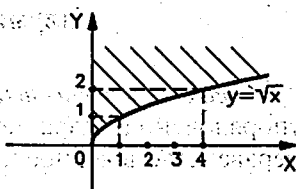


б) $y \geq \sqrt{x}$

Решение:

Построим в координатной плоскости график функции $y = \sqrt{x}$. Так как областью определения и множеством значений функции является множество всех неотрицательных чисел, то график функции расположен в первой координатной четверти. Множеством решений неравенства являются координаты точек, расположенных на линии, являющейся графиком функции $y = \sqrt{x}$, и над ней.

Пары $(0; 0)$, $(1; 2)$ удовлетворяют неравенству $y \geq \sqrt{x}$.



в) $y + x^2 < 1$

Решение:

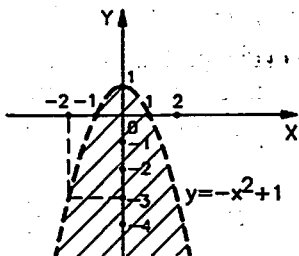
После преобразований неравенство принимает вид:

$$y < -x^2 + 1$$

Построим в координатной плоскости график функции $y = -x^2 + 1$.

Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вниз, а вершина расположена в точке с координатами $(0; 1)$.

Множеством решений неравенства $y + x^2 < 1$ являются координаты точек, лежащих ниже параболы.



Пары $(-1; -1)$, $(1; -2)$ удовлетворяют неравенству $y + x^2 < 1$.

г) $y \geq \frac{4}{x}$

Решение:

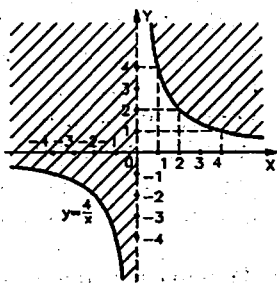
Рассмотрим функцию $y = \frac{4}{x}$.

Область определения: $D_y = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Множество значений: $E_y = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Графиком функции является гипербола, ветви которой расположены в первой и третьей координатных четвертях.

Точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \geq \frac{4}{x}$, расположены в первой, второй и третьей координатных четвертях: на ветвях гиперболы и выше этих ветвей, но не принадлежат оси Oy .



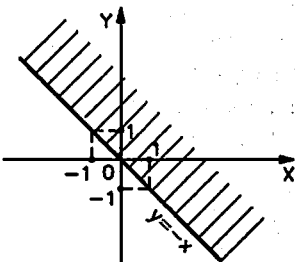
Пары $(-1; -1)$, $(4; 4)$ удовлетворяют неравенству $y \geq \frac{4}{x}$.

Задача 2. Изобразите в координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств, и найдите какие-нибудь две пары значений x и y , удовлетворяющих системе неравенств:

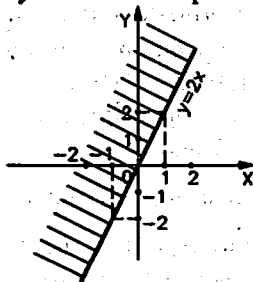
а)
$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ 2x - y \leq 0 \end{cases}$$

Решение:

- 1) Изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x + y \geq 0$. После преобразований неравенство принимает вид: $y \geq -x$. Построим в координатной плоскости график функции $y = -x$. Графиком функции является прямая, проходящая через начало координат. Множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \geq -x$, расположены на прямой $y = -x$ и выше этой прямой.



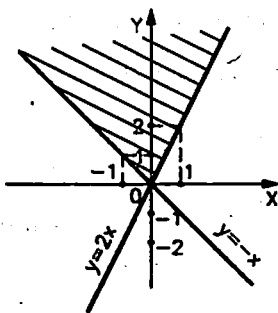
- 2) Изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $2x - y \leq 0$. После преобразований неравенство принимает вид: $y \geq 2x$. Построим в координатной плоскости график функции $y = 2x$. Графиком функции является прямая, проходящая через начало координат. Множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \geq 2x$, расположены на прямой $y = 2x$ и выше этой прямой.



- 3) Изобразим пересечение множеств точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств.

Множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств, принадлежат заштрихованному углу.

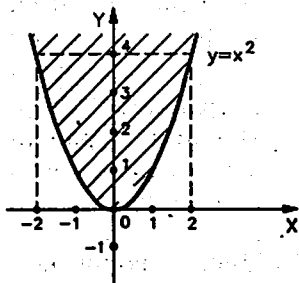
Пары $(0; 0)$, $(0; 2)$ удовлетворяют системе неравенств.



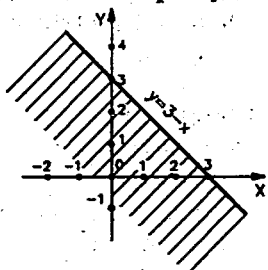
$$6) \begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq 3 - x \end{cases}$$

Решение:

- 1) Изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \geq x^2$. Построим в координатной плоскости график функции $y = x^2$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в начале координат. Множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \geq x^2$, расположены на параболе и выше этой параболы.

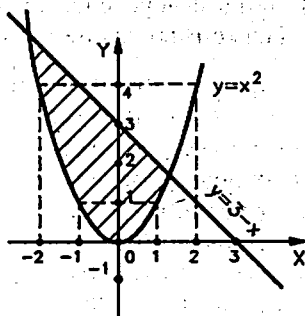


- 2) Изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \leq 3 - x$. Построим в координатной плоскости график функции $y = 3 - x$. Графиком функции является прямая. Множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \leq 3 - x$, расположены на прямой $y = 3 - x$ и ниже этой прямой.



- 3) Найдем пересечение изображенных выше множеств.

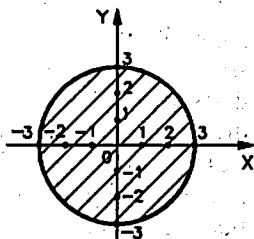
Заштрихованное множество точек координатной плоскости — множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств. Пары $(0; 1)$, $(0; 3)$ удовлетворяют системе неравенств.



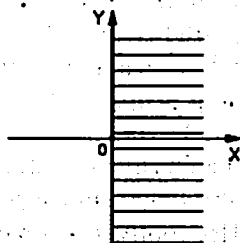
$$в) \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

Решение:

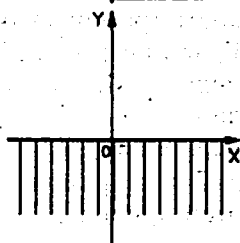
1) Изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leq 9$. Множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству, есть круг с центром в начале координат и радиусом, равным 3.



2) Множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x \geq 0$, есть множество точек полуплоскости, границей которой является ось Oy .



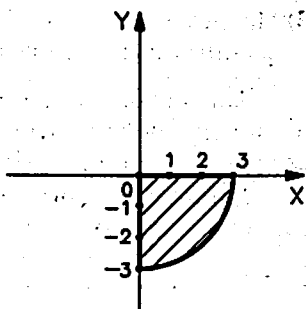
3) Множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \leq 0$, есть множество точек полуплоскости, границей которой является ось Ox .



4) Найдем пересечение трех изображенных выше множеств.

Заштрихованное множество точек координатной плоскости есть множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств.

Пары $(0; 0)$, $(1; -1)$, $(2; -2)$ удовлетворяют системе неравенств.



XV. Иррациональные уравнения и неравенства

Иррациональное уравнение — уравнение, в котором переменная содержится под знаком корня.

Основными методами решения иррациональных уравнений являются следующие:

- 1) метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень;
- 2) метод введения новых переменных.

При возведении обеих частей иррационального уравнения в четную степень возможно появление посторонних корней. Поэтому при использовании этого метода необходимо провести проверку.

Иррациональное неравенство — неравенство, в котором переменная содержится под знаком корня.

При решении иррациональных неравенств необходимо помнить, что при возведении в четную степень обеих частей неравенства получается равносильное неравенство только в том случае, если обе части неравенства неотрицательны. При возведении обеих частей неравенства в нечетную степень всегда получается равносильное неравенство.

Задача 1. Решить уравнение:

а) $\sqrt{x^2 + x - 1} = x$

Решение:

Возведем обе части уравнения во вторую степень. Уравнение принимает вид:

$$x^2 + x - 1 = x^2$$

Из этого уравнения находим: $x = 1$.

Сделаем проверку: если $x = 1$, то $\sqrt{1^2 + 1 - 1} = 1$ — верное числовое равенство. Значит, число 1 является корнем уравнения $\sqrt{x^2 + x - 1} = x$.

Ответ: 1.

$$\text{б) } \sqrt{x-6} = \sqrt{4-x}$$

Решение:

Возведем обе части уравнения во вторую степень.
Уравнение принимает вид:

$$x-6=4-x$$

Из этого уравнения находим: $x=5$.

Сделаем проверку: если $x=5$, то $\sqrt{4-x}$ не определен.
Значит, число 5 — посторонний корень. Исходное уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений.

$$\text{в) } \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} = 3$$

Решение:

Введем новую переменную, обозначив: $\sqrt[3]{x} = y$.

Уравнение принимает вид:

$$y + 2y^2 = 3, \text{ или } 2y^2 + y - 3 = 0.$$

Из квадратного уравнения $2y^2 + y - 3 = 0$ находим:

$$y_1 = 1; y_2 = -1,5.$$

Так как $\sqrt[3]{x} = y$, то $x_1 = 1; x_2 = -3,375$.

Ответ: 1; -3,375.

$$\text{г) } \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{1-x} = 1$$

Решение:

Преобразуем уравнение к виду:

$$\sqrt{1-x} = 1 - \sqrt{(x-2)^2}.$$

Так как по свойству корней $\sqrt{a^2} = |a|$, то можем записать уравнение в виде:

$$\sqrt{1-x} = 1 - |x-2|.$$

Так как $\sqrt{1-x}$ определен при $x \leq 1$, то уравнение принимает вид:

$$\sqrt{1-x} = 1 - (2-x) \text{ или } \sqrt{1-x} = x-1.$$

Возведем обе части уравнения во вторую степень:

$$1 - x = (x - 1)^2$$

После преобразований уравнение принимает вид:

$$x^2 - x = 0$$

Из уравнения $x^2 - x = 0$ находим: $x = 0$; $x = 1$.

Сделаем проверку:

если $x = 0$, то $\sqrt{0^2 - 4 \cdot 0 + 4} + \sqrt{1 - 0} \neq 0$;

0 — посторонний корень;

если $x = 1$, то $\sqrt{1 - 4 + 4} + \sqrt{1 - 1} = 1$;

1 — корень исходного уравнения.

Ответ: 1.

$$д) \sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$$

Решение:

Возведем обе части уравнения во вторую степень.
Уравнение принимает вид:

$$1 - \sqrt{x^4 - x^2} = (x - 1)^2$$

Преобразуем уравнение к виду:

$$\sqrt{x^4 - x^2} = 2x - x^2$$

Возведем обе части полученного уравнения во вторую степень, получим уравнение:

$$x^4 - x^2 = (2x - x^2)^2$$

После преобразований уравнение принимает вид:

$$5x^2 - 4x^3 = 0$$

Из этого уравнения находим: $x_1 = 0$; $x_2 = 1,25$.

Сделаем проверку:

если $x = 0$, то $\sqrt{1 - \sqrt{0^4 - 0^2}} \neq -1$;

0 — посторонний корень;

если $x = 1,25$, то $\sqrt{1 - \sqrt{1,25^4 - 1,25^2}} = 1,25 - 1$;

1,25 — корень исходного уравнения.

Ответ: 1,25.

Задача 2. Решить неравенство:

$$а) \sqrt{x^2 - 55x + 250} < x - 14$$

Решение:

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 55x + 250 < (x - 14)^2 \\ x^2 - 55x + 250 \geq 0 \\ x - 14 > 0 \end{cases}$$

Первое неравенство системы получили при возведении во вторую степень обеих частей исходного неравенства.

Решив каждое неравенство системы, получим:

$$\begin{cases} x > 2 \\ x \leq 5; x \geq 50 \\ x > 14 \end{cases}$$

Откуда следует, что множество решений данного неравенства: $[50; +\infty)$.

Ответ: $[50; +\infty)$.

б) $\sqrt{6-x} > \sqrt{x+2}$

Решение:

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 6-x > x+2 \\ 6-x > 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$$

Решив каждое неравенство системы, получим:

$$\begin{cases} x < 2 \\ x < 6 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

Откуда получаем: $-2 \leq x < 2$.

Множество решений исходного неравенства: $[-2; 2)$

Ответ: $[-2; 2)$.

в) $\sqrt{x} > x-1$

Решение:

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x > (x-1)^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-1 < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Из первой системы находим: $1 \leq x < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Из второй системы находим: $0 \leq x < 1$.

Решением совокупности является объединение решений систем. Поэтому множество решений неравенства: $\left[0; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

Ответ: $\left[0; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

г) $4 - \sqrt{1 - x} > \sqrt{2 - x}$

Решение:

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 4 - \sqrt{1 - x} > \sqrt{2 - x} \\ 4 - \sqrt{1 - x} > 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases}$$

Решив каждое неравенство системы, получим:

$$\begin{cases} \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} < x \leq 1 \\ -15 < x \leq 1 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Откуда получаем: $\frac{-5 + \sqrt{13}}{2} < x \leq 1$.

Множество решений исходного неравенства:

$$\left(\frac{-5 + \sqrt{13}}{2}; 1\right]$$

Ответ: $\left(\frac{-5 + \sqrt{13}}{2}; 1\right]$.

Задача 3. Решить уравнение с параметром:

а) $\frac{m - 1}{\sqrt{x + 1}} = 1$

Решение:

Уравнение имеет решение при $m - 1 > 0$, то есть $m > 1$.
Найдем это решение:

$$m - 1 = \sqrt{x + 1};$$

$$(m - 1)^2 = x + 1;$$

$$x = m^2 - 2m$$

При $m \leq 1$ уравнение не имеет решений.

Ответ: при $m > 1$ $x = m^2 - 2m$; при $m \leq 1$ нет корней.

$$б) \frac{m}{\sqrt{x} + 7} = \sqrt{x} - 7$$

Решение:

$\sqrt{x}$ определен при $x \geq 0$. Умножим обе части уравнения на $\sqrt{x} + 7$, уравнение принимает вид: $m = x - 49$. Откуда получаем: $x = m + 49$. Так как уравнение имеет решение при $x \geq 0$, то $m \geq -49$. При $m < -49$ уравнение не имеет решений.

Ответ: при $m \geq -49$, $x = m + 49$; при $m < -49$ нет корней.

XVI. Уравнения и неравенства с модулем

При решении уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, используют определение модуля:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

Задача 1. Решить уравнение:

$$а) |x| = 6$$

Решение:

Используя определение модуля, получаем: $x_1 = 6$; $x_2 = -6$.

Ответ: -6 ; 6 .

$$б) |x^2 + 6| = 5x$$

Решение:

Так как $x^2 + 6 > 0$ при любом значении x , то исходное уравнение принимает вид: $x^2 + 6 = 5x$ или $x^2 - 5x + 6 = 0$

Из уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ находим: $x_1 = 2$; $x_2 = 3$.

Ответ: 2; 3.

$$в) |3x - 7| = x + 5$$

Решение:

Если $3x - 7 \geq 0$, то есть $x \geq \frac{7}{3}$, то уравнение принимает вид: $3x - 7 = x + 5$

Из этого уравнения находим: $x = 6$.

Так как $x = 6$ удовлетворяет условию $x \geq \frac{7}{3}$, то число 6 является корнем исходного уравнения.

Если $3x - 7 < 0$, то есть $x < \frac{7}{3}$, то уравнение принимает вид: $-(3x - 7) = x + 5$.

Из этого уравнения находим: $x = 0,5$.

Так как $x = 0,5$ удовлетворяет условию $x < \frac{7}{3}$, то число 0,5 является корнем исходного уравнения.

Ответ: 0,5; 6.

$$г) x^2 - |5x - 1| + 5 = 0$$

Решение:

Если $5x - 1 \geq 0$, то есть $x \geq \frac{1}{5}$, то уравнение принимает вид: $x^2 - (5x - 1) + 5 = 0$ или $x^2 - 5x + 6 = 0$

Из этого уравнения находим: $x_1 = 2$; $x_2 = 3$. Оба корня удовлетворяют условию $x \geq \frac{1}{5}$, значит, они являются корнями исходного уравнения.

Если $5x - 1 < 0$, то есть $x < \frac{1}{5}$, то уравнение принимает вид: $x^2 - (1 - 5x) + 5 = 0$ или $x^2 + 5x + 4 = 0$

Из этого уравнения находим: $x_3 = -1$; $x_4 = -4$. Так как оба корня удовлетворяют условию $x < \frac{1}{5}$, то они являются корнями исходного уравнения.

Ответ: -4 ; -1 ; 2 ; 3 .

д) $|x| \cdot x + 5x - 6 = 0$

Решение:

Если $x \geq 0$, то уравнение принимает вид:

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

Из этого уравнения находим: $x_1 = -6$; $x_2 = 1$.

$x = -6$ не удовлетворяет условию $x \geq 0$, значит, число -6 не является корнем исходного уравнения.

$x = 1$ удовлетворяет условию $x \geq 0$, значит, число 1 является корнем исходного уравнения.

Если $x < 0$, то уравнение принимает вид:

$$x^2 + 5x - 6 = 0.$$

Из этого уравнения находим: $x_3 = 2$; $x_4 = 3$. Оба корня не удовлетворяют условию $x < 0$, значит, они не являются корнями исходного уравнения.

Ответ: 1 .

е) $|x + 1| + |x + 2| = 2$

Решение:

Найдем значения переменной x , при которых значения выражений, стоящих под знаком модуля, равны нулю.

$$x + 1 = 0 \text{ при } x = -1.$$

$$x + 2 = 0 \text{ при } x = -2.$$

Эти значения разбивают множество всех допустимых значений переменной на промежутки: $(-\infty; -2)$; $[-2; -1)$; $[-1; +\infty)$.

Решим исходное уравнение на каждом из промежутков.

Если $x \in (-\infty; -2)$, то уравнение принимает вид:

$$-x - 1 - x - 2 = 2$$

Из этого уравнения находим: $x = -2,5$. Так как $-2,5 \in (-\infty; -2)$, то это число является корнем исходного уравнения.

Если $x \in [-2; -1)$, то уравнение принимает вид:

$$x + 1 - x - 2 = 2$$

Это уравнение не имеет решений.

Если $x \in [-1; +\infty)$, то уравнение принимает вид:

$$x + 1 + x + 2 = 2$$

Из этого уравнения находим: $x = -0,5$. Так как $-0,5 \in [-1; +\infty)$, то это число является корнем исходного уравнения.

Ответ: $-2,5; -0,5$.

Задача 2. Решить неравенство:

а) $|5x - 1| \geq |x + 1|$

Решение:

Возведем обе части неравенства во вторую степень и получим равносильное неравенство:

$$(5x - 1)^2 \geq (x + 1)^2$$

После преобразований неравенство принимает вид:

$$x(2x - 1) \geq 0$$

Полученное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \leq 0 \\ 2x - 1 \leq 0 \end{cases}$$

Из первой системы неравенств получаем: $x \geq 0,5$.

Из второй системы неравенств получаем: $x \leq 0$.

Объединим полученные решения и получим множество решений исходного неравенства:

$$(-\infty; 0] \cup [0,5; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [0,5; +\infty)$.

$$б) |2x + 5| > 3$$

Решение:

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} 2x + 5 > 3 \\ 2x + 5 \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -(2x + 5) > 3 \\ 2x + 5 < 0 \end{cases}$$

Из первой системы находим: $x > -1$.

Из второй системы находим: $x < -4$.

Объединив полученные решения, получим множество решений исходного неравенства: $(-\infty; -4) \cup (-1; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (-1; +\infty)$.

$$в) |x + 5| \leq 0$$

Решение:

Очевидно, что из определения модуля решение данного неравенства сводится к решению уравнения $x + 5 = 0$, то есть $x = -5$.

Ответ: -5 .

$$г) |x| + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1$$

Решение:

Найдем допустимые значения переменной x :

$$x^2 - 1 \geq 0 \text{ при } x \leq -1; x \geq 1$$

Если $x \leq -1$, неравенство принимает вид:

$$-x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1$$

После преобразований неравенство принимает вид:

$$\sqrt{x^2 - 1} \geq x + 1$$

Возведем обе части неравенства во вторую степень:

$$x^2 - 1 \geq x^2 + 2x + 1$$

Из этого неравенства находим: $x \leq -1$.

Если $x \geq 1$, неравенство принимает вид:

$$x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1$$

После преобразований неравенство принимает вид:

$$\sqrt{x^2 - 1} \geq 1 - x$$

Возведем обе части неравенства во вторую степень:

$$x^2 - 1 \geq 1 - 2x + x^2$$

Из этого неравенства находим: $x \geq 1$.

Значит, неравенство верно при всех допустимых значениях переменных.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

XVII. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Арифметическая прогрессия — последовательность, у которой каждый ее член, начиная со второго, равен предшествующему члену, сложенному с одним и тем же числом d , называемым разностью арифметической прогрессии. Обозначается прогрессия: (a_n) .

Из определения арифметической прогрессии следует следующая формула связи соседних членов арифметической прогрессии: $a_{n+1} = a_n + d$.

Зная первый член и разность арифметической прогрессии, можно найти любой ее член по формуле n -го члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

Сумму первых n членов арифметической прогрессии можно найти по следующим формулам:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \text{ или } S_n = \frac{2a_1 + d \cdot (n - 1)}{2} \cdot n$$

Геометрическая прогрессия — числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число. Число, на которое умножается каждый последующий член, называется знаменателем геометрической прогрессии. Обозначения: (b_n) — геометрическая прогрессия, b_1 — первый член, q — знаменатель геометрической прогрессии.

Геометрическую прогрессию можно задать первым членом b_1 и знаменателем геометрической прогрессии q . Любой член геометрической прогрессии находится по формуле n -ого члена:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Если $q > 0$ ($q \neq 1$), то прогрессия является монотонной последовательностью. Если $q = 1$, то все члены прогрессии равны между собой. В этом случае прогрессия является постоянной последовательностью.

Формулы суммы n первых членов геометрической прогрессии, если $q \neq 1$:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} \text{ или } S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

Если $q = 1$, то все члены геометрической прогрессии равны первому члену и $S_n = n \cdot b_1$.

Если число членов прогрессии конечно, то она называется конечной геометрической прогрессией; в противном случае она называется бесконечной геометрической прогрессией.

У конечной геометрической прогрессии произведения членов, равно отстоящих от ее концов, равны между собой и равны произведению крайних членов.

Пусть (b_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q , где $|q| < 1$ и $b_1 \neq 0$. Суммой бесконечной геометрической прогрессии, знаменатель которой удовлетворяет условию $|q| < 1$, называется предел суммы n первых ее членов при $n \rightarrow \infty$. Формула суммы данной прогрессии:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Задача 1. Дана (a_n) — арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 2$ и $d = 5$. Найти a_5 и a_{10} .

Решение:

Найдем неизвестные члены арифметической прогрессии по формуле n -го члена:

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

$$a_5 = 2 + 5(5 - 1) = 22$$

$$a_{10} = 2 + 5(10 - 1) = 47$$

Ответ: $a_5 = 22$; $a_{10} = 47$.

Задача 2. Дана (a_n) — арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 6$; $d = 2$. Найти сумму первых семи членов прогрессии.

Решение:

Найдем сумму первых семи членов арифметической прогрессии по формуле:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

$$S_7 = \frac{2 \cdot 6 + 2 \cdot (7-1)}{2} \cdot 7 = 84$$

Ответ: $S_7 = 84$.

Задача 3. Определить первый член и сумму членов арифметической прогрессии, в которой $d = 10$; $n = 45$; $a_n = 459$.

Решение:

Найдем первый член арифметической прогрессии по формуле:

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$459 = a_1 + 10(45-1);$$

$$a_1 = 19$$

Найдем сумму первых сорока пяти членов арифметической прогрессии по формуле:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_{45} = \frac{(19 + 459) \cdot 45}{2} = 10755$$

Ответ: $S_{45} = 10755$.

Задача 4. Определить, сколько членов в арифметической прогрессии, и найти сумму всех ее членов, если $a_1 = 14,5$; $d = 0,7$; $a_n = 32$.

Решение:

Найдем количество членов арифметической прогрессии по формуле:

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

$$32 = 14,5 + 0,7(n - 1);$$

$$n = 26$$

Найдем сумму всех членов арифметической прогрессии по формуле:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_{26} = \frac{(14,5 + 32) \cdot 26}{2} = 604,5$$

Ответ: $n = 26$; $S_{26} = 604,5$.

Задача 5. В арифметической прогрессии $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; ... найдите номера тех членов, значения которых положительны.

Решение:

Из условия имеем $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{5}$. Можем найти разность арифметической прогрессии:

$$d = a_2 - a_1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{20}$$

Пусть a_n — последний положительный член арифметической прогрессии, то есть $a_n > 0$. Используя формулу n -го члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + d(n - 1),$$

составим неравенство:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{20}(n - 1) > 0$$

Из этого неравенства находим: $n < 6$.

Значит, номер последнего положительного члена арифметической прогрессии равен 5.

Ответ: первые пять членов арифметической прогрессии положительны.

Задача 6. Найти седьмой член арифметической прогрессии, последний член которой равен 29, число членов равно произведению двух первых членов и сумма второго и предпоследнего членов равна 31.

Решение:

Сумма второго и предпоследнего членов равна 31, то есть $a_2 + a_{n-1} = 31$. Выразим a_2 через a_1 и d , а a_{n-1} через a_n и d . Равенство принимает вид:

$$(a_1 + d) + (a_n - d) = 31$$

После преобразований получаем: $a_1 + a_n = 31$. Так как по условию $a_n = 29$, то $a_1 = 2$.

Так как число членов равно произведению двух первых членов, то есть $a_1 \cdot a_2 = n$, то

$$a_2 = \frac{n}{2} \text{ и } d = a_2 - a_1 = \frac{n}{2} - 2.$$

Используя формулу n -го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$, составим квадратное уравнение относительно n :

$$29 = 2 + \left(\frac{n}{2} - 2\right)(n-1),$$

которое после преобразований принимает вид:

$$n^2 - 5n - 50 = 0$$

Из этого уравнения находим: $n_1 = -5$; $n_2 = 10$.

$n = -5$ не удовлетворяет условию задачи. Значит, арифметическая прогрессия имеет 10 членов.

Найдем разность арифметической прогрессии:

$$d = \frac{n}{2} - 2 = \frac{10}{2} - 2 = 3$$

Найдем седьмой член арифметической прогрессии:

$$a_7 = 2 + 3(7-1) = 20.$$

Ответ: $a_7 = 20$.

Задача 7. Сумма трех первых членов арифметической прогрессии (a_n) равна 6, $a_1 = 5$. Найдите третий член и разность арифметической прогрессии.

Решение:

Так как сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 6, то, используя формулу

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2},$$

найдем третий член прогрессии:

$$6 = \frac{(5 + a_3) \cdot 3}{2}; a_3 = -1$$

Используя формулу n -го члена арифметической прогрессии, найдем разность арифметической прогрессии:

$$a_3 = a_1 + 2d;$$

$$-1 = 5 + 2d; d = -3$$

Ответ: $a_3 = -1$; $d = -3$.

Задача 8. Найти сумму всех четных натуральных чисел от 96 до 128 включительно.

Решение:

Четные натуральные числа образуют арифметическую прогрессию, первый член которой равен 2, а разность прогрессии равна 2. $a_n = 2n$ — формула n -го члена.

96 — сорок восьмой член арифметической прогрессии, то есть $a_{48} = 96$.

128 — шестьдесят четвертый член арифметической прогрессии, то есть $a_{64} = 128$.

Сумма всех четных натуральных чисел от 96 до 128 равна разности суммы первых шестидесяти четырех членов прогрессии и суммы первых сорока семи членов этой прогрессии.

$$S_{47} = \frac{(a_1 + a_{47}) \cdot 47}{2} = \frac{(2 + 94) \cdot 47}{2} = 2256$$

$$S_{64} = \frac{(a_1 + a_{64}) \cdot 64}{2} = \frac{(2 + 128) \cdot 64}{2} = 4160$$

$$S_{64} - S_{47} = 4160 - 2256 = 1904.$$

Ответ: Сумма всех четных натуральных чисел от 96 до 128 включительно равна 1904.

Задача 9. Стороны прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию. Найти площадь этого треугольника, если его периметр равен 24.

Решение:

Так как стороны треугольника составляют арифметическую прогрессию, то длина первой стороны — первый член прогрессии, то есть a_1 ; длина второй стороны — второй член прогрессии, то есть $a_2 = a_1 + d$; длина третьей стороны — третий член прогрессии, то есть $a_3 = a_1 + 2d$.

Причем первые две стороны являются катетами, а третья сторона гипотенуза.

Так как периметр треугольника равен 24, то сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 24. Используя формулу

$$S_3 = \frac{2a_1 + 2d}{2} \cdot 3,$$

составим равенство

$$24 = \frac{2a_1 + 2d}{2} \cdot 3$$

Откуда имеем $a_1 + d = 8$, то есть $a_2 = 8$.

Используя теорему Пифагора, составим второе равенство:

$$a_1^2 + (a_1 + d)^2 = (a_1 + 2d)^2$$

Объединим два полученных равенства и получим систему из двух уравнений с двумя переменными a_1 и d :

$$\begin{cases} a_1 + d = 8 \\ a_1^2 + (a_1 + d)^2 = (a_1 + 2d)^2 \end{cases}$$

Из этой системы находим: $a_1 = 6$, $d = 2$

Так как площадь треугольника равна половине произведения длин катетов, то

$$S = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24.$$

Ответ: площадь прямоугольного треугольника равна 24 кв. ед.

Задача 10. Найти знаменатель геометрической прогрессии (b_n) , если $b_1 = 12$; $b_2 = 9$.

Решение:

Из определения геометрической прогрессии следует, что знаменатель прогрессии равен: $q = b_2 : b_1$

Так как $b_1 = 12$, $b_2 = 9$, то $q = 9 : 12 = 0,75$.

Ответ: $q = 0,75$.

Задача 11. Вычислить пятый член геометрической прогрессии, в которой первый член равен 3, а знаменатель прогрессии равен 2.

Решение:

По формуле n -го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ найдем ее пятый член:

$$b_5 = b_1 \cdot q^4 = 3 \cdot 2^4 = 48$$

Ответ: $b_5 = 48$.

Задача 12. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n) , если $b_6 = 20000$ и $q = 3\frac{1}{3}$.

Решение:

Для того, чтобы найти первый член геометрической прогрессии, воспользуемся формулой n -го члена геометрической прогрессии:

$$b_6 = b_1 \cdot q^5$$

$$b_1 = \frac{b_6}{q^5} = 20000 : \left(\frac{10}{3}\right)^5 = \frac{20000 \cdot 3^5}{10^5} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 3^5}{10^5} = 48,6$$

Ответ: $b_1 = 48,6$.

Задача 13. В геометрической прогрессии первый член равен 1, а знаменатель 0,5. Найти номер члена прогрессии, начиная с которого все последующие члены будут меньше 0,01.

Решение:

Пусть (b_n) — член геометрической прогрессии, начиная с которого все последующие члены будут меньше 0,01. Используя формулу n -го члена геометрической прогрессии

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, составим неравенство $0,5^{n-1} < 0,01$. После преобразований неравенство принимает вид: $2^n > 200$.

Решим неравенство подбором $2^7 = 128$; $2^8 = 256$.

Значит, $2^8 > 200$, то есть $b_8 < 0,01$.

Номер члена прогрессии, начиная с которого все последующие члены будут меньше 0,01, равен 8.

Ответ: 8.

Задача 14. Найти сумму пяти первых членов геометрической прогрессии (b_n) , если $b_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$.

Решение:

Найдем сумму пяти первых членов геометрической прогрессии, используя формулу:

$$S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1}$$

$$S_5 = \frac{8 \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \right)^5 - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2^3 \cdot \left(\frac{1}{2^5} - 1 \right)}{-\frac{1}{2}} = -2^4 \cdot \left(\frac{1}{2^5} - 1 \right) =$$

$$= -\frac{2^4}{2^5} + 2^4 = -\frac{1}{2} + 16 = 15\frac{1}{2}$$

Ответ: $15\frac{1}{2}$.

Задача 15. Найти первый и третий член геометрической прогрессии, если сумма первых четырех членов равна 65, а знаменатель прогрессии равен $\frac{2}{3}$.

Решение:

Используя формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии, найдем первый член этой прогрессии:

$$S_4 = \frac{b_1(q^4 - 1)}{q - 1}$$

$$65 = \frac{b_1 \left(\left(\frac{2}{3} \right)^4 - 1 \right)}{\frac{2}{3} - 1}$$

$$-\frac{65}{3} = b_1 \left(\frac{2^4}{3^4} - 1 \right)$$

$$-\frac{65}{3} = b_1 \left(\frac{16}{81} - 1 \right)$$

$$b_1 = -\frac{65}{3} : \left(-\frac{65}{81} \right)$$

$$b_1 = 27$$

Используя формулу n -го члена геометрической прогрессии, найдем третий член этой прогрессии:

$$b_3 = b_1 \cdot q^2 = 27 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^2 = 12$$

Ответ: $b_1 = 27$; $b_3 = 12$.

Задача 16. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $1\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \dots$

Решение:

Найдем знаменатель геометрической прогрессии. Так как $b_1 = 1\frac{1}{2}$; $b_2 = \frac{3}{4}$, то

$$q = b_2 : b_1 = \frac{3}{4} : 1\frac{1}{2} = \frac{3}{4} : \frac{3}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Найдем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии по формуле:

$$S = \frac{b_1}{1 - q} = 1\frac{1}{2} : \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} : \frac{1}{2} = 3$$

Ответ: $S = 3$.

Задача 17. Представить в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную периодическую дробь $0,(5)$

Решение:

Представим в виде суммы бесконечную десятичную периодическую дробь $0,(5)$:

$$0,(5) = 0,5 + 0,05 + 0,005 + \dots$$

Слагаемые в правой части равенства образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой равен $0,5$, а знаменатель прогрессии равен $0,1$.

Найдем сумму этой прогрессии по формуле:

$$S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{0,5}{1 - 0,1} = \frac{0,5}{0,9} = \frac{5}{9}$$

Получим:

$$0,(5) = 0,5 + 0,05 + 0,005 + \dots = \frac{5}{9}$$

Ответ: $0,(5) = \frac{5}{9}$.

Задача 18. Разность между первым и вторым членами геометрической прогрессии равна 8 , а сумма второго и третьего ее членов равна 12 . Найти третий член и сумму прогрессии, если известно, что она убывающая.

Решение:

Пусть (b_n) — геометрическая прогрессия; b_1 — первый член этой прогрессии; $b_2 = b_1 \cdot q$ — второй член, $b_3 = b_1 \cdot q^2$ — третий член.

Так как разность между первым и вторым членами геометрической прогрессии равна 8 , то можем составить первое равенство: $b_1 - b_1 \cdot q = 8$. Так как сумма второго и третьего членов геометрической прогрессии равна 12 , то можем составить второе равенство: $b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 = 12$. Из полученных равенств составим систему из двух уравнений с двумя неизвестными b_1 и q :

$$\begin{cases} b_1 - b_1 q = 8 \\ b_1 q + b_1 q^2 = 12 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим b_1 :

$$b_1 = \frac{8}{1 - q}$$

Подставим выражение $\frac{8}{1-q}$ вместо b_1 во второе уравнение и получим квадратное уравнение:

$$2q^2 + 5q - 3 = 0$$

Из этого уравнения находим: $q_1 = -3$, $q_2 = \frac{1}{2}$. $q = -3$ не удовлетворяет тому условию задачи, что прогрессия является убывающей. Значит, знаменатель геометрической прогрессии $q_2 = \frac{1}{2}$, а

$$b_1 = \frac{8}{1 - \frac{1}{2}} = 16.$$

По формуле n -го члена геометрической прогрессии найдем третий член этой прогрессии:

$$b_3 = b_1 \cdot q^2 = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4$$

Найдем сумму геометрической прогрессии по формуле:

$$S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{16}{1 - \frac{1}{2}} = 32$$

Ответ: $b_3 = 4$; $S = 32$.

XVIII. Производная и ее применения

Определение производной функции

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, где $\Delta x = x - x_0$ — приращение аргумента, x и x_0 — два значения независимой переменной из области определения функции $f(x)$, разность

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$$

называется приращением функции $f(x)$ в точке x_0 .

Обозначается производная: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Функция, имеющая производную в точке x_0 , называется дифференцируемой в этой точке. Если функция имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то она называется дифференцируемой на этом промежутке.

Основные правила дифференцирования:

- 1) производная суммы равна сумме производных, то есть

$$(u + v)' = u' + v'.$$

- 2) производная произведения равна:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

- 3) производная частного равна:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ где } v \neq 0.$$

- 4) производная сложной функции равна:

$$(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Основные формулы дифференцирования:

1. $(c)' = 0$

7. $(\lg x)' = \frac{1}{x} \cdot \lg e;$

2. $(kx + b)' = k$

8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

3. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

9. $(\sin x)' = \cos x;$

4. $(e^x)' = e^x$

10. $(\cos x)' = -\sin x$

5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

11. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$

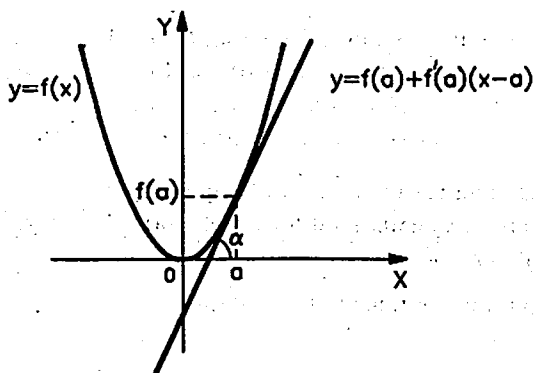
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

12. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Геометрический смысл производной

Пусть задана функция $y = f(x)$, которая имеет производную в точке $x = a$. Через точку $(a; f(a))$, проведена касательная к графику функции $y = f(x)$. Угловым коэффициентом или тангенсом угла наклона этой касательной будет равен производной функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, то есть $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(a)$.

$y = f(a) + f'(a)(x - a)$ — уравнение касательной функции $y = f(x)$ в точке $x = a$.



Физический смысл производной

Пусть точка движется по некоторой прямой линии, так что ее положение меняется с течением времени. Рассмотрим эту прямую как числовую ось, тогда положение точки определяется ее координатой, и с течением времени эта координата меняется, являясь тем самым функцией от времени. Уравнением движения называется запись $y=f(t)$, показывающая, каким образом меняется координата с течением времени.

Скорость движения с уравнением $y=f(t)$ в момент времени t равна значению производной $f'(t)$ в этот момент времени. В этом состоит физический смысл производной.

Скорость движения при неравномерном движении изменяется с течением времени. Скорость изменения скорости называется ускорением, то есть $f''(t)$. В этом состоит физический смысл второй производной.

Задача 1. Пользуясь определением, найдите производную функции:

а) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$

Решение:

Найдем приращение функции в точке x :

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{2}(x + \Delta x) - 2 - \left(\frac{1}{2}x - 2\right) = \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\Delta x - 2 - \frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{2}\Delta x\end{aligned}$$

Найдем отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2} \Delta x}{\Delta x} = \frac{1}{2}$$

Найдем предел отношения приращения функции к приращению аргумента, то есть производную в точке x :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $f'(x) = \frac{1}{2}$.

б) $f(x) = 3x^2$

Решение

Найдем приращение функции в точке x :

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = 3(x + \Delta x)^2 - 3x^2 = \\ &= 3x^2 + 6x \cdot \Delta x + 3\Delta x^2 - 3x^2 = 6x \cdot \Delta x + 3\Delta x^2 \end{aligned}$$

Найдем отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{6x \cdot \Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x$$

Найдем предел отношения приращения функции к приращению аргумента, то есть производную в точке x :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x + 3\Delta x) = 6x$$

Ответ: $f'(x) = 6x$.

в) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

Решение:

Найдем приращение функции в точке x :

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{(x + \Delta x) + 1} - \frac{1}{x + 1} = \\ &= \frac{x + 1 - x - \Delta x - 1}{(x + \Delta x + 1)(x + 1)} = \frac{-\Delta x}{(x + \Delta x + 1)(x + 1)} \end{aligned}$$

Найдем отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{(x + \Delta x + 1)(x + 1)\Delta x} = -\frac{1}{(x + \Delta x + 1)(x + 1)}$$

Найдем предел отношения приращения функции к приращению аргумента, то есть производную в точке x :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x + \Delta x + 1)(x + 1)} = -\frac{1}{(x + 1)^2}$$

Ответ: $f'(x) = -\frac{1}{(x + 1)^2}$.

Задача 2. Найдите производную функции:

а) $y = 5x^3 - 2x$

Решение:

Используя правило дифференцирования суммы и формулу дифференцирования $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, найдем производную данной функции:

$$y' = (5x^3)' - (2x)' = 5 \cdot 3x^2 - 2 = 15x^2 - 2$$

Ответ: $y' = 15x^2 - 2$.

б) $y = 2x^3(x - 1)$

Решение:

1 способ

Используя правило дифференцирования произведения и формулы дифференцирования, найдем производную данной функции:

$$\begin{aligned} y' &= (2x^3(x - 1))' = (2x^3)' \cdot (x - 1) + 2x^3 \cdot (x - 1)' = \\ &= 6x^2 \cdot (x - 1) + 2x^3 \cdot 1 = 6x^3 - 6x^2 + 2x^3 = 8x^3 - 6x^2 \end{aligned}$$

Ответ: $y' = 8x^3 - 6x^2$.

2 способ

Преобразуем правую часть формулы, которой задана функция:

$$2x^3(x - 1) = 2x^4 - 2x^3$$

Найдем производную функции:

$$y' = (2x^4 - 2x^3)' = (2x^4)' - (2x^3)' = 8x^3 - 6x^2$$

Ответ: $y' = 8x^3 - 6x^2$.

в) $y = (2x^2 - 1)(5x + 1)$

Решение:

Производную данной функции можно найти двумя способами, как в примере «б». Найдем производную данной функции 1 способом:

$$\begin{aligned} y' &= ((2x^2 - 1)(5x + 1))' = (2x^2 - 1)' \cdot (5x + 1) + (2x^2 - 1) \cdot (5x + 1)' = \\ &= 4x \cdot (5x + 1) + (2x^2 - 1) \cdot 5 = 20x^2 + 4x + 10x^2 - 5 = \\ &= 30x^2 + 4x - 5 \end{aligned}$$

Ответ: $y' = 30x^2 + 4x - 5$.

г) $y = \frac{3}{x^2}$

Решение:

1 способ

Используя правило дифференцирования частного и формулы дифференцирования, найдем производную данной функции:

$$y' = \left(\frac{3}{x^2} \right)' = \frac{3' \cdot x^2 - 3 \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{0 - 6x}{x^4} = -\frac{6x}{x^4} = -\frac{6}{x^3}$$

Ответ: $y' = -\frac{6}{x^3}$.

2 способ

Преобразуем правую часть формулы, которой задана функция:

$$\frac{3}{x^2} = 3 \cdot x^{-2}$$

Найдем производную функции $y = 3x^{-2}$, используя формулу $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$:

$$y' = (3 \cdot x^{-2})' = 3 \cdot (-2) \cdot x^{-2-1} = -6 \cdot x^{-3} = -\frac{6}{x^3}$$

Ответ: $y' = -\frac{6}{x^3}$.

д) $y = \sqrt[3]{x}$

Решение:

Удобно находить производную данной функции после преобразований правой части формулы, которой задана функция:

$$\sqrt[3]{x} = x \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$$

$$y' = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x}$$

Ответ: $y' = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x}$.

е) $y = (x^2 - 3x + 1)^5$

Решение:

Найдем производную данной функции, используя правило дифференцирования сложной функции и формулы дифференцирования:

$$\begin{aligned} y' &= ((x^2 - 3x + 1)^5)' = 5 \cdot (x^2 - 3x + 1)^4 \cdot (x^2 - 3x + 1)' = \\ &= 5 \cdot (x^2 - 3x + 1)^4 \cdot (2x - 3) \end{aligned}$$

Ответ: $y' = 5 \cdot (x^2 - 3x + 1)^4 \cdot (2x - 3)$.

ж) $y = 2x^3 + 3 \sin 2x$

Решение:

Найдем производную данной функции, используя правила и формулы дифференцирования:

$$\begin{aligned} y' &= (2x^3 + 3 \sin 2x)' = (2x^3)' + (3 \sin 2x)' = 2 \cdot 3 \cdot x^2 + 3 \cdot 2 \cdot \cos 2x = \\ &= 6x^2 + 6 \cos 2x \end{aligned}$$

Ответ: $y' = 6x^2 + 6 \cos 2x$.

з) $y = \sin 4x - 2\cos x$

Решение:

Найдем производную данной функции, используя правила и формулы дифференцирования:

$$\begin{aligned}y' &= (\sin 4x - 2\cos x)' = (\sin 4x)' - (2\cos x)' = 4\cos 4x - 2(-\sin x) = \\&= 4\cos 4x + 2\sin x\end{aligned}$$

Ответ: $y' = 4\cos 4x + 2\sin x$.

и) $y = \sqrt[3]{3x + 2}$

Решение:

Преобразуем правую часть формулы, которой задана функция:

$$\sqrt[3]{3x + 2} = (3x + 2)^{\frac{1}{3}}$$

Найдем производную функции, используя правила и формулы дифференцирования:

$$\begin{aligned}y' &= \left((3x + 2)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3} \cdot (3x + 2)^{\frac{1}{3} - 1} \cdot (3x + 2)' = \\&= \frac{1}{3} \cdot (3x + 2)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3 = \frac{3}{3 \sqrt[3]{3x + 2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3x + 2}}\end{aligned}$$

Ответ: $y' = \frac{1}{\sqrt[3]{3x + 2}}$.

к) $y = 5(2x + 1)^3 + 3(x - 1)^5$

Решение:

Найдем производную данной функции, используя правила и формулы дифференцирования:

$$\begin{aligned}y' &= (5(2x + 1)^3)' + (3(x - 1)^5)' = 5 \cdot 3 \cdot (2x + 1)^2 \cdot (2x + 1)' + \\&+ 3 \cdot 5 \cdot (x - 1)^4 \cdot (x - 1)' = 15(2x + 1)^2 \cdot 2 + 15(x - 1)^4 \cdot 1 = \\&= 30(2x + 1)^2 + 15(x - 1)^4\end{aligned}$$

Ответ: $y' = 30(2x + 1)^2 + 15(x - 1)^4$.

$$л) \ln \frac{1}{x^2}$$

Решение:

Используя правило дифференцирования сложной функции и формулы дифференцирования, найдем производную данной функции:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\ln \frac{1}{x^2} \right)' = \frac{1}{\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{1}{x^2} \right)' = x^2 \cdot (x^{-2})' = x^2 \cdot (-2) \cdot x^{-2-1} = \\ &= -2x^2 \cdot x^{-3} = -2 \cdot x^{-1} = -\frac{2}{x} \end{aligned}$$

Ответ: $y' = -\frac{2}{x}$.

$$м) y = e^{\cos x}$$

Решение:

Используя правило дифференцирования сложной функции и формулы дифференцирования, найдем производную данной функции:

$$y' = (e^{\cos x})' = e^{\cos x} \cdot (\cos x)' = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\sin x \cdot e^{\cos x}$$

Ответ: $y' = -\sin x \cdot e^{\cos x}$.

$$н) y = \ln(\operatorname{tg} x)$$

Решение:

Используя правило дифференцирования сложной функции и формулы дифференцирования, найдем производную данной функции:

$$\begin{aligned} y' &= (\ln(\operatorname{tg} x))' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{ctg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{0,5 \cdot (2\sin x \cdot \cos x)} = \frac{2}{\sin 2x} \end{aligned}$$

Ответ: $y' = \frac{2}{\sin 2x}$.

Задача 3. Найдите производную функции $f(x) = \cos 4x$ и $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Решение:

Используя правило дифференцирования сложной функции и формулы дифференцирования, найдем производную данной функции:

$$f'(x) = (\cos 4x)' = 4 \cdot (-\sin 4x) = -4\sin 4x$$

Найдем значение производной при $x = \frac{\pi}{12}$:

$$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = -4 \cdot \sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = -4 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = -4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$$

Ответ: $f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = -2\sqrt{3}$.

Задача 4. Найдите производную функцию $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ при $x = \sqrt{3}$.

Решение:

Используя правило дифференцирования сложной функции, частного и формулы дифференцирования, найдем производную данной функции:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln \frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \\ &= \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x-1 - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{-2}{(x+1)(x-1)} = -\frac{2}{x^2-1} \end{aligned}$$

Найдем значение производной при $x = \sqrt{3}$:

$$f'(\sqrt{3}) = -\frac{2}{(\sqrt{3})^2-1} = -\frac{2}{3-1} = -1$$

Ответ: $f'(\sqrt{3}) = -1$.

Задача 5. Найдите тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через точку $A(1; 1)$ графика функции $f(x) = x^3 + 2$

Решение:

Так как тангенс угла наклона касательной равен значению производной в точке $x = 1$, то:

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(1)$$

Найдем производную функции $f(x) = x^3 + 2$:

$$f'(x) = (x^3 + 2)' = (x^3)' + (2)' = 3x^2$$

Найдем тангенс угла наклона касательной:

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$$

Ответ: $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

Задача 6. Найти точку графика функции $f(x) = 3x^2 - 2x + \frac{1}{3}$, в которой касательная параллельна оси Ox .

Решение:

Если касательная параллельна оси Ox , то угол наклона касательной к оси Ox равен нулю. Значит, тангенс угла наклона равен нулю и значение производной в точке касания равно нулю. Найдем, при каком значении x значение производной равно нулю:

$$f'(x) = 6x - 2;$$

$$6x - 2 = 0;$$

$$6x = 2;$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3}$ — абсцисса точки касания. Найдем ординату:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

$\left(\frac{1}{3}; 0\right)$ — координаты точки графика функции $f(x) = 3x^2 - 2x + \frac{1}{3}$, в которой касательная параллельна оси Ox .

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$.

Задача 7. Составить уравнение касательной к параболе $y = 2x^2 - 12x + 20$ в точке с абсциссой $x = 4$.

Решение:

Уравнение касательной функции $y = f(x)$ в точке $x = a$:
 $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

Найдем производную функцию $f(x) = 2x^2 - 12x + 20$:
 $f'(x) = 4x - 12$

Найдем значение производной и функции при $x = 4$:
 $f'(4) = 4 \cdot 4 - 12 = 16 - 12 = 4$

$$f(x) = 2 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 20 = 4$$

Составим уравнение касательной:

$$y = 4 + 4(x - 4);$$

$$y = 4 + 4x - 16;$$

$$y = 4x - 12$$

$y = 4x - 12$ — уравнение касательной к параболе $y = 2x^2 - 12x + 20$ в точке с абсциссой $x = 4$.

Ответ: $y = 4x - 12$.

Задача 8. Найти координаты точки, в которой касательная к параболе $y = \frac{3}{2}x^2 - 4x + 5$ образует угол 135° с осью Ox .

Решение:

Тангенс угла наклона равен производной функции в точке касания, то есть

$$\operatorname{tg} 135^\circ = f'(x)$$

$$\operatorname{tg} 135^\circ = -1$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 - 4x + 5\right)' = 3x - 4$$

$$3x - 4 = -1;$$

$$3x = 3;$$

$$x = 1$$

Значит, 1 — абсцисса точки касания. Найдем ординату этой точки:

$$f(1) = \frac{3}{2} \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = \frac{3}{2} - 4 + 5 = 2,5$$

(1; 2,5) — координаты точки касания.

Ответ: (1; 2,5).

Задача 9. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2$. Выведите формулу для вычисления скорости в любой момент времени и найдите скорость в момент $t = 5$ с. (Путь — в метрах.)

Решение:

Скорость движения с уравнением

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2$$

в момент времени t равна значению производной $x'(t)$ в этот момент времени. Поэтому:

$$v = x'(t) = t^2 - t$$

Найдем скорость в момент времени $t = 5$;

$$v(5) = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20 \text{ (м/с)}.$$

Ответ: $v = 20$ м/с

Задача 10. Две материальные точки движутся прямолинейно по законам $x_1(t) = \frac{2}{3}t^3 + t^2 - t + 15$ и $x_2(t) = \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 11t - 2$. Определить, в какой момент времени их скорости будут равны.

Решение:

Выведем формулы для вычисления скоростей этих точек в любой момент времени:

$$v_1 = x_1'(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 + t^2 - t + 15 \right)' = 2t^2 + 2t - 1$$

$$v_2 = x_2'(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 11t - 2 \right)' = 2t^2 - t + 11$$

Так как скорости равны, то получим следующее уравнение:

$$2t^2 + 2t - 1 = 2t^2 - t + 11$$

После преобразований уравнение принимает вид:

$$3t - 12 = 0.$$

Из этого уравнения находим: $t = 4$.

Значит, в момент времени $t = 4$ скорости двух материальных точек будут равны.

Ответ: $t = 4$.

XIX. Основные свойства функций. Исследование функций

Четная функция — функция $f(x)$, обладающая двумя свойствами:

- 1) область определения функции симметрична относительно нуля;
- 2) для любого значения x из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Нечетная функция — функция $f(x)$, обладающая двумя свойствами:

- 1) область определения функции симметрична относительно нуля;
- 2) для любого значения x из области определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Монотонная функция — функция, которая либо возрастает, либо только убывает.

Функция называется возрастающей в некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого

промежутка соответствует большее значение функции, то есть если $x_1 > x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$.

Функция называется убывающей в некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции, то есть если $x_1 > x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$.

Точка максимума функции $f(x)$ — точка x_0 , для которой найдется такая окрестность этой точки, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство: $f(x_0) \geq f(x)$.

Максимум функции — значение функции в точке максимума. Обозначение: $f_{\max}$.

Точка минимума функции $f(x)$ — точка x_0 , для которой найдется такая окрестность этой точки, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство: $f(x_0) \leq f(x)$.

Минимум функции — значение функции в точке минимума. Обозначение: $f_{\min}$.

Период функции. Функция $f(x)$ называется периодической с периодом T , где T — некоторое действительное число, отличное от нуля, если:

- 1) для любого значения x из области определения функции значение аргумента $(x + T)$ и $(x - T)$ также принадлежит области определения функции;
- 2) при любом x из области определения функции выполняется равенство:

$$f(x \pm T) = f(x)$$

Обычно под периодом функции понимают наименьший из всех положительных периодов.

Непрерывность функции. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если она определена в некоторой окрестности этой точки и ее предел при стремлении x к x_0 равен значению функции в этой точке, то есть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если функция непрерывна в каждой точке заданного интервала, то она непрерывна на этом интервале.

Функция обратимая — функция, принимающая каждое свое значение в единственной точке области определения. Если функция $y = f(x)$ обратимая, то для любого ее значения y_0 уравнение $f(x) = y_0$ имеет относительно x единственный корень.

Схема исследования функции:

- 1) область определения;
- 2) четность;
- 3) периодичность;
- 4) производная функции;
- 5) критические точки;
- 6) значение функции в критических точках;
- 7) промежутки возрастания и убывания;
- 8) экстремумы;
- 9) наибольшее и наименьшее значение функции;
- 10) дополнительные точки.

Задача 1. Определить четность или нечетность функции:

а) $y = x^6$

Решение:

Область определения данной функции: $(-\infty; +\infty)$

Область определения симметрична относительно нуля. Рассмотрим $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)^6 = x^6.$$

Так как $f(-x) = f(x)$, значит, функция $y = x^6$ является четной.

Ответ: функция четная.

б) $y = x^3 + 5x$

Решение:

Область определения данной функции: $(-\infty; +\infty)$

Область определения симметрична относительно нуля. Рассмотрим $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)^3 + 5(-x) = -x^3 - 5x = -(x^3 + 5x)$$

Так как $f(-x) = -f(x)$, значит, функция $y = x^3 + 5x$ является нечетной.

Ответ: Функция нечетная.

$$в) y = \frac{1}{x^2 - 9}$$

Решение:

Область определения данной функции:

$$(-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty).$$

Область определения симметрична относительно нуля. Рассмотрим $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 - 9} = \frac{1}{x^2 - 9}$$

Так как $f(-x) = f(x)$, значит, функция $y = \frac{1}{x^2 - 9}$ является четной.

Ответ: функция четная.

$$г) y = 3x^4 - 0,2x^3$$

Решение:

Область определения: $(-\infty; +\infty)$.

Область определения симметрична относительно нуля. Рассмотрим $f(-x)$:

$$f(-x) = 3(-x)^4 - 0,2(-x)^3 = 3x^4 + 0,2x^3$$

Так как $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, значит, функция $y = 3x^4 - 0,2x^3$ не является ни четной, ни нечетной.

Ответ: функция не является ни четной, ни нечетной.

$$д) y = \frac{x+2}{x-2}$$

Решение:

Область определения данной функции:

$$(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$$

Область определения не симметрична относительно нуля, значит, функция $y = \frac{x+2}{x-2}$ не является ни четной, ни нечетной.

Ответ: функция не является ни четной, ни нечетной.

Задача 2. Доказать, что функция $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ является периодической с периодом 2π .

Решение:

Функция определена, если $1 + \cos x \neq 0$.

Значит, областью определения функции является множество всех действительных чисел, кроме $x = \pi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Очевидно, что если x принадлежит области определения данной функции, то $x + 2\pi$ и $x - 2\pi$ также принадлежит области определения этой функции.

Проверим равенство: $f(x + 2\pi) = f(x)$

$$f(x + 2\pi) = \frac{\sin(x + 2\pi)}{1 + \cos(x + 2\pi)} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = f(x)$$

Значит, функция $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ является периодической с периодом 2π .

Задача 3. Доказать, что функция $f(x) = |\cos x|$ является периодической с периодом π .

Решение:

Областью определения функции является множество всех действительных чисел. Поэтому, если x принадлежит области определения функции, то $x + \pi$ и $x - \pi$ принадлежат области определения этой функции.

Проверим выполнение равенства: $f(x + \pi) = f(x)$.

$$f(x + \pi) = |\cos(x + \pi)| = |-\cos x| = \cos x = f(x)$$

Значит, функция $f(x) = |\cos x|$ является периодической с периодом π .

Задача 4. Найти наименьший положительный период для функции $f(x) = \sin ax$, где $a \neq 0$.

Решение:

Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел. Значит, если x принадлежит области определения функции, то $x + T$ и $x - T$ принадлежат области определения функции.

Предположим, что это число T является периодом функции, тогда должно выполняться равенство:

$$\sin(a(x + T)) = \sin ax, \text{ то есть } \sin(ax + aT) = \sin ax.$$

Решим уравнение $\sin(ax + aT) = \sin ax$ относительно T :

$$\sin(ax + aT) - \sin ax = 0;$$

$$2\sin \frac{ax + aT - ax}{2} \cdot \cos \frac{ax + aT + ax}{2} = 0;$$

$$\sin aT \cdot \cos \left(ax + \frac{aT}{2}\right) = 0$$

Из уравнения $\sin aT \cdot \cos \left(ax + \frac{aT}{2}\right) = 0$ находим:

$$T = \frac{2\pi k}{a}; T = \frac{\pi + 2\pi k}{a} - 2x$$

$T = \frac{\pi + 2\pi k}{a} - 2x$ не удовлетворяет определению периода, так как T зависит от x . Значит, все периоды функции $f(x) = \sin ax$ можно найти по формуле $T = \frac{2\pi k}{a}$.

Наименьшим положительным числом из них является: $T = \frac{2\pi}{|a|}$.

Ответ: $T = \frac{2\pi}{|a|}$.

Задача 5. Доказать, что функция $y = x^2$ непрерывна в точке $x = 3$.

Решение:

Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, если предел функции при $x \rightarrow a$ равен значению функции в этой точке, то есть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Так как $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9 = 3^2$, то функция $y = x^2$ непрерывна в точке $x = 3$.

Задача 6. Дана функция

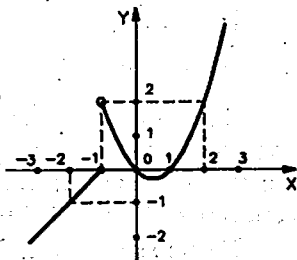
$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{при } x \leq -1 \\ x^2 - x & \text{при } x > -1 \end{cases}$$

Найти точку разрыва и значение функции в этой точке.

Решение:

Функция терпит разрыв в точке $x = -1$, так как при $x \rightarrow -1$ предел этой функции не существует.

$$f(-1) = -1 + 1 = 0$$



Задача 7. Найти промежутки возрастания и убывания, точки максимума и точки минимума функции, максимумы и минимумы функции:

а) $y = 2x^2 + 4x + 1$

Решение:

Найдем производную данной функции:

$$y' = 4x + 4$$

Так как $y' > 0$ на интервале $(-1; +\infty)$, значит, на этом интервале функция возрастает.

Так как $y' < 0$ на интервале $(-\infty; -1)$, значит, на этом интервале функция убывает.

Так как в точке $x = -1$ функция $y = 2x^2 + 4x + 1$ непрерывна, то эту точку присоединим к промежутку возрастания и промежутку убывания, то есть на промеж-

утке $[-1; +\infty)$ функция возрастает, на промежутке $(-\infty; -1]$ функция убывает;

Так как в точке $x = -1$ производная меняет знак с минуса на плюс, то $x = -1$ является точкой минимума.

Найдем минимум функции:

$$y_{\min} = 2(-1)^2 + 4(-1) + 1 = -1.$$

Ответ: на $[-1; +\infty)$ функция возрастает; на $(-\infty; -1]$ функция убывает; $x_{\min} = -1$; $y_{\min} = -1$.

$$б) y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - 9$$

Решение:

Найдем производную функции:

$$y' = x^2 + 2x - 3$$

Для того чтобы найти промежутки возрастания, необходимо решить неравенство $x^2 + 2x - 3 > 0$; для того чтобы найти промежутки убывания, необходимо решить неравенство $x^2 + 2x - 3 < 0$.

Из неравенства $x^2 + 2x - 3 > 0$ находим:

$$x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty).$$

Из неравенства $x^2 + 2x - 3 < 0$ находим: $x \in (-3; 1)$.

Так как в точках $x = -3$ и $x = 1$ функция $y' = x^2 + 2x - 3$ непрерывна, то эти точки присоединим к промежуткам возрастания и промежутку убывания.

Значит, $(-\infty; -3]$; $[1; +\infty)$ — промежутки возрастания; $[-3; 1]$ — промежуток убывания.

Так как в точке $x = -3$ производная меняет знак с плюса на минус, то $x = -3$ — точка максимума.

Найдем максимум функции:

$$y_{\max} = \frac{1}{3}(-3)^3 + (-3)^2 - 3(-3) - 9 = 0$$

Так как в точке $x = 1$ производная меняет знак с минуса на плюс, то $x = 1$ — точка минимума.

Найдем минимум функции:

$$y_{\min} = \frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 - 9 = -10\frac{2}{3}$$

Ответ: на промежутках $(-\infty; -3]$; $[1; +\infty)$ функция возрастает; на промежутке $[-3; 1]$ функция убывает;

$$x_{\max} = -3; x_{\min} = 1; y_{\max} = 0; y_{\min} = -10\frac{2}{3}$$

в) $y = -x^2 + 2\ln x$

Решение:

Область определения данной функции:

$$D_f = (0; +\infty).$$

Найдем производную:

$$y' = -2x + \frac{2}{x}, \text{ то есть } y' = \frac{-2(x^2 - 1)}{x}$$

Производная равна нулю при $x = 1$ ($x > 0$).

Определим знак производной на промежутках $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$:

$y' > 0$ на промежутке $(0; 1)$;

$y' < 0$ на промежутке $(1; +\infty)$.

Так как в точке $x = 1$ функция $y = -x^2 + 2\ln x$ непрерывна, то эту точку присоединим к промежутку возрастания и убывания, то есть

$(0; 1]$ — промежуток возрастания;

$[1; +\infty)$ — промежуток убывания.

Так как в точке $x = 1$ производная меняет знак с плюса на минус, то $x = 1$ — точка максимума.

Найдем максимум функции:

$$y_{\max} = -1^2 + 2\ln 1 = -1.$$

Ответ: на промежутке $(0; 1]$ функция возрастает; на промежутке $[(1; +\infty))$ функция убывает; $x_{\max} = 1; y_{\max} = -1$.

г) $y = xe^x$

Решение:

Областью определения функции является множество действительных чисел.

Найдем производную данной функции:

$$y' = e^x + xe^x, \text{ то есть } y' = e^x(1 + x)$$

Производная равна нулю при $x = -1$. Определим знак производной на промежутках $(-\infty; -1)$; $(-1; +\infty)$:

$$y' > 0 \text{ на промежутке } (-1; +\infty);$$

$$y' < 0 \text{ на промежутке } (-\infty; -1).$$

Так как в точке $x = -1$ функция $y = xe^x$ непрерывна, то эту точку присоединим к промежутку возрастания и промежутку убывания, то есть

$$[-1; +\infty) \text{ — промежуток возрастания;}$$

$$(-\infty; -1] \text{ — промежуток убывания.}$$

Так как в точке $x = -1$ производная меняет знак с минуса на плюс, то $x = -1$ — точка минимума.

Найдем минимум функции:

$$y_{\min} = -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

Ответ: на промежутке $[-1; +\infty)$ функция возрастает; на промежутке $(-\infty; -1]$ функция убывает; $x_{\min} = -1$;

$$y_{\min} = -\frac{1}{e}.$$

Задача 8. Докажите, что функция $y = \log_{0,3}(3 - 4x)$ возрастает на всей области определения.

Решение:

Так как логарифмическая функция $y = \log_a x$ определена на множестве положительных чисел, то $3 - 4x > 0$, то есть $x < \frac{3}{4}$.

Область определения функции $y = \log_{0,3}(3 - 4x)$:
 $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$.

Найдем производную данной функции:

$$y' = -4 \cdot \frac{1}{(3 - 4x)\ln 0,3} = \frac{4}{(4x - 3)\ln 0,3}$$

Определим знак дроби $\frac{4}{(4x - 3)\ln 0,3}$ при $x < \frac{3}{4}$:

$4 > 0$; $\ln 0,3 < 0$; $4x - 3 < 0$ при $x < \frac{3}{4}$; значит

$$\frac{4}{(4x-3)\ln 0,3} > 0 \text{ при } x < \frac{3}{4}.$$

Имеем $y' > 0$ при $x < \frac{3}{4}$, то есть на всей области определения функции $y = \log_{0,3} (3 - 4x)$. Значит, функция $y = \log_{0,3} (3 - 4x)$ возрастает на всей области определения. Что и требовалось доказать.

Задача 9. Докажите, что функция $f(x)$ обратима. Выведите формулу, задающую функцию, обратную к данной функции. Постройте графики этих функций.

а) $f(x) = 3x - 2$

Решение:

Решим уравнение $f(x) = y_0$, то есть $3x - 2 = y_0$.

Уравнение имеет единственное решение: $x = \frac{y_0 + 2}{3}$.

Значит, функция $f(x) = 3x - 2$ обратима.

Обратная функция будет задаваться формулой:

$$g(x) = \frac{x + 2}{3}.$$

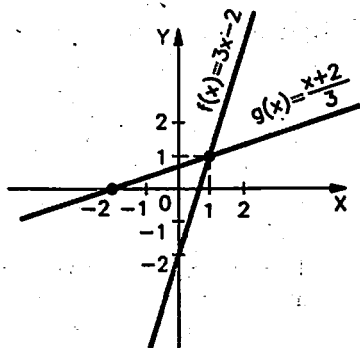
Построим графики функций:

$$f(x) = 3x - 2$$

x	0	1
y	-2	1

$$g(x) = \frac{x + 2}{3}$$

x	-2	1
y	0	1



б) $f(x) = x^3 - 1$

Решение:

Решим уравнение $f(x) = y_0$,
то есть $x^3 - 1 = y_0$.

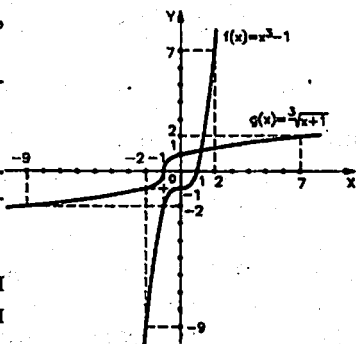
Уравнение имеет единственное решение: $x = \sqrt[3]{y_0 + 1}$.

Значит, функция обратима.

Обратная функция задается формулой: $g(x) = \sqrt[3]{x + 1}$.

Построим графики функций: $f(x) = x^3 - 1$ и

$$g(x) = \sqrt[3]{x + 1}.$$



Задача 10. Исследовать функцию и построить ее график:

а) $y = -x^3 + 3x - 2$

Решение:

1. Область определения: $D_y = (-\infty; +\infty)$.
 2. Функция не является ни четной, ни нечетной.
 3. Функция не является периодической.
 4. Производная: $y' = -3x^2 + 3$.
 5. Критические точки: $y' = 0$ при $x = 1$ и $x = -1$.
 6. $y(1) = 0$; $y(-1) = -4$.
 7. $y' < 0$ при $x \in (-\infty; -1)$, следовательно, на промежутке $(-\infty; -1)$ функция убывает;
 $y' > 0$ при $x \in (-1; 1)$, следовательно, на промежутке $(-1; 1)$ функция возрастает;
 $y' < 0$ при $x \in (1; +\infty)$, следовательно, на промежутке $(1; +\infty)$ функция убывает.
- Так как в точках $x = -1$ и $x = 1$ функция непрерывна, то эти точки присоединим к промежуткам убывания и промежутку возрастания.
- $(-\infty; -1]$; $[1; +\infty)$ — промежутки убывания.
 $[-1; 1]$ — промежуток возрастания.

8. Так как в точке $x = -1$ производная меняет знак с минуса на плюс, то $x = -1$ — точка минимума.

Так как в точке $x = 1$ производная меняет знак с плюса на минус, то $x = 1$ — точка максимума.

Минимум функции:

$$y_{\min} = -4.$$

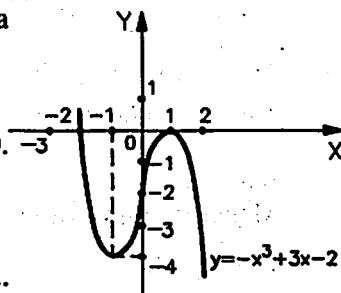
Максимум функции: $y_{\max} = 0.$

9. Дополнительные точки:

если $x = 0$, то $y = -2$;

если $x = -2$, то $y = 0.$

Построим график функции:



$$б) y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{7}{4}$$

Решение:

1. Область определения: $D_y = (-\infty; +\infty).$

$$2. f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - 2(-x)^2 + \frac{7}{4} = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{7}{4} = f(x)$$

Значит, функция четная.

3. Функция не является периодической.

$$4. \text{Производная: } y' = x^3 - 4x.$$

5. Критические точки: $y' = 0$ при $x = 0$ и $x = \pm 2$.

$$6. y(0) = \frac{7}{4}; y(2) = y(-2) = -\frac{1}{4}$$

7. $y' < 0$ при $x \in (-\infty; -2)$, следовательно, на промежутке $(-\infty; -2)$ функция убывает;

$y' > 0$ при $x \in (-2; 0)$, следовательно, на промежутке $(-2; 0)$ функция возрастает;

$y' < 0$ при $x \in (0; 2)$, следовательно, на промежутке $(0; 2)$ функция убывает;

$y' > 0$ при $x \in (2; +\infty)$, следовательно, на промежутке $(2; +\infty)$ функция возрастает.

Так как в точках $x = -2$, $x = 0$ и $x = 2$ функция

$y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{7}{4}$ непрерывна, то эти точки присоеди-

ним к промежуткам возрастания и промежуткам убывания.

$[-2; 0]; [2; +\infty)$ — промежутки возрастания.

$(-\infty; -2]; [0; 2]$ — промежутки убывания.

8. Так как в точках $x = -2$ и $x = 2$ производная меняет знак с минуса на плюс, то $x = -2$ и $x = 2$ — точки минимума.

Минимум функции: $y_{\min} = y(2) = y(-2) = -2\frac{1}{4}$

Так как в точке $x = 0$ производная меняет знак с плюса на минус, то $x = 0$ — точка максимума.

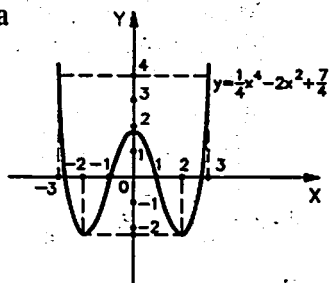
Максимум функции:

$$y_{\max} = y(0) = \frac{7}{4}$$

9. Дополнительные точки:

если $x = \pm 1$, то $y = 0$;

если $x = \pm 3$, то $y = 4$.



Построим график функции:

XX. Задачи на нахождение наименьшего и наибольшего значения функции

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема во всех точках этого отрезка и имеет конечное число критических точек на этом отрезке.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, необходимо:

- 1) найти критические точки;
- 2) вычислить значение функции на концах отрезка и в критических точках;
- 3) выбрать из найденных значений наибольшее и наименьшее.

Если функция $y = f(x)$ возрастает на отрезке $[a; b]$, то $f(a)$ — наименьшее значение, $f(b)$ — наибольшее значение функции на этом отрезке.

Если функция $y = f(x)$ убывает на отрезке $[a; b]$, то $f(a)$ — наибольшее значение, $f(b)$ — наименьшее значение функции на этом отрезке.

Задача 1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

а) $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ на отрезке $[-1; 2]$

Решение:

Данная функция непрерывна и дифференцируема в каждой точке отрезка $[-1; 2]$.

Найдем производную: $y' = x^2 - 4x + 3$.

Найдем критические точки:

$y' = 0$ при $x = 1$ и $x = 3$, $3 \notin [-1; 2]$

Найдем значение функции в точке $x = 1$ и на концах отрезка $[-1; 2]$:

$$y(1) = \frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 1 = 2\frac{1}{3};$$

$$y(-1) = \frac{(-1)^3}{3} - 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1 = -\frac{1}{3} - 2 - 3 + 1 = -4\frac{1}{3};$$

$$y(2) = \frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = \frac{8}{3} - 8 + 6 + 1 = 1\frac{2}{3}$$

Наибольшее значение данной функции на отрезке $[-1; 2]$ равно $2\frac{1}{3}$, то есть $\max_{[-1; 2]} y(x) = y(1) = 2\frac{1}{3}$.

Наименьшее значение данной функции на отрезке $[-1; 2]$ равно $-4\frac{1}{3}$, то есть $\min_{[-1; 2]} y(x) = y(-1) = -4\frac{1}{3}$.

Ответ: $\max_{[-1; 2]} y(x) = 2\frac{1}{3}$; $\min_{[-1; 2]} y(x) = -4\frac{1}{3}$.

б) $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на отрезке $[-2; 3]$.

Решение:

Функция $y = x^4 - 2x^2 + 5$ непрерывна и дифференцируема в каждой точке отрезка $[-2; 3]$.

Найдем производную: $y' = 4x^3 - 4x$.

Найдем критические точки:

$y' = 0$ при $x = 0$ и $x = \pm 1$.

Найдем значения функции в критических точках и на концах отрезка $[-2; 3]$:

$$y(0) = 5;$$

$$y(1) = y(-1) = 4;$$

$$y(-2) = 13;$$

$$y(3) = 68.$$

Наибольшее значение данной функции на отрезке $[-2; 3]$ равно 68, то есть $\max_{[-2; 3]} y(x) = y(3) = 68$.

Наименьшее значение данной функции на отрезке $[-2; 3]$ равно 4, то есть $\min_{[-2; 3]} y(x) = y(-1) = y(1) = 4$.

Ответ: $\max_{[-2; 3]} y(x) = 68$; $\min_{[-2; 3]} y(x) = 4$.

Задача 2. Число 10 разложить на два слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

Решение:

Обозначим через x первое число, тогда второе число $-(10 - x)$

Сумма кубов:

$$\begin{aligned} x^3 + (10 - x)^3 &= x^3 + 1000 - 3 \cdot 100 \cdot x + 3 \cdot 10x^2 - x^3 = \\ &= 30x^2 - 300x + 1000 \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию: $f(x) = 30x^2 - 300x + 1000$.
Найдем наименьшее значение этой функции на отрезке $[0; 10]$.

Производная функции: $f'(x) = 60x - 300$.

Критические точки: $f'(x) = 0$ при $x = 5$.

Найдем значение функции в точке $x = 5$ и на концах отрезка $[0; 10]$:

$$f(5) = 250; f(0) = 1000; f(10) = 1000.$$

Наименьшее значение функции на отрезке $[0; 10]$ равно 250 при $x = 5$, то есть $\min_{[0; 10]} f(x) = f(5) = 250$

Значит, первое число равно 5 и второе число равно 5.

Ответ: $10 = 5 + 5$ — разложение числа на два слагаемых таких, что сумма их кубов наименьшая.

Задача 3. Сумма основания и высоты треугольника равна 12 см. Каковы должны быть размеры основания, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

Решение:

Обозначим через x длину основания треугольника, тогда высота треугольника равна $(12 - x)$.

Площадь треугольника будет равна: $S = \frac{x(12 - x)}{2}$.

Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $S(x) = \frac{1}{2}x(12 - x)$ на интервале: $(0; 12)$.

Найдем наибольшее значение функции $S(x) = \frac{1}{2}x(12 - x)$ на отрезке $[0; 12]$

Производная функции: $S'(x) = 6 - x$

Критические точки: $S'(x) = 0$ при $x = 6$.

Найдем значение функции в критической точке и на концах отрезка $[0; 12]$:

$$S(0) = 0; S(12) = 0; S(6) = \frac{6 \cdot (12 - 6)}{2} = 18.$$

Так как наибольшее значение функция $S(x) = \frac{1}{2}x(12 - x)$ принимает внутри отрезка $[0; 12]$, значит, это и есть наибольшее значение функции на интервале $(0; 12)$, то есть

$$\max_{[0; 12]} S(x) = \max_{(0; 12)} S(x) = S(6) = 18$$

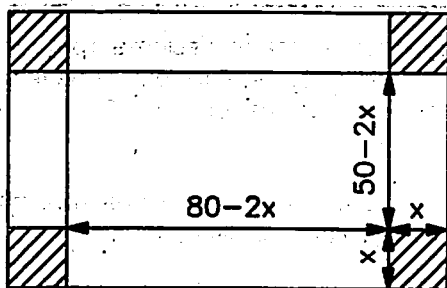
Получили, что длина основания равна 6 см.

Ответ: 6 см.

Задача 4. Из листа картона 80 см х 50 см требуется изготовить открытый сверху ящик наибольшей вместимости, вырезая по углам равные квадратики и загибая затем получившиеся выступы.

Решение:

Сделаем рисунок:



Обозначим через x сторону вырезаемого квадратика, тогда $(80 - 2x)$ — длина коробки, $(50 - 2x)$ — ширина коробки, x — высота коробки.

Объем коробки:

$$V = (80 - 2x) \cdot (50 - 2x) \cdot x = 4000x - 260x^2 + 4x^3$$

Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $V(x) = 4000x - 260x^2 + 4x^3$ на интервале $(0; 25)$.

Найдем наибольшее значение функции $V(x)$ на интервале $[0; 25]$

Производная функции: $V'(x) = 4000 - 520x + 12x^2$.

Критические точки:

$$V'(x) = 0 \text{ при } x = 33\frac{1}{3} \text{ и } x = 10, x = 33\frac{1}{3} \notin [0; 25].$$

Найдем значение функции в критической точке $x = 10$ и на концах отрезка $[0; 25]$:

$$V(0) = 0;$$

$$V(25) = 0;$$

$$V(10) = 18000.$$

Так как наибольшее значение функция принимает внутри отрезка $[0; 25]$, значит, наибольшее значение функции на интервале $(0; 25)$ равно наибольшему значению функции на отрезке $[0; 25]$, то есть

$$\max_{[0; 25]} V(x) = \max_{(0; 25)} V(x) = V(10) = 18000$$

В итоге, вырезая по углам квадратика со стороной 10 см, мы получим коробку с наибольшей вместимостью, равной 18000 см^3 .

Ответ: $V = 18000 \text{ см}^3$.

Задача 5. Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t + 3$. Найти максимальную скорость движения точки.

Решение:

Зная закон, по которому движется точка, выведем формулу для нахождения скорости в любой момент времени:

$$v(t) = S'(t) = -3t^2 + 6t + 9$$

Точка начала двигаться в момент времени $t = 0$. Найдем, в какой момент она остановилась, то есть $v(t) = 0$: $v(t) = 0$ при $t = 3$.

Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $v(t) = -3t^2 + 6t + 9$ на отрезке $[0; 3]$.

$$\text{Производная: } v'(t) = -6t + 6.$$

$$\text{Критические точки: } v'(t) = 0 \text{ при } t = 1.$$

Найдем значение функции $v(t)$ в критической точке и на концах отрезка $[0; 3]$:

$$v(0) = 9; v(3) = 0; v(1) = 12.$$

Наибольшее значение функции $v(t)$ на отрезке $[0; 3]$ принимает при $t = 1$, то есть

$$\max_{[0; 3]} v(t) = v(1) = 12$$

Ответ: $v = 12$.

XXI. Решение неравенств методом интервалов

Метод интервалов применяется для решения рациональных неравенств вида:

$$P(x) > 0; \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0; P(x) < 0; \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \text{ и т.п.}$$

где $P(x)$; $Q(x)$ — многочлены, приводимые к виду

$$P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \dots (x - x_n);$$

где $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ — корни многочлена.

Метод интервалов основан на следующем свойстве непрерывных функций: если на интервале $(a; b)$ функция

$f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.

Рассмотрим применение метода интервалов для решения неравенств на конкретных примерах.

Задача 1. Решить неравенство:

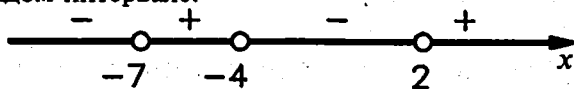
а) $(x - 2)(x + 4)(x + 7) > 0$

Решение:

Функция $f(x) = (x - 2)(x + 4)(x + 7)$ непрерывна в каждой точке области определения $D_f = (-\infty; +\infty)$ и обращается в нуль при $x = 2$; $x = -4$; $x = -7$.

Эти точки разбивают координатную прямую на интервалы $(-\infty; -7)$; $(-7; -4)$; $(-4; 2)$; $(2; +\infty)$, в каждом из которых функция сохраняет знак.

Отметим точки, в которых функция обращается в нуль, на координатной прямой и определим знак функции на каждом интервале.



$$f(-8) < 0; f(-5) > 0; f(0) < 0; f(3) > 0$$

$$f(x) > 0 \text{ при } x \in (-7; -4) \cup (2; +\infty)$$

Значит, множество решений данного неравенства:

$$(-7; -4) \cup (2; +\infty)$$

Ответ: $(-7; -4) \cup (2; +\infty)$.

б) $x^2(x + 2)(x - 1)^3(x^2 + 1) > 0$

Решение:

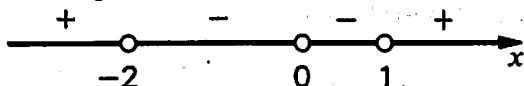
Так как $x^2 + 1 > 0$ при любых значениях x , то данное неравенство равносильно неравенству:

$$x^2(x + 2)(x - 1)^3 > 0.$$

Функция $f(x) = x^2(x + 2)(x - 1)^3$ — непрерывна в каждой точке области определения $D_f = (-\infty; +\infty)$ и обращается в нуль при $x = 0$; $x = -2$; $x = 1$.

Эти точки разбивают координатную прямую на интервалы $(-\infty; -2)$; $(-2; 0)$; $(0; 1)$; $(1; +\infty)$, в каждом из которых функция сохраняет знак.

Отметим точки, в которых функция обращается в нуль, на координатной прямой и определим знак функции на каждом интервале.



$$f(-3) > 0; f(-1) < 0; f(0,5) < 0; f(2) > 0.$$

$$f(x) > 0 \text{ при } x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty).$$

Значит, множество решений данного неравенства:

$$(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

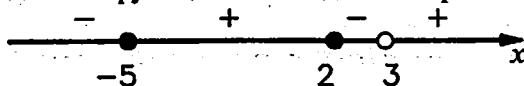
$$\text{в) } \frac{(x+5)(x-2)}{x-3} \geq 0$$

Решение:

Функция $f(x) = \frac{(x+5)(x-2)}{x-3}$ дробно-рациональная,

поэтому она непрерывна в каждой точке своей области определения $D_f = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ и обращается в нуль при $x = -5$; $x = 2$. Точки $x = 3$; $x = 2$ разбивают координатную прямую на интервалы $(-\infty; -5)$; $(-5; 2)$; $(2; 3)$; $(3; +\infty)$, в каждом из которых функция сохраняет знак.

Отметим эти точки на координатной прямой и определим знак этой функции на каждом интервале.



$$f(-6) < 0; f(0) > 0; f(2,5) < 0; f(4) > 0$$

$$f(x) \geq 0 \text{ при } x \in (-\infty; -5] \cup [2; 3).$$

Значит, множество решений данного неравенства:

$$(-\infty; -5] \cup [2; 3)$$

Ответ: $(-\infty; -5] \cup [2; 3)$.

$$г) \frac{3x^2 - 7x + 2}{x(x-4)} \geq 0$$

Решение:

Разложим многочлен, находящийся в числителе дроби $\frac{3x^2 - 7x + 2}{x(x-4)}$ на множители:

$$3x^2 - 7x + 2 = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)(x - 1)$$

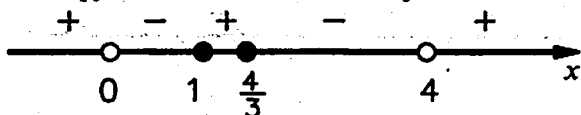
Неравенство принимает вид:

$$\frac{3\left(x - \frac{4}{3}\right)(x - 1)}{x(x-4)} \geq 0$$

Функция $f(x) = \frac{3\left(x - \frac{4}{3}\right)(x - 1)}{x(x-4)}$ дробно-рациональная, поэтому она непрерывна в каждой точке своей области определения $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; 4) \cup (4; +\infty)$ и обращается в нуль при $x = \frac{4}{3}$; $x = 1$.

Точки $x = 0$; $x = 1$; $x = \frac{4}{3}$; $x = 4$ разбивают координатную прямую на интервалы $(-\infty; 0)$; $(0; 1)$; $\left(1; \frac{4}{3}\right)$; $\left(\frac{4}{3}; 4\right)$; $(4; +\infty)$, в каждом из которых функция сохраняет знак.

Отметим эти точки на координатной прямой и определим знак функции на каждом интервале.



$$f(-1) > 0; f(0,5) < 0; f\left(1\frac{1}{6}\right) > 0; f(2) < 0; f(5) > 0$$

$$f(x) \geq 0 \text{ при } x \in (-\infty; 0] \cup \left[1; \frac{4}{3}\right] \cup (4; +\infty)$$

Значит, множество решений данного неравенства:

$$(-\infty; 0] \cup \left[1; \frac{4}{3}\right] \cup (4; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup \left[1; \frac{4}{3}\right] \cup (4; +\infty)$.

Задача 2. Решить неравенство и указать его наименьшее

решение: $\frac{(x^2 - 1)(x + 2)^2}{x - 3} \geq 0$

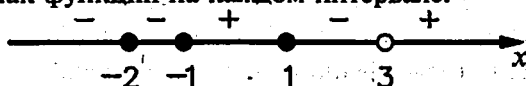
Решение:

Функция $f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x + 2)^2}{x - 3}$ дробно-рациональ-

ная, поэтому она непрерывна в каждой точке своей области определения $D_f = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ и обращается в нуль при $x = -2$; $x = -1$; $x = 1$.

Точки $x = 3$; $x = -2$; $x = -1$; $x = 1$ разбивают координатную прямую на интервалы $(-\infty; -2)$; $(-2; -1)$; $(-1; 1)$; $(1; 3)$; $(3; +\infty)$, в каждом из которых функция сохраняет знак.

Отметим эти точки на координатной прямой и определим знак функции на каждом интервале.



$$f(-3) < 0; f(-1,5) < 0; f(0) > 0; f(2) < 0; f(4) > 0$$

$$f(x) \geq 0 \text{ при } x \in \{-2\} \cup [-1; 1] \cup (3; +\infty)$$

Значит, множество решений данного неравенства:

$$\{-2\} \cup [-1; 1] \cup (3; +\infty)$$

-2 — наименьшее решение неравенства.

Ответ: $\{-2\} \cup [-1; 1] \cup (3; +\infty)$; -2 — наименьшее решение.

Задача 3. Решить неравенство и указать наименьшее на-

туральное решение $\frac{x^2 + 5x + 4}{(x^3 - 1)(x^2 - 5)} < 0$

Решение:

Преобразуем выражение, находящееся в левой части неравенства:

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{(x^3 - 1)(x^2 - 5)} = \frac{(x + 4)(x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})}$$

Так как $x^2 + x + 1 > 0$ при любых значениях x , то неравенство

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{(x^3 - 1)(x^2 - 5)} < 0$$

равносильно неравенству

$$\frac{(x + 4)(x + 1)}{(x - 1)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})} < 0.$$

Функция $f(x) = \frac{(x + 4)(x + 1)}{(x - 1)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})}$ дробно-ра-

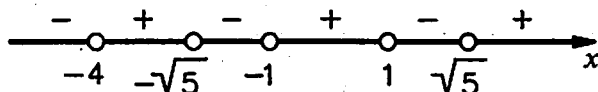
циональная, поэтому она непрерывна в каждой точке своей области определения

$$D_f = (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (-\sqrt{5}; 1) \cup (1; \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$$

и обращается в нуль при $x = -4$; $x = -1$.

Точки $x = -4$; $x = -\sqrt{5}$; $x = -1$; $x = 1$; $x = \sqrt{5}$ разбивают координатную прямую на интервалы $(-\infty; -4)$; $(-4; -\sqrt{5})$; $(-\sqrt{5}; 1)$; $(-1; 1)$; $(1; \sqrt{5})$; $(\sqrt{5}; +\infty)$, в каждом из которых функция сохраняет знак.

Отметим эти точки на координатной прямой и определим знак функции на каждом интервале.



$$f(-5) < 0; f(-3) > 0; f(-2) < 0; f(0) > 0; f(2) < 0; f(3) > 0$$

$$f(x) < 0 \text{ при } x \in (-\infty; -4) \cup (-\sqrt{5}; -1) \cup (1; \sqrt{5})$$

Значит, множество решений данного неравенства:

$$(-\infty; -4) \cup (-\sqrt{5}; -1) \cup (1; \sqrt{5})$$

2 — наименьшее натуральное решение неравенства.

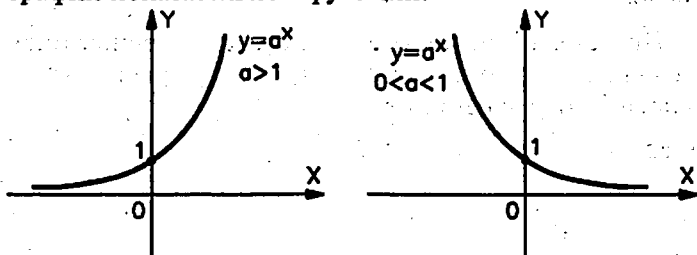
Ответ: $(-\infty; -4) \cup (-\sqrt{5}; -1) \cup (1; \sqrt{5})$; 2 — наименьшее натуральное решение.

XXII. Показательная функция. Решение показательных уравнений и неравенств

Показательная функция — функция, заданная формулой $y = a^x$, где $a > 0$; $a \neq 1$

Свойства показательной функции:

- 1) областью определения функции является множество всех действительных чисел;
- 2) областью значений функции является множество всех положительных действительных чисел;
- 3) показательная функция не является ни четной, ни нечетной;
- 4) производная показательной функции: $(a^x)' = a^x \ln a$;
- 5) если $x = 0$, то $y = 1$ при любом $a > 0$;
- 6) при $a > 0$ функция возрастает на всей области определения, причем:
 - а) если $x > 0$, то $y > 1$;
 - б) если $x < 0$, то $0 < y < 1$;
- 7) при $0 < a < 1$ функция убывает на всей области определения, причем:
 - а) если $x > 0$, то $0 < y < 1$;
 - б) если $x < 0$, то $y > 1$;
- 8) график показательной функции:

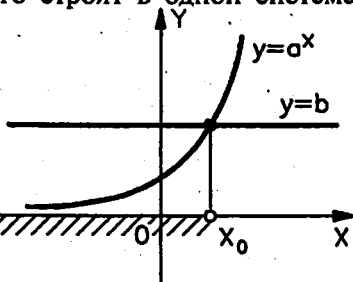


Показательное уравнение — уравнение, содержащее переменную в показателе степени.

Показательное уравнение вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильно уравнению вида $f(x) = g(x)$. На этом основан один из способов решения показательных уравнений. Существуют и другие способы решения показательных уравнений, например, введение новой переменной.

Показательное неравенство — неравенство вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$. При решении таких неравенств необходимо учитывать, что при $a > 1$ показательная функция возрастает, а при $0 < a < 1$ убывает. Поэтому, когда $a > 1$, переходят к неравенству $f(x) > g(x)$, когда $0 < a < 1$, переходят к неравенству $f(x) < g(x)$.

При решении показательных неравенств вида $a^x < b$, где b — число, удобно использовать графический способ решения неравенств. Для этого строят в одной системе координат графики функций $y = a^x$ и $y = b$. Находят точку пересечения графиков. Отмечают тот интервал, на котором график функции $y = a^x$ находится под графиком функции $y = b$. Множество решений неравенства $a^x < b$: $(-\infty; x_0)$.



Задача 1. Решить уравнение:

а) $3^x = 81$

Решение:

Представим число 81 в виде степени с основанием 3. Уравнение принимает вид: $3^x = 3^4$. Уравнение $3^x = 3^4$ равносильно уравнению $x = 4$.

Ответ: $x = 4$.

б) $2^{x^2 - 2x} = 2^{3x - 6}$

Решение:

Функция $y = 2^t$ возрастающая, каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента, значит:

$$x^2 - 2x = 3x - 6$$

Решив полученное уравнение, имеем: $x_1 = 2$; $x_2 = 3$.

Ответ: 2; 3.

в) $4^{x+1} + 4^{x+2} = 40$

Решение:

Преобразуем правую и левую части уравнения:

$$4^{x+1}(1 + 4) = 40$$

$$4^{x+1} \cdot 5 = 40$$

$$4^{x+1} = 8$$

$$2^{2x+2} = 2^3$$

Функция $y = 2^t$ возрастающая, каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента, значит:

$$2x + 2 = 3$$

Решив полученное уравнение, имеем: $x = 0,5$

Ответ: 0,5.

г) $4^{x+1,5} + 2^{x+2} = 4$

Решение:

Преобразуем правую и левую части уравнения:

$$2^{2(x+1,5)} + 2^{x+2} - 4 = 0$$

$$2^{2x} \cdot 8 + 2^x \cdot 4 - 4 = 0$$

$$2^{2x} \cdot 2 + 2^x - 1 = 0$$

Введем новую переменную, обозначив 2^x через y : $2^x = y$. Получим квадратное уравнение: $2y^2 + y - 1 = 0$.

Из этого уравнения получаем: $y_1 = -1$; $y_2 = \frac{1}{2}$.

Если $y = -1$, то $2^x = -1$. Уравнение $2^x = -1$ не имеет решений.

Если $y = \frac{1}{2}$, то $2^x = \frac{1}{2}$. Решив уравнение $2^x = \frac{1}{2}$, получаем $x = -1$.

Ответ: -1.

д) $3,24^{2\sqrt{x}-5} = \left(\frac{5}{9}\right)^{5\sqrt{x}+1}$

Решение:

Приведем правую и левую части уравнений к степеням с одинаковым основанием:

$$(1,8^2)^{2\sqrt{x}-5} = \left(\frac{5}{9}\right)^{5\sqrt{x}+1};$$

$$\left(\frac{9}{5}\right)^{4\sqrt{x}-10} = \left(\frac{5}{9}\right)^{5\sqrt{x}+1};$$

$$\left(\frac{5}{9}\right)^{-4\sqrt{x}+10} = \left(\frac{5}{9}\right)^{5\sqrt{x}+1}$$

Функция $\left(\frac{5}{9}\right)^x$ убывающая, каждое свое значение принимает только при одном значении аргумента, значит:

$$-4\sqrt{x} + 10 = 5\sqrt{x} + 1$$

Решив полученное уравнение, имеем: $x = 1$.

Ответ: 1.

Задача 2. Найти больший корень уравнения:

$$25^x - 10 \cdot 5^{x-1} - 5^{x+1} = -10$$

Решение:

Перенесем -10 в левую часть уравнения, поменяв при этом знак числа на противоположный. Уравнение принимает вид:

$$25^x - 10 \cdot 5^{x-1} - 5^{x+1} + 10 = 0$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$25^x - 10 \cdot 5^{x-1} - 5^{x+1} + 10 = 5^{2x} - 10 \cdot 5^x \cdot 5^{-1} - 5^x \cdot 5 + 10 =$$

$$= 5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 5 \cdot 5^x + 10 = 5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 10$$

Уравнение принимает вид:

$$5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 10 = 0$$

Введем новую переменную, обозначив 5^x через y :

$$5^x = y$$

Получаем квадратное уравнение: $y^2 - 7y + 10 = 0$.

Решив это уравнение, получаем: $y_1 = 5$; $y_2 = 2$.

Если $y = 5$, то $5^x = 5$. Из этого уравнения $5^x = 5$ получаем: $x = 1$.

Если $y = 2$, то $5^x = 2$. Из уравнения $5^x = 2$ получаем: $x = \log_5 2$.

$\log_5 2 < 1$, так как функция $y = \log_5 x$ возрастающая, то большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Так как $2 < 5$, то $\log_5 2 < \log_5 5 = 1$.

Значит, число 1 — больший корень уравнения
 $25^x - 10 \cdot 5^{x-1} - 5^{x+1} = -10$.

— Ответ: 1 — больший корень уравнения
 $25^x - 10 \cdot 5^{x-1} - 5^{x+1} = -10$.

Задача 3. Решить графически уравнение:

$$5 \cdot 3^{x+1} = 22x + 27$$

Решение:

Преобразуем левую часть уравнения, получим:

$$15 \cdot 3^x = 22x + 27$$

Разделим обе части уравнения на 15, получим:

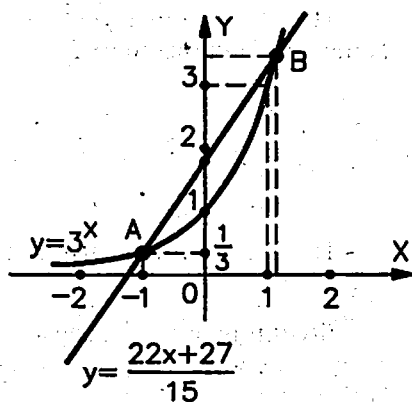
$$3^x = \frac{22x + 27}{15}$$

Построим в одной системе координат графики функций:
 $y = 3^x$; $y = \frac{22x + 27}{15}$

$y = 3^x$			
x	-1	0	1
y	$\frac{1}{3}$	1	3

$$y = \frac{22x + 27}{15}$$

x	0	-1
y	$\frac{9}{5}$	$\frac{1}{3}$



$A(-1; \frac{1}{3})$; $B(\approx 1,2; \approx 3,4)$ — точки пересечения графиков функций.

Значит: $-1; \approx 1,2$ — корни уравнения $5 \cdot 3^{x+1} = 22x + 27$.

Ответ: $-1; \approx 1,2$.

Задача 4. Решить неравенство:

а) $2^{x-1} < 8$

Решение:

Представим число 8 в виде степени с основанием 2:
 $8 = 2^3$. Неравенство принимает вид:

$$2^{x-1} < 2^3.$$

Функция $y = 2^t$ возрастающая, большему значению функции соответствует большее значение аргумента, значит: $x - 1 < 3$.

Из этого неравенства находим: $x < 4$.

Множество решений неравенства $2^{x-1} < 8$: $(-\infty; 4)$.

Ответ: $(-\infty; 4)$.

б) $\frac{0,5}{(\sqrt{2})^{3x-4}} > 0$

Решение:

Представим правую и левую части неравенства в виде степеней с основанием 2:

$$4 = 2^2;$$

$$\begin{aligned} \frac{0,5}{(\sqrt{2})^{3x-4}} &= 2^{-1} \cdot 2^{-\frac{1}{2}(3x-4)} = 2^{-1} \cdot 2^{-\frac{3}{2}x+2} = 2^{-1} \cdot 2^{-1,5x} \cdot 2^2 = \\ &= 2^1 \cdot 2^{-1,5x} = 2^{-1,5x+1} \end{aligned}$$

Неравенство принимает вид:

$$2^{-1,5x+1} > 2^2$$

Функция $y = 2^t$ возрастающая, большему значению функции соответствует большее значение аргумента, значит: $-1,5x + 1 > 2$.

Из этого неравенства находим: $x < -\frac{2}{3}$.

Значит, множество решений неравенства

$$\frac{0,5}{(\sqrt{2})^{3x-4}} > 0: \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$.

$$в) 0,25^x > 2^{\frac{2x}{x+1}}$$

Решение:

Представим правую и левую части неравенства в виде степеней с основанием 4:

$$0,25^x = \left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^{-x};$$

$$2^{\frac{2x}{x+1}} = (2^2)^{\frac{x}{x+1}} = 4^{\frac{x}{x+1}}$$

Неравенство принимает вид: $4^{-x} > 4^{\frac{x}{x+1}}$.

Функция $y = 4^t$ возрастающая, большему значению функции соответствует большее значение аргумента, значит:

$$-x > \frac{x}{x+1}$$

Решив полученное неравенство методом интервалов, получим: $x \in (-\infty; -2] \cup (-1; 0)$.

Множество решений неравенства $0,25^x > 2^{\frac{2x}{x+1}}$:

$$(-\infty; -2] \cup (-1; 0)$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup (-1; 0)$.

$$г) 2^{2x+2} > 6^x + 2 \cdot 3^{2x+2}$$

Решение:

Так как $3^{2x} > 0$ при любом значении x , то, разделив обе части неравенства на 3^{2x} , получим равносильное неравенство:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \cdot 4 > \left(\frac{2}{3}\right)^x - 18 \text{ или } 4\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 18 > 0$$

Введем новую переменную, обозначив $\left(\frac{2}{3}\right)^x$ через y :

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

Получим квадратное неравенство: $4y^2 - y - 18 > 0$.

Из этого неравенства находим, что $y \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{9}{4}; +\infty\right)$.

По смыслу замены $y > 0$, поэтому остается решить неравенство:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{9}{4}$$

Представим неравенство в виде:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

Функция $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ убывающая, большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента, значит: $x < -2$.

Множество решений неравенства $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$: $(-\infty; -2)$. Значит, множество решений исходного неравенства $2^{2x+2} > 6^x + 2 \cdot 3^{2x+2}$: $(-\infty; -2)$.

Ответ: $(-\infty; -2)$.

Задача 5. Решить графически неравенство $2^{x+1} > 3x + 2$.

Решение:

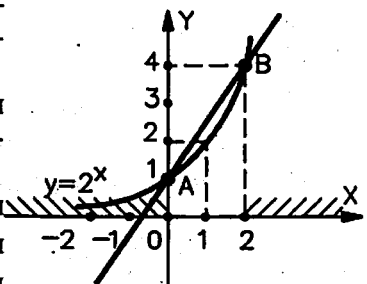
Разделим обе части неравенства на 2. Неравенство принимает вид:

$$2^x > 1,5x + 1.$$

Построим в одной системе координат графики функций $y = 2^x$ и $y = 1,5x + 1$.

$A(0; 1)$; $B(2; 4)$ — точки пересечения графиков функций $y = 2^x$ и $y = 1,5x + 1$.

На интервалах $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$ график функции $y = 1,5x + 1$ находится под графиком функции $y = 2^x$.



Значит, множество решений неравенства $2^x > 1,5x + 1$ и исходного неравенства $2^{x+1} > 3x + 2$:

$$(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

XXIII. Логарифмы. Логарифмическая функция. Логарифмические уравнения и неравенства

Логарифмом положительного числа x по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести число a , чтобы получить x :

$$a^{\log_a x} = x, (a > 0; a \neq 1)$$

Свойства логарифмов:

- 1) если $a > 1$, то для $x > 1$ $\log_a x > 0$ и для $0 < x < 1$ $\log_a x < 0$;
- 2) если $0 < a < 1$, то для $x > 1$ $\log_a x < 0$ и для $0 < x < 1$ $\log_a x > 0$;
- 3) если $a > 0, a \neq 1$, то $\log_a 1 = 0$;
- 4) если $a > 0, a \neq 1$, то $\log_a a = 1$;
- 5) если $x_1 = x_2$, то $\log_a x_1 = \log_a x_2, a > 0; a \neq 1$;
- 6) логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей:
 $\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2; a > 0; a \neq 1; x_1 > 0; x_2 > 0$;
- 7) логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя:
 $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2; a > 0; a \neq 1; x_1 > 0; x_2 > 0$;
- 8) логарифм степени равен логарифму основания степени, умноженному на ее показатель:
 $\log_a x^b = b \cdot \log_a x; a > 0; a \neq 1; x > 0$;
- 9) формула перехода к новому основанию:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}; a > 0; a \neq 1; b > 0; b \neq 1; x > 0$$

- 10) значение логарифма не изменится, если число, от которого берется логарифм, и основание логарифма возвести в одну и ту же действительную степень:

$$\log_a x = \log_a^k x^k; a > 0; a \neq 1; x > 0,$$

k — любое действительное число.

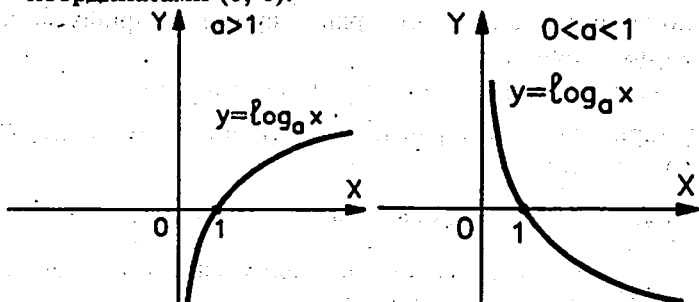
Десятичный логарифм — логарифм, основание которого равно 10. Обозначение: $\log_{10} x = \lg x$.

Натуральный логарифм — логарифм, основание которого равно числу e . Обозначение: $\log_e x = \ln x$.

Логарифмическая функция — функция вида: $y = \log_a x$, где $a > 0; a \neq 1$.

Свойства логарифмической функции:

- 1) область определения — множество положительных чисел;
- 2) множество значений — множество всех действительных чисел;
- 3) при $a > 1$ функция возрастает на всей области определения; $0 < a < 1$ функция убывает на всей области определения;
- 4) функция не является ни четной, ни нечетной;
- 5) функции $y = \log_a x$ и $y = a^x$ взаимнообратные функции;
- 6) график функции $y = \log_a x$ проходит через точку с координатами $(1; 0)$.



Логарифмические уравнения — уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма. Простейшими логарифмическими уравнениями являются уравнения вида $\log_a x = b$ или уравнения, сводящиеся к этому виду.

При решении логарифмических уравнений часто переходят к неравносильным уравнениям, поэтому необходимо проверить полученные корни подстановкой в данное уравнение.

Логарифмические неравенства — неравенства, содержащие переменную под знаком логарифма.

Решение логарифмических уравнений и неравенств основано на свойствах логарифмов и логарифмической функции.

Задача 1. Вычислить:

а) $\log_5 125 \cdot \log_3 9$

Решение:

Используя свойства логарифмов, вычислим значение данного выражения:

$$\log_5 125 \cdot \log_3 9 = \log_5 5^3 \cdot \log_3 3^2 = 3 \cdot \log_5 5 \cdot 2 \cdot \log_3 3 = 3 \cdot 2 = 6$$

Ответ: 6.

б) $\log_{0,5} \frac{1}{2}$

Решение:

Используя свойства логарифмов, вычислим значение данного выражения:

$$\log_{0,5} \frac{1}{2} = \log_{0,5} 0,5 = 1$$

Ответ: 1.

в) $\log_2 25$

Решение:

Используя свойства логарифмов, вычислим значение данного выражения:

$$\log_2 25 = \log_2 5^2 = 2 \log_2 5.$$

Ответ: $2 \log_2 5$.

г) $\log_3 18$ **Решение:**

Используя свойства логарифмов, вычислим значение данного выражения:

$$\log_3 18 = \log_3 (9 \cdot 2) = \log_3 9 + \log_3 2 = \log_3 3^2 + \log_3 2 = 2 + \log_3 2$$

Ответ: $2 + \log_3 2$.д) $\log_2 1,25$ **Решение:**

$$\log_2 1,25 = \log_2 \frac{5}{4} = \log_2 5 - \log_2 4 = \log_2 5 - \log_2 2^2 = \log_2 5 - 2$$

Ответ: $\log_2 5 - 2$.**Задача 2.** Найти x :

$$\text{а) } \log_{3\sqrt{3}} (27 \cdot \sqrt[3]{3}) = x$$

Решение:

Представим основание логарифма и логарифмируемое число в виде степени с основанием 3:

$$3\sqrt{3} = 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}}; \quad 27 \sqrt[3]{3} = 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{10}{3}}$$

Возведем основание логарифма и логарифмируемое число в $\frac{4}{5}$ степень и получим:

$$\log_{3^{\frac{3}{2}}} \left(3^{\frac{10}{3}} \right) = \log_3 \left(3^{\frac{10}{3} \cdot \frac{4}{5}} \right) = \log_3 3^{\frac{8}{3}} = \frac{8}{3} \cdot \log_3 3 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

Ответ: $x = 2\frac{2}{3}$.

$$\text{б) } \log_4 \sqrt[3]{32} (8 \cdot \sqrt[8]{2}) = x$$

Решение:

Представим основание логарифма и логарифмируемое число в виде степени с основанием 2:

$$4\sqrt[3]{32} = 2^2 \cdot (2^5)^{\frac{1}{3}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{5}{3}} = 2^{\frac{11}{3}}$$

$$8\sqrt[8]{2} = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{25}{8}}$$

Возведем основание логарифма и логарифмируемое число в степень $\frac{3}{11}$ и получим:

$$\log_{2^{\frac{11}{3}}} \left(2^{\frac{25}{8}} \right) = \log_2 \left(2^{\frac{25}{8} \cdot \frac{3}{11}} \right) = \log_2 2^{\frac{75}{88}} = \frac{75}{88} \cdot \log_2 2 = \frac{75}{88}$$

Ответ: $x = \frac{75}{88}$.

в) $\log_{125 \sqrt[3]{25}} x = -\frac{6}{11}$

Решение:

По определению логарифма:

$$(125 \sqrt[3]{25})^{-\frac{6}{11}} = x$$

Преобразуем левую часть равенства:

$$(125 \sqrt[3]{25})^{-\frac{6}{11}} = \left(5^3 \cdot 5^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{6}{11}} = \left(5^{\frac{11}{3}} \right)^{-\frac{6}{11}} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

Получили: $x = \frac{1}{25}$

Ответ: $x = \frac{1}{25}$.

г) $\log_x (64 \sqrt[3]{4}) = 1\frac{2}{3}$

Решение:

По определению логарифма:

$$x^{1\frac{2}{3}} = 64 \cdot \sqrt[3]{4}$$

Преобразуем правую часть равенства:

$$64 \cdot \sqrt[3]{4} = 2^6 \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{20}{3}}$$

Получили: $x^{\frac{5}{3}} = 2^{\frac{20}{3}}$.

Возведем обе части равенства в степень $\frac{3}{5}$ и получим:

$$x = 2^4 = 16$$

Ответ: $x = 16$.

Задача 3. Решить уравнение:

а) $\log_{0,8} (5 + 2x) = 1$

Решение:

Представим 1 в виде логарифма с основанием 0,8.
Уравнение принимает вид:

$$\log_{0,8} (5 + 2x) = \log_{0,8} 0,8$$

Перейдем к линейному уравнению: $5 + 2x = 0,8$.

Из этого уравнения получаем: $x = -2,1$.

Проверим полученный корень:

при $x = -2,5$ $(5 + 2x) > 0$. Значит, число $-2,1$ является корнем уравнения $\log_{0,8} (5 + 2x) = 1$.

Ответ: $-2,1$.

б) $\lg (x^2 + 2x - 7) = \lg (x - 1)$

Решение:

Перейдем к уравнению $x^2 + 2x - 7 = x - 1$. Из этого уравнения получим:

$$x_1 = -3; x_2 = 2$$

Проверим полученные корни:

при $x = -3$ $(x^2 + 2x - 7) < 0$ и $(x - 1) < 0$, значит, -3 не является корнем исходного уравнения:

при $x = 2$ $(x^2 + 2x - 7) > 0$ и $(x - 1) > 0$, значит, 2 является корнем исходного уравнения.

Ответ: 2.

в) $\log_2^2 x + \log_2 x - 2 = 0$

Решение:

Введем новую переменную, обозначив $\log_2 x$ через y :

$$y = \log_2 x$$

Получим квадратное уравнение:

$$y^2 + y - 2 = 0$$

Из этого уравнения находим:

$$y_1 = 1; y_2 = -2$$

Из уравнения $\log_2 x = 1$ находим: $x = 2$;

Из уравнения $\log_2 x = -2$ находим $x = \frac{1}{4}$.

Значит, числа 2 и $\frac{1}{4}$ являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{4}$; 2.

$$г) 0,5 \log_5 (x - 5) - \log_5 \sqrt{x - 2} = \log_5 \frac{25}{2} - 2$$

Решение:

Используя свойства логарифмов, преобразуем правую и левую части уравнения:

$$\begin{aligned} 0,5 \log_5 (x - 5) - \log_5 \sqrt{x - 2} &= \log_5 (x - 5)^{0,5} - \log_5 \sqrt{x - 2} = \\ &= \log_5 \frac{\sqrt{x - 5}}{\sqrt{x - 2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_5 \frac{25}{2} - 2 &= \log_5 \frac{25}{2} - 2 \log_5 5 = \log_5 \frac{25}{2} - \log_5 5^2 = \log_5 \frac{25}{2 \cdot 25} = \\ &= \log_5 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Уравнение принимает вид:

$$\log_5 \frac{\sqrt{x - 5}}{\sqrt{x - 2}} = \log_5 \frac{1}{2}$$

Перейдем к уравнению:

$$\frac{\sqrt{x - 5}}{\sqrt{x - 2}} = \frac{1}{2}$$

Из этого уравнения находим: $x = 6$.

Проверим полученный корень:

$$0,5 \log_5 (6 - 5) - \log_5 \sqrt{6 - 2} = \log_5 \frac{25}{2} - 2 \text{ — верное равенство.}$$

Ответ: 6.

Задача 4. Решить неравенство:

а) $\lg(2x^2 + 4x + 10) > \lg(x^2 - 4x + 3)$

Решение:

Чтобы решить данное неравенство, необходимо перейти к равносильной системе неравенства:

$$\begin{cases} 2x^2 + 4x + 10 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \\ 2x^2 + 4x + 10 > x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

Из этой системы находим:

$$x \in (-\infty; -7) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -7) \cup (-1; 1) \cup (3; +\infty)$.

б) $\log_{0,7} x > 5$

Решение:

Представим число 5 в виде логарифма с основанием 0,7:
 $5 = \log_{0,7} 0,7^5$.

Неравенство принимает вид: $\log_{0,7} x > \log_{0,7} 0,7^5$.

Полученное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x < 0,7^5 \\ x > 0 \end{cases}$$

Из этой системы находим: $x \in (0; 0,16807)$.

Ответ: $(0; 0,16807)$.

в) $\log_3^2 x + \log_3 x^3 < 0$

Решение:

Преобразуем левую часть неравенства:

$$\log_3^2 x + 3\log_3 x < 0$$

Введем новую переменную y , обозначив $\log_3 x$ через y :
 $y = \log_3 x$.

Неравенство принимает вид: $y^2 + 3y < 0$.

Из полученного квадратного неравенства находим:

$$-3 < y < 0$$

Так как $y = \log_3 x$, то $-3 < \log_3 x < 0$.

Решим полученное неравенство:

$$-3 < \log_3 x < 0;$$

$$\log_3 3^{-3} < \log_3 x < \log_3 3^0;$$

$$\frac{1}{27} < x < 1;$$

Значит, множество решений неравенства: $\left(\frac{1}{27}; 1\right)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{27}; 1\right)$.

$$\text{г) } \frac{x-4}{\log_2(x-2)} > 0$$

Решение:

Неравенство $\frac{x-4}{\log_2(x-2)} > 0$ равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x-4 > 0 \\ \log_2(x-2) > 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x-4 < 0 \\ \log_2(x-2) < 0 \end{cases}$$

Решим каждую систему неравенств:

$$1) \begin{cases} x-4 > 0 \\ \log_2(x-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 > 0 \\ x-2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4$$

Множество решений первой системы: $(4; +\infty)$.

$$2) \begin{cases} x-4 < 0 \\ \log_2(x-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ 0 < x-2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ 2 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 3$$

Множество решений второй системы: $(2; 3)$.

Объединим полученные множества и найдем множество решений неравенства $\frac{x-4}{\log_2(x-2)} > 0$:

$$(2; 3) \cup (4; +\infty)$$

Ответ: $(2; 3) \cup (4; +\infty)$.

XXIV. Первообразная. Интеграл. Вычисление площадей плоских фигур

Первообразная

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Основное свойство первообразной:

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на заданном промежутке, то у функции $f(x)$ бесконечно много первообразных, и все эти первообразные имеют вид $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Правила вычисления первообразных:

- 1) первообразная суммы равна сумме первообразных, то есть если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $H(x)$ — первообразная для $h(x)$, то $F(x) + H(x)$ — первообразная для $f(x) + h(x)$
- 2) постоянный множитель можно выносить за знак первообразной, то есть если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ и k — постоянная, то $kF(x)$ — первообразная для $kf(x)$.
- 3) если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ и $k \neq 0$, b — постоянные, то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ — первообразная для $f(kx + b)$.

Таблица первообразных для некоторых функций

Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$ для $f(x)$
k	kx
x^n , где $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$

Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$ для $f(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$

Неопределенный интеграл

Пусть дана функция $f(x)$; если эта функция имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесчисленное множество первообразных, причем любые две из них отличаются друг от друга только постоянным слагаемым. Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется выражение $F(x) + C$, то есть совокупность всех первообразных от данной функции $f(x)$. Обозначение: $\int f(x) dx = F(x) + C$, где $f(x)$ —

подынтегральная функция, $f(x) dx$ — подынтегральное выражение, $F(x)$ — одна из первообразных функций $f(x)$, C — произвольная постоянная.

Определенный интеграл

Введем понятие определенного интеграла с помощью формулы Ньютона-Лейбница. Пусть дана функция $y = f(x)$, непрерывная на закрытом интервале $[a; b]$. Интегралом от a до b функции f называется приращение первообразной F этой функции, то есть

$$\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$$

Основные правила вычисления определенного интеграла:

- 1) постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \text{ где } k — \text{ постоянная;}$$

- 2) интеграл суммы равен сумме интегралов:

$$\int_a^b (f(x) + h(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b h(x) dx$$

- 3) перестановка пределов интегрирования приводит к перемене знака:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

- 4) справедлива следующая формула замены переменных:

$$\int_a^b f(kx + p) dx = \frac{1}{k} \int_{ka+p}^{kb+p} f(t) dt$$

- 5) имеют место следующие равенства:

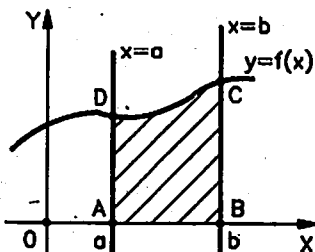
$$\int_a^a f(x) dx = 0;$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Криволинейная трапеция — фигура, ограниченная графиком неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции f , отрезком оси Ox и отрезками прямых $x = a$ и $x = b$.

Площадь криволинейной трапеции находится по формуле:

$$S_{\text{кр.тр.}} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$



Задача 1. Найдите одну из первообразных для функции f на R :

а) $f(x) = x - 3$

Решение:

$R(x) = \frac{x^2}{2} - 3x$ — одна из первообразных для функции, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 3x \right)' = x - 3$$

$$б) f(x) = 1 - 2x + x^2$$

Решение:

$R(x) = 5 + x - x^2 + \frac{x^3}{3}$ — одна из первообразных для функции $f(x) = 1 - 2x + x^2$, так как

$$F'(x) = \left(5 + x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right)' = 1 - 2x + \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = 1 - 2x + x^2$$

$$в) f(x) = x^3 + \sin x$$

Решение:

$R(x) = \frac{x^4}{4} - \cos x + 2$ — одна из первообразных для функции $f(x) = x^3 + \sin x$, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} - \cos x + 2 \right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 - (-\sin x) + 0 = x^3 + \sin x.$$

Задача 2. Найдите первообразную F , график которой проходит через точку A , для функции f :

$$а) f(x) = 3x + 1; A(1; 1)$$

Решение:

Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x) = 3x + 1$, график которой проходит через точку A .

$$R(x) = 3 \cdot \frac{x^2}{2} + x + C$$

Так как график функции $F(x)$ проходит через точку $A(1; 1)$, то:

$$1 = \frac{3}{2} \cdot 1^2 + 1 + C$$

$$\text{Откуда получаем: } C = -\frac{2}{2}$$

$F(x) = 1,5x^2 + x - 1,5$ — первообразная для функции $f(x) = 3x + 1$, график которой проходит через точку $A(1; 1)$.

Ответ: $F(x) = 1,5x^2 + x - 1,5$.

$$б) f(x) = \frac{1}{2} \sin x; A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$$

Решение:

Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$, график которой проходит через точку A .

$$F(x) = -\frac{1}{2} \cos x + C.$$

Так как график функции $F(x)$ проходит через точку $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$, то:

$$1 = -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} + C$$

Откуда получаем: $C = 1$.

$F(x) = -\frac{1}{2} \cos x + 1$ — первообразная для функции $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$, график которой проходит через точку $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$.

Ответ: $F(x) = -\frac{1}{2} \cos x + 1$.

Задача 3. Найти интеграл:

а) $\int x^4 dx$

Решение:

Так как $x^4 = \left(\frac{x^5}{5}\right)'$, то функция $F(x) = \frac{x^5}{5}$ является одной из первообразных для функции $f(x) = x^4$. Поэтому

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$$

Ответ: $\frac{x^5}{5} + C$.

$$б) \int e^{2x} dx$$

Решение:

Так как $e^{2x} = \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'$, то функция $F(x) = \frac{e^{2x}}{2}$ является одной из первообразных для функции $f(x) = e^{2x}$. Поэтому

$$\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

Ответ: $\frac{e^{2x}}{2} + C$.

Задача 4. Вычислить интегралы:

$$а) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

Решение:

Так как $-\cos x$ является одной из первообразных для функции $\sin x$, то

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = -0 + 1 = 1$$

Ответ: 1.

$$б) \int_1^2 x^2 dx$$

Решение:

Так как $\frac{x^3}{3}$ является одной из первообразных для функции x^2 , то

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

Ответ: $2\frac{1}{3}$.

$$в) \int_1^2 (4x^3 - 6x^2 + 2x + 1) dx$$

Решение:

Используя формулу Ньютона-Лейбница и основные правила вычисления определенного интеграла, вычислим данный интеграл:

$$\begin{aligned} \int_1^2 (4x^3 - 6x^2 + 2x + 1) dx &= (x^4 - 2x^3 + x^2 + x) \Big|_1^2 = \\ &= (2^4 - 2 \cdot 2^3 + 2^2 + 2) - (1^4 - 2 \cdot 1^3 + 1^2 + 1) = 6 - 1 = 5 \end{aligned}$$

Ответ: 5.

$$г) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \sin x \right) dx$$

Решение:

Используя формулу Ньютона-Лейбница и основные правила вычисления определенного интеграла, вычислим данный интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \sin x \right) dx &= (\operatorname{tg} x - \cos x) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} \right) - \left(\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \end{aligned}$$

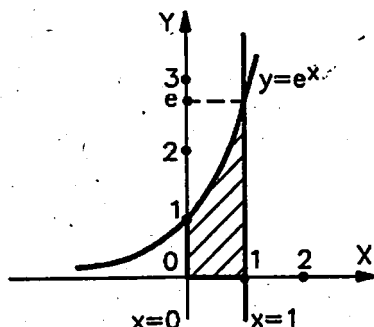
Ответ: 2.

Задача 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$а) y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1$$

Решение:

Изобразим фигуру, площадь которой необходимо вычислить.



Так как изображенная фигура является криволинейной трапецией, то

$$S_{\phi} = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1 \text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: $S_{\phi} = e - 1$ (кв. ед.).

б) $y = 1 - x$ и $y = 3 - 2x - x^2$

Решение:

Изобразим фигуру, площадь которой необходимо вычислить.

Графиком функции $y = 1 - x$ является прямая. Для того, чтобы построить прямую, достаточно найти координаты двух точек:

x	0	1
y	1	0

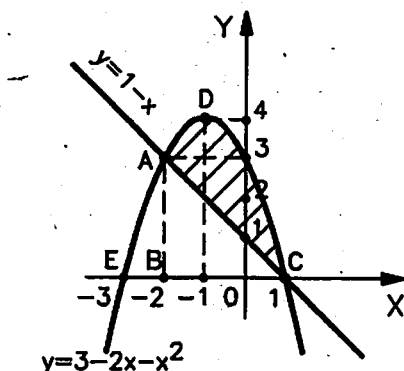
Графиком функции $y = 3 - 2x - x^2$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Для построения параболы найдем координаты вершины параболы и координаты точек пересечения параболы с осью Ox :

точка $D(-1; 4)$ — вершина параболы;

точки $E(-3; 0)$ и $C(1; 0)$ — точки пересечения параболы с Ox .

Найдем координаты точек пересечения параболы и прямой:

$$3 - 2x - x^2 = 1 - x \text{ при } x = -2; x = 1; A(-2; 3); C(1; 0)$$



Заштрихованная фигура — фигура, площадь которой необходимо найти. Искомая площадь равна разности площадей криволинейной трапеции $BADC$ и треугольника ABC .

$$S_{\Phi} = S_{BADC} - S_{ABC}$$

$$S_{BADC} = \int_{-2}^1 (3 - 2x - x^2) dx = 9$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = 4,5$$

$$S_{\Phi} = 9 - 4,5 = 4,5 \text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: $S_{\Phi} = 4,5$ (кв. ед.).

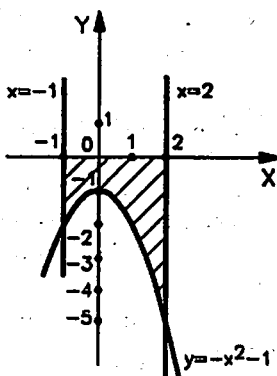
$$\text{в) } y = -x^2 - 1; y = 0; x = -1; x = 2$$

Решение:

Изобразим фигуру, площадь которой необходимо вычислить.

Графиком функции $y = -x^2 - 1$ является парабола, ветви которой направлены вниз; точка $E(0; -1)$ — вершина параболы.

Заштрихованная фигура — фигура, площадь которой необходимо найти. Эта фигура симметрична относительно Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = -(-x^2 - 1)$; $y = 0$; $x = -1$; $x = 2$. Значит, их площади равны.



$$S_{\Phi} = \int_{-1}^2 [1 - (-x^2 - 1)] dx = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^2 =$$

$$= \frac{2^3}{3} + 2 - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 1 \right) = \frac{8}{3} + 2 + \frac{1}{3} + 1 = 6 \text{ (кв. ед.)}$$

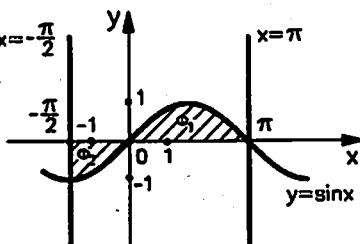
Ответ: $S_{\Phi} = 6$ (кв. ед.).

г) $y = \sin x$; $y = 0$; $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = \pi$

Решение:

Изобразим фигуру, площадь которой необходимо вычислить.

Заштрихованная фигура — фигура, площадь которой необходимо вычислить. Разобьем данную фигуру на две фигуры: Φ_1 и Φ_2 .



Φ_1 — криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = \sin x$, $y = 0$; $x = 0$; $x = \pi$. Значит, ее площадь равна:

$$S_{\Phi_1} = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2 \text{ (кв. ед.)}$$

Φ_2 — фигура, симметричная криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = -\sin x$, $y = 0$; $x = -\frac{\pi}{2}$; $x = 0$. Значит, ее площадь равна:

$$S_{\Phi_2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (-\sin x) dx = \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = 1 \text{ (кв. ед.)}$$

Искомая площадь равна сумме площадей S_{Φ_1} и S_{Φ_2} :

$$S_{\Phi} = S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2} = 2 + 1 = 3 \text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: $S_{\Phi} = 3$ (кв. ед.).

Тригонометрия

I. Тригонометрические функции и их свойства

1. Связь между радианной и градусной мерами угла

$$n^{\circ} = \frac{\pi \cdot n}{180} \text{ рад} \approx 0,01745 n \text{ рад};$$

$$\alpha \text{ рад} = \left(\frac{180 \cdot \alpha}{\pi} \right)^{\circ} \approx 57,296 \alpha^{\circ};$$

$$1^{\circ} \approx 0,01745 \text{ рад}; 1 \text{ рад} \approx 57^{\circ}17'44'', 8.$$

2. Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

3. Формулы приведения

Функция	Значение аргумента				
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\pi \pm \alpha$	$\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$2\pi \pm \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$
ctg	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$

4. Формулы сложения

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y;$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y;$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y;$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y,$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y};$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}.$$

5. Преобразование сумм в произведение

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2};$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y};$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}.$$

6. Кратные аргументы

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x;$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x};$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x};$$

7. Половинный аргумент

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}};$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x};$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

Задача 1. Упростите:

$$а) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha) + \operatorname{tg}(\pi - \alpha) - \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right).$$

Решение:

Упростим выражение, используя формулы приведения:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha) + \operatorname{tg}(\pi - \alpha) - \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \\ = \cos \alpha + \cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha = 2\cos \alpha \end{aligned}$$

$$б) (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$$

Решение:

$$\begin{aligned} (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 &= \sin^2 \alpha + 2\cos \alpha \cdot \sin \alpha + \\ &+ \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2\cos \alpha \cdot \sin \alpha + \cos^2 \alpha = 2\sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha = \\ &= 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2. \end{aligned}$$

$$в) \frac{1}{2} \cdot (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha.$$

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2} \cdot (\sin^4 \alpha + \\ &+ 2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha - 2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha) + \\ &+ \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \cdot (\sin^4 \alpha + 2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) - \\ &- \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$г) \cos \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg} \alpha) - \sin \alpha \cdot (1 + \operatorname{ctg} \alpha)$$

Решение:

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg} \alpha) - \sin \alpha \cdot (1 + \operatorname{ctg} \alpha) &= \\ = \cos \alpha \cdot \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha} - \sin \alpha \cdot \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} &= \\ = (\cos \alpha + \sin \alpha) - (\sin \alpha + \cos \alpha) &= 0. \end{aligned}$$

$$д) \frac{1 - 4\sin^2 \alpha}{4\cos^2 \alpha - 3}$$

Решение:

$$\frac{1 - 4\sin^2 \alpha}{4\cos^2 \alpha - 3} = \frac{(1 - \sin^2 \alpha) - 3\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - (3 - 3\cos^2 \alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha - 3\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - 3\sin^2 \alpha} = 1$$

$$е) \cos^2\left(\frac{7\pi}{8} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)$$

Решение:

Упростим выражение, используя формулы приведения и основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1:$$

$$\begin{aligned} & \cos^2\left(\frac{7\pi}{8} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right) = \\ & = \cos^2\left(\pi - \left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{3\pi}{8} + \alpha\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right) = \\ & = \cos^2\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right) = \\ & = \cos^2\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right) = 1. \end{aligned}$$

Задача 2. Доказать тождество

$$а) \cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Решение:

Рассмотрим левую часть равенства и преобразуем ее, используя основные тригонометрические тождества:

$$\begin{aligned} & \cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \\ & + (\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha) = 1 + \sin^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \\ & = 1 + \sin^2 \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Правая и левая часть данного равенства являются тождественно равными выражениями, следовательно, данное равенство является тождеством.

$$\begin{aligned} б) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(\pi - \alpha) + \\ + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

Решение:

Рассмотрим левую часть равенства и преобразуем ее, используя формулы приведения:

$$\begin{aligned}
 & \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(\pi - \alpha) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \\
 & = -\cos \alpha \cdot (-\operatorname{tg} \alpha) - \sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \\
 & = \sin \alpha - \sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha.
 \end{aligned}$$

Правая и левая часть данного равенства — тождественно равные выражения, следовательно, данное равенство является тождеством.

$$в) \frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = 8\cos 2x$$

Решение:

Рассмотрим левую часть равенства и преобразуем ее, используя формулы сложения, кратных аргументов и формулу разности квадратов:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x} = \frac{(\sin 3x \cdot \cos x)^2 - (\cos 3x \cdot \sin x)^2}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \\
 & = \frac{(\sin 3x \cdot \cos x - \cos 3x \cdot \sin x) \cdot (\sin 3x \cdot \cos x + \cos 3x \cdot \sin x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \\
 & = \frac{\sin 2x \cdot \sin 4x}{\left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x\right)^2} = \frac{\sin 2x \cdot \sin 4x}{\frac{1}{4} \cdot \sin^2 2x} = \frac{4\sin 4x}{\sin 2x} = \\
 & = \frac{4 \cdot 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x}{\sin 2x} = 8\cos 2x.
 \end{aligned}$$

Правая и левая часть данного равенства — тождественно равные выражения, следовательно, данное равенство является тождеством.

Задача 3. Вычислить

$$а) \frac{\sin^3(-30^\circ) - 2\operatorname{tg}(-30^\circ) - 1}{2 + \operatorname{tg}(-45^\circ) + 4\cos^2(-60^\circ)}$$

Решение:

Зная, что

$$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg}(-30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{tg}(-45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1;$$

$$\cos^2(-60^\circ) = \cos^2 60^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

вычислим значение данного выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^3(-30^\circ) - 2 \operatorname{tg}(-30^\circ) - 1}{2 + \operatorname{tg}(-45^\circ) + 4 \cos^2(-60^\circ)} &= \frac{-\frac{1}{8} - 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 1}{2 + (-1) + 4 \cdot \frac{1}{4}} = \\ &= \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\frac{1}{8}}{2 - 1 + 1} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{9}{8}}{2} = \frac{16\sqrt{3} - 27}{24} : 2 = \frac{16\sqrt{3} - 27}{48}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{16\sqrt{3} - 27}{48}.$

б) $\operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ)$, если $\sin \alpha = \frac{7}{25}$, $0 < \alpha < 90^\circ$

Решение:

Преобразуем $\operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ)$, применив формулу сложения:

$$\operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{1 + \operatorname{tg} \alpha}.$$

Так как $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, то нам необходимо найти значение $\cos \alpha$. Из основного тригонометрического тождества $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ следует

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Так как в нашем случае $0 < \alpha < 90^\circ$, то

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha},$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{49}{625}} = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25}.$$

Вычислим:

$$\operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ) = \frac{\frac{7}{24} - 1}{1 + \frac{7}{24}} = -\frac{17}{24} : \frac{31}{24} = -\frac{17}{31}.$$

Ответ: $-\frac{17}{31}$.

$$\text{в)} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \sin 1,5\pi}{\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} 2\pi \right) \cdot \cos \frac{\pi}{6}}.$$

Решение:

Зная, что

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1;$$

$$\sin 1,5\pi = \sin \frac{3\pi}{2} = -1;$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{tg} 2\pi = 0;$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

вычислим:

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \sin 1,5\pi}{\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} 2\pi \right) \cdot \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{2 \cdot 1 - (-1)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 0 \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2+1}{\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3 \cdot 6}{3} = 6.$$

Ответ: 6.

Задача 4. Преобразуем в произведение

а) $\cos \alpha + \sin 2\alpha - \cos 3\alpha$.

Решение:

При решении используем формулы преобразования сумм в произведение.

$$\cos \alpha + \sin 2\alpha - \cos 3\alpha = (\cos \alpha - \cos 3\alpha) + \sin 2\alpha =$$

$$= -2 \cdot \sin \frac{\alpha - 3\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + 3\alpha}{2} + \sin 2\alpha =$$

$$= -2 \cdot \sin(-\alpha) \cdot \sin 2\alpha + \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha + \sin 2\alpha =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \left(\sin \alpha + \frac{1}{2} \right) = 2 \cdot \sin 2\alpha \cdot \left(\sin \alpha + \sin \frac{\pi}{6} \right) = \\
 &= 2 \cdot \sin 2\alpha \cdot 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \frac{\pi}{6}}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \frac{\pi}{6}}{2} = \\
 &= 4 \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12} \right).
 \end{aligned}$$

Ответ: $4 \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12} \right).$

б) $\sin 3\alpha + \sin 7\alpha + \sin 10\alpha.$

Решение:

При решении используем формулы преобразования сумм в произведение и формулу кратных аргументов

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

$$\sin 3\alpha + \sin 7\alpha + \sin 10\alpha = 2 \cdot \sin \frac{3\alpha + 7\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha - 7\alpha}{2} +$$

$$+ 2 \cdot \sin 5\alpha \cdot \cos 5\alpha = 2 \cdot \sin 5\alpha \cdot \cos (-2\alpha) +$$

$$+ 2 \cdot \sin 5\alpha \cdot \cos 5\alpha = 2 \cdot \sin 5\alpha \cdot \cos 2\alpha +$$

$$+ 2 \cdot \sin 5\alpha \cdot \cos 5\alpha = 2 \cdot \sin 5\alpha \cdot (\cos 2\alpha + \cos 5\alpha) =$$

$$= 2 \cdot \sin 5\alpha \cdot 2 \cdot \cos \frac{2\alpha + 5\alpha}{2} \cdot \cos \frac{2\alpha - 5\alpha}{2} =$$

$$= 4 \cdot \sin 5\alpha \cdot \cos \frac{7\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2}.$$

Ответ: $4 \sin 5\alpha \cdot \cos 3,5\alpha \cdot \cos 1,5\alpha.$

II. Четность. Нечетность. Периодичность тригонометрических функций. Построение графиков тригонометрических функций

Нечетная функция — функция $f(x)$, обладающая двумя свойствами:

- 1) ее область определения симметрична относительно нуля;
- 2) для любого значения x из области определения выполняется равенство:

$$f(-x) = -f(x).$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Основные тригонометрические функции синус, тангенс и котангенс являются нечетными функциями.

Четная функция — функция $f(x)$, обладающая двумя свойствами:

- 1) ее область определения симметрична относительно нуля;
- 2) для любого x из области определения выполняется равенство:

$$f(-x) = f(x).$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат. Основная тригонометрическая функция косинус является четной функцией.

Функция $f(x)$ называется *периодической* с периодом T , где T — некоторое действительное число, отличное от нуля, если:

- 1) для любого значения аргумента « x » из области определения функции значение аргумента « $x + T$ » и « $x - T$ » также принадлежит области определения функции;
- 2) при любом x из области определения функции выполняется равенство:

$$f(x \pm T) = f(x).$$

Наименьший положительный период функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ равен 2π .

Наименьший положительный период функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ равен π .

Задача 1. Вычислить:

$$a) 4 \cdot \cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \cdot \sin\frac{3\pi}{2}.$$

Решение:

Найдем значение каждой тригонометрической функции.

Так как функция косинус четная с наименьшим положительным периодом 2π , то

$$\cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right) = \cos\frac{8\pi}{3} = \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Так как функция котангенс нечетная, то

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -(-1) = 1.$$

Найдем значение синуса:

$$\sin\frac{3\pi}{2} = -1.$$

Получим:

$$4 \cdot \cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \cdot \sin\frac{3\pi}{2} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 \cdot (-1) = 2.$$

Ответ: 2.

$$\text{б) } 5 \cdot \operatorname{tg}^3\left(-\frac{10}{3}\pi\right) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{19}{6}\pi\right).$$

Решение:

Вычислим значение данного выражения, используя свойства тригонометрических функций.

$$\begin{aligned} 5 \cdot \operatorname{tg}^3\left(-\frac{10}{3}\pi\right) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{19}{6}\pi\right) &= -5 \cdot \operatorname{tg}^3\frac{10\pi}{3} - \operatorname{ctg}\frac{19\pi}{6} = \\ &= -5 \cdot \operatorname{tg}^3\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{ctg}\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -5 \cdot \sqrt{3}^3 - \sqrt{3} = \\ &= -5 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} = -16 \cdot \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $-16 \cdot \sqrt{3}$.

$$\text{в) } 5\cos^2\left(-\frac{9\pi}{4}\right) - 3\sin^2\left(-\frac{7\pi}{4}\right) - 2\operatorname{tg}^3\left(-\frac{13\pi}{4}\right).$$

Решение:

Вычислим значение данного выражения, используя свойства тригонометрических функций.

$$\begin{aligned} 5\cos^2\left(-\frac{9\pi}{4}\right) - 3\sin^2\left(-\frac{7\pi}{4}\right) - 2\operatorname{tg}^3\left(-\frac{13\pi}{4}\right) &= 5\cos^2\frac{9\pi}{4} - \\ - 3\sin^2\frac{7\pi}{4} + 2\operatorname{tg}^3\frac{13\pi}{4} &= 5\cos^2\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) - 3\sin^2\left(2\pi + \frac{3\pi}{4}\right) + \\ + 2\operatorname{tg}^3\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) &= 5\cos^2\frac{\pi}{4} - 3\sin^2\frac{3\pi}{4} + 2\operatorname{tg}^3\frac{\pi}{4} = \end{aligned}$$

$$= 5 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2 \cdot 1^3 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} + 2 = 3.$$

Ответ: 3.

г) $2 \sin 750^\circ + \sin 1230^\circ + \operatorname{ctg} 1395^\circ$.

Решение:

Вычислим значение данного выражения, используя свойства тригонометрических функций.

$$\begin{aligned} 2 \sin 750^\circ + \sin 1230^\circ + \operatorname{ctg} 1395^\circ &= 2 \sin (360^\circ \cdot 2 + 30^\circ) + \\ &+ \sin (360^\circ \cdot 3 + 150^\circ) + \operatorname{ctg} (180^\circ \cdot 7 + 135^\circ) = 2 \sin 30^\circ + \\ &+ \sin 150^\circ + \operatorname{ctg} 135^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 2. Упростить выражение

$$\text{а) } \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\alpha - 12\pi) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(3\pi - \alpha) \cdot \sin(-\beta - 4\pi)}$$

Решение:

Упростим выражение, используя свойства тригонометрических функций и формулы приведения:

$$\begin{aligned} &\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\alpha - 12\pi) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(3\pi - \alpha) \cdot \sin(-\beta - 4\pi)} = \\ &= \frac{\cos \alpha + \cos(10\pi + 2\pi - \alpha) \cdot \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \alpha \cdot \sin(4\pi + \beta)} = \frac{\cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \alpha \cdot \sin \beta} = \\ &= \frac{\cos \alpha \cdot (1 + \sin \beta)}{\sin \alpha \cdot (1 + \sin \beta)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Ответ: $\operatorname{ctg} \alpha$.

б) $\cos^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha - \pi)$ и вычислить его значение

при $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение:

Упростим данное выражение, используя свойства тригонометрических функций и формулы приведения:

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{ctg}(\alpha - \pi) &= -\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = \\ &= \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \sin \alpha \cdot \cos \alpha.\end{aligned}$$

Так как угол α принадлежит III координатной четверти, то

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}.$$

Найдем значение выражения $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Так как $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ и $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, то

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{12}{25}.$$

Ответ: $\frac{12}{25}$.

$$\text{в) } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos(2\pi + \alpha) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin(3\pi - \alpha).$$

Решение:

Упростим данное выражение, используя свойства тригонометрических функций и формулы приведения:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos(2\pi + \alpha) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin(3\pi - \alpha) &= \\ &= \cos \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \sin \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.\end{aligned}$$

Ответ: 1.

Задача 3. Построить график функции

$$\text{а) } y = 3 \sin 3x$$

Решение:

Для того чтобы построить график функции, исследуем ее.

Область определения функции — вся числовая прямая.

Множество значений функции — $[-3; 3]$.

Функция является нечетной, так как

$$3 \sin(-3x) = -3 \sin 3x.$$

Следовательно, график функции симметричен относительно начала координат.

Наименьший положительный период равен $\frac{2\pi}{3}$, так как

$$3 \sin 3x = 3 \sin(3x + 2\pi) = 3 \sin 3 \cdot \left(x + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Поэтому построим часть графика на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$, длина которого равна периоду.

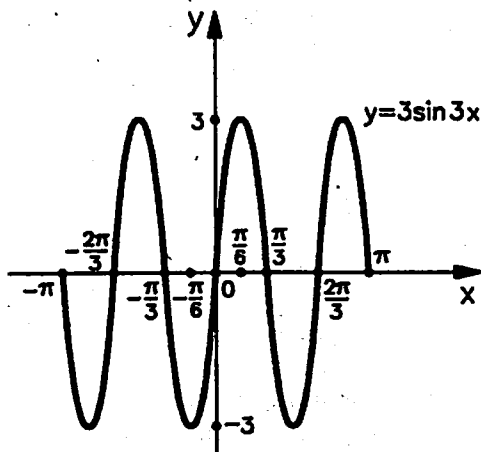
Найдем нули функции на этом промежутке.

$$3 \sin 3x = 0; \sin 3x = 0; 3x = \pi k; x = \frac{\pi}{3}k, \text{ где } k = -1; 0; 1.$$

Наибольшее значение, равное 3, функция принимает при $x = \frac{\pi}{6}$.

Наименьшее значение, равное -3, функция принимает при $x = -\frac{\pi}{6}$.

Для того чтобы построить график функции на всей числовой прямой, необходимо часть графика, построенного на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$, сдвигать вдоль оси абсцисс на $\frac{2\pi}{3}n$, где $n \in \mathbb{Z}$.



$$б) y = \frac{1}{\cos x}.$$

Решение:

Заметим, что функцию $y = \frac{1}{\cos x}$ называют секанс и обозначают $y = \sec x$.

Для исследования функции удобно пользоваться формулой, заданной в условии.

Область определения функции — множество всех действительных чисел, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Функция четная, так как $\frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x}$; следовательно, график функции симметричен относительно оси ординат.

Функция периодическая, с наименьшим положительным периодом 2π , так как $\frac{1}{\cos(x+2\pi)} = \frac{1}{\cos x}$.

Промежутки знакопостоянства y функции $y = \frac{1}{\cos x}$ такие же, как и у функции $y = \cos x$.

$$\frac{1}{\cos x} > 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{1}{\cos x} < 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$$

Для того чтобы найти промежутки возрастания и убывания, необходимо рассмотреть производную

$$y' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} > 0 \text{ при } x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$$

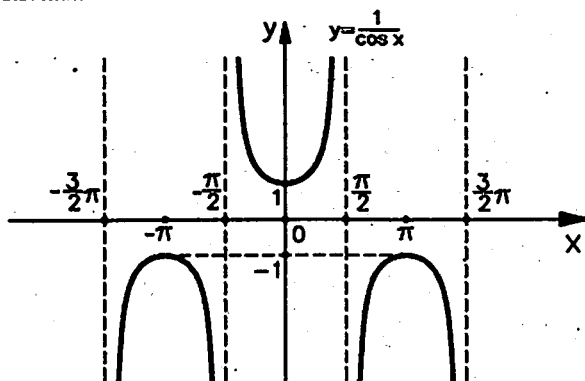
Следовательно, функция секанс возрастает на промежутках

$$\left[2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right); \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$$

Точки $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ и $x = \pi + 2\pi n$ мы включили в промежутки возрастания, так как в этих точках функция $y = \frac{1}{\cos x}$ непрерывна.

Аналогично получаем промежутки убывания.

$\left[\pi + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right); \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n \right]$, $n \in \mathbb{Z}$ — промежутки убывания.



$$в) y = \frac{1}{2} \cdot (\sin x + |\sin x|).$$

Решение:

Используя определение модуля, преобразуем функцию

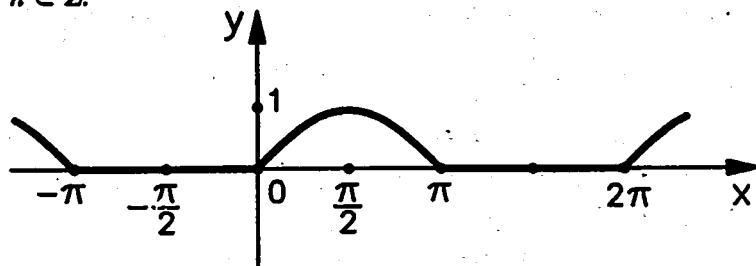
$$y = \begin{cases} \sin x, & \text{при } 2\pi n \leq x \leq \pi + 2\pi n \\ 0, & \text{при } \pi + 2\pi n \leq x \leq 2\pi + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Область определения функции — вся числовая прямая.

Множество значений функции — $[0; 1]$.

Построим часть графика на отрезке $[0; 2\pi]$, при $0 \leq x \leq \pi$ — синусоида, при $\pi \leq x \leq 2\pi$ — отрезок оси абсцисс.

Для того чтобы построить график функции на всей числовой прямой, необходимо часть графика, построенного на отрезке $[0; 2\pi]$, сдвигать вдоль оси абсцисс на $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.



III. Обратные тригонометрические функции

Арксинус числа a — такое число α из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, что его синус равен a .

$y = \arcsin x$ — функция, обратная по отношению к синусу на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Арккосинус числа a — такое число α из отрезка $[0; \pi]$, что его косинус равен a .

$y = \arccos x$ — функция, обратная по отношению к косинусу на промежутке $[0; \pi]$.

Арктангенс числа a — такое число α из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, что его тангенс равен a .

$y = \operatorname{arctg} x$ — функция, обратная по отношению к тангенсу на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Арккотангенс числа a — такое число α из интервала $(0; \pi)$, что его котангенс равен a .

$y = \operatorname{arccotg} x$ — функция, обратная по отношению к котангенсу на промежутке $(0; \pi)$.

Задача 1. Вычислить

а) $\arcsin \frac{1}{2}$.

Решение:

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \text{ т.к. } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ и } \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}$.

б) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \text{ т.к. } \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } \frac{\pi}{4} \in [0; \pi].$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.в) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.**Решение:**

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}, \text{ т.к. } \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \text{ и } -\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3}$.г) $\operatorname{arccctg}(-1)$.**Решение:**

$$\operatorname{arccctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}, \text{ т.к. } \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} = -1 \text{ и } \frac{3\pi}{4} \in (0; \pi).$$

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{д) } & 2 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arccctg}(-1) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot \arccos(-1) + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Решение:

$$\text{Так как } \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}; \operatorname{arccctg}(-1) = \frac{3\pi}{4};$$

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}; \arccos(-1) = \pi;$$

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3},$$

ТО ВЫЧИСЛИМ ЗНАЧЕНИЕ ДАННОГО ВЫРАЖЕНИЯ:

$$\begin{aligned} & 2 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arccctg}(-1) + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \arccos(-1) + \\ & + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \end{aligned}$$

$$= -\frac{2\pi}{3} + \pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = -\pi + \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

е) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{1}{3}\right).$

Решение:

Используя формулы приведения и тождество $\cos(\arccos x) = x$, если $-1 \leq x \leq 1$, вычислим значение данного выражения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arccos \frac{1}{3}\right) = \cos\left(\arccos \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

ж) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin 1\right).$

Решение:

Так как $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$, а $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, то данное выражение принимает вид: $\sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right).$

Вычислим значение полученного выражения, применив формулу приведения:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

IV. Тригонометрические уравнения

Решение простейших тригонометрических уравнений

1. $\sin x = a$, где $|a| \leq 1$; уравнение имеет бесконечно много корней вида:

$$x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Частные случаи:

а) $\sin x = 0$ при $x = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$;

б) $\sin x = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$;

в) $\sin x = -1$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\cos x = a$, $|a| \leq 1$; уравнение имеет бесконечно много корней вида:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи:

а) $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$;

б) $\cos x = 1$ при $x = 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$;

в) $\cos x = -1$ при $x = \pi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

3. $\operatorname{tg} x = a$; уравнение имеет бесконечно много корней:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи:

а) $\operatorname{tg} x = 0$ при $x = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$;

б) $\operatorname{tg} x = 1$ при $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$;

в) $\operatorname{tg} x = -1$ при $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

4. $\operatorname{ctg} x = a$; уравнение имеет бесконечно много корней вида:

$$x = \operatorname{arccotg} a + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи:

а) $\operatorname{ctg} x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$;

б) $\operatorname{ctg} x = 1$ при $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$;

в) $\operatorname{ctg} x = -1$ при $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим решение более сложных тригонометрических уравнений.

Задача 1. Решить уравнение:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 1$

Решение:

Так как $\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, то данное уравнение принимает вид:

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1,$$

следовательно,

$$2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \text{ (см. частные случаи).}$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z};$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z},$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

б) $\sqrt{2}\cos\frac{x}{2} + 1 = 0.$

Решение:

После преобразований уравнение принимает вид:

$$\cos\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Значит,

$$\frac{x}{2} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pm\frac{3\pi}{2} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pm\frac{3\pi}{2} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

в) $\operatorname{tg} x + \frac{5}{\operatorname{tg} x} = 6.$

Решение:

Введем новую переменную y , обозначив $\operatorname{tg} x$ через y .

$$\operatorname{tg} x = y.$$

Уравнение принимает вид:

$$y + \frac{5}{y} = 6.$$

Из этого уравнения находим: $y_1 = 5$; $y_2 = 1$, то есть

$$\operatorname{tg} x = 5; \operatorname{tg} x = 1.$$

$$\operatorname{tg} x = 5 \text{ при } x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = 1 \text{ при } x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} 5 + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n; n \in \mathbb{Z}$.

г) $\sin x - 3 \cos x = 0$

Решение:

Так как $\sin x$ и $\cos x$ не могут быть равны нулю одновременно, разделим обе части уравнения на $\cos x$ и получим равносильное уравнение:

$$\operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

Перенесем число «-3» в правую часть уравнения, поменяв знак числа на противоположный:

$$\operatorname{tg} x = 3.$$

Из этого уравнения находим:

$$x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

д) $6 \cos^2 x - 5 \sin x + 5 = 0$

Решение:

Преобразуем левую часть уравнения, используя основное тригонометрическое тождество:

$$6 \cdot (1 - \sin^2 x) - 5 \sin x + 5 = 0;$$

$$6 - 6 \sin^2 x - 5 \sin x + 5 = 0;$$

$$6 \sin^2 x + 5 \sin x - 11 = 0.$$

Введем новую переменную y , обозначив $\sin x$ через y :
 $\sin x = y$. Уравнение принимает вид:

$$6y^2 + 5y - 11 = 0.$$

Из этого квадратного уравнения находим:

$$y_1 = -\frac{11}{6}; y_2 = 1, \text{ то есть } \sin x = -\frac{11}{6}; \sin x = 1.$$

Уравнение $\sin x = -\frac{11}{6}$ не имеет решений.

Из уравнения $\sin x = 1$ находим:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Задача 2. Решить систему уравнений

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \sin^2 x - \sin^2 y = 1 \end{cases}$$

Решение:

Рассмотрим второе уравнение системы:

$$\sin^2 x - \sin^2 y = 1.$$

Преобразуем левую часть этого уравнения:

$$\begin{aligned} \sin^2 x - \sin^2 y &= (\sin x - \sin y) \cdot (\sin x + \sin y) = \\ &= 2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = \\ &= 4 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = \\ &= \sin(x-y) \cdot \sin(x+y). \end{aligned}$$

Система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \sin(x-y) \cdot \sin(x+y) = 1 \end{cases}$$

Полученная система равносильна системе:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \sin(x-y) = 1 \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы находим:

$$x - y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Система принимает вид:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ x - y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Из этой системы находим:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ y = -\pi n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, y = -\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$$6) \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \sin^2 x - \cos^2 y = 1 \end{cases}$$

Решение:

Преобразуем левую часть второго уравнения системы:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ (\sin x - \cos y)(\sin x + \cos y) = 1 \end{cases}$$

Очевидно, что полученная система равносильна системе:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \sin x - \cos y = 1 \end{cases}$$

Сложив почленно уравнения системы, получим:

$$2\sin x = 2.$$

Из этого уравнения получаем:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Вычтем из первого уравнения системы второе, получим:

$$2\cos y = 0.$$

Из этого уравнения получаем:

$$y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; y = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$$в) \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4} \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 3 \end{cases}$$

Решение:

Из второго уравнения, используя первое, находим:

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4}.$$

Система принимает вид:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Сложим почленно уравнения системы, получим уравнение:

$$\cos (x - y) = 1.$$

Вычтем почленно из первого уравнения системы второе, получим:

$$\cos (x + y) = -\frac{1}{2}.$$

Из полученных уравнений составим систему, которая будет равносильна исходной:

$$\begin{cases} \cos (x - y) = 1 \\ \cos (x + y) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Из этой системы находим:

$$\begin{cases} x - y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x + y = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Из полученной системы находим:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + (k + n) \pi;$$

$$y = \pm \frac{\pi}{3} + (n - k) \pi, \text{ где } n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{3} + (k + n) \pi$; $y = \pm \frac{\pi}{3} + (n - k) \pi$,
где $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$.

$$г) \begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ |x - y| = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Решение:

Преобразуем левую часть первого уравнения, используя формулу суммы синусов:

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}.$$

Так как $|x-y| = \frac{2\pi}{3}$, то $\cos \frac{x-y}{2} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Первое уравнение системы принимает вид:

$$\sin \frac{x+y}{2} = 1.$$

Откуда:

$$x+y = \pi + 4\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} x+y = \pi + 4\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ |x-y| = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Полученная система равносильна совокупности систем:

$$\begin{cases} x+y = \pi + 4\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x-y = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+y = \pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x-y = -\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Решив каждую систему, получаем:

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ y = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right); \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \right), n, k \in \mathbb{Z}.$

V. Решение тригонометрических неравенств

Рассмотрим решение простейших тригонометрических неравенств:

1. $\sin x > a$ ($|a| < 1$) множество решений неравенства:
 $(\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.
2. $\sin x < a$ ($|a| < 1$) множество решений неравенства:
 $(-\pi - \arcsin a + 2\pi n; \arcsin a + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.
3. $\cos x > a$ ($|a| < 1$) множество решений неравенства:
 $(-\arccos a + 2\pi n; \arccos a + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.
4. $\cos x < a$ ($|a| < 1$) множество решений неравенства:
 $(\arccos a + 2\pi n; 2\pi - \arccos a + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$.
5. $\operatorname{tg} x > a$ множество решений неравенства:
 $\left(\operatorname{arctg} a + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}$.
6. $\operatorname{tg} x < a$ множество решений неравенства:
 $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} a + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}$.
7. $\operatorname{ctg} x > a$ множество решений неравенства:
 $(\pi n; \operatorname{arcctg} a + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.
8. $\operatorname{ctg} x < a$ множество решений неравенства:
 $(\operatorname{arcctg} a + \pi n; \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.

Более сложные неравенства решаются методами, сходными с методами решений тригонометрических уравнений.

Рассмотрим решение тригонометрических неравенств на конкретных примерах.

Задача 1. Решить неравенство:

а) $\sin x < \frac{1}{2}$

Решение:

Данное неравенство относится к простейшему неравенству типа $\sin x < a$. Поэтому множество решений данного неравенства: $\left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}$.

б) $\operatorname{tg} x > -1$

Решение:

Данное неравенство относится к простейшему неравенству типа: $\operatorname{tg} x > a$.

Поэтому множество решений данного неравенства:

$$\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$

Тригонометрические неравенства можно решить при помощи единичной окружности.

в) $2 \cos x - \sqrt{2} \leq 0$

Решение:

Преобразуем данное неравенство к виду:

$$\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Получили простейшее тригонометрическое неравенство. Проиллюстрируем его решение на единичной окружности.

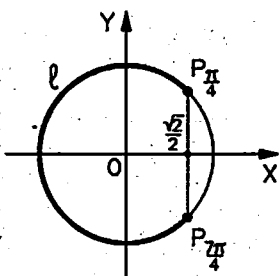
Абсциссы точек, принадлежащих дуге l , удовлетворяют данному неравенству. Значит,

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$$

Так как наименьший положительный период косинуса равен 2π , получаем окончательное решение:

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq x \leq \frac{7\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}.$



г) $2 \sin 2x + \sqrt{2} \geq 0$

Решение:

Преобразуем данное неравенство к виду:

$$\sin 2x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

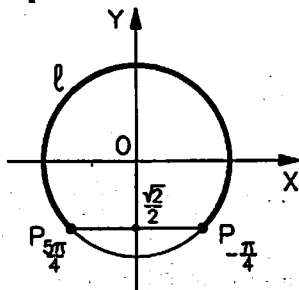
Обозначим $2x$ через t , то есть $2x = t$. Получили простейшее тригонометрическое неравенство:

$$\sin t \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Проиллюстрируем его решение на единичной окружности.

Ординаты точек, принадлежащих дуге l , удовлетворяют неравенству

$$\sin t \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Значит,

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq t \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Так как $t = 2x$, то

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq 2x \leq \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Разделим почленно неравенство на 2, получим

$$-\frac{\pi}{8} + \pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{8} + \pi n; \frac{5\pi}{8} + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}.$

д) $1 - 2 \cos^2 x > 0$

Решение:

Преобразуем левую часть неравенства:

$$\begin{aligned} 1 - 2 \cos^2 x &= \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \cos^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x = \\ &= -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x. \end{aligned}$$

Неравенство принимает вид: $-\cos 2x > 0$.

Разделим обе части неравенства на -1 , получим:

$$\cos 2x < 0.$$

Обозначим $2x$ через t , то есть $2x = t$. Получили простейшее тригонометрическое неравенство: $\cos t < 0$.

Из этого неравенства находим:

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Так как $t = 2x$, то

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < 2x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Разделим почленно неравенство на 2, получим:

$$\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

Задача 2. Решить графически неравенство:

а) $\cos x - 3x + 1 \geq 0$

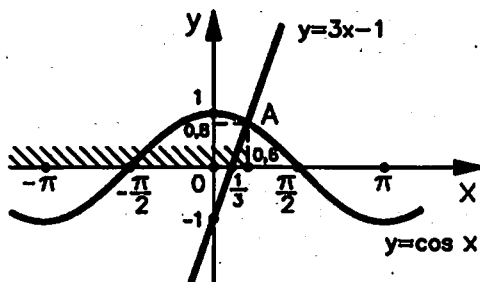
Решение:

При решении неравенств графически необходимо как можно более точно построить графики функций, удобно при этом использовать миллиметровую бумагу.

Преобразуем данное неравенство к виду:

$$\cos x \geq 3x - 1.$$

Построим в одной системе координат графики функций $y = \cos x$ и $y = 3x - 1$.



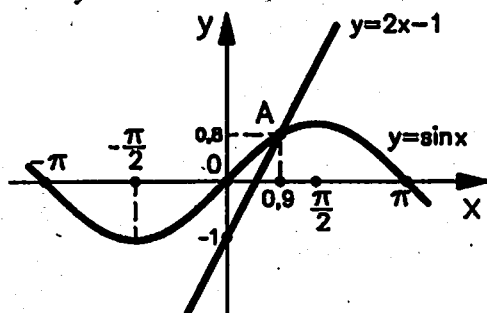
Графики функций пересекаются в точке A с координатами $x \approx 0,6$; $y \approx 0,8$. На промежутке $(-\infty; 0,6)$ точки графика $y = 3x - 1$ ниже точек графика $y = \cos x$. А при $x \approx 0,6$ значения функций совпадают. Поэтому $\cos x \geq 3x - 1$ при $x \leq 0,6$.

Ответ: $(-\infty; 0,6]$.

б) $\sin x < 2x - 1$

Решение:

Построим в одной системе координат графики функций $y = \sin x$ и $y = 2x - 1$.



Графики функций пересекаются в точке A ($x \approx 0,9$; $y \approx 0,8$). На промежутке $(0,9; +\infty)$ точки графика $y = 2x - 1$ выше точек графика $y = \sin x$. Значит, $\sin x < 2x - 1$ при $x > 0,9$.

Ответ: $(0,9; +\infty)$.

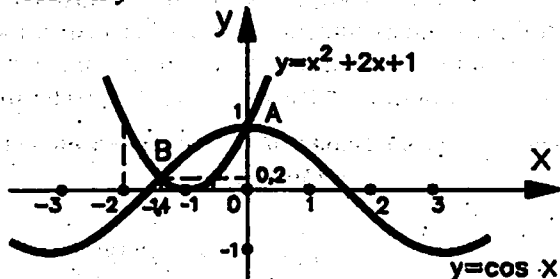
в) $\cos x - x^2 - 2x - 1 \geq 0$

Решение:

Преобразуем данное неравенство к виду:

$$\cos x \geq x^2 + 2x + 1.$$

Построим в одной системе координат графики функций $y = \cos x$ и $y = x^2 + 2x + 1$.



Графики функций пересекаются в точках A $(0; 1)$ и B $(x \approx -1,4; y \approx 0,2)$. На промежутке $[-1,4; 0]$ точки графика

функции $y = x^2 + 2x + 1$ ниже точек графика функции $y = \cos x$. Значит, $\cos x \geq x^2 + 2x + 1$ при $-1,4 \leq x \leq 0$.

Ответ: $[-1,4; 0]$.

г) $\operatorname{tg} x < -x + 1$, если $0 < x < \pi$

Решение:

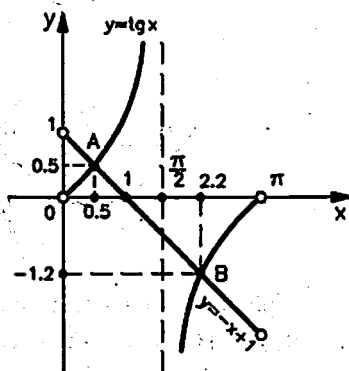
Построим в одной системе координат графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -x + 1$ на промежутке $(0; \pi)$.

Графики функций пересекаются в точках $A (x \approx 0,5; y \approx 0,5)$ и $B (x \approx 2,2; y \approx -1,2)$.

На промежутках $(0; 0,5)$ и $(\frac{\pi}{2}; 2,2)$ точки графика функции $y = \operatorname{tg} x$ ниже точек графика

$y = -x + 1$. Значит, $\operatorname{tg} x < -x + 1$ при $0 < x < 0,5$; при $\frac{\pi}{2} < x < 2,2$.

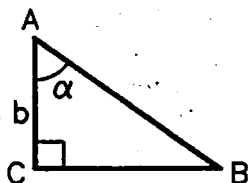
Ответ: $(0; 0,5) \cup (\frac{\pi}{2}; 2,2)$.



VI. Решение прямоугольных треугольников

Решением треугольника называется нахождение его элементов по каким-нибудь трем элементам, определяющим треугольник. Частным случаем решения треугольников является решение прямоугольных треугольников

1. Решение прямоугольного треугольника по катету и острому углу



1 случай:

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = b$, $\angle A = \alpha$

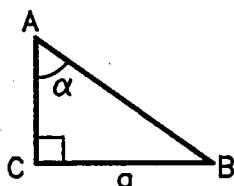
Найти: AB , CB , $\angle B$

Решение:

$$\angle B = 90^\circ - \alpha; CB = b \cdot \operatorname{tg} \alpha; AB = \frac{b}{\cos \alpha}.$$

2 случай:**Дано:** $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$; $CB = a$; $\angle A = \alpha$ **Найти:** AB ; AC ; $\angle B$.**Решение:**

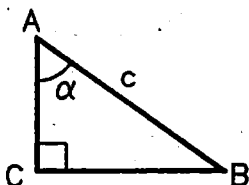
$$\angle B = 90^\circ - \alpha; AC = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}; AB = \frac{a}{\sin \alpha}.$$



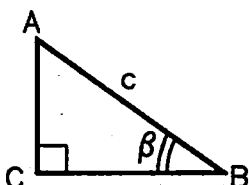
2. Решение прямоугольного треугольника по гипотенузе и острому углу

1 случай:**Дано:** $\triangle ABC$; $\angle C = 90^\circ$; $AB = c$; $\angle A = \alpha$ **Найти:** AC ; CB ; $\angle B$.**Решение:**

$$\angle B = 90^\circ - \alpha; CB = c \cdot \sin \alpha; AC = c \cdot \cos \alpha.$$

**2 случай:****Дано:** $\triangle ABC$; $\angle C = 90^\circ$; $AB = c$; $\angle B = \beta$.**Найти:** AC ; CB ; $\angle A$ **Решение:**

$$\angle A = 90^\circ - \beta; AC = c \cdot \sin \beta; CB = c \cdot \cos \beta.$$



3. Решение прямоугольного треугольника по двум катетам

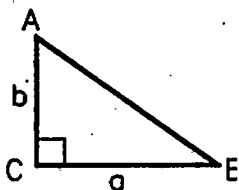
Дано: $\triangle ABC$; $\angle C = 90^\circ$; $CB = a$; $AC = b$ **Найти:** AB ; $\angle A$; $\angle B$ **Решение:**

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (по теореме Пифагора).}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b};$$

 $\angle A$ найти по таблицам значений тангенсов.

$$\angle B = 90^\circ - \angle A.$$



Задача 1. Решить прямоугольный треугольник $\triangle ABC$, если

а) катет AC равен 6 см, угол $\angle A$ равен 25° ;

Решение:

$$\angle B = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ.$$

$$\text{Катет } BC = 6 \cdot \operatorname{tg} 25^\circ \approx 2,8 \text{ (см);}$$

$$\text{гипотенуза } AB = \frac{6}{\cos 25^\circ} \approx 6,6 \text{ (см).}$$

Ответ: $\angle B = 65^\circ$; $BC = 2,8$ см; $AB = 6,6$ см.

б) катет CB равен 2,5 см, угол $\angle A$ равен 72° ;

Решение:

$$\angle B = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ;$$

$$\text{катет } AC = \frac{2,5}{\operatorname{tg} 72^\circ} \approx 0,81 \text{ (см);}$$

$$\text{гипотенуза } AB = \frac{2,5}{\sin 72^\circ} \approx 2,63 \text{ (см).}$$

Ответ: $\angle B = 18^\circ$; $AC = 0,81$ см; $AB = 2,63$ см.

в) гипотенуза AB равна 17 см, угол $\angle A$ равен 17° ;

Решение:

$$\angle B = 90^\circ - 17^\circ = 73^\circ;$$

$$\text{катет } CB = 17 \cdot \sin 17^\circ \approx 4,97 \text{ (см);}$$

$$\text{катет } AC = 17 \cdot \cos 17^\circ \approx 16,26 \text{ (см).}$$

Ответ: $\angle B = 73^\circ$; $CB = 4,97$ см; $AC = 16,26$ см.

г) гипотенуза AB равна 7,4 см, угол $\angle B$ равен 55° ;

Решение:

$$\angle A = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ;$$

$$\text{катет } AC = 7,4 \cdot \sin 55^\circ \approx 6,06 \text{ (см);}$$

$$\text{катет } BC = 7,4 \cdot \cos 55^\circ \approx 4,24 \text{ (см).}$$

Ответ: $\angle A = 35^\circ$; $AC = 6,06$ см; $BC = 4,24$ см.

д) катет CB равен 23,4 см, катет AC равен 8,7 см.

Решение:

$$\text{гипотенуза } AB = \sqrt{23,4^2 + 8,7^2} \approx 24,96 \text{ (см).}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{23,4}{8,7} \approx 2,6897; \angle A = 69^{\circ}39';$$

$$\angle B = 90^{\circ} - 69^{\circ}39' = 20^{\circ}21'.$$

Ответ: $AB = 24,9$ см; $\angle A = 69^{\circ}39'$; $\angle B = 20^{\circ}21'$.

е) полупериметр равен 6 см, угол $\angle B$ равен 35° ;

Решение:

$$\angle A = 90^{\circ} - \angle B, \angle A = 55^{\circ}.$$

Пусть a и b — катеты, c — гипотенуза, тогда
 $a + b + c = 12$.

Так как $a = c \cdot \sin 55^{\circ}$; $b = c \cdot \sin 35^{\circ}$, то
 $c \cdot \sin 55^{\circ} + c \cdot \sin 35^{\circ} + c = 12$.

$$\text{Откуда получаем: } c = \frac{12}{\sin 55^{\circ} + \sin 35^{\circ} + 1} \approx 5,0151 \text{ (см).}$$

$$a = c \cdot \sin 55^{\circ} = 4,1083 \text{ (см)}$$

$$b = 12 - (a + c) = 2,8766 \text{ (см)}$$

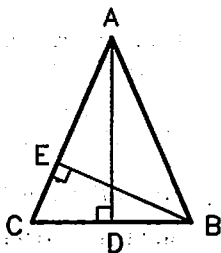
Ответ: $\angle A = 55^{\circ}$; $a = 2,8766$ см; $b = 4,1083$ см; $c = 5,0151$ см.

Задача 2. В равнобедренном треугольнике: a — основание; b — боковая сторона; $\angle A$ — угол при вершине; $\angle B$ — угол при основании; h_a — высота, проведенная из вершины A на основание; h_b — высота, проведенная на боковую сторону.

а) Найти $\angle A$, a , h_a , h_b , если $b = 46,4$; $\angle B = 43^{\circ}12'$

Решение:

Высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника $\triangle ABC$, является биссектрисой и медианой. Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle ADB$: $\angle ADB = 90^{\circ}$; $\angle ABD = 43^{\circ}12'$; $AB = 46,4$. Найдем остальные элементы этого треугольника:



$$AD = AB \cdot \sin B = 46,4 \cdot \sin 43^{\circ}12' \approx 31,8, \text{ т.е. } h_a = 31,8;$$

$$DB = AB \cdot \cos B = 46,4 \cdot \cos 43^{\circ}12' \approx 33,8;$$

$$\angle DAB = 90^{\circ} - 43^{\circ}12' = 46^{\circ}48'.$$

Так как $DB = \frac{1}{2}CB$, то $CB = 67,6$, то есть $a = 67,6$.

Так как $\angle DAB = \frac{1}{2} \angle CAB$, то $\angle CAB = 93^\circ 36'$, т.е. $\angle A = 93^\circ 36'$.

Найдем высоту EB , опущенную на боковую сторону, из прямоугольного треугольника $\triangle CEB$, в котором $\angle C = \angle B = 43^\circ 12'$, гипотенуза $CB = 67,6$.

$$EB = BC \cdot \sin C = 67,6 \cdot \sin 43^\circ 12' \approx 46,3, \text{ то есть } h_b = 46,3.$$

Ответ: $\angle A = 93^\circ 36'$; $a = 67,6$; $h_a = 31,8$; $h_b = 46,3$.

б) Найти: $\angle A$; $\angle B$; b ; h_a , если $a = 18,6$; $h_b = 15,7$

Решение:

Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle CEB$. $\angle CEB$ — прямой; гипотенуза $CB = 18,6$; катет $EB = 15,7$. Найдем значение угла $\angle ECB$.

$$\sin \angle ECB = \frac{EB}{CB} = \frac{15,7}{18,6} \approx 0,8441$$

По таблицам находим значение угла $\angle ECB$.

$$\angle ECB = 57^\circ 34'.$$

Значит, в равнобедренном треугольнике $\triangle ACB$ углы при основании равны $57^\circ 34'$, то есть $\angle C = \angle B = 57^\circ 34'$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle ACD$:

$$\angle ADC = 90^\circ; \text{ катет } CD = \frac{CB}{2} = 9,3; \angle ACD = 57^\circ 34'.$$

Найдем остальные элементы этого треугольника:

$$\angle CAD = 90^\circ - \angle ACD = 90^\circ - 57^\circ 34' = 32^\circ 26';$$

$$AC = \frac{CD}{\cos \angle ACD} = \frac{9,3}{\cos 57^\circ 34'} \approx 17,4;$$

$$AD = CD \cdot \operatorname{tg} \angle ACD = 9,3 \cdot \operatorname{tg} 57^\circ 34' \approx 14,6.$$

Значит, в равнобедренном треугольнике $\triangle ACB$ боковая сторона $AC = 17,4$; высота, проведенная из вершины A на основание, равна $14,6$, а угол при вершине равен:

$$\angle CAB = 2 \cdot \angle CAD = 32^\circ 26' \cdot 2 = 64^\circ 52'.$$

Ответ: $\angle A = 64^\circ 52'$; $\angle B = 57^\circ 34'$; $b = 17,4$; $h_a = 14,6$.

в) Найти $\angle B$; a ; b ; h_b , если $h_a = 52,4$; $\angle A = 54^\circ 12'$.

Решение:

В равнобедренном треугольнике $\triangle ACB$ высота AD является биссектрисой и медианой, поэтому $CD = DB$; $\angle CAD = \angle BAD$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle CAD$: катет $AD = 52,4$, $\angle CAD = \frac{1}{2} \angle CAB = 27^\circ 6'$. Найдём остальные элементы этого треугольника.

$$\angle ACD = 90^\circ - \angle CAD = 90^\circ - 27^\circ 6' = 62^\circ 54';$$

$$CD = AD \cdot \operatorname{tg} \angle CAD = 52,4 \cdot \operatorname{tg} 27^\circ 6' \approx 26,8;$$

$$AC = \frac{AD}{\cos \angle CAD} = \frac{52,4}{\cos 27^\circ 6'} \approx 58,9.$$

Значит, в равнобедренном треугольнике $\triangle ACB$ боковая сторона AC равна 58,9, угол при основании равен $62^\circ 54'$, основание равно:

$$CB = 2 \cdot CD = 26,8 \cdot 2 = 53,6.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle CEB$: гипотенуза $CB = 53,6$, $\angle ECB = 62^\circ 54'$.

Найдём катет EB :

$$EB = CB \cdot \sin \angle ECB = 53,6 \cdot \sin 62^\circ 54' \approx 47,7.$$

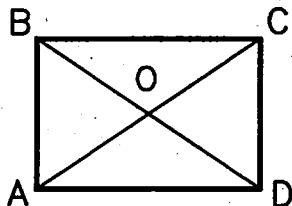
Значит, в равнобедренном треугольнике $\triangle ACB$ высота, проведенная на боковую сторону, равна 47,7.

Ответ: $\angle B = 62^\circ 54'$; $a = 53,6$; $b = 58,9$; $h_b = 47,7$.

Задача 3. Найти угол между диагоналями прямоугольника, соседние стороны которого равны 12 см и 8 см.

Решение:

AC и BD — диагонали прямоугольника $ABCD$. Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle ABC$: катет BC равен 12 см, катет AB равен 8 см. Найдём острый угол BAC .



$$\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{12}{8} = 1,5.$$

Найдем значение угла $\angle BAC$ по таблицам:

$$\angle BAC = 56^{\circ}18'.$$

Рассмотрим треугольник $\triangle AOB$. Так как диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам, то стороны треугольника $\triangle AOB$ BO и AO равны. Значит, треугольник $\triangle AOB$ — равнобедренный. Углы при основании равнобедренного треугольника равны, то есть

$$\angle BAO = \angle ABO = 56^{\circ}18'.$$

Зная, что сумма углов треугольника равна 180° , можно найти угол $\angle BOA$:

$$\angle BOA = 180^{\circ} - 56^{\circ}18' \cdot 2 = 67^{\circ}24'.$$

Так как за угол между пересекающимися прямыми принимается градусная мера наименьшего из образованных при пересечении углов, то угол между диагоналями BD и AC равен градусной мере угла $\angle BOA$, так как он острый.

Ответ: угол между диагоналями прямоугольника равен $67^{\circ}24'$.

VII. Решение косоугольных треугольников

Теорема синусов: стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов, то есть

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

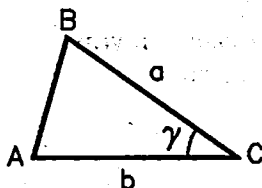
Теорема косинусов: квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними, то есть

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними



Дано: $\triangle ABC$; $BC = a$; $AC = b$; $\angle C = \gamma$

Найти: AB ; $\angle B$; $\angle C$

Решение:

Сторону AB треугольника $\triangle ABC$ находим по теореме косинусов:

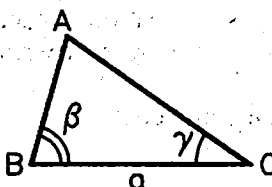
$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma} = c$$

Также по теореме косинусов находим косинус угла $\angle A$ или угла $\angle B$.

По косинусу угла с помощью таблиц или микрокалькулятора находим значение угла $\angle A$. Тогда угол $\angle B$ находим по формуле:

$$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C$$

Решение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам



Дано: $\triangle ABC$; $BC = a$; $\angle B = \beta$; $\angle C = \gamma$

Найти: AC ; AB ; $\angle A$.

Решение:

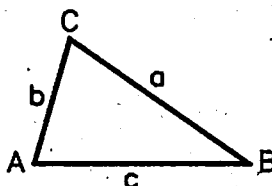
Находим угол $\angle A$ по формуле:

$$\angle A = 180^\circ - (\gamma + \beta) = \alpha$$

По теореме синусов находим стороны AB и AC :

$$AB = a \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}; \quad AC = a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

Решение треугольника по трем сторонам



Дано: $\triangle ABC$; $AB = c$; $BC = a$; $AC = b$

Найти: $\angle A$; $\angle B$; $\angle C$

Решение:

По теореме косинусов находим косинусы двух любых углов, а затем по таблицам или с помощью микрокалькулятора находим значения этих углов:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Оставшийся угол $\angle C$ находим по формуле:

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$$

Решение треугольника по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них

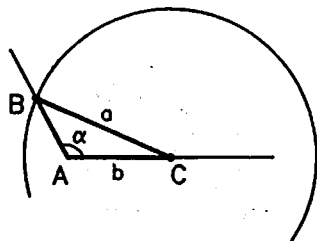
Дано: $\triangle ABC$; $BC = a$; $AC = b$; $\angle A = \alpha$

Найти: AB ; $\angle B$; $\angle C$.

Решение:

1 случай

Если $BC > AC$, то заданный угол $\angle A$ лежит против большей стороны. Чтобы построить такой треугольник, нужно построить угол $\angle A$, на одной из его сторон от вершины отложить отрезок $AC = b$ и из точки C описать окружность радиуса a .



Окружность пересечет другую сторону угла в одной точке, это и будет точка B . Задача в этом случае будет иметь единственное решение.

Находим синус угла $\angle B$ по теореме синусов:

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$$

По синусу угла с помощью таблиц или микрокалькулятора находим значение угла $\angle B$.

Находим значение угла $\angle C$ по формуле:

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B.$$

Находим сторону AB по теореме синусов:

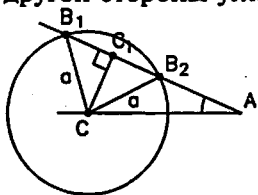
$$AB = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}.$$

2 случай

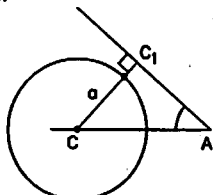
Если $BC < AC$, то угол $\angle A$ лежит против меньшей стороны. Значит, он не может быть тупым или прямым. Поэтому, если в условии задачи дано, что угол $\angle A$ прямой или тупой, то задача не будет иметь решение.

Рассмотрим решение задачи при условии, что угол $\angle A$ острый. Чтобы построить такой треугольник, нужно по-

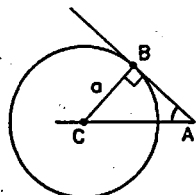
строить угол $\angle A$, на одной из его сторон от вершины отложить отрезок $AC = b$ и из точки C опустить перпендикуляр CC_1 на другую сторону угла. Если $BC > CC_1$, то окружность с центром в точке C радиуса a пересечет другую сторону угла в двух точках B и B_1 . Если $BC < CC_1$, то такая окружность не будет пересекать другую сторону угла. Если $BC = CC_1$, то такая окружность будет касаться другой стороны угла.



$$a > CC_1$$



$$a < CC_1$$



$$CC_1 = CB = a$$

Из треугольника ΔCC_1A находим $CC_1 = b \cdot \sin \alpha$. Значит, если $a > b \sin \alpha$, то задача имеет два решения. Угол $\angle B$ может быть острым, $\angle B = \angle B_1$, или тупым,

$$\angle B = \angle B_2 = 180^\circ - \angle B_1.$$

Синус угла $\angle B$ находим по теореме синусов:

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$$

По синусу с помощью таблиц или микрокалькулятора находим значение угла $\angle B_1$, тогда угол $\angle B_2 = 180^\circ - \angle B_1$.

Находим значение угла $\angle C$ по формуле:

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B.$$

Находим сторону AB по теореме синусов:

$$AB = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}.$$

Если $a < b \cdot \sin \alpha$, то задача не имеет решений.

Если $a = b \cdot \sin \alpha$, то тогда треугольник ΔABC прямоугольный и задача имеет единственное решение (см. решение прямоугольного треугольника).

Задача 1. Решить треугольник, если

а) $AC = 5$ см; $BC = 7$ см, $\angle C = 60^\circ$.

Решение:

$$AB = \sqrt{7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 0,5} = \sqrt{39} \approx 6,2 \text{ (см)};$$

$$\cos A = \frac{5^2 + 6,2^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6,2} \approx 0,2329; \angle A = 76^\circ 36';$$

$$\angle B = 180^\circ - 60^\circ - 76^\circ 36' = 43^\circ 24'.$$

б) $BC = 4 \text{ см}; \angle B = 40^\circ; \angle C = 30^\circ$.**Решение:**

$$\angle A = 180^\circ - (40^\circ + 30^\circ) = 110^\circ;$$

$$AB = \frac{4 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 110^\circ} = \frac{4 \cdot 0,5}{\sin 70^\circ} \approx 2,1 \text{ (см)};$$

$$AC = \frac{4 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 110^\circ} = \frac{4 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 70^\circ} \approx 2,7 \text{ (см)}.$$

в) $AB = 7 \text{ см}; BC = 9 \text{ см}; AC = 6 \text{ см}$ **Решение:**

$$\cos A = \frac{6^2 + 7^2 - 9^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = 0,0476; \angle A = 87^\circ 16';$$

$$\cos B = \frac{9^2 + 7^2 - 6^2}{2 \cdot 9 \cdot 7} \approx 0,7460; \angle B = 41^\circ 46';$$

$$\angle C = 180^\circ - (87^\circ 16' + 41^\circ 46') = 50^\circ 58'.$$

г) $BC = 8,7 \text{ см}; AC = 6,5 \text{ см}; \angle A = 75^\circ$ **Решение:**

Так как $BC > AC$, то задача имеет единственное решение

$$\sin B = \frac{AC \cdot \sin A}{BC} = \frac{6,5 \cdot \sin 75^\circ}{8,7} \approx 0,7216$$

По таблицам находим значение угла $\angle B$:

$$\angle B = 46^\circ 11';$$

$$\angle C = 180^\circ - 75^\circ - 46^\circ 11' = 58^\circ 49';$$

$$AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{8,7 \cdot \sin 58^\circ 49'}{\sin 75^\circ} \approx 7,7 \text{ (см)}.$$

д) $BC = 7,3$ см; $AC = 8,6$ см; $\angle A = 50^\circ$

Решение:

Так как $BC < AC$ и $AC \cdot \sin A \approx 6,6 < 7,3$, то задача имеет два решения.

$$\sin B = \frac{AC \cdot \sin A}{BC} = \frac{8,6 \cdot \sin 50^\circ}{7,3} \approx 0,9024$$

1) $\angle B = \angle B_1 = 64^\circ 29'$;

$$\angle C = \angle C_1 = 180^\circ - (50^\circ + 64^\circ 29') = 65^\circ 31';$$

$$AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{7,3 \cdot \sin 65^\circ 31'}{\sin 50^\circ} \approx 8,7 \text{ (см)}.$$

2) $\angle B = \angle B_2 = 180^\circ - \angle B_1 = 180^\circ - 64^\circ 29' = 115^\circ 31'$;

$$\angle C = \angle C_2 = 180^\circ - (50^\circ + 115^\circ 31') = 14^\circ 29';$$

$$AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{7,3 \cdot \sin 14^\circ 29'}{\sin 50^\circ} \approx 2,4 \text{ (см)}.$$

е) $BC = 20$ см; $AC = 89$ см; $\angle A = 30^\circ$

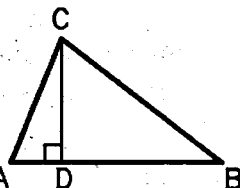
Решение:

Так как $BC < AC$ и $AC \cdot \sin A = 44,5 > 20$, то задача не имеет решений.

Задача 2. Найти площадь треугольника $\triangle ABC$, если сторона AC равна b , сторона AB равна c , а угол $\angle A$ равен α .

Решение:

Известно, что площадь треугольника равна половине произведения стороны треугольника на высоту, опущенную на эту сторону из противоположной вершины.



Опустим из вершины C на сторону AB высоту CD и рассмотрим треугольник $\triangle ACD$. Треугольник $\triangle ACD$ — прямоугольный, его гипотенуза AC равна b , а острый угол равен $\angle A$ и равен α . Значит, можем найти катет CD :

$$CD = AC \cdot \sin A = b \cdot \sin \alpha.$$

Найдем площадь треугольника $\triangle ABC$:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

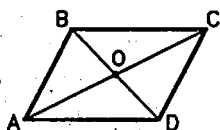
Ответ: $S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha$

Вывод: площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними.

Задача 3. Найти площадь параллелограмма, если его диагонали равны $2\sqrt{3}$ и 80, а угол между ними равен 60° .

Решение:

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$. AC и BD — диагонали параллелограмма, точка O — точка их пересечения. Из свойств параллелограмма известно, что диагонали точкой пересечения делятся пополам. Значит, $BO = OD$, $AO = OC$.



Треугольник ΔAOB равен треугольнику ΔCOD , а треугольник ΔBOC равен треугольнику ΔDOA по первому признаку равенства треугольников. Значит:

$$S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}, S_{\Delta DOA} = S_{\Delta BOC}$$

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна сумме площадей треугольников ΔAOB , ΔBOC , ΔCOD и ΔAOD , то есть

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\Delta AOB} + 2 \cdot S_{\Delta BOC}$$

Так как площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними, то

$$S_{\Delta AOB} = AO \cdot BO \cdot \sin AOB;$$

$$S_{\Delta BOC} = BO \cdot OC \cdot \sin BOC.$$

Так как $AO = OC$, $\sin AOB = \sin BOC$ ($\angle AOB = 180^\circ - \angle BOC$), то $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta BOC}$.

Значит:

$$S_{ABCD} = 4 \cdot S_{\Delta AOB} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{80}{2} \cdot \sin 60^\circ = 120$$

Ответ: $S_{ABCD} = 120$.

Задача 4. В треугольнике $\triangle ABC$ сторона AC равна b , сторона BC равна a , угол $\angle C$ равен α . Вычислить медиану, проведенную к стороне AB .

Решение:

В треугольнике $\triangle ABC$ проведем медиану CD . Тогда $AD = DB$.

Рассмотрим треугольник $\triangle CDB$.

По теореме косинусов находим CD :

$$CD^2 = CB^2 + DB^2 - 2CB \cdot DB \cdot \cos B.$$

Так как $DB = \frac{AB}{2}$, то

$$CD^2 = CB^2 + \frac{AB^2}{4} - CB \cdot AB \cdot \cos B.$$

Из треугольника $\triangle ABC$ по теореме косинусов находим:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2 \cdot AC \cdot CB \cdot \cos C;$$

$$AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2AB \cdot CB \cos B.$$

Тогда:

$$AB \cdot CB \cdot \cos B = \frac{AB^2 + CB^2 - AC^2}{2}.$$

$$CD^2 = CB^2 + \frac{AB^2}{4} - \frac{AB^2 + CB^2 - AC^2}{2} = \frac{CB^2}{2} + \frac{AC^2}{2} - \frac{AB^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}(2CB^2 + 2AC^2 - AB^2 - CB^2 + 2 \cdot AC \cdot CB \cdot \cos C) =$$

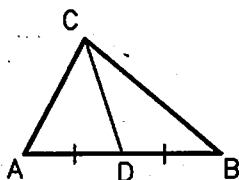
$$= \frac{1}{4}(CB^2 + AC^2 + 2 \cdot AC \cdot CB \cdot \cos C).$$

По условию: $CB = a$; $AC = b$; $\cos C = \cos \alpha$. Тогда:

$$CD^2 = \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha);$$

$$CD = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha}}{2}.$$

Ответ: $CD = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha}}{2}.$



Задача 5. В треугольнике $\triangle ABC$ сторона AB равна c , сторона BC равна a , сторона AC равна b . Найти высоту треугольника, опущенную на сторону AB .

Решение:

В треугольнике $\triangle ABC$ из вершины C на сторону AB опустим высоту CD . Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle BCD$. Найдем катет CD :

$$CD = CB \cdot \sin B = a \cdot \sin B.$$

Из треугольника $\triangle ABC$ по теореме косинусов находим:

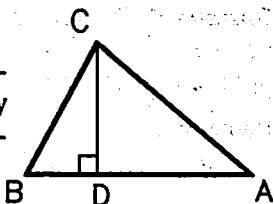
$$\cos B = \frac{BC^2 + AB^2 - CA^2}{2 \cdot BC \cdot AB} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Так как $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B}$, то

$$CD = a \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right)^2}.$$

Мы рассмотрели случай, когда угол $\angle B$ острый. Такой же результат получается, если угол $\angle B$ — тупой.

Ответ: $CD = a \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right)^2}.$



Задача 6. В треугольнике $\triangle ABC$ сторона AB равна c , сторона BC равна a , сторона AC равна b . Найти биссектрису угла $\angle A$ треугольника $\triangle ABC$.

Решение:

В треугольнике $\triangle ABC$ проведем биссектрису угла $\angle A$: AL — биссектриса угла $\angle A$.

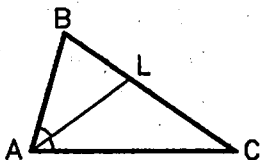
Известно, что биссектриса делит сторону треугольника в отношении, пропорциональном прилежащим сторонам:

$$\frac{BL}{AB} = \frac{LC}{AC}$$

Обозначим LC через x . Тогда:

$$\frac{a-x}{c} = \frac{x}{b}.$$

Из пропорции находим: $x = \frac{ab}{c+b}$



Рассмотрим треугольник $\triangle ACL$. По теореме косинусов находим:

$$AL^2 = LC^2 + AC^2 - 2LC \cdot AC \cdot \cos C$$

Из треугольника $\triangle ABC$ по теореме косинусов находим:

$$\cos C = \frac{CB^2 + AC^2 - AB^2}{2 \cdot CB \cdot AC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} AL^2 &= \left(\frac{ab}{c+b} \right)^2 + b^2 - 2 \cdot \frac{ab}{c+b} \cdot b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \\ &= \left(\frac{ab}{c+b} \right)^2 + b^2 - \frac{b \cdot (a^2 + b^2 - c^2)}{c+b}; \end{aligned}$$

$$AL = \sqrt{\left(\frac{ab}{c+b} \right)^2 + b^2 - \frac{b \cdot (a^2 + b^2 - c^2)}{c+b}}$$

Ответ: $AL = \sqrt{\left(\frac{ab}{c+b} \right)^2 + b^2 - \frac{b \cdot (a^2 + b^2 - c^2)}{c+b}}$

Задача 7. Докажите, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности.

Решение:

Рассмотрим треугольник $\triangle ABC$ и докажем, что:

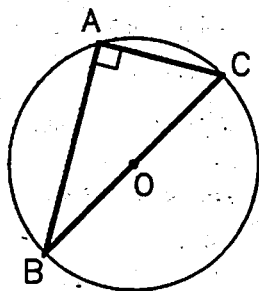
$$\frac{BC}{\sin A} = 2R.$$

1 случай:

Угол $\angle A$ — прямой.

Так как угол $\angle A$ прямой, то сторона BC является гипотенузой. Центр описанной около прямоугольного треугольника окружности совпадает с серединой гипотенузы. Получаем:

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \quad (\sin A = 1).$$



2 случай:

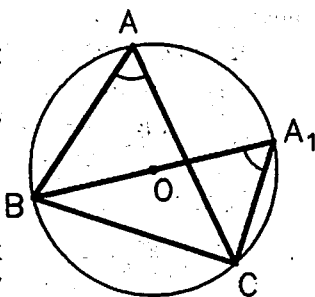
Угол $\angle A$ — острый.

Отметим на окружности точку A_1 и проведем диаметр A_1B . Треугольник $\triangle A_1BC$ — прямоугольный. Тогда:

$$\sin A_1 = \frac{BC}{BA_1} = \frac{BC}{2R}.$$

Угол $\angle A_1$ равен углу $\angle A$, так как они опираются на одну и ту же дугу. Значит,

$$\sin A = \frac{BC}{2R}, \text{ т.е. } \frac{BC}{\sin A} = 2R.$$



3 случай:

Угол A — тупой.

Отметим на окружности точку A_1 и проведем диаметр A_1B . Треугольник $\triangle A_1BC$ — прямоугольный. Тогда:

$$\sin A_1 = \frac{BC}{BA_1} = \frac{BC}{2R}.$$

Если угол $\angle A$ тупой, то угол $\angle A_1$ острый, измеряющийся половиной дуги BAC :

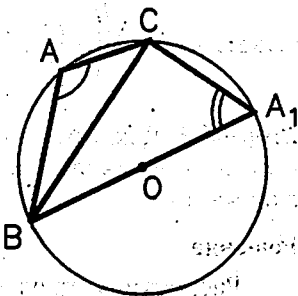
$$\angle A_1 = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot (2\pi - \angle BA_1C) = \pi - \frac{1}{2} \angle BA_1C = \pi - \angle A$$

Получили: $\angle A_1 = \pi - \angle A$

$$\sin A = \sin(\pi - \angle A) = \sin A_1.$$

$$\text{Значит, } \sin A = \frac{BC}{2R}, \text{ то есть } \frac{BC}{\sin A} = 2R.$$

Что и требовалось доказать.



Задача 8. Докажите, что во всяком треугольнике $S = \frac{abc}{4R}$.

Решение:

Так как площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними (см. задачу 2), то

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C.$$

В задаче 7 доказано, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности, то есть

$$\frac{c}{\sin C} = 2R, \text{ откуда } \sin C = \frac{c}{2R}.$$

Таким образом,

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

Что и требовалось доказать.

Планиметрия

I. Треугольники. Равенство треугольников

Треугольник — многоугольник с тремя сторонами. Стороны и углы треугольника называются его элементами.

Классификация треугольников по углам:

- 1) *остроугольный треугольник* — треугольник, в котором все углы острые;
- 2) *прямоугольный треугольник* — треугольник, в котором один из углов прямой;
- 3) *тупоугольный треугольник* — треугольник, в котором один из углов тупой.

Классификация треугольников по сторонам:

- 1) *разносторонний треугольник* — треугольник, в котором все стороны имеют различные длины;
- 2) *равнобедренный треугольник* — треугольник, в котором две стороны равны;
- 3) *равносторонний треугольник* — треугольник, в котором все стороны равны.

Соотношение между сторонами и углами треугольника:

- 1) против большей стороны лежит больший угол;
- 2) против равных сторон лежат равные углы;
- 3) квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними (теорема косинусов);
- 4) стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов (теорема синусов).

Свойства углов треугольника:

- 1) сумма углов любого треугольника равна 180° ;
- 2) внешний угол любого треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним;
- 3) в равнобедренном треугольнике углы при основании равны, причем они могут быть только острыми;
- 4) в прямоугольном треугольнике сумма острых углов равна 90° .

Признаки равенства треугольников

Первый признак: если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Второй признак: если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Третий признак: если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

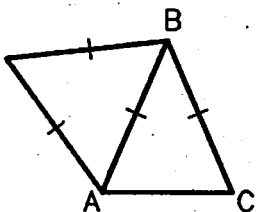
Признаки равенства прямоугольных треугольников

Признак равенства по гипотенузе и острому углу: если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

Признак равенства по катету и противолежащему углу: если катет и противолежащий ему угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

Признак равенства по гипотенузе и катету: если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого треугольника, то такие треугольники равны.

Задача 1. Периметр равнобедренного треугольника ABC равен 42 см, его основание AC равно 12 см. Найти периметр равностороннего треугольника ABD .



Решение:

Боковая сторона AB равнобедренного треугольника ABC служит стороной равностороннего треугольника ABD . Зная периметр равнобедренного треугольника и основание, найдем сумму боковых сторон:

$$AB + BC = P_{ABC} - AC = 42 - 12 = 30 \text{ (см)}.$$

Так как боковые стороны равнобедренного треугольника равны, то

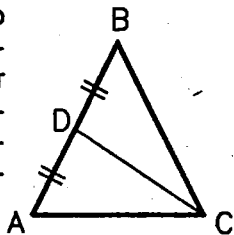
$$AB = 30 : 2 = 15 \text{ (см)}.$$

В равностороннем треугольнике все стороны равны, поэтому, зная длину одной его стороны, можем найти периметр этого треугольника:

$$P_{ABD} = 15 \cdot 3 = 45 \text{ (см)}.$$

Ответ: $P_{ABD} = 45$ см.

Задача 2. Основание равнобедренного треугольника равно 8 см; медиана, проведенная из вершины основания, делит его на два треугольника, причем периметр одного из них на 2 см больше другого. Найти длину боковой стороны треугольника.



Решение:

Пусть дан равнобедренный треугольник ABC , в котором основание AC равно 8 см; DC — медиана, делящая боковую сторону AB пополам. Рассмотрим треугольники ADC и CDB :

$$P_{ADC} = AC + DA + DC;$$

$$P_{CDB} = DC + DB + BC.$$

Так как $AD = DB = \frac{1}{2}AB$, $AB = BC$, то

$$P_{ADC} = AC + \frac{1}{2}AB + DC;$$

$$P_{BCD} = DC + \frac{1}{2}AB + BC.$$

Пусть периметр треугольника ADC больше периметра треугольника DCB на 2 см, тогда

$$P_{ADC} - P_{DCB} = 2 \text{ (см)};$$

$$AC + \frac{1}{2}AB + DC - (DC + \frac{1}{2}AB + BC) = 2 \text{ (см)};$$

$$AC + \frac{1}{2}AB + DC - DC - \frac{1}{2}AB - BC = 2 \text{ (см)};$$

$$AC - AB = 2 \text{ (см)}.$$

Так как AC равно 8 см по условию, то
 $AB = 6 \text{ (см)}$.

Пусть периметр треугольника DCB больше периметра ADC на 2 см, тогда:

$$P_{DCB} - P_{ADC} = 2 \text{ (см)};$$

$$DC + \frac{1}{2}AB + AB - (AC + \frac{1}{2}AB + DC) = 2 \text{ (см)};$$

$$DC + \frac{1}{2}AB + AB - AC - \frac{1}{2}AB - DC = 2 \text{ (см)};$$

$$AB - AC = 2 \text{ (см)}.$$

Так как AC равно 8 см по условию, то
 $AB = 10 \text{ (см)}$.

Ответ: 6 см или 10 см.

Задача 3. Один из внешних углов прямоугольного треугольника равен 127° . Найти острые углы этого треугольника.

Решение:

Если один из внешних углов прямоугольного треугольника равен 127° , то один из острых углов этого треугольника равен:

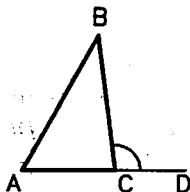
$$180^\circ - 127^\circ = 53^\circ.$$

Так как сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90° , то второй острый угол этого треугольника равен:

$$90^\circ - 53^\circ = 37^\circ.$$

Ответ: 53° , 37° .

Задача 4. Найти углы треугольника, если один угол больше другого угла треугольника на $22^{\circ}32'$, внешний угол, не смежный с ними, равен $97^{\circ}30'$.



Решение:

Пусть угол $\angle A$ больше угла $\angle B$ на $22^{\circ}32'$, а внешний угол $\angle BCD$, смежный с углом $\angle C$ треугольника ABC , равен $97^{\circ}30'$. Найдем угол $\angle C$:

$$\angle C = 180^{\circ} - 97^{\circ}30' = 82^{\circ}30'$$

Так как внешний угол любого треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним, то

$$\angle BCD = \angle A + \angle B = 97^{\circ}30'$$

Зная, что угол $\angle A$ больше угла $\angle B$ на $22^{\circ}32'$, т.е.

$$\angle A = \angle B + 22^{\circ}32', \text{ получаем:}$$

$$\angle B + \angle B + 22^{\circ}32' = 97^{\circ}30'$$

$$2\angle B = 97^{\circ}30' - 22^{\circ}32' = 74^{\circ}58'$$

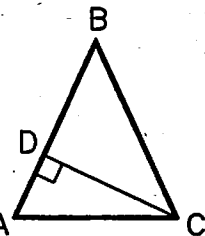
$$\angle B = 37^{\circ}29'.$$

Найдем угол $\angle A$:

$$\angle A = 97^{\circ}30' - 37^{\circ}29' = 60^{\circ}1'.$$

Ответ: $82^{\circ}30'$; $37^{\circ}29'$; $60^{\circ}1'$.

Задача 5. В равнобедренном треугольнике угол между основанием и высотой, проведенной к боковой стороне, равен 25° . Найти углы этого равнобедренного треугольника.



Решение:

Пусть дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . CD — высота треугольника ABC , опущенная из вершины C на сторону AB . Угол $\angle DCA$ по условию равен 25° .

Рассмотрим треугольник ACD . Так как CD — высота, то треугольник ACD прямоугольный. Один его острый угол равен 25° , найдем другой угол $\angle DAC$:

$$\angle DAC = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ.$$

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC . Угол $\angle BAC$ и угол $\angle BCA$ — углы при основании, которые равны между собой, т.е.

$$\angle BAC = \angle BCA = 65^\circ.$$

Найдем оставшийся угол треугольника ABC :

$$\angle B = 180^\circ - 65^\circ \cdot 2 = 50^\circ.$$

Ответ: 65° ; 65° ; 50° .

Задача 6. На рисунке $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 5 = \angle 6$. Доказать, что $\angle 3 = \angle 4$.

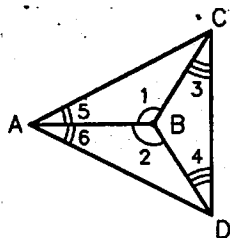
Решение:

Рассмотрим треугольник ABC и треугольник ABD . Так как по условию $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 5 = \angle 6$, а сторона AB — общая, то треугольники равны по второму признаку равенства треугольников, т.е. $\triangle ABC = \triangle ABD$.

Значит, сторона BC равна стороне BD .

Рассмотрим треугольник BCD . В этом треугольнике сторона BC равна стороне BD , значит, треугольник является равнобедренным. DC — основание треугольника BCD . Так как в равнобедренном треугольнике углы при основании равны, то $\angle 3 = \angle 4$.

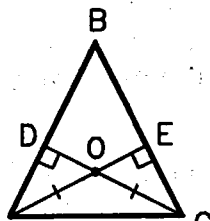
Что и требовалось доказать.



Задача 7. Если в треугольнике проведены две высоты и отрезки их от точки пересечения до вершины равны, то треугольник равнобедренный. Доказать.

Решение:

Пусть дан треугольник ABC . DC — высота, опущенная из вершины C на сторону AB . AE — высота, опущенная из вершины A на сторону BC . O — точка пересечения высот. По условию отрезок AO равен отрезку OC . Значит, треугольник AOC — равнобедренный. Так как в равнобедренном треугольнике углы при основании равны, то



$$\angle OAC = \angle OCA$$

Рассмотрим треугольники DOA и EOC . Треугольники являются прямоугольными, так как

$$DC \perp AB; AE \perp BC.$$

Гипотенуза AO треугольника DOA равна гипотенузе CO треугольника EOC по условию. Углы $\angle DOA$ и $\angle EOC$ равны, как вертикальные. Значит, треугольник DOA равен треугольнику EOC по гипотенузе и острому углу. Из равенства треугольников следует, что угол $\angle DAO$ равен углу $\angle ECO$.

Рассмотрим треугольник ABC . В этом треугольнике

$$\angle BAC = \angle DAO + \angle OAC;$$

$$\angle BCA = \angle ECO + \angle OCA.$$

Так как

$$\angle DAO = \angle ECO; \angle OAC = \angle OCA, \text{ то } \angle BAC = \angle BCA.$$

В треугольнике против равных углов лежат равные стороны, значит

$$AB = BC$$

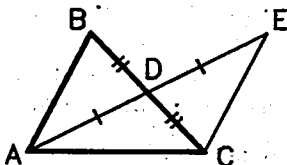
Следовательно, треугольник ABC — равнобедренный. Что и требовалось доказать.

Задача 8. Медиана AD треугольника ABC продолжена за основание BC на отрезок DE , и точка E соединена с точкой C . Найти величину угла $\angle ACE$, если $\angle ACB = 47^\circ$ и $\angle BAC = 62^\circ$.

Решение:

Рассмотрим треугольник ABC . В этом треугольнике известны величины двух углов. Так как сумма углов треугольника равна 180° , то можем найти третий угол:

$$\angle ABC = 180^\circ - (47^\circ + 62^\circ) = 71^\circ.$$



Рассмотрим треугольники ABD и ECD : $BD = DC$; $AD = DE$ по условию, $\angle BDA = \angle CDE$, как вертикальные. Значит, по первому признаку равенства треугольников:

$$\triangle ADB = \triangle EDC.$$

Из равенства треугольников следует, что

$$\angle ABD = \angle DCE = 71^\circ.$$

Искомый угол $\angle ACE$ равен сумме углов $\angle ACD$ и $\angle DCE$, т.е.

$$\angle ACE = \angle ACD + \angle DCE = 47^\circ + 71^\circ = 118^\circ.$$

Ответ: $\angle ACE = 118^\circ$.

Задача 9. В равнобедренном треугольнике ABC на основании AC отложены равные отрезки AE и DC . Доказать, что треугольник BED равнобедренный.

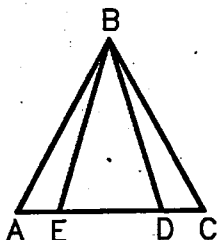
Решение:

Так как треугольник ABC равнобедренный, то его боковые стороны и углы при основании равны, т.е. $AB = BC$; $\angle A = \angle C$.

Рассмотрим треугольники ABE и BCD : $AB = BC$; $\angle A = \angle C$; $AE = DC$. Значит, треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. Из равенства треугольников следует, что $BE = BD$.

Получили, что в треугольнике равны две его стороны, значит, треугольник равнобедренный.

Что и требовалось доказать.



Задача 10. На рисунке $AD = AE$, $\angle CAD = \angle BAE$. Доказать, что $BD = CE$.

Решение:

Рассмотрим треугольник ABC . Так как две стороны треугольника равны, то треугольник равнобедренный. А в равнобедренном треугольнике углы при основании равны, значит, $\angle ADE = \angle AED$.

Рассмотрим треугольники ADC и AEB : $AD = AE$; $\angle CAD = \angle BAE$; $\angle ADC = \angle AEB$. Значит, треугольники равны по второму признаку равенства треугольников.

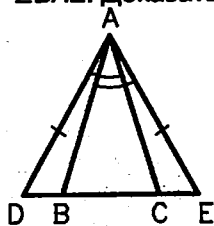
Из равенства треугольников следует, что $DC = BE$.

Рассмотрим отрезки DB и CE :

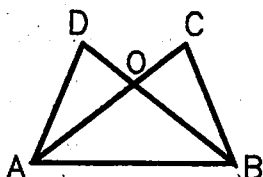
$$DB = DC - BC, CE = BE - BC.$$

Очевидно, что отрезки DB и CE равны.

Что и требовалось доказать.



Задача 11. В треугольниках ADB и BCA сторона AB — общая, $AD = CB$, $DB = AC$, стороны AC и DB пересекаются в точке O . Доказать $AO = OB$.



Решение:

Рассмотрим треугольники ADB и BCA : $AD = BC$, $DB = CA$, AB — общая сторона. Значит, треугольники равны по третьему признаку равенства треугольников. Из равенства треугольников следует, что $\angle CAB = \angle DBA$.

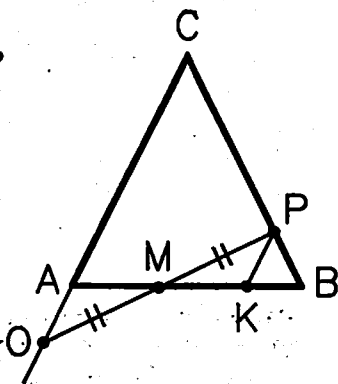
Рассмотрим треугольник AOB . В этом треугольнике угол $\angle OAB$ равен углу $\angle OBA$. Так как в треугольнике против равных углов лежат равные стороны, то сторона OB равна стороне OA , т.е. треугольник AOB — равнобедренный.

Что и требовалось доказать.

Задача 12. Через точку M , взятую на основании AB равнобедренного треугольника ABC , проведена прямая, пересекающая боковую сторону BC и продолжение боковой стороны AC в точках P и O так, что отрезки MP и MO оказываются равными. Доказать равенство отрезков AO и PB .

Решение:

Проведем через точку P прямую, параллельную прямой AC . Точка K — точка пересечения этой прямой и стороны AB . Рассмотрим треугольники MOA и MPK : $OM = MP$ по условию, $\angle AMO = \angle KMP$, как вертикальные, $\angle AOM = \angle KPM$, как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AC и PK и секущей OP . Значит, треугольники равны по второму признаку равенства треугольников. Из равенства треугольников следует, что $AO = PK$, $\angle OAM = \angle MKP$.



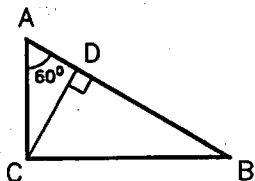
Пусть углы при основании равнобедренного треугольника ABC равны α , т.е.

$\angle CAB = \angle CBA = \alpha$. Тогда $\angle OAM = \angle MKP = 180^\circ - \alpha$.

Рассмотрим треугольник KPB . Угол $\angle PBK$ равен α . Угол $\angle PKB$ — смежный с углом $\angle MKP$. Значит, угол $\angle PKB$ равен α . Так как в треугольнике против равных углов лежат равные стороны, то сторона PK равна стороне PB . Так как отрезок AO равен отрезку PK , а отрезок PK равен отрезку PB , то отрезки AO и PB равны.

Что и требовалось доказать.

Задача 13. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 12 см, а угол $\angle A$ равен 60° . CD — высота, опущенная из вершины прямого угла $\angle C$ на гипотенузу AB . Найти длину отрезка AD .



Решение:

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC . Угол $\angle A$ равен 60° . Так как сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90° , то угол $\angle B$ равен 30° . Так как в прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла $\angle B = 30^\circ$ равен половине гипотенузы, то катет AC равен 6 см.

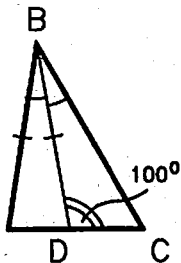
Рассмотрим прямоугольный треугольник CAD . Гипотенуза AC равна 6 см. Так как угол $\angle A$ равен 60° , то угол $\angle ACD$ равен 30° . Так как катет AD лежит против угла в 30° , то он равен половине гипотенузы, т.е. $AD = 3$ см.

Ответ: $AD = 3$ см.

Задача 14. Одна из биссектрис треугольника составляет угол 100° с его стороной и равна одной из его сторон, исходящих из той же вершины. Найти все углы треугольника.

Решение:

Рассмотрим треугольник ABC . BD — биссектриса угла $\angle B$ треугольника ABC . По условию угол $\angle BDC$ равен 100° . Биссектриса BD не



может быть равна стороне BC треугольника ABC , так как в противном случае в равнобедренном треугольнике DBC угол при основании будет тупым, что невозможно. Значит, биссектриса BD равна стороне AB треугольника ABC .

Рассмотрим треугольник ABD . Так как сторона AB равна стороне BD , то треугольник равнобедренный. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Значит, угол $\angle BAD$ равен углу $\angle BDA$, смежному с углом $\angle BDC$. Имеем:

$$\angle BAD = \angle BDA = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ.$$

Так как сумма углов треугольника равна 180° , то $\angle BAD = 180^\circ - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ$.

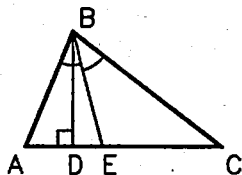
Рассмотрим треугольник ABC . Угол $\angle A$ равен 80° . Так как BD — биссектриса угла $\angle B$, а угол $\angle ABD$ равен 20° , то $\angle B = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$.

Найдем угол $\angle C$:

$$\angle C = 180^\circ - (80^\circ + 40^\circ) = 60^\circ.$$

Ответ: 80° ; 40° ; 60° .

Задача 15. Доказать, что в любом треугольнике биссектриса одного из углов образует с высотой, проведенной из той же вершины, угол, равный полуразности двух других углов.



Решение:

Рассмотрим треугольник ABC . BE — биссектриса угла $\angle B$, BD — высота, опущенная из вершины B на сторону AC . Пусть угол $\angle A$ равен α , угол $\angle B$ равен β , угол $\angle C$ равен γ . Так как BE — биссектриса угла $\angle B$, то

$$\angle ABE = \angle EBC = \frac{\beta}{2}.$$

В прямоугольном треугольнике ABD угол $\angle A$ равен α , тогда

$$\angle ABD = 90^\circ - \alpha.$$

Угол $\angle BDE$ — угол между высотой BD и биссектрисой BE треугольника ABC .

$$\angle DBE = \angle ABE - \angle ABD = \frac{\beta}{2} - (90^\circ - \alpha).$$

Так как сумма углов треугольника равна 180° , то $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$.

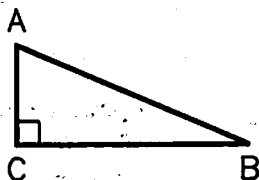
Получаем:

$$\begin{aligned}\angle DBE &= \frac{180^\circ - (\alpha + \gamma)}{2} - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} - 90^\circ + \alpha = \\ &= \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha - \gamma}{2}, \text{ т.е.}\end{aligned}$$

$$\angle DBE = \frac{1}{2} \cdot (\angle A - \angle C).$$

Что и требовалось доказать.

Задача 16. Один из катетов прямо-угольного треугольника равен 12 см, а гипотенуза больше другого катета на 8 см. Найти гипотенузу.



Решение:

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC : AB — гипотенуза, AC и CB — катеты. Обозначим гипотенузу AB через x , тогда

$$AC = x - 8.$$

Из теоремы Пифагора известно, что квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов, т.е.

$$AB^2 = AC^2 + CB^2.$$

Получаем уравнение:

$$x^2 = (x - 8)^2 + 12^2$$

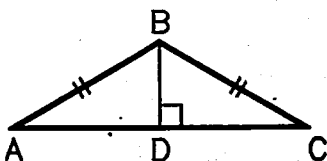
Из этого уравнения находим, что

$$x = 13.$$

Получили, что гипотенуза AB треугольника ABC равна 13 см.

Ответ: 13 см.

Задача 17. Найти боковую сторону равнобедренного треугольника, если основание равно 12 см, а угол, противолежащий основанию, равен 120° .



Решение:

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC . Основание AC равно 12 см, угол $\angle ABC$ равен 120° . Проведем в треугольнике ABC высоту BD , которая является медианой и биссектрисой. Поэтому $AD = DC = 6$ см;

$$\angle ABD = \angle DBC = 120^\circ : 2 = 60^\circ.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABD . Так как один его острый угол равен 60° , то другой угол будет равен 30° , т.е. $\angle BAD = 30^\circ$.

Так как катет BD лежит против угла в 30° , то

$$BD = \frac{AB}{2}.$$

Обозначим гипотенузу AB через x , тогда

$$BD = \frac{x}{2}.$$

По теореме Пифагора

$$AB^2 = AD^2 + BD^2.$$

Получаем уравнение

$$x^2 = 6^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Из этого уравнения находим:

$$x = 4\sqrt{3}.$$

Получили, что гипотенуза AB треугольника ABD равна $4\sqrt{3}$ см.

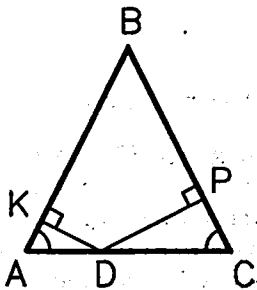
Значит, боковая сторона равнобедренного треугольника ABC равна $4\sqrt{3}$ см.

Ответ: $4\sqrt{3}$ см.

Задача 18. Докажите, что сумма расстояний от точки на основании равнобедренного треугольника до боковых сторон не зависит от положения этой точки.

Решение:

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием AC .



Возьмем на основании произвольную точку D и опустим из этой точки перпендикуляры на боковые стороны треугольника ABC . Длина отрезка DK — расстояние от точки D до боковой стороны AB . Длина отрезка DP — расстояние от точки D до боковой стороны BC . Докажем, что сумма DK и DP не зависит от положения точки D .

Пусть длина основания AC равна a , а углы при основании равнобедренного треугольника ABC равны α . Обозначим длину отрезка AD через x , тогда длина отрезка DC будет равна $a - x$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ADK . Выразим катет KD через гипотенузу AD и острый угол $\angle A$:

$$KD = x \cdot \sin \alpha$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник DPC . Выразим катет DP через гипотенузу DC и острый угол $\angle C$:

$$DP = (a - x) \cdot \sin \alpha$$

Найдем сумму KD и DP .

$$KD + DP = x \cdot \sin \alpha + (a - x) \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \alpha$$

Доказали, что сумма расстояний от точки на основании равнобедренного треугольника до боковых сторон не зависит от положения этой точки.

Что и требовалось доказать.

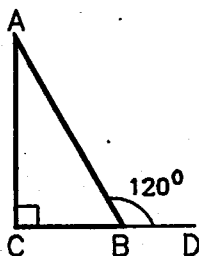
Задача 19. Один из внешних углов прямоугольного треугольника равен 120° . Найдите большую и меньшую стороны треугольника, если их сумма равна 24 см.

Решение:

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC . Угол $\angle ABD$ — внешний угол этого треугольника, равный 120° .

Значит, угол $\angle ABC$ равен 60° , а угол $\angle BAC$ равен 30° .

Катет CB лежит против угла в 30° , значит, он равен половине гипотенузы AB . Обозначим катет CB через x , тогда гипотенуза AB будет равна $2x$. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов, значит, гипотенуза AB — большая сторона треугольника ABC . Так как катет CB лежит против меньшего угла треугольни-



ка ABC , значит, он является меньшей стороной этого треугольника. Зная, что сумма меньшей и большей сторон треугольника ABC равна 24 см, составим следующее уравнение:

$$x + 2x = 24$$

Из этого уравнения находим, что

$$x = 8; 2x = 16$$

Получили, что катет CB равен 8 см, а гипотенуза AB равна 16 см.

Ответ: 8 см, 16 см.

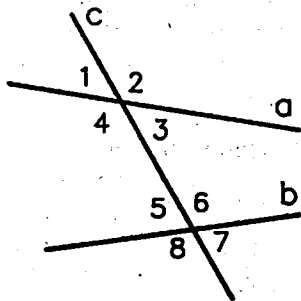
II. Параллельные прямые

Параллельными прямыми называются прямые, которые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

Названия углов, получаемых при пересечении двух прямых третьей

Пусть даны две прямые a и b , которые пересечены третьей прямой c . Прямая c называется *секущей*. Тогда получаются восемь углов, которые попарно носят следующие названия:

- 1) *соответственные углы*: $\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 4$ и $\angle 8$; $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 3$ и $\angle 7$;
- 2) *внешние накрест лежащие углы*: $\angle 1$ и $\angle 7$; $\angle 2$ и $\angle 8$;
- 3) *внутренние накрест лежащие углы*: $\angle 3$ и $\angle 5$; $\angle 4$ и $\angle 6$;
- 4) *внутренние односторонние углы*: $\angle 3$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 5$.



Признаки параллельности двух прямых:

1. Если при пересечении двух прямых третьей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.
2. Если при пересечении двух прямых третьей соответственные углы равны, то прямые параллельны.
3. Если при пересечении двух прямых третьей сумма односторонних углов равна 180° , то прямые параллельны.

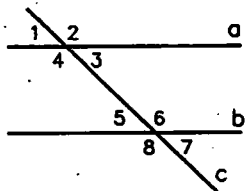
Аксиома параллельных прямых

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Следствия из аксиомы параллельных прямых

1. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.
2. Если каждая из двух прямых параллельна одной и той же третьей прямой, то они параллельны между собой.

Задача 1. Две параллельные прямые пересечены третьей прямой. Один из внутренних углов равен $115^\circ 30'$. Чему равен каждый из остальных углов?



Решение:

Пусть прямые a и b параллельны, прямая c — секущая. Угол $\angle 4$ равен $115^\circ 30'$. Найдем остальные углы. Если параллельные прямые пересечены третьей, то накрест лежащие и соответственные углы равны. Значит:

$\angle 4 = \angle 6 = 115^\circ 30'$, как внутренние накрест лежащие углы;

$\angle 4 = \angle 8 = 115^\circ 30'$, как соответственные углы.

Так как угол $\angle 4$ смежный с углом $\angle 1$ и с углом $\angle 3$, то $\angle 1 = \angle 3 = 180^\circ - 115^\circ 30' = 64^\circ 30'$.

Углы $\angle 4$ и $\angle 2$ вертикальные, значит, они равны, т.е.

$\angle 2 = 115^\circ 30'$

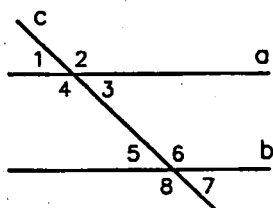
Так как угол $\angle 6$ смежный с углом $\angle 5$ и с углом $\angle 7$, то $\angle 5 = \angle 7 = 180^\circ - 115^\circ 30' = 64^\circ 30'$.

Ответ: $\angle 2 = \angle 6 = \angle 8 = 115^\circ 30'$; $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = 64^\circ 30'$.

Задача 2. Две параллельные прямые пересечены третьей. Найти полученные углы, если:

а) внутренние односторонние углы относятся как 3:5;

б) один из внутренних односторонних углов меньше другого на $39^\circ 42'$.



Решение:

- а) Пусть прямые a и b параллельны, прямая c — секущая.

По условию $\angle 3 : \angle 6 = 3 : 5$.

Найдем остальные углы.

Так как прямые a и b параллельны, то сумма внутренних односторонних углов равна 180° . Внутренние односторонние углы $\angle 3$ и $\angle 6$ относятся как 3:5, т.е. на угол $\angle 3$ приходится 3 части, а на угол $\angle 6$ приходится 5 частей.

Обозначим одну часть за x , тогда:

$$3 = 3x; 6 = 5x$$

Составим уравнение:

$$3x + 5x = 180^\circ.$$

Из этого уравнения находим:

$$x = 22,5^\circ.$$

Тогда

$$3x = 67,5^\circ; 5x = 112,5^\circ.$$

Так как углы $\angle 1$ и $\angle 3$ вертикальные, то

$$\angle 1 = 67,5^\circ.$$

Так как $\angle 3$ смежный с углом $\angle 2$ и с углом $\angle 4$, то

$$\angle 2 = \angle 4 = 112,5^\circ.$$

Так как углы $\angle 6$ и $\angle 8$ вертикальные, то

$$\angle 6 = 112,5^\circ.$$

Так как угол $\angle 6$ смежный с углом $\angle 5$ и с углом $\angle 7$, то

$$\angle 5 = \angle 7 = 67,5^\circ.$$

Ответ: $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 67,5^\circ$;
 $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 112,5^\circ$.

- б) Пусть прямые a и b параллельны, прямая c — секущая.

По условию угол $\angle 3$ меньше угла $\angle 6$ на $39^\circ 42'$. Найдем остальные углы.

Так как прямые a и b параллельны, то сумма внутренних односторонних углов равна 180° . Обозначим угол $\angle 3$ через x , тогда угол $\angle 6$ будет равен $x + 39^\circ 42'$. Составим уравнение:

$$x + x + 39^\circ 42' = 180^\circ.$$

Из этого уравнения находим:

$$x = 70^\circ 9'$$

Тогда

$$x + 39^{\circ}42' = 109^{\circ}51'.$$

$$\text{Значит, } \angle 3 = 70^{\circ}9'; \angle 6 = 109^{\circ}51'.$$

Рассуждая, как и в случае «а», находим:

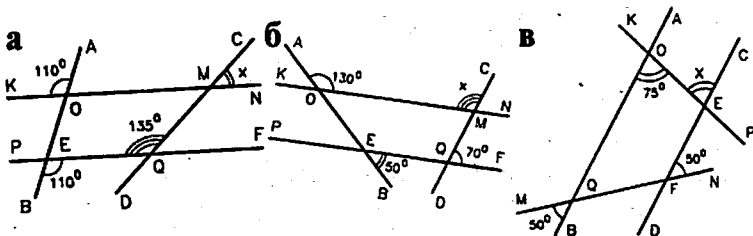
$$\angle 3 = \angle 1 = \angle 5 = \angle 7 = 70^{\circ}9';$$

$$\angle 6 = \angle 2 = \angle 4 = \angle 8 = 109^{\circ}51'.$$

Ответ: $\angle 3 = \angle 1 = \angle 5 = \angle 7 = 70^{\circ}9';$

$$\angle 6 = \angle 2 = \angle 4 = \angle 8 = 109^{\circ}51'.$$

Задача 3. Найти величину углов x :



Решение:

а) Рассмотрим прямые KN и PF и секущую AB . По условию $\angle AOK = \angle BEF$, а они являются внешними накрест лежащими. Значит, прямые KN и PF параллельны.

Рассмотрим параллельные прямые KN и PF и секущую CD . Если две параллельные прямые пересечены третьей, то сумма внутренних односторонних углов равна 180° . Углы $\angle PQC$ и $\angle KMD$ являются внутренними односторонними углами при параллельных прямых KN и PF и секущей CD , значит, их сумма равна 180° , т.е.

$$\angle PQC + \angle KMD = 180^{\circ}.$$

Отсюда находим угол $\angle KMD$:

$$\angle KMD = 180^{\circ} - 135^{\circ} = 45^{\circ}.$$

Так как углы $\angle KMD$ и $\angle CMN$ вертикальные, то $\angle CMN = 45^{\circ}$.

Ответ: $x = 45^{\circ}$.

б) Рассмотрим прямые KN и PF и секущую BA . Углы $\angle AON$ и $\angle BEF$ — внешние односторонние при этих прямых. Так как они равны по условию, то прямые KN и PF параллельны.

Рассмотрим параллельные прямые KN и PF и секущую CD . Углы $\angle KMD$ и $\angle CQF$ внутренние накрест лежащие при параллельных прямых KN и PF и секущей CD , значит, они равны, т.е.

$$\angle KMD = \angle CQF = 70^\circ.$$

Так как углы $\angle KMD$ и $\angle KMC$ смежные, то их сумма равна 180° , т.е.

$$\angle KMD + \angle KMC = 180^\circ.$$

Отсюда находим угол $\angle KMC$:

$$\angle KMC = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

Ответ: $x = 110^\circ$.

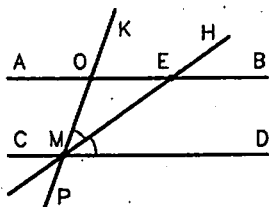
в) Рассмотрим прямые AB и CD и секущую MN . Углы $\angle MQB$ и $\angle CFN$ внешние накрест лежащие при этих прямых. Так как они равны, то прямые AB и CD параллельны.

Рассмотрим параллельные прямые AB и CD и секущую KP . Углы $\angle BOR$ и $\angle CEK$ внутренние накрест лежащие при этих прямых, значит, они равны, т.е.

$$\angle BOR = \angle CEK = 75^\circ.$$

Ответ: $x = 75^\circ$.

Задача 4. Один из внутренних накрест лежащих углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей, равен 70° . Под каким углом биссектриса этого угла пересекает другую прямую?



Решение:

Рассмотрим параллельные прямые AB и CD и секущую MN . Так как углы $\angle AEM$ и $\angle HMD$ внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей MN , то они равны, т.е.

$$\angle AEM = \angle HMD = 35^\circ.$$

Величина угла $\angle AEM$ есть величина угла, под которым биссектриса угла $\angle KMD$ пересекает прямую AB .

Ответ: 35° .

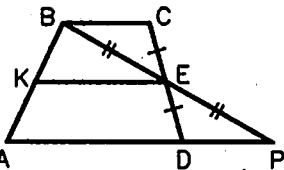
Задача 5. На рисунке $CE = ED$; $BE = EP$; $KE \parallel AD$. Докажите, что $KE \parallel BC$.

Решение:

Рассмотрим треугольники BEC и PED : $BE = EP$, $CE = ED$ по условию, $\angle BEC = \angle PED$ как вертикальные. Значит, треугольник BEC равен треугольнику PED по первому признаку равенства треугольников. Из равенства треугольников следует, что угол $\angle CBE$ равен углу $\angle EPD$. Эти углы являются внутренними накрест лежащими при прямых BC и AP и секущей BP . Так как углы равны, то прямые BC и AP параллельны.

Так как $KE \parallel AD$, $BC \parallel AD$, то $KE \parallel BC$ (если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой).

Что и требовалось доказать.

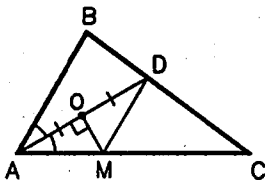


Задача 6. Прямая, проходящая через середину биссектрисы AD треугольника ABC и перпендикулярная к AD , пересекает сторону AC в точке M . Докажите, что MD параллельна AB .

Решение:

Сделаем рисунок к задаче:

Рассмотрим треугольник ABC . AD — биссектриса угла $\angle A$ треугольника ABC . Точка O — середина отрезка AD . Отрезок OM перпендикулярен отрезку AD .



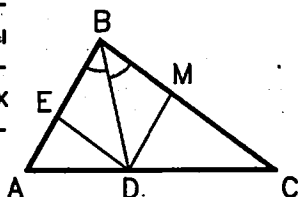
Рассмотрим прямоугольные треугольники AOM и DOM : катет AO равен катету OD , OM — общий катет. Значит, треугольники равны по двум катетам. Из равенства треугольников следует, что угол $\angle OAM$ равен углу $\angle ODM$. А угол $\angle OAM$ равен углу $\angle OAB$, так как AD — биссектриса. Получили:

$$\angle BAO = \angle ODM.$$

Углы $\angle BAO$ и $\angle ODM$ внутренние накрест лежащие при прямых AB и MD и секущей AD . Так как углы равны, то прямые AB и MD параллельны.

Что и требовалось доказать.

Задача 7. Через основание биссектрисы треугольника проведены прямые, параллельные его сторонам. Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные между сторонами треугольника, равны.



Решение:

Рассмотрим треугольник ABC . Отрезок BD — биссектриса угла $\angle B$. Прямая ED параллельна прямой BC . Прямая DM параллельна прямой AB . Необходимо доказать, что отрезки ED и DM равны.

Рассмотрим параллельные прямые AB и DM и секущую BD . Угол $\angle EBD$ равен углу $\angle BDM$, как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых.

Рассмотрим параллельные прямые BC и ED и секущую BD . Угол $\angle MBD$ равен углу $\angle EDB$, как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых.

Так как BD — биссектриса угла $\angle B$ треугольника ABC , то угол $\angle EBD$ равен углу $\angle MBD$.

Получили:

$$\angle EBD = \angle BDM = \angle MBD = \angle EDB$$

Рассмотрим треугольник BED и BMC . Треугольники будут равны по второму признаку равенства треугольников: $\angle EBD = \angle MBD$; $\angle EDB = \angle MDB$; BD — общая сторона. А в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, т.е.

$$ED = DM$$

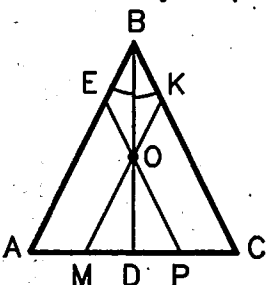
Что и требовалось доказать.

Задача 8. Через точку, взятую на биссектрисе треугольника, проведем прямые, параллельные его сторонам. Отрезки этих прямых, заключенные между сторонами треуголь-

ника, оказались равными. Докажите, что в этом случае треугольник равнобедренный.

Решение:

Рассмотрим треугольник ABC .
Отрезок BD — биссектриса угла $\angle B$.
Прямая EP параллельна прямой BC .
Прямая MK параллельна прямой AB .
Точка O — точка пересечения прямых BD , MK и EP .



Отрезки EP и MK равны по условию. Необходимо доказать, что треугольник ABC равнобедренный.

Треугольник BEO равен треугольнику BKO по второму признаку равенства треугольников (см. задачу 8). Из равенства треугольников следует, что

$$EO = KO.$$

По условию $EP = KM$.

Рассмотрим отрезки MO и PO :

$$MO = MK - KO;$$

$$PO = EP - EO.$$

Очевидно, что отрезки MO и PO равны.

Значит, треугольник MPO равнобедренный. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, т.е.

$$\angle OMP = \angle OPM.$$

Рассмотрим углы $\angle CMK$ и $\angle CAB$. Они равны как соответственные при параллельных прямых AB и MK и секущей AC .

Рассмотрим углы $\angle EPA$ и $\angle BCA$. Они равны как соответственные при параллельных прямых EP и BC и секущей AC .

Получили:

$$\angle CMK = \angle CAB = \angle EPA = \angle BCA.$$

В треугольнике ABC углы $\angle BAC$ и $\angle BCA$ равны, значит, треугольник равнобедренный.

Что и требовалось доказать.

III. Четырехугольники

Четырехугольник — многоугольник, имеющий четыре стороны и четыре угла. Четырехугольники бывают выпуклыми и невыпуклыми. В школьном курсе математики изучаются только выпуклые четырехугольники, которые для краткости называются просто четырехугольниками.

Стороны четырехугольника, имеющие общую вершину, называются соседними. Стороны четырехугольника, не имеющие общих вершин, называются противоположными. Вершины, не принадлежащие одной стороне, называются противоположными. Отрезки, соединяющие противоположные вершины, называются диагоналями. Четырехугольник имеет две диагонали. Сумма внутренних углов четырехугольника равна 360° , и сумма внешних углов равна 360° . Периметром четырехугольника называется сумма длин его сторон.

Частными случаями четырехугольников являются трапеция, параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат.

Параллелограмм — четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Свойства параллелограмма

1. Противоположные стороны и противоположные углы параллелограмма равны.
2. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.
3. Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам, эта точка является центром симметрии параллелограмма.
4. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон, т.е.

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2),$$

где d_1 и d_2 — диагонали, a и b — стороны параллелограмма.

Признаки параллелограмма

1. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.
3. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Высотой параллелограмма называется перпендикуляр, опущенный из вершины параллелограмма на прямую, содержащую противоположную сторону.

Ромб — параллелограмм, у которого все стороны равны. Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма и дополнительно к ним следующими свойствами:

- 1) диагонали ромба взаимно перпендикулярны;
- 2) диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов;
- 3) прямые, содержащие диагонали ромба, являются его осями симметрии;
- 4) в любой ромб можно вписать окружность, центр этой окружности лежит на пересечении диагоналей ромба.

Прямоугольник — параллелограмм, у которого все углы прямые. Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма и дополнительно к ним следующими свойствами:

- 1) перпендикуляр, проходящий через середины противоположных сторон прямоугольника, является его осью симметрии;
- 2) прямоугольник имеет две оси симметрии;
- 3) диагонали прямоугольника равны.

Квадрат — прямоугольник, у которого все стороны равны. Или ромб, у которого все углы прямые. Поэтому квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

Трапеция — выпуклый четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны. Параллельные стороны называются основаниями, а непараллельные стороны называются боковыми сторонами.

Перпендикуляр, опущенный из точки верхнего основания на нижнее, называется *высотой трапеции*.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется *средней линией трапеции*. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

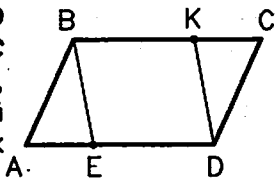
Трапеция, у которой равны боковые стороны, называется *равнобедренной*.

Свойства равнобедренной трапеции:

- 1) углы при основании равны;
- 2) диагонали равнобедренной трапеции равны;
- 3) сумма противоположных углов равна 180° ;
- 4) имеет ось симметрии, которая проходит через середины оснований;
- 5) около равнобедренной трапеции можно описать окружность, центр которой лежит на пересечении серединных перпендикуляров боковой стороны и основания.

Трапеция называется *прямоугольной*, если одна из боковых ее сторон перпендикулярна основаниям. В прямоугольной трапеции высота равна боковой стороне, перпендикулярной основаниям.

Задача 1. В параллелограмме $ABCD$ угол $\angle B$ тупой. На сторонах AD и BC взяты соответственно точки E и K так, что прямая BE параллельна прямой DK . Доказать, что четырехугольник $BEDK$ — параллелограмм.



Решение:

В параллелограмме $ABCD$ противоположные стороны параллельны, т.е.

$$BC \parallel AD.$$

Значит, в четырехугольнике $BEDK$ противоположные стороны BK и ED параллельны. Две другие противоположные стороны BE и KD параллельны по условию. По определению параллелограмма четырехугольник $BEDK$ параллелограмм.

Что и требовалось доказать.

Задача 2. Найти длины сторон параллелограмма, если:

- а) периметр равен 46 см, а одна сторона больше другой на 3 см;
- б) периметр равен 30 см, а одна сторона больше другой в два раза;
- в) периметр равен 32 см, а одна сторона составляет $\frac{2}{3}$ другой.

Решение:

а) Сумма двух соседних сторон параллелограмма равна его полупериметру. Так как по условию периметр равен 46 см, то сумма двух соседних сторон данного параллелограмма равна 23 см. Обозначим меньшую сторону через x , тогда другая сторона будет равна $(x + 3)$ см. Составим уравнение:

$$x + x + 3 = 23.$$

Из уравнения находим:

$$x = 10.$$

Значит, одна сторона параллелограмма равна 10 см, а другая:

$$10 + 3 = 13 \text{ (см)}.$$

Ответ: 10 см, 13 см.

б) Сумма двух соседних сторон параллелограмма равна его полупериметру. Так как по условию периметр равен 30 см, то сумма двух соседних сторон данного параллелограмма равна 15 см. Одна сторона больше другой в два раза, значит, меньшая сторона параллелограмма равна третьей части полупериметра:

$$15 : 3 = 5 \text{ (см)}$$

Найдем другую сторону:

$$5 \cdot 2 = 10 \text{ (см)}$$

Ответ: 5 см, 10 см.

в) Сумма двух соседних сторон параллелограмма равна его полупериметру. Так как по условию периметр равен 32 см, то сумма двух соседних сторон данного параллелограмма равна 16 см. Обозначим большую сторо-

ну параллелограмма через x , тогда другая сторона будет равна $\frac{2}{3}x$. Составим уравнение:

$$x + \frac{2}{3}x = 16$$

Из уравнения находим:

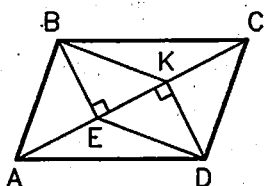
$$x = 9,6$$

Значит, одна сторона параллелограмма равна 9,6 см, а другая:

$$9,6 \cdot \frac{2}{3} = 6,4 \text{ (см)}$$

Ответ: 9,6 см; 6,4 см.

Задача 3. В параллелограмме $ABCD$ из вершин тупых углов $\angle B$ и $\angle D$ проведены на диагональ перпендикуляры BE и DK и проведены отрезки BK и DE . Доказать, что четырехугольник $BKDE$ — параллелограмм.



Решение:

Рассмотрим треугольники ABE и CDK . Они прямоугольные, так как по условию BE и DK перпендикулярны AC . Гипотенузы AB и CD этих треугольников равны, как противоположные стороны параллелограмма $ABCD$. Угол $\angle BAE$ равен углу $\angle DCK$, как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и CD и секущей AC . Значит, треугольники BAE и DCK равны по гипотенузе и острому углу. Из равенства треугольников следует, что BE и DK равны.

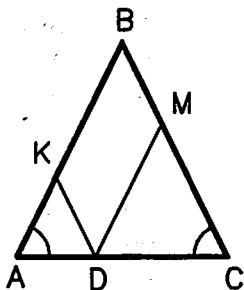
Рассмотрим четырехугольник $BKDE$. Мы доказали, что его противоположные стороны BE и DK равны. Но они и параллельны, как два перпендикуляра, проведенные к одной прямой. В четырехугольнике $BKDE$ две стороны равны и параллельны, значит, этот четырехугольник — параллелограмм. Что и требовалось доказать.

Задача 4. Через точку основания равнобедренного треугольника проведены прямые, параллельные боковым сто-

ронам. Найти периметр полученного четырехугольника, если боковая сторона равна 7 см. Зависит ли значение периметра от положения точки на основании?

Решение:

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC . Возьмем на основании AC точку D произвольно. Проведем через эту точку прямую DK , параллельную прямой BC , и прямую DM , параллельную прямой BA . Точки K и M лежат соответственно на сторонах AB и BC .



Рассмотрим четырехугольник $KDMB$. Сторона KD параллельна стороне BM , сторона KB параллельна стороне DM по построению. Значит, четырехугольник $KDMB$ — параллелограмм.

Рассмотрим углы $\angle CDM$ и $\angle CAB$. Они равны, как соответственные углы при параллельных прямых DM и AB и секущей AC . Но угол $\angle CAB$ равен углу $\angle BCA$, как углы при основании равнобедренного треугольника ABC . Значит, угол $\angle CDM$ равен углу $\angle BCA$. Получили, что в треугольнике DCM есть два равных угла, значит, этот треугольник равнобедренный, т.е. $DM = MC$.

В параллелограмме $KDMB$ сумма двух соседних сторон DM и MB равна сумме отрезков MC и MB , которая равна длине боковой стороны треугольника ABC , т.е. 7 см. Так как периметр параллелограмма равен удвоенной сумме двух соседних сторон, то периметр параллелограмма $KDMB$ равен:

$$7 \cdot 2 = 14 \text{ (см)}$$

Так как точка D была выбрана произвольно, то значение периметра параллелограмма не зависит от ее положения на основании, а зависит только от длины боковой стороны.

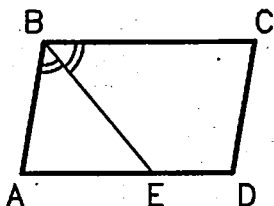
Ответ: 14 см.

Задача 5. Биссектриса угла параллелограмма делит одну из его сторон на отрезки, длины которых равны 5 см и 7 см. Найдите периметр параллелограмма.

Решение:

Дан параллелограмм $ABCD$.
Отрезок BE — биссектриса угла $\angle B$.
Возможны два случая:

- 1) если $AE = 5$ см, то $ED = 7$ см;
- 2) если $AE = 7$ см, то $ED = 5$ см.

**1 случай**

Пусть биссектриса BE разделила сторону параллелограмма $ABCD$ на отрезки AE и ED , причем $AE = 5$ см, $ED = 7$ см.

Рассмотрим углы $\angle CBE$ и $\angle BEA$. Они равны, как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей BE (отрезки BC и AD параллельны, как противоположные стороны параллелограмма). Но угол $\angle CBE$ равен углу $\angle EBA$, так как BE — биссектриса угла $\angle B$ параллелограмма $ABCD$. Значит, угол $\angle EBA$ равен углу $\angle BEA$. Получили, что в треугольнике ABE есть два равных угла. Значит, этот треугольник равнобедренный, т.е.

$$AB = AE = 5 \text{ (см)}$$

В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 5 см. Соседняя с ней сторона AD равна сумме отрезков AE и ED :

$$AD = 5 + 7 = 12 \text{ (см)}$$

Зная, что периметр параллелограмма равен удвоенной сумме двух соседних сторон, найдем периметр параллелограмма $ABCD$:

$$P_{ABCD} = (5 + 12) \cdot 2 = 34 \text{ (см)}$$

2 случай

Пусть биссектриса BE разделила сторону параллелограмма $ABCD$ на отрезки AE и ED , причем $AE = 7$ см, $ED = 5$ см.

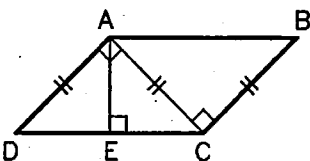
В случае 1 мы доказали, что $AE = AB$. Значит, в параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 7 см, а сторона AD равна 12 см.

Найдем периметр параллелограмма $ABCD$:

$$P_{ABCD} = (7 + 12) \cdot 2 = 38 \text{ (см)}$$

Ответ: 34 см или 38 см.

Задача 6. Параллелограмм разбивается диагональю на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Большая сторона параллелограмма равна a . Выразите через a высоту параллелограмма, проведенную к этой стороне.



Решение:

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$. Диагональ AC разбивает его на два равнобедренных прямоугольных треугольника DAC и ABC . Сторона DC параллелограмма $ABCD$ равна a . AE — высота, проведенная к стороне DC .

Рассмотрим равнобедренный треугольник DAC . Угол $\angle DAC$ — прямой, сторона DA равна AC . AE — высота, проведенная к основанию DC . Так как в равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является медианой, то

$$DE = EC = \frac{a}{2}$$

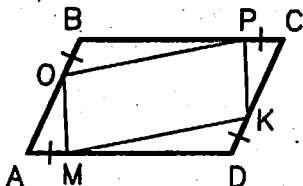
Рассмотрим прямоугольный треугольник AEC . Угол $\angle AEC$ — прямой, а острый угол $\angle ACE$ равен 45° , так как он является острым углом равнобедренного прямоугольного треугольника DAC . Значит, прямоугольный треугольник AEC является равнобедренным, т.е.

$$AE = CE = \frac{a}{2}$$

Получили, что в параллелограмме $ABCD$ высота AE , проведенная к стороне DC , равна $\frac{a}{2}$.

Ответ: $\frac{a}{2}$.

Задача 7. На сторонах AD , DC , CB , BA параллелограмма $ABCD$ отложены соответственно равные отрезки AM , DK , CP , BO . Доказать, что четырехугольник $MKPO$ — параллелограмм.



Решение:

Рассмотрим треугольники OAM и KCP . Угол $\angle OAM$ равен углу $\angle KCP$, как противоположные углы параллелограмма $ABCD$. Сторона AM треугольника OAM равна стороне PC треугольника KCP по условию.

Рассмотрим стороны AO и KC :

$$AO = AB - OB; KC = DC - DK.$$

Так как AB и DC равны, как противоположные стороны параллелограмма $ABCD$, а OB и DK равны по условию, то равны OA и KC .

Получили, что треугольники OAM и KCP равны по первому признаку равенства треугольников. Из равенства треугольников следует равенство сторон OM и PK .

Аналогично доказывается равенство треугольников OBP и KDM . Из равенства этих треугольников следует равенство сторон OP и MK .

Получили, что в четырехугольнике $OMKP$ попарно равны противоположные стороны, значит, этот четырехугольник — параллелограмм.

Что и требовалось доказать.

Задача 8. Найти углы ромба, если:

- а) углы относятся как 1:8;
- б) один угол составляет 80% другого;
- в) одна диагональ равна стороне;
- г) высота делит сторону пополам;
- д) углы, образованные диагоналями со стороной, относятся как 11:16.

Решение:

а) В ромбе противоположные углы равны, а углы, прилежащие к одной стороне, в сумме составляют 180° . По условию углы, прилежащие к одной стороне, относятся как 1:8. Значит, меньший угол ромба равен девятой части от 180° , т.е. 20° . Найдем больший угол:

$$20^\circ \cdot 8 = 160^\circ$$

Ответ: 20° ; 160° ; 20° ; 160° .

б) По условию меньший угол ромба составляет 80% большего угла. Обозначим больший угол через x , тогда меньший угол равен $0,8x$. Так как их сумма равна 180° , то можно составить следующее уравнение:

$$x + 0,8x = 180^\circ$$

Из уравнения находим, что

$$x = 100^\circ$$

Значит, больший угол ромба равен 100° , а меньший равен 80° .

Ответ: 100° ; 80° ; 100° ; 80° .

в) По условию одна из диагоналей ромба равна его стороне. Так как в ромбе все стороны равны между собой, то эта диагональ делит ромб на два равных равносторонних треугольника. Значит, меньший угол ромба равен 60° . Найдем больший угол ромба:

$$180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Ответ: 60° ; 120° ; 60° ; 120° .

г) По условию высота ромба делит его сторону пополам, значит, эта высота проведена из вершины тупого угла. Рассмотрим ромб $ABCD$: AE — высота, проведенная из вершины тупого угла $\angle A$ на сторону BC .

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABE . Гипотенуза AB является стороной ромба. Катет BE равен половине стороны BC ромба. Так как в ромбе все стороны равны между собой, то

$$BE = \frac{1}{2}AB.$$

Так как катет BE равен половине гипотенузы AB , то он лежит против угла в 30° , т.е.

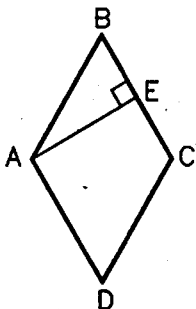
$$\angle BAE = 30^\circ.$$

Тогда другой угол треугольника $\angle ABE$ равен 60° , т.е.

$$\angle ABE = 60^\circ.$$

Получили, что острый угол ромба $ABCD$ равен 60° . Тогда тупой будет равен 120° .

Ответ: 60° ; 120° ; 60° ; 120° .



д) Рассмотрим ромб $ABCD$. Проведем диагонали AC и BD . Рассмотрим углы, образованные стороной AB и диагоналями ромба. Угол $\angle ABD$ — угол между стороной AB и диагональю BD . Угол $\angle BAC$ — угол между стороной AB и диагональю AC . По условию:

$$\angle ABD : \angle BAC = 11:16$$

Рассмотрим треугольник ABO . Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны, то треугольник ABO прямоугольный. Острые углы в этом треугольнике относятся как 11:16. Найдем эти углы. Пусть на одну часть приходится x градусов, тогда:

$$\angle ABO = 11x; \angle BAO = 16x.$$

Так как сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90° , то можно составить следующее уравнение:

$$11x + 16x = 90^\circ$$

Из уравнения находим:

$$x = \frac{90^\circ}{27}.$$

Тогда

$$11x = 36^\circ 40'.$$

Получили, что

$$\angle ABO = 36^\circ 40'.$$

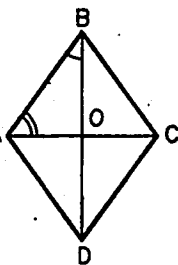
Так как диагональ BD ромба $ABCD$ является биссектрисой угла $\angle ABC$, то

$$\angle ABC = 36^\circ 40' \cdot 2 = 73^\circ 20'.$$

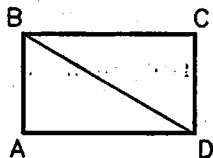
Найдем другой угол ромба:

$$\angle BAD = 180^\circ - 73^\circ 20' = 106^\circ 40'.$$

Ответ: $73^\circ 20'$; $106^\circ 40'$; $73^\circ 20'$; $106^\circ 40'$.



Задача 9. В прямоугольнике диагональ делит угол в отношении 1:2; меньшая сторона равна 7 см. Найти длины диагоналей прямоугольника.



Решение:

Так как диагонали прямоугольника равны, то достаточно найти длину одной диагонали. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$: BD — диагональ прямоугольника, которая делит угол $\angle ABC$ в отношении 1:2, т.е.

$$\angle CBD : \angle DBA = 1:2$$

Так как угол $\angle ABC$ равен 90° , то

$$\angle CBD = 30^\circ; \angle DBA = 60^\circ.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABD . Катеты AB и AD являются сторонами прямоугольника $ABCD$. Угол $\angle ABD$ равен 60° , тогда угол $\angle BDA$ равен 30° . Катет AB меньше катета AD , так как он лежит против меньшего угла. По условию меньшая сторона прямоугольника равна 7 см, значит, катет AB равен 7 см. Катет AB лежит против угла в 30° , следовательно, он равен половине гипотенузы, т.е.

$$BD = 2 \cdot AB = 7 \cdot 2 = 14 \text{ (см)}$$

Получили, что диагональ BD прямоугольника $ABCD$ равна 14 см.

Ответ: 14 см.

Задача 10. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что один угол у них общий. Найти периметр прямоугольника, если катет треугольника равен 9 см.

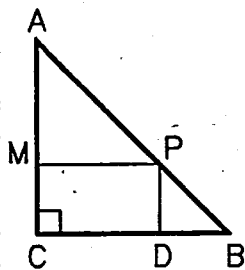
Решение:

Так как в прямоугольнике все углы прямые, значит, общий угол треугольника в прямоугольнике прямой. Сделаем рисунок к задаче.

ABC — прямоугольный равнобедренный треугольник; угол $\angle C$ — прямой; прямоугольник $CMPD$ вписан в треугольник ABC .

Рассмотрим прямоугольный треугольник DPB . Острый угол $\angle PBD$ равен 45° , так как он является острым углом прямоугольного равнобедренного треугольника. Значит, треугольник PBD равнобедренный, т.е.

$$PD = DB$$



Получаем:

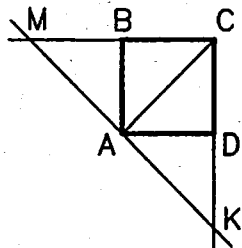
$$CD + DP = CD + DB = CB = 9 \text{ (см)}$$

Так как периметр прямоугольника равен удвоенной сумме двух соседних сторон, то

$$P_{CDPM} = 2 \cdot (CD + DP) = 2 \cdot 9 = 18 \text{ (см)}$$

Ответ: 18 см.

Задача 11. Диагональ AC квадрата $ABCD$ равна 11 см. Прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная к прямой AC , пересекает прямые BC и CB соответственно в точках M и K . Найдите длину отрезка MK .



Решение:

Выполним рисунок к задаче:

Диагональ квадрата является биссектрисой его угла $\angle BCA = \angle ACD = 90^\circ : 2 = 45^\circ$.

Рассмотрим треугольник ACK . По условию прямая AC перпендикулярна прямой MK . Значит, треугольник ACK прямоугольный, причем один из острых углов равен 45° , из этого следует, что он равнобедренный. Получаем, что

$$AC = AK.$$

Аналогично доказывается, что

$$AC = AM.$$

Найдем длину отрезка MK :

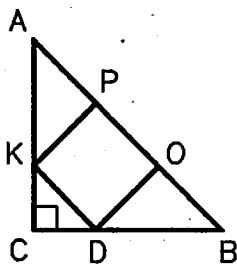
$$MK = AM + AK = 2 \cdot AC = 2 \cdot 11 = 22 \text{ (см)}$$

Ответ: 22 см.

Задача 12. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что одна сторона квадрата лежит на гипотенузе. Найдите периметр квадрата, если гипотенуза равна 12 см.

Решение:

Пусть в равнобедренный прямоугольный треугольник ABC вписан



квадрат $KPOD$ так, что его сторона PO лежит на гипотенузе AB . Найдём периметр квадрата $KPOD$.

Рассмотрим треугольник DOB . Так как угол $\angle B$ равен 45° , как острый угол прямоугольного равнобедренного треугольника ABC , а DO перпендикулярен AB , то треугольник DOB является прямоугольным и равнобедренным. Значит, $DO = OB$.

Аналогично доказывается, что

$$KP = PA.$$

Так как все стороны квадрата равны между собой, то сторона квадрата $KPOD$ равна третьей части гипотенузы AB , т.е.

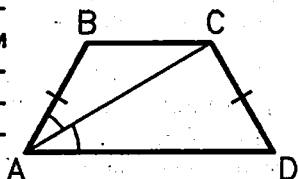
$$PO = \frac{1}{3} \cdot AB = 12 : 3 = 4 \text{ (см)}$$

Найдём периметр квадрата $KPOD$:

$$P_{KPOD} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ (см)}$$

Ответ: 16 см.

Задача 13. В равнобедренной трапеции диагональ делит пополам острый угол трапеции. Найти периметр трапеции, если большее основание равно 10 см, а боковая сторона равна 5 см.



Решение:

Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция. AC — диагональ трапеции, AD — большее основание, равное 10 см; AB — боковая сторона, равная 5 см. Найдём периметр этой трапеции.

Основания трапеции лежат на параллельных прямых, т.е. $BC \parallel AD$.

Рассмотрим параллельные прямые BC и AD и секущую AC . Углы $\angle BCA$ и $\angle CAD$ внутренние накрест лежащие при этих прямых, значит, они равны. Но угол $\angle CAD$ равен углу $\angle CAB$ по условию, значит:

$$\angle CAB = \angle BCA.$$

Получили, что в треугольнике ABC есть два равных угла, значит, треугольник равнобедренный. В треугольнике против равных углов лежат равные стороны, т.е.

$$AB = BC = 5 \text{ (см.)}$$

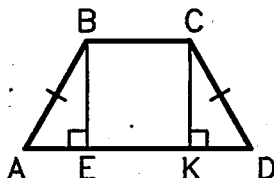
Так как трапеция $ABCD$ равнобедренная, то
 $AB = CD = 5 \text{ (см.)}$.

Найдем периметр трапеции:

$$P_{ABCD} = 5 + 5 + 5 + 10 = 25 \text{ (см.)}$$

Ответ: 25 см.

Задача 14. В равнобедренной трапеции высота, проведенная из вершины тупого угла, делит основание на отрезки, длины которых равны 3 см и 8 см. Найти длины оснований трапеции.



Решение:

Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$. BE — высота, которая делит основание AD на отрезки AE и ED , длины которых соответственно равны 3 см и 8 см. Значит, основание AD равно сумме длин отрезков AE и ED , т.е.

$$AD = AE + ED = 3 + 8 = 11 \text{ (см.)}$$

Найдем длину другого основания. Для этого из вершины C проведем высоту CK на основание AD и рассмотрим треугольники ABE и DCK . Эти прямоугольные треугольники будут равны по гипотенузе и острому углу ($AB = CD$, как боковые стороны равнобедренной трапеции, $\angle A = \angle D$, как углы при основании равнобедренной трапеции). Из равенства треугольников следует, что

$$AE = KD = 3 \text{ (см.)}$$

Рассмотрим отрезок EK :

$$EK = ED - KD = 8 - 3 = 5 \text{ (см.)}$$

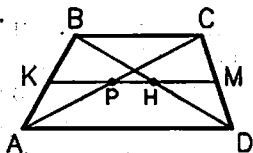
Рассмотрим четырехугольник $BEKC$. Очевидно, что он является прямоугольником. Значит, его противоположные стороны равны, т.е.

$$EK = BC = 5 \text{ (см.)}$$

Основание BC трапеции $ABCD$ равно 5 см.

Ответ: 5 см; 11 см.

Задача 15. Докажите, что средняя линия трапеции проходит через середины диагоналей.



Решение:

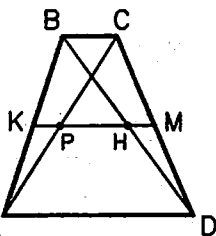
Рассмотрим трапецию $ABCD$: BC и AD — основания трапеции, CA и BD — диагонали трапеции, KM — средняя линия трапеции. Точки P и H — точки пересечения средней линии с диагоналями.

Рассмотрим прямые AC и CD . На прямой CD отложены равные отрезки CM и MD (средняя линия KM — отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции). Прямые AC и CD пересечены параллельными прямыми BC , KM и AD (средняя линия KM параллельна основаниям BC и AD). Теорема Фалеса гласит: если на одной прямой отложить несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные отрезки. Значит, на прямой AC отложены равные отрезки CP и PA . Мы доказали, что средняя линия трапеции проходит через середину диагонали CA .

Аналогично доказывается, что средняя линия проходит через середину диагонали BD .

Что и требовалось доказать.

Задача 16. Меньшее основание трапеции равно 4 см, расстояние между серединами диагоналей равно 5 см. Найти длину большего основания.



Решение:

Рассмотрим трапецию $ABCD$: BC — меньшее основание, равное 4 см. PH — отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, длина которого равна 5 см. Необходимо найти длину основания AD .

Проведем через середины диагоналей прямую до пересечения с боковыми сторонами трапеции и получим отрезок KM , концы которого лежат на боковых сторонах. Отрезок KM проходит через середины диагоналей трапеции.

ции, значит, он является средней линией трапеции (см. задачу 15).

Рассмотрим треугольник BDC . Отрезок HM соединяет середины сторон этого треугольника, значит, он является его средней линией. По свойству средней линии треугольника длина отрезка HM равна половине длины BC , т.е.

$$HM = \frac{1}{2}BC = 2 \text{ (см)}.$$

Аналогично доказывается, что KP — средняя линия треугольника ABC , и поэтому:

$$KP = BC = 2 \text{ (см)}.$$

Найдем длину средней линии KM трапеции $ABCD$:

$$KM = KP + PH + HM = 2 + 5 + 2 = 9 \text{ (см)}.$$

По свойству средней линии трапеции известно, что она равна полусумме оснований трапеции, т.е.

$$KM = \frac{1}{2}(BC + AD).$$

Зная, что средняя линия равна 9 см, а основание BC равно 4 см, найдем основание AD :

$$AD = 2 \cdot KM - BC = 2 \cdot 9 - 4 = 14 \text{ (см)}.$$

Ответ: 14 см.

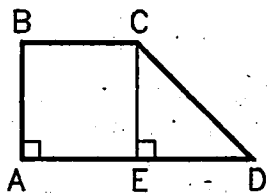
Задача 17. Углы при основании трапеции равны 90° и 45° . Одно основание в два раза больше другого и равно 24 см. Найти меньшую боковую сторону трапеции.

Решение:

Рассмотрим трапецию $ABCD$. Так как один из углов при основании равен 90° , то данная трапеция прямоугольная. Боковая сторона AB перпендикулярна основаниям. Из вершины C на нижнее основание опустим высоту CE и рассмотрим треугольник CED . В прямоугольном треугольнике CED острый угол $\angle C$ равен 45° , значит, этот треугольник равнобедренный. Имеем:

$$CE = ED.$$

Очевидно, что четырехугольник $ABCE$ является прямоугольником, а в прямоугольнике противоположные стороны равны, т.е.



$$CE = AB; BC = AE.$$

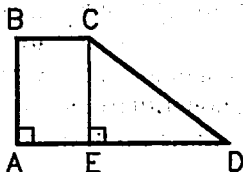
Получили:

$$AB = CE = AD : 2 = 12 \text{ (см)}.$$

AB является меньшей боковой стороной трапеции.

Ответ: 12 см.

Задача 18. Найти высоту прямоугольной трапеции, у которой большая боковая сторона равна 5 см, а разность длин оснований 4 см.



Решение:

Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABCD$: BC и AD — основания, разность длин которых равна 5 см; CD — большая боковая сторона, равная 5 см.

Опустим из вершины C на основание AD высоту CE и рассмотрим треугольник ECD . В прямоугольном треугольнике ECD гипотенуза CD равна 5 см, а катет ED равен разности AD и AE . AE равен BC , как противоположные стороны прямоугольника $ABCE$, значит, ED равен разности оснований трапеции, т.е.

$$ED = 4 \text{ (см)}.$$

По теореме Пифагора:

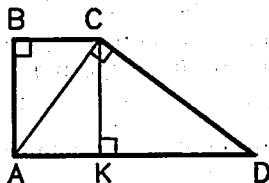
$$CD^2 = CE^2 + ED^2$$

Значит

$$CE = \sqrt{25 - 16} = 3 \text{ (см)}.$$

Ответ: 3 см.

Задача 19. В прямоугольной трапеции меньшая диагональ равна 15 см и перпендикулярна к большей боковой стороне. Меньшая боковая сторона равна 12 см. Найти большее основание.



Решение:

Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABCD$. Боковая сторона AB перпендикулярна основаниям и равна 12 см.

Диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD и равна 15 см. Необходимо найти большее основание AD .

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC . Используя теорему Пифагора, найдем длину основания BC :

$$BC = \sqrt{225 - 144} = 9 \text{ (см)}.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник ACD . Из вершины C опустим высоту CK на гипотенузу AD . Так как катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключенным между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла, то

$$AC^2 = AD \cdot AK.$$

Так как $AC = 15$ см, $AK = BC = 9$ см, то

$$AD = \frac{AC^2}{AK} = \frac{225}{9} = 25 \text{ (см)}.$$

Ответ: 25 см.

IV. Подобие фигур

Подобие — отображение плоскости на себя, при котором расстояние между точками изменяется в одном и том же отношении $k > 0$. Другими словами, расстояние между точками или увеличивается, или уменьшается в k раз. Число k называется *коэффициентом подобия*.

Фигуры Φ_1 и Φ_2 *подобны*, если существует преобразование подобия, переводящее одну фигуру в другую. Если фигура Φ_1 переходит в фигуру Φ_2 при преобразовании подобия с коэффициентом k , то фигура Φ_2 переходит в фигуру Φ_1 с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

Подобные треугольники — треугольники, у которых соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны.

Обозначение: $\triangle ABC \sim \triangle A_1 B_1 C_1$

Признаки подобия треугольников:

- 1) если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны;
- 2) если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы между этими сторонами равны, то треугольники подобны;
- 3) если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Частные случаи подобия треугольников:

- 1) прямоугольные треугольники подобны, если острый угол одного треугольника равен острому углу другого треугольника;
- 2) прямоугольные треугольники подобны, если гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого треугольника;
- 3) равнобедренные треугольники подобны, если у них равны углы между боковыми сторонами;
- 4) равнобедренные треугольники подобны, если угол при основании одного треугольника равен углу при основании другого треугольника.

Свойства подобных треугольников:

- 1) если треугольники подобны, то отношение площадей равно квадрату коэффициента подобия;
- 2) средняя линия треугольника отсекает треугольник, подобный данному;
- 3) отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия;
- 4) отношение высот подобных треугольников, опущенных на соответствующие стороны, равно отношению соответствующих сторон или коэффициенту подобия.

Задача 1. Подобны ли равнобедренные треугольники, если угол при вершине одного треугольника равен 56° , а углы при основании другого треугольника равны 62° ?

Решение:

Так как угол при вершине одного треугольника равен 56° , то сумма углов при его основании будет равна:

$$180^\circ - 56^\circ = 124^\circ.$$

Так как углы при основании равнобедренного треугольника равны, то, зная их сумму, можем найти величину каждого угла:

$$124^\circ : 2 = 62^\circ.$$

Так как из условия задачи известно, что углы при основании другого равнобедренного треугольника равны 62° , то эти треугольники будут подобны.

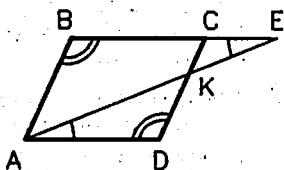
Задача 2. На рисунке $ABCD$ — параллелограмм, доказать подобие треугольников ABE и AKD .

Решение:

Так как $ABCD$ — параллелограмм, то прямые BC и AD параллельны. Углы $\angle BEA$ и $\angle KAD$ внутренние накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AE , значит, они равны.

Угол $\angle B$ равен углу $\angle D$, как противоположные углы в параллелограмме.

Получили, что в треугольниках ABE и AKD имеется по два соответственно равных угла, значит, треугольники подобны по двум углам.

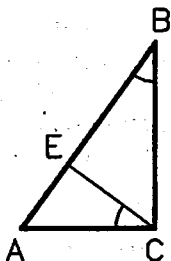


Задача 3. Вершина C треугольника ABC соединена отрезком с точкой E , принадлежащей стороне AB так, что $\angle ABC = \angle ACE$. Найдите длину отрезков AE , если $AB = 34$ см, $AC = 20$ см.

Решение:

Рассмотрим треугольники ABC и ACE : $\angle ABC = \angle ACE$ по условию, $\angle A$ — общий.

Значит, треугольники подобны по двум углам. Из подобия треугольников следует:



$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

Выразим из пропорции AE :

$$AE = \frac{AC^2}{AB}$$

Отсюда:

$$AE = \frac{20^2}{34} = \frac{400}{34} = \frac{200}{17} = 11\frac{13}{17} \text{ (см.)}$$

Ответ: $AE = 11\frac{13}{17}$ см.

Задача 4. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . Докажите, что треугольники A_1B_1C и ABC подобны.

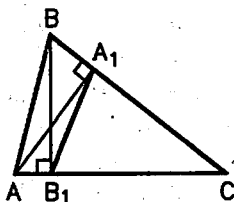
Решение:

Рассмотрим прямоугольные треугольники B_1BC и A_1AC . Они подобны, так как имеют общий угол $\angle C$. Из подобия треугольников следует:

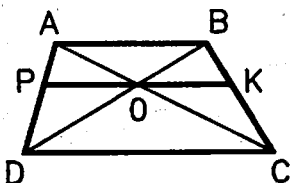
$$\frac{A_1C}{B_1C} = \frac{AC}{BC}$$

$$\text{Отсюда: } \frac{A_1C}{AC} = \frac{B_1C}{BC}$$

Рассмотрим треугольники A_1B_1C и ABC . Они имеют общий угол $\angle C$, и из ранее доказанного следует пропорциональность двух сторон одного треугольника двум сторонам другого треугольника. А общий угол находится между этими сторонами. Значит, треугольник A_1B_1C подобен треугольнику ABC по второму признаку подобия.



Задача 5. Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции параллелен ее основаниям и проходит через точку пересечения диагоналей. Найдите длину этого отрезка, если основания трапеции равны a и b .



Решение:

Рассмотрим трапецию $ABCD$. Основание AB равно a , основание DC равно b . Точка O — точка пересечения диагоналей AC и BD . Отрезок PK параллелен основаниям трапеции и проходит через точку O . Необходимо найти длину отрезка PK .

Рассмотрим треугольники AOB и COD . Они подобны, так как $\angle AOB = \angle COD$ (вертикальные); $\angle BAO = \angle OCD$ (внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AC).

Из подобия треугольников следует:

$$\frac{AB}{DC} = \frac{OB}{DO} = \frac{AO}{OC} = \frac{a}{b} \quad (1)$$

Рассмотрим треугольники OBK и DBC . Они подобны, так как угол $\angle B$ — общий, а угол $\angle BOK$ равен углу $\angle BDC$; как соответственные углы при параллельных прямых OK и DC и секущей DB . Из подобия треугольников следует:

$$\frac{OK}{DC} = \frac{OB}{DB}$$

Так как $DB = OD + OB$, то

$$\frac{OK}{DC} = \frac{OB}{OD + OB}$$

Из равенства (1) получаем:

$$OD = \frac{b \cdot OB}{a}$$

Отсюда:

$$OK = \frac{DC \cdot OB}{\frac{b \cdot OB}{a} + OB} = \frac{b \cdot OB \cdot a}{b \cdot OB + a \cdot OB} = \frac{b \cdot a}{b + a}$$

Рассмотрим треугольники OAP и CAD . Они подобны, так как угол $\angle A$ — общий, а угол $\angle APO$ равен углу $\angle ADC$, как соответственные углы при параллельных прямых PO и DC и секущей AD . Из подобия треугольников следует:

$$\frac{PO}{DC} = \frac{AO}{AC}$$

Так как $AC = AO + OC$, то

$$\frac{PO}{DC} = \frac{AO}{AO + OC}$$

Из равенства (1) получаем:

$$OC = \frac{AO \cdot b}{a}.$$

Отсюда:

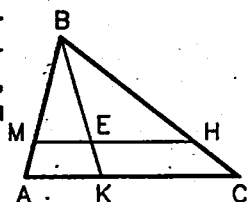
$$OP = \frac{DC \cdot AO}{AO + \frac{AO \cdot b}{a}} = \frac{b \cdot AO \cdot a}{AO \cdot a + AO \cdot b} = \frac{b \cdot a}{a + b}.$$

Так как $PK = OP + OK$, то

$$PK = \frac{b \cdot a}{a + b} + \frac{b \cdot a}{b + a} = \frac{2ab}{a + b}.$$

Ответ: $PK = \frac{2ab}{a + b}.$

Задача 6. На сторонах AB , BC , CA треугольника ABC отмечены соответственно точки M , H , K так, что $4AM = AB$, $3HC = BH$. В каком отношении прямая MH делит отрезок BK ?



Решение:

Рассмотрим треугольники ABC и MBH . По условию $4AM = AB$, значит, $MB : AB = 3:4$. По условию $3HC = BH$, значит, $HB : CB = 3:4$.

Получили $MB : AB = HB : CB = 3:4$. Угол $\angle ABC$ — общий для треугольников ABC и MBH . Значит, треугольник MBH подобен треугольнику ABC , причем $\angle BMH = \angle BAC$.

Рассмотрим треугольники MBE и ABK . В этих треугольниках угол $\angle ABK$ — общий, а угол $\angle BME$ равен углу $\angle BAK$. Значит, треугольники подобны по двум углам. Из подобия треугольников следует:

$$MB : AB = EB : KB = 3:4$$

Так как $EB : KB = 3:4$, то $EB : EK = 3:1$. Значит, прямая MH делит отрезок BK в отношении $3:1$.

Задача 7. На рисунке $ABCD$ — параллелограмм. $AM : CT = AP : CK \neq 1$. Докажите, что четырехугольник $МКРТ$ — трапеция.

Решение:

Рассмотрим треугольники KTC и PMA . В этих треугольниках угол $\angle A$ равен углу $\angle C$, как противоположные углы параллелограмма $ABCD$, $AM:CT = AP:CK$ по условию, значит, треугольники KTC и PMA подобны, причем

$$\angle CKT = \angle MPA; KT \neq MP.$$

Пусть точка E — точка пересечения прямых BC и MP . Прямая MP является секущей параллельных прямых BC и AD . Значит, угол $\angle CEP$ равен углу $\angle MPA$ как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей MP .

Так как $\angle CKT = \angle MPA$, а $\angle MPA = \angle CEP$, то $\angle CKT = \angle CEP$. Углы $\angle CKT$ и $\angle CEP$ являются соответственными углами при прямых KT и MP и секущей CE , значит, прямые KT и MP параллельны.

Так как в четырехугольнике $MKTP$ стороны KT и MP параллельны и не равны, значит, этот четырехугольник является трапецией.

Задача 8. Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на равновеликие части. В каком отношении делит она его стороны?

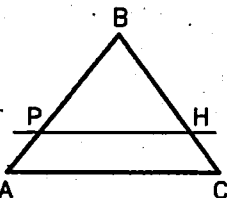
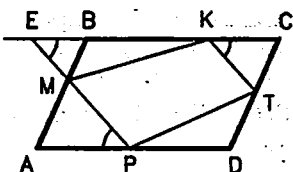
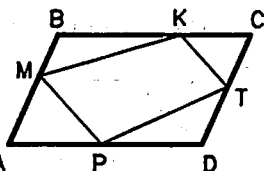
Решение:

Рассмотрим треугольник ABC . Прямая PH параллельна стороне AC . Значит, треугольники ABC и PBH подобны. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия, т.е.

$$\frac{S_{\triangle PBH}}{S_{\triangle ABC}} = k^2.$$

По условию PH делит треугольник ABC на равновеликие части, т.е.

$$\frac{S_{\triangle PBH}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2}.$$



Получили

$$k^2 = \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Из подобия треугольников PBH и ABC следует:

$$\frac{PB}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ т.е. } AB = \sqrt{2} \cdot PB.$$

Найдем отношение $PB : AP$

$$\frac{PB}{AP} = \frac{PB}{AB - PB} = \frac{PB}{\sqrt{2} \cdot PB - PB} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}.$$

Значит, прямая PH делит стороны треугольника в отношении $1 : (\sqrt{2} - 1)$

V. Окружность

Окружность с центром в точке O и радиусом R — геометрическая фигура, состоящая из множества точек плоскости, равноудаленных от точки O на расстояние R .

Хорда — отрезок, соединяющий две точки окружности.

Диаметр — хорда, проходящая через центр окружности. Длина диаметра равна длине двух радиусов. Длина любой хорды окружности не превосходит длины диаметра.

Касательная к окружности — прямая, имеющая только одну общую точку с окружностью.

Дуга окружности — часть окружности, заключенная между двумя точками окружности.

Свойства дуг окружности:

- 1) градусная мера дуги окружности определяется градусной мерой соответствующего центрального угла;

- 2) две дуги, принадлежащие окружностям одного и того же радиуса, равны тогда и только тогда, если равны их угловые величины;
- 3) в окружности большему центральному углу соответствует большая дуга;
- 4) равные дуги стягиваются равными хордами;
- 5) диаметр, перпендикулярный хорде, делит стягиваемую хордой дугу пополам;
- 6) величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

Центральный угол — угол с вершиной в центре окружности.

Вписанный угол — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

Угол между хордой и касательной измеряется половиной дуги, заключенной внутри него.

Окружность называется *вписанной* в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются окружности.

Окружность называется *описанной* около многоугольника, если все вершины многоугольника лежат на окружности.

Окружность можно вписать или описать около любого треугольника, причем центр вписанной в треугольник окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника, а центр описанной около треугольника окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров.

Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и в любой правильный многоугольник можно вписать окружность, причем центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.

Сторона правильного многоугольника, радиус вписанной и описанной окружности связаны следующими формулами:

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}; r = R \cos \frac{180^\circ}{n},$$

где a_n — сторона правильного многоугольника, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности.

Длина окружности находится по формуле:

$$C = 2\pi R,$$

где R — радиус окружности.

Длина дуги окружности находится по формуле:

$$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \alpha,$$

где α — соответствующий центральный угол, измеренный в градусах, R — радиус окружности.

Задача 1. Хорда делит окружность в отношении 3:7. Найти величину меньшего вписанного угла, опирающегося на эту хорду.

Решение:

Найдем градусные меры дуг, на которые хорда разделила окружность:

$$360^\circ : 10 \cdot 3 = 108^\circ;$$

$$360^\circ : 10 \cdot 7 = 252^\circ.$$

Меньший вписанный угол равен половине меньшей дуги, т.е.

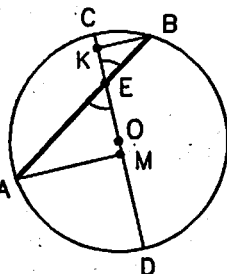
$$108^\circ : 2 = 54^\circ.$$

Ответ: 54° .

Задача 2. Хорда окружности пересекает ее диаметр под углом 60° и делится им на части, равные 8 см и 4 см. Найти проекцию хорды на этот диаметр.

Решение:

Рассмотрим окружность с центром O : AB — хорда, CD — диаметр, точка E — точка пересечения хорды AB и диаметра CD .



$$\angle AED = 60^\circ, AE = 8 \text{ см}, EB = 4 \text{ см}.$$

Из точек A и B опустим перпендикуляры на диаметр CD :

$$KB \perp CD; AM \perp CD.$$

Значит, KM — проекция хорды AB на диаметр CD .
Найдем длину отрезка KM .

Из прямоугольного треугольника AEM найдем катет EM :

$$EM = AE \cdot \cos 60^\circ = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \text{ (см)}.$$

Из прямоугольного треугольника KEB найдем катет KE :

$$KE = EB \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ (см)}.$$

Найдем длину отрезка KM :

$$KM = KE + EM = 4 + 2 = 6 \text{ (см)}.$$

Ответ: 6 см.

Задача 3. В окружности проведены две хорды AB и CD , пересекающиеся в точке M . Найти угол $\angle AMD$, если дуга AD равна 70° , а дуга BC равна 10° .

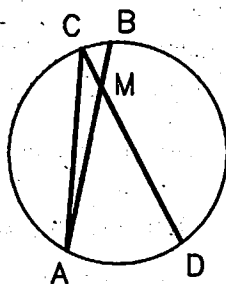
Решение:

Проведем хорду AC . Угол $\angle ACD$ — вписанный угол, опирающийся на дугу AD , равную 70° . Значит, угол $\angle ACD$ равен 35° . Угол $\angle CAB$ — вписанный угол, опирающийся на дугу CB , равную 10° . Значит, угол $\angle CAB$ равен 5° .

Угол $\angle AMD$ — внешний угол треугольника ACM . Значит, он равен сумме внутренних углов, не смежных с ним, т.е.

$$\angle AMD = \angle ACM + \angle CAM = 35^\circ + 5^\circ = 40^\circ.$$

Ответ: 40° .



Задача 4. Диаметр AB и хорда AC окружности с центром в точке O образуют угол, равный 30° . Касательная, проходящая через точку C , пересекает прямую AB в точке D . Докажите, что $OC = 0,5 \cdot OD$.

Решение:

В треугольнике AOC стороны AO и OC равны, как радиусы одной окружности. Значит, треугольник AOC — равнобедренный. Так как углы при основании равнобедренного треугольника равны, то

$$\angle CAO = \angle ACO = 30^\circ.$$

Угол $\angle COD$ является внешним углом треугольника AOC , значит, он равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним, т.е.

$$\angle COD = \angle CAO + \angle ACO = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ.$$

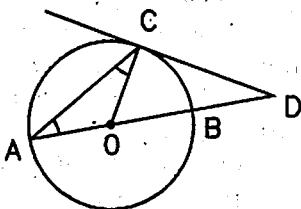
Рассмотрим треугольник COD . Так как касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точке касания, то

$$CD \perp OC.$$

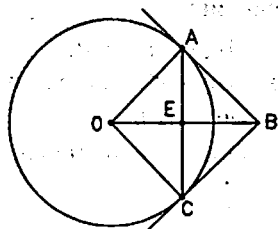
Значит, треугольник COD — прямоугольный, причем один острый угол его равен 60° . Тогда другой острый угол будет равен 30° . Катет OC лежит против угла, равного 30° ; значит, он равен половине гипотенузы, т.е.

$$OC = 0,5 \cdot OD.$$

Что и требовалось доказать.



Задача 5. Из одной точки проведены к окружности две касательные. Длина каждой касательной 13 см, а расстояние между точками касания 24 см. Найти радиус окружности.



Решение:

Пусть AB и BC — касательные, проведенные к окружности с центром в точке O . По условию задачи:

$$BA = BC = 13 \text{ см}, AC = 24 \text{ см}.$$

Рассмотрим треугольники OAB и OCB . Они являются равными прямоугольными треугольниками, так как OA и OC — радиусы одной окружности, проведенные в точки касания. Из равенства треугольников следует, что

$$\angle CBO = \angle ABO.$$

Значит, EB является биссектрисой угла равнобедренного треугольника ABC , лежащего против основания. Поэтому EB также является медианой и высотой этого треугольника, т.е.

$$AE = EC = 0,5 \cdot AC = 12 \text{ (см)}, EB \perp AC.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник AEB , в котором катет AE равен 12 см, а гипотенуза AB равна 13 см. Найдем другой катет:

$$EB = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ (см)}.$$

Из подобия треугольников AOE и BAE следует:

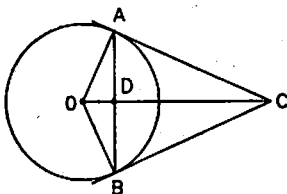
$$\frac{AO}{AB} = \frac{AE}{EB}$$

Отсюда

$$AO = \frac{AE \cdot AB}{EB} = \frac{12 \cdot 13}{5} = 31,2 \text{ (см)}.$$

Ответ: 31,2 см.

Задача 6. Из точки C , отстоящей от центра круга на расстояние m , проведены к нему две касательные. Найти радиус круга, если расстояние между точками касания равно a .



Решение:

Пусть AC и BC — касательные, проведенные из точки C к окружности с радиусом в точке O . По условию задачи:

$$OC = m; AB = a.$$

Обозначим AO через x :

$$AO = x.$$

$$\text{Имеем } AD = DB = \frac{a}{2}; AB \perp OC \text{ (см. задачу 5)}.$$

Из подобия прямоугольных треугольников OAC и ODA следует:

$$\frac{AO}{OD} = \frac{OC}{AO}, \text{ т.е. } AO^2 = OC \cdot OD.$$

Выразим катет OD прямоугольного треугольника OAD через гипотенузу OA и катет AD :

$$OD = \sqrt{AO^2 - AD^2} = \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Тогда:

$$x^2 = m \cdot \sqrt{x^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Преобразуем полученное уравнение, возведя обе части уравнения в квадрат:

$$x^4 - m^2 x^2 + \frac{m^2 a^2}{4} = 0.$$

Из уравнения получаем:

$$x^2 = \frac{m^2 \pm \sqrt{m^4 - m^2 a^2}}{2}.$$

Так как $AO = x$, то

$$AO = \sqrt{\frac{m^2 \pm \sqrt{m^4 - m^2 a^2}}{2}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{m^2 \pm \sqrt{m^4 - m^2 a^2}}{2}}.$

Задача 7. Окружность с центром в точке O касается сторон треугольника ABC в точках M , H , T . Найдите углы треугольника MHT , если $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 40^\circ$.

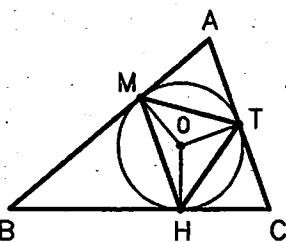
Решение:

Проведем радиусы в точки касания, которые будут перпендикулярны касательным, т.е. $MO \perp AB$, $TO \perp AC$, $HO \perp BC$.

Рассмотрим четырехугольник $BMOH$. Сумма углов четырехугольника равна 360° , $\angle B = 40^\circ$, $\angle BMO = \angle BHO$ равен 90° . Найдём угол $\angle MOH$:

$$\angle MOH = 360^\circ - (\angle B + \angle BMO + \angle BHO)$$

$$\angle MOH = 360^\circ - (40^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 140^\circ.$$



Центральный угол $\angle MOH$ и вписанный угол $\angle MTH$ опираются на одну и ту же дугу, значит:

$$\angle MTH = 0,5 \cdot \angle MOH = 70^\circ.$$

Аналогично из четырехугольника $MATO$ находим угол $\angle MOT$:

$$\angle MOT = 110^\circ.$$

Центральный угол $\angle MOT$ и вписанный угол $\angle MHT$ опираются на одну и ту же дугу, значит:

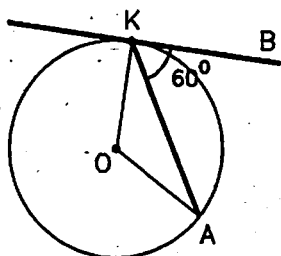
$$\angle MHT = 0,5 \cdot \angle MOT = 55^\circ.$$

Так как сумма углов треугольника равна 180° , то можем найти оставшийся угол треугольника MHT :

$$\angle HMT = 180^\circ - (70^\circ + 55^\circ) = 55^\circ.$$

Ответ: 55° ; 55° ; 70° .

Задача 8. Из точки K , лежащей на окружности, проведены касательная к окружности и хорда KA . Угол между ними равен 60° . Найти длину меньшей дуги, отсекаемой хордой KA , если радиус окружности равен $3/\pi$.



Решение:

Так как угол между хордой и касательной измеряется половиной дуги, заключенной внутри него, то меньшей дуге, отсекаемой хордой KA , соответствует центральный угол, который в два раза больше угла $\angle BKA$, т.е.

$$\angle KOA = 2 \cdot \angle BKA = 120^\circ.$$

Найдем длину меньшей дуги, отсекаемой хордой KA , по формуле:

$$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \alpha = \frac{\pi \cdot \frac{3}{\pi}}{180^\circ} \cdot 120^\circ = 2.$$

Ответ: 2.

Задача 9. Две окружности, каждая из которых вписана в острый угол 60° , касаются друг друга внешним образом. Найти расстояние от точки касания окружностей до стороны угла, если радиус большей окружности равен 23 см.

Решение:

Центры вписанных окружностей лежат на биссектрисе угла $\angle BCA$ (см. задачу 5), т.е.

$$\angle BCO_1 = \angle ACO_1 = 30^\circ.$$

Рассмотрим треугольник BCO_1 . Он является прямоугольным, так как BO_1 — радиус, проведенный в точку касания. Катет BO_1 лежит против угла в 30° , поэтому он равен половине гипотенузы, т.е.

$$BO_1 = 0,5 \cdot CO_1; CO_1 = 46 \text{ (см.)}$$

Точка T — точка касания окружностей. Она делит гипотенузу CO_1 на два равных отрезка, так как

$$CO_1 = O_1T + TC = O_1B + TC$$

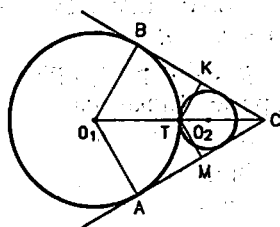
$$(O_1B = O_1T \text{ как радиусы одной окружности}).$$

$$\text{Значит, } TC = 23 \text{ (см.)}$$

Так как все точки, лежащие на биссектрисе угла, равноудалены от сторон угла, то расстояние от точки T до стороны угла равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на любую сторону угла. Опустим из точки T перпендикуляр на сторону CB и рассмотрим прямоугольный треугольник TCK . Угол $\angle TCK$ равен 30° , гипотенуза TC равна 23 см. Катет TK лежит против угла в 30° , поэтому он равен половине гипотенузы, т.е.

$$TK = 0,5 \cdot TC = 11,5 \text{ (см.)}$$

Ответ: 11,5 см.

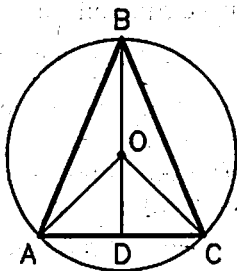


Задача 10. Выведите формулу $R = \frac{a^2}{2h}$,

где R — радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, a — боковая сторона и h — высота, проведенная к основанию.

Решение:

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием AC , около которого описана окружность с центром в точке O .



Обозначим $AO = BO = OC = R$; $AB = a$; $BD = h$;
 $OD = h - R$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABD . По теореме Пифагора:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2.$$

Значит

$$AD^2 = a^2 - h^2.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник AOD . По теореме Пифагора:

$$AO^2 = AD^2 + OD^2.$$

Значит

$$AD^2 = R^2 - (h - R)^2.$$

Получаем:

$$a^2 - h^2 = R^2 - (h - R)^2.$$

После преобразований получаем формулу:

$$R = \frac{a^2}{2h}.$$

Задача 11. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120° , боковая сторона — 2 см. Найти радиус описанной окружности.

Решение:

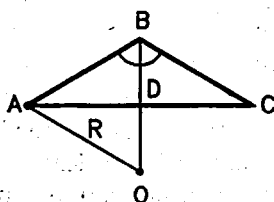
Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC : $\angle ABC = 120^\circ$, $AB = BC = 2$ см, BD — высота, проведенная к основанию. В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является биссектрисой. Значит

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \angle ABC = 60^\circ.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABD . Гипотенуза AB равна 2 см, острый угол $\angle ABD$ равен 60° . Катет BD лежит против угла в 30° , поэтому он равен половине гипотенузы, т.е.

$$BD = \frac{1}{2} AB = 1 \text{ (см)}.$$

В равнобедренном треугольнике ABC боковая сторона равна 2 см, высота, проведенная к основанию, равна 1 см.



Найдем длину радиуса описанной окружности, используя формулу, выведенную в задаче 10:

$$R = \frac{a^2}{2h};$$

$$BO = R = \frac{AB^2}{2 \cdot BD} = \frac{4}{2} = 2 \text{ (см)}.$$

Ответ: 2 см.

Задача 12. Доказать, что в треугольнике ABC

$$R = \frac{ab}{2h_c} = \frac{bc}{2h_a} = \frac{ac}{2h_b},$$

где R — радиус описанной окружности; a, b и c — стороны треугольника; h_c, h_a, h_b — высоты, проведенные соответственно к сторонам c, a, b .

Решение:

Дан треугольник ABC : $CB = a$; $AC = b$; $AB = c$; $CD = h_c$; $OC = R$.

Проведем диаметр CA_1 и рассмотрим треугольник CBA_1 . Он является прямоугольным, так как угол $\angle CBA$ опирается на диаметр. Тогда

$$\sin A_1 = \frac{CB}{CA_1} = \frac{a}{2R}.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник ACD , в котором

$$\sin A = \frac{CD}{AC} = \frac{h_c}{b}.$$

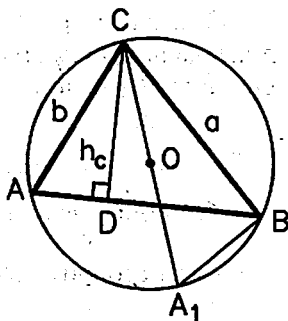
Вписанные углы $\angle A$ и $\angle A_1$ опираются на одну и ту же хорду, поэтому они равны. Из равенства углов следует:

$$\sin A = \sin A_1, \text{ т.е. } \frac{a}{2R} = \frac{h_c}{b}.$$

Получили, что

$$R = \frac{ab}{2h_c}.$$

Аналогично доказывается, что



$$R = \frac{bc}{2h_a} = \frac{ac}{2h_b}$$

Задача 13. Длина окружности равна 4π . Найдите площадь квадрата, вписанного в эту окружность.

Решение:

Рассмотрим квадрат $ABCD$, вписанный в окружность. Диагональ квадрата AC является диаметром этой окружности. Зная, что длина окружности равна 4π , можно найти длину радиуса:

$$2\pi R = 4\pi; R = 2.$$

Так как радиус равен 2, то диаметр равен 4, значит, диагональ AC равна 4. Диагональ и сторона квадрата связаны формулой:

$$d = a\sqrt{2},$$

где d — диагональ, a — сторона квадрата.

Сторона квадрата равна $\frac{4}{\sqrt{2}}$.

Зная сторону квадрата, можем найти его площадь:

$$S = a^2; S = 8.$$

Ответ: 8.

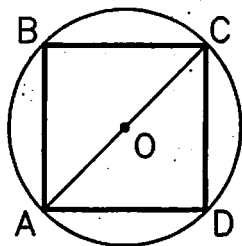
Задача 14. Окружность описана около правильного шестиугольника со стороной $\frac{2}{\pi}$. Найдите длину окружности.

Решение:

Радиус описанной около правильного шестиугольника окружности равен стороне этого шестиугольника. Используя формулу окружности $C = 2\pi R$, найдем длину окружности, описанной около правильного шестиугольника:

$$C = 2\pi \cdot \frac{2}{\pi} = 4.$$

Ответ: 4.



Задача 15. Окружность вписана в правильный шестиугольник со стороной $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$. Найдите длину окружности.

Решение:

Радиус вписанной в правильный многоугольник окружности и радиус описанной около этого многоугольника окружности связаны формулой:

$$r = R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Для правильного шестиугольника эта формула имеет вид:

$$r = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной окружности, то

$$r = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{\pi}.$$

Зная длину радиуса, можно найти длину окружности:

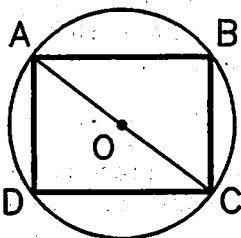
$$C = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot \frac{3}{\pi} = 6.$$

Ответ: 6.

Задача 16. Площадь круга равна 25π см². Определить площадь вписанного в него прямоугольника, стороны которого относятся как 3:4.

Решение:

Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, вписанный в круг с центром в точке O .



Используя формулу площади круга $S = \pi R^2$, найдем радиус этого круга:

$$\pi R^2 = 25\pi; R^2 = 25; R = 5 \text{ (см)}.$$

Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ является диаметром круга, в который вписан прямоугольник. Поэтому

$$AC = 2R = 10 \text{ (см)}.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC . Так как стороны прямоугольника относятся как 3:4, то $BC = 3x$ (см), $AB = 4x$ (см). Используя теорему Пифагора, составим уравнение

$$9x^2 + 16x^2 = 100$$

Из этого уравнения находим, что $x = 2$. Поэтому

$$BC = 6 \text{ (см)}, AB = 8 \text{ (см)}.$$

Зная длину стороны прямоугольника, можно найти его площадь:

$$S = 6 \cdot 8 = 48 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 48 см^2 .

Задача 17. В окружность вписаны правильные треугольник и шестиугольник. Найти отношение площади шестиугольника к площади треугольника.

Решение:

Найдем площадь правильного шестиугольника. Сторона правильного шестиугольника равна радиусу описанной около шестиугольника окружности. Площадь шестиугольника равна площади шести правильных треугольников со стороной, равной радиусу описанной окружности. Используя формулу для нахождения площади правильного треугольника

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

где a — сторона правильного треугольника, найдем площадь правильного шестиугольника:

$$S_6 = 6 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}.$$

Найдем площадь правильного треугольника, вписанного в окружность. Сторона правильного многоугольника и радиус описанной окружности связаны следующей формулой:

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

В частности, для правильного треугольника:

$$a_3 = R \cdot \sqrt{3}.$$

Найдем площадь треугольника:

$$S_3 = \frac{a_3^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{R^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Имеем:

$$S_6 = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}; \quad S_3 = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

Можем найти отношение площади шестиугольника к площади треугольника:

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot R^2 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot R^2} = 2.$$

Ответ: $\frac{S_6}{S_3} = 2.$

Задача 18. Найдите длину окружности, вписанной в ромб, если:

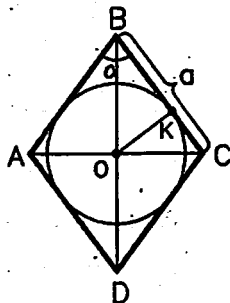
- а) диагонали ромба равны 6 см и 8 см;
- б) сторона ромба равна a и острый угол равен α .

Решение:

а) Рассмотрим ромб $ABCD$. Диагональ BD равна 8 см, диагональ AC равна 6 см. Центр окружности, вписанной в ромб, находится в точке пересечения диагоналей ромба. Стороны ромба лежат на прямых, являющихся касательными к окружности, вписанной в ромб. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, значит

$$OK \perp BC.$$

Рассмотрим треугольник BOC . Так как диагонали ромба перпендикулярны, то треугольник BOC — прямоугольный. OK — высота треугольника BOC , проведенная из вершины прямого угла. Так как площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов или половине произведения его основания на высоту, то



$$S_{\Delta BOC} = \frac{BO \cdot OC}{2} \text{ или } S_{\Delta BOC} = \frac{BC \cdot OK}{2};$$

$$BO = \frac{1}{2}BD = 4 \text{ (см)}; OC = \frac{1}{2}AC = 3 \text{ (см)};$$

$$BO \cdot OC = BC \cdot OK; OK = \frac{BO \cdot OC}{BC}.$$

Отсюда $OK = 2,4 \text{ (см)}; r = 2,4 \text{ (см)}$.

Зная длину радиуса вписанной окружности, можно найти ее длину:

$$C = 2\pi r = 4,8\pi \text{ (см)}.$$

б) Рассмотрим ромб $ABCD$. Сторона BC равна a , а острый угол $\angle ABC$ равен α . Так как диагонали ромба являются биссектрисами его углов, то угол $\angle OBC$ равен $\frac{\alpha}{2}$. Рассмотрим прямоугольный треугольник BOC . Гипотенуза BC равна a , острый угол $\angle OBC$ равен $\frac{\alpha}{2}$. Найдем катеты этого треугольника:

$$BO = a \cdot \cos \frac{\alpha}{2}; OC = a \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

В задаче 18 (а) показано, что

$$OK = \frac{BO \cdot OC}{BC}.$$

Отсюда

$$OK = \frac{a \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot a \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{a} = a \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \sin \alpha;$$

$$r = \frac{a}{2} \sin \alpha.$$

Зная длину радиуса вписанной окружности, можно найти ее длину:

$$C = 2\pi r = \pi a \sin \alpha.$$

Ответ: а) $4,8\pi \text{ см}$; б) $\pi a \sin \alpha$.

VI. Площади фигур

Площадь — численная характеристика, приписываемая плоским фигурам определенного класса (например, многоугольникам). Площадь квадрата со стороной, равной единице длины, принимается равной единице площади.

Основные свойства площади, принимаемые без доказательства:

- 1) равные фигуры имеют равные площади;
- 2) если фигура разбита на части, не имеющие общих внутренних точек, то ее площадь равна сумме площадей этих частей.

Другими словами, если необходимо найти площадь произвольной фигуры, то необходимо определить, сколько квадратов со стороной, равной единице длины, она в себя вмещает.

Площадь треугольника можно вычислить по следующим формулам:

$$1. S = \frac{ah_a}{2},$$

где a — сторона треугольника; h_a — высота, опущенная на эту сторону.

$$2. \text{Формула Герона: } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — стороны треугольника; p — полупериметр.

$$3. S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma,$$

где a, b — стороны треугольника; γ — угол между сторонами a и b .

$$4. S = \frac{abc}{4R},$$

где a, b, c — стороны треугольника; R — радиус описанной окружности.

$$5. S = pr,$$

где p — полупериметр; r — радиус вписанной окружности.

Площадь квадрата: $S = a^2$, где a — сторона квадрата.

Площадь прямоугольника: $S = ab$, где a, b — стороны прямоугольника.

Площадь параллелограмма можно найти по следующим формулам:

1. $S = ah_a$,

где a — сторона параллелограмма; h_a — высота, проведенная к стороне a .

2. $S = ab \sin \alpha$,

где a, b — стороны параллелограмма; α — угол между a и b .

Площадь ромба можно найти по следующим формулам:

1. $S = ah$,

где a — сторона ромба; h — высота ромба.

2. $S = a^2 \sin \alpha$,

где a — сторона ромба; α — угол между соседними сторонами.

3. $S = \frac{d_1 d_2}{2}$,

где d_1 и d_2 — диагонали ромба.

Площадь трапеции: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, где a и b — основания трапеции; h — высота трапеции.

Площадь круга: $S = \pi R^2$, где R — радиус круга.

Площадь кругового сектора: $S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$, где R — радиус круга; α — величина соответствующего центрального угла, измеренного в градусах.

Задача 1. Найти площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 8 см.

Решение:

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC . Гипотенуза AB равна 8 см. Так как по условию треугольник равнобедренный, то его катеты равны, т.е.

$$AC = CB.$$

По теореме Пифагора:

$$AC^2 + CB^2 = AB^2, \text{ т.е. } 2 \cdot AC^2 = AB^2.$$

$$\text{Отсюда } AC^2 = 32.$$

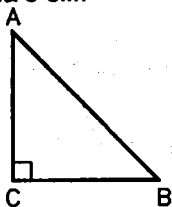
Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, т.е.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot CB}{2} = \frac{AC^2}{2}.$$

Отсюда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{32}{2} = 16 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 16 см².



Задача 2. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 30° . Найти боковую сторону треугольника, если его площадь равна 200 см².

Решение:

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с боковыми сторонами AB и BC .

Так как площадь треугольника равна половине произведения сторон треугольника на синус угла между ними, то

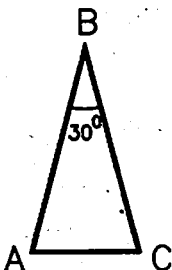
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot AB^2 \cdot \sin B;$$

$$200 = \frac{1}{2} \cdot AB^2 \cdot \sin 30^\circ.$$

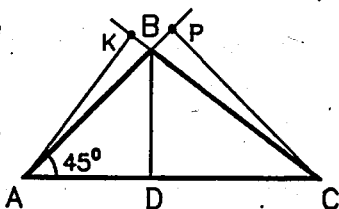
Отсюда

$$AB^2 = 800; AB = \sqrt{800} = 20\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

Ответ: $20\sqrt{2}$ см.



Задача 3. В треугольнике ABC $\angle A = 45^\circ$, а высота BD делит сторону AC на отрезки $AD = 6$ см, $DC = 8$ см. Найдите площадь треугольника и высоты, проведенные к сторонам AB и BC .



Решение:

Рассмотрим треугольник ABC : BD — высота, проведенная к стороне AC ; AK — высота, проведенная к стороне BC ; CP — высота, проведенная к стороне AB . Необходимо найти площадь треугольника ABC и высоты AK и CP .

Рассмотрим треугольник ABD . Он является прямоугольным, так как BD — высота. Острый угол этого треугольника равен 45° , значит, треугольник — равнобедренный, т.е. $AD = DB = 6$ (см).

В треугольнике ABC высота BD равна 6 см. Найдём сторону AC , к которой проведена высота BD :

$$AC = AD + DC = 6 + 8 = 14 \text{ (см)}.$$

Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, т.е.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{6 \cdot 14}{2} = 42 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Найдём стороны AB и BC треугольника ABC . Сторону AB — из прямоугольного треугольника ABD , а сторону BC — из прямоугольного треугольника BDC .

$$AB = \frac{BD}{\sin 45^\circ} = 6\sqrt{2} \text{ (см)};$$

$$BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = 10 \text{ (см)}.$$

Зная площадь треугольника и основание, можно найти высоту:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AK \cdot BC}{2}; \text{ значит, } AK = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 42}{10} = 8,4 \text{ (см)};$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot CP}{2}; \text{ значит, } CP = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB} = \frac{2 \cdot 42}{6\sqrt{2}} = 7\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 42 \text{ см}^2$; $AK = 8,4 \text{ см}$; $CP = 7\sqrt{2} \text{ см}$.

Задача 4. Найдите площадь треугольника, стороны которого равны 13 м, 14 м, 15 м.

Решение:

Для нахождения площади треугольника воспользуемся формулой Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21 \text{ (м)};$$

$$S = \sqrt{21 \cdot (21 - 13) \cdot (21 - 14) \cdot (21 - 15)} = 84 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $S = 84 \text{ м}^2$.

Задача 5. Найдите площадь треугольника, описанного около окружности радиуса 12 см, если его периметр равен 12 дм.

Решение:

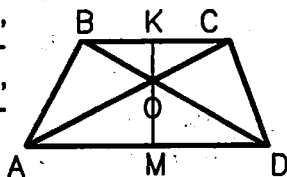
Для нахождения площади треугольника воспользуемся формулой: $S = p \cdot r$.

$$P = 12 \text{ дм} = 120 \text{ см}; p = \frac{P}{2} = \frac{120}{2} = 60 \text{ (см)}.$$

$$S = 60 \cdot 12 = 720 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 720 см^2 .

Задача 6. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции и ее основаниями, равны S и Q . Найдите площадь трапеции.



Решение:

Рассмотрим трапецию $ABCD$. По условию площадь треугольника BOC равна S , а площадь треугольника AOD равна Q . Проведем высоту трапеции KM . Причем отрезок OK будет высотой треугольника BOC , а отрезок OM — высотой треугольника AOD .

Введем обозначения:

$$BC = a; AD = b; OK = h_a; OM = h_b.$$

$$\text{Тогда } KM = h_a + h_b.$$

Так как площадь трапеции $ABCD$ равна:

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot KM, \text{ то}$$

$$S_{ABCD} = \frac{a + b}{2} \cdot (h_a + h_b) = \frac{ah_a + bh_a + ah_b + bh_b}{2}.$$

Рассмотрим треугольники BOC и DOA , они будут подобны.

Имеем

$$\frac{a}{b} = \frac{h_a}{h_b} = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{Q}}$$

$$\text{Так как } S_{\triangle BOC} = \frac{BC \cdot OK}{2} = \frac{ah_a}{2}, \text{ то } ah_a = 2S.$$

$$\text{Так как } S_{\triangle AOD} = \frac{AD \cdot OM}{2} = \frac{bh_b}{2}, \text{ то } bh_b = 2Q.$$

Из пропорции

$$\frac{a}{b} = \frac{h_a}{h_b}$$

следует равенство:

$$ah_b = bh_a.$$

Получаем:

$$S_{ABCD} = \frac{2S + 2ah_b + 2Q}{2} = S + ah_b + Q.$$

$$\text{Так как } a = b \cdot \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{Q}}; h_b = \frac{2Q}{b}, \text{ то}$$

$$ah_b = \frac{b \cdot \sqrt{S} \cdot 2Q}{\sqrt{Q} \cdot b} = 2 \cdot \sqrt{S} \cdot \sqrt{Q}.$$

Получаем:

$$S_{ABCD} = S + 2 \cdot \sqrt{S} \cdot \sqrt{Q} + Q = (\sqrt{S} + \sqrt{Q})^2.$$

Ответ: $(\sqrt{S} + \sqrt{Q})^2$.

Задача 7. Стороны параллелограмма равны 6 и 10 см, а высота, проведенная к большей из них, равна 5 см. Найдите высоту, проведенную к другой стороне.

Решение:

Так как площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, то

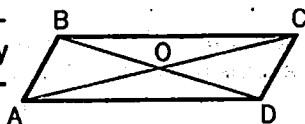
$$S = ah_a = bh_b.$$

Значит, зная стороны параллелограмма и одну из его высот, можно найти другую высоту по формуле:

$$h_a = \frac{bh_b}{a}; h_a = \frac{10 \cdot 5}{6} = 8\frac{1}{3} \text{ (см).}$$

Ответ: $8\frac{1}{3}$ см.

Задача 8. Диагонали параллелограмма равны 6 и 8 см, а угол между ними — 30° . Найти площадь параллелограмма.



Решение:

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$. Диагонали BD и AC пересекаются в точке O . $BD = 6$ см, $AC = 8$ см, $\angle BOA = 30^\circ$. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, т.е.

$$BO = OD = 3 \text{ см, } AO = OC = 4 \text{ см.}$$

При пересечении диагоналей образуются вертикальные углы, т.е.

$$\angle BOA = \angle COD = 30^\circ; \angle BOC = \angle AOD = 150^\circ.$$

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна сумме площадей треугольников AOB , BOC , COD , DOA .

Так как

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} (BO \cdot OC \cdot \sin \angle BOC);$$

$$S_{AOD} = \frac{1}{2} (AO \cdot OD \cdot \sin \angle AOD), \text{ то}$$

$$S_{BOC} = S_{AOD}.$$

Так как

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} (BO \cdot AO \cdot \sin \angle AOB);$$

$$S_{DOC} = \frac{1}{2} (DO \cdot OC \cdot \sin \angle DOC), \text{ то}$$

$$S_{AOB} = S_{DOC}.$$

Так как

$$\sin 150^\circ = \sin (180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ, \text{ то}$$

$$S_{BOC} = S_{AOD} = S_{AOB} = S_{DOC}.$$

Получили

$$S_{ABCD} = 4S_{AOB} = 4 \cdot \frac{AO \cdot OB \cdot \sin AOB}{2};$$

$$S_{ABCD} = 4 \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 0,5}{2} = 12 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $S_{ABCD} = 12 \text{ см}^2$.

Задача 9. В параллелограмме одна из сторон равна 10 см, а один из углов — 30° . Найдите площадь параллелограмма, если его периметр равен 56 см.

Решение:

Так как в параллелограмме противоположные стороны равны, сумма двух соседних сторон параллелограмма равна полупериметру, т.е.

$$a + b = 28 \text{ (см)}.$$

Отсюда вторая сторона параллелограмма равна 18 см.

Так как площадь параллелограмма равна произведению соседних сторон параллелограмма на синус угла между ними, то

$$S = 10 \cdot 18 \cdot \sin 30^\circ = 90 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 90 см^2 .

Задача 10. Квадрат и ромб, не являющийся квадратом, имеют одинаковые параметры. Сравните площади этих фигур.

Решение:

Так как у квадрата и у ромба все стороны равны между собой, а по условию квадрат и ромб имеют одинаковые параметры, то сторона квадрата равна стороне ромба. Обозначим сторону квадрата и сторону ромба через a . Тогда площадь квадрата равна a^2 , а площадь ромба равна $a^2 \sin \alpha$, где α — угол между соседними сторонами ромба.

Так как ромб не является квадратом по условию, то $\alpha \neq 90^\circ$, т.е. $\sin \alpha < 1$.

Значит

$$a^2 > a^2 \sin \alpha.$$

То есть площадь квадрата больше площади ромба.

Ответ: площадь квадрата больше.

Задача 11. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 4 см и 6 см.

Решение:

Для нахождения площади ромба воспользуемся формулой

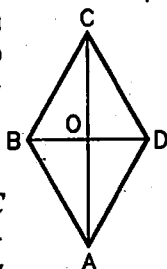
$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

Значит, площадь данного ромба будет равна:

$$S = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 12 см².

Задача 12. Найдите отношение площадей ромба с острым углом 60° и равностороннего треугольника, сторона которого равна большей диагонали ромба.



Решение:

Рассмотрим ромб $ABCD$: $\angle BCD = 60^\circ$; AC и BD — диагонали ромба, причем AC — большая диагональ. Обозначим сторону ромба через a . Тогда площадь ромба $ABCD$ будет равна:

$$S_p = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, т.е.

$$DB \perp CA, CO = OA.$$

Треугольник BCD — равносторонний, так как $BC = CD$ и $\angle BCD = 60^\circ$, CO — высота этого треугольника, тогда

$$CO = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда $CA = a\sqrt{3}$.

CA — сторона данного равностороннего треугольника. Найдем его площадь:

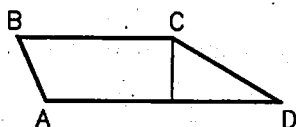
$$S_{\text{тр.}} = \frac{(a\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4}.$$

Теперь можем найти отношение площадей данного ромба и данного равностороннего треугольника:

$$S_{\text{р.}} : S_{\text{тр.}} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} : \frac{a^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $S_{\text{р.}} : S_{\text{тр.}} = 2:3$.

Задача 13. Найдите площадь трапеции, основания которой равны 45 см и 68 см, боковая сторона 36 см и угол при ней равен 30° .



Решение:

Рассмотрим трапецию $ABCD$: $BC = 45$ см; $AD = 68$ см; $CD = 36$ см; $\angle CDA = 30^\circ$.

Так как площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту, то необходимо найти высоту трапеции. Из вершины C на основание AD опустим высоту CK . Рассмотрим прямоугольный треугольник CDK , гипотенуза CD которого равна 36 см, а острый угол $\angle CDK$ равен 30° . Так как катет CK лежит против угла в 30° , то его длина равна половине длины гипотенузы, т.е.

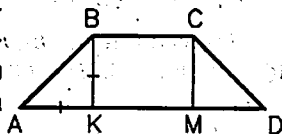
$$CK = 0,5 \cdot CD = 18 \text{ (см)}.$$

Теперь можем найти площадь данной трапеции:

$$S_{\text{тр.}} = \frac{45 + 68}{2} \cdot 18 = 1017 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 1017 см^2 .

Задача 14. Найти площадь равнобедренной трапеции, большее основание которой равно 34 см, угол при основании равен 45° и высота равна 10 см.



Решение:

Рассмотрим трапецию $ABCD$: $AD = 34$ см; $\angle BAD = 45^\circ$; BK — высота; $BK = 10$ см. Для того чтобы найти площадь данной трапеции, необходимо найти меньшее основание BC .

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABK . Так как острый угол $\angle BAK$ равен 45° , то этот треугольник является прямоугольным. Значит

$$BK = AK = 10 \text{ (см)}.$$

Теперь из вершины C опустим высоту CM и получим равнобедренный прямоугольный треугольник CMD , который будет равен треугольнику BKA , причем $AK = DM = 10$ (см). Четырехугольник $KBCM$ является прямоугольником, значит,

$$BC = KM = AD - AK - MD = 14 \text{ (см)}.$$

Найдем площадь данной трапеции:

$$S_{\text{тр.}} = \frac{34 + 14}{2} \cdot 10 = 240 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 240 см^2 .

Задача 15. Около окружности описана равнобедренная трапеция с боковой стороной 10 см, меньшим основанием 7 см. Найдите площадь этой трапеции.

Решение:

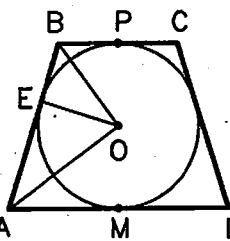
Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$: $AB = CD = 10$ см; $BC = 7$ см; O — центр вписанной окружности.

Так как в описанном четырехугольнике суммы противолежащих сторон равны, то

$$AD = (AB + CD) - BC = 13 \text{ (см)}.$$

AO — биссектриса угла $\angle BAD$; BO — биссектриса угла $\angle ABC$, т.к. центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис.

Рассмотрим треугольник AOB . Так как сумма углов $\angle BAD$ и $\angle ABC$ равна 180° , то сумма углов $\angle BAO$ и $\angle ABO$ равна 90° . Значит, треугольник ABO — прямоугольный.



Радиус EO вписанной окружности является высотой прямоугольного треугольника AOB , опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу. Значит

$$OE^2 = AE \cdot EB$$

Причем

$$AE = AM = \frac{1}{2} AD = 6,5 \text{ (см);}$$

$$EB = BP = \frac{1}{2} BC = 3,5 \text{ (см).}$$

(как отрезки касательных, проведенных из одной точки)

$$OE = \sqrt{6,5 \cdot 3,5} \text{ (см).}$$

Высота трапеции равна диаметру вписанной окружности, т.е.

$$H = 2OE = 2 \cdot \sqrt{6,5 \cdot 3,5} = \sqrt{91} \text{ (см).}$$

Найдем площадь трапеции:

$$S_{\text{тр.}} = \frac{13 + 7}{2} \cdot \sqrt{91} = 10 \cdot \sqrt{91} \text{ (см}^2\text{).}$$

Ответ: $S_{\text{тр.}} = 10 \cdot \sqrt{91} \text{ см}^2$.

Стереометрия

Планиметрия — это первая часть школьного курса геометрии. В ней рассматриваются плоские фигуры. Действие разворачивается на плоскости. Точки и прямые на плоскости являются главными объектами первой части. Во второй части появляются новые объекты — это пространственные фигуры — многогранники, круглые тела. Эта часть называется *стереометрией*, от греческого слова «*stereos*», что означает «пространственный», и «*metreo*», что означает «измеряю».

І. Аксиомы стереометрии

Задача 1. Даны 4 точки M, N, P, Q . Докажите, что прямые MN и PQ не пересекаются, если точки M, N, P и Q не лежат в одной плоскости.

Решение:

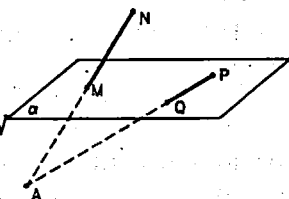
Доказательство от противного.

Предположим, что прямые MN и PQ пересекаются в точке A , т.е.

$$MN \cap PQ = A$$

Но через две пересекающиеся прямые MN и PQ можно провести плоскость, а как раз это противоречит условию, т.к. четыре точки M, N, P и Q оказываются лежащими в этой новой плоскости. Следовательно, предположение, что прямые MN и PQ пересекаются, было неверным, и утверждение доказано.

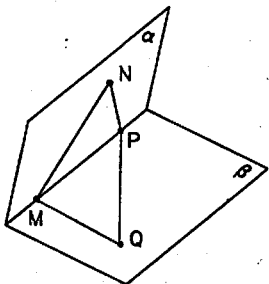
Четыре точки M, N, P, Q , не лежащие в одной плоскости, образуют пространственный четырехугольник $MNPQ$.



Задача 2. Четыре точки M, N, P, Q не лежат в одной плоскости. Докажите, что плоскости MNP и MPQ пересекаются.

Решение:

Две плоскости, назовем их α и β , имеют общую точку M . По аксиоме стереометрии $\alpha \cap \beta$ и линия пересечения проходит через точку M . С другой стороны, эти же плоскости имеют общую точку P , теперь уже линия пересечения проходит через точку P . Но нам известно, что через две точки можно провести единственную прямую, следовательно, $\alpha \cap \beta = MP$, т.е. плоскости α и β , или MNP и MPQ пересекаются по прямой PQ .



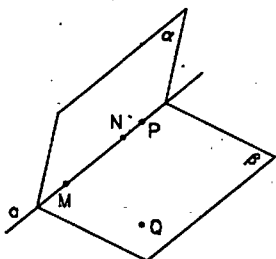
Задача 3. Может ли оказаться, что истинны сразу два утверждения: четыре точки M, N, P, Q не лежат в одной плоскости и три из них (без ограничения общности — пусть это M, N, P) лежат на одной прямой?

Решение:

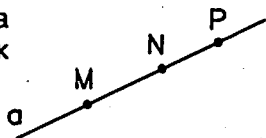
Три точки оказались на одной прямой a , $M \in a$, $N \in a$, $P \in a$, и еще известно, что четвертая точка $Q \notin a$.

По аксиоме через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну, $a \subset \beta$, $Q \in \beta$, и таким образом, четыре точки, оказываются в одной плоскости, поэтому два утверждения не могут быть истинными одновременно.

Ответ: не могут.

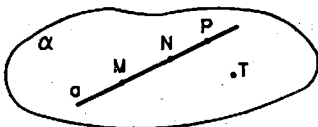


Задача 4. Три точки M, N, P лежат на одной прямой a , $M \in a$, $N \in a$, $P \in a$. Как провести плоскость через M, N, P ?



Решение:

Выберем точку $T \notin a$. Через прямую и точку, не принадлежащую этой прямой, можно провести плоскость, и притом единственную.



Задача 5. Две прямые a и b пересекаются в точке N . Доказать, что все прямые, не проходящие через точку N и пересекающие и a , и b , лежат в одной плоскости.

Решение:

Рассмотрим две пересекающиеся прямые a и b .

$$a \cap b = N$$

Пусть некоторая прямая c пересекает каждую из прямых a и b :

$$c \cap a = Q$$

$$c \cap b = P$$

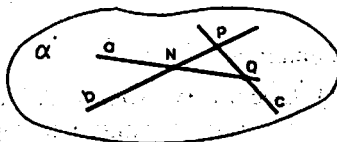
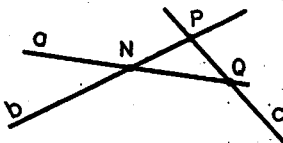
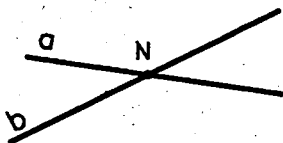
Через две пересекающиеся прямые a и b можно провести плоскость α , и притом только одну:

$$a \subset \alpha \text{ и } b \subset \alpha$$

Точка $P \in b \Rightarrow P \in \alpha$,
аналогично $Q \in a \Rightarrow Q \in \alpha$.

Но если две точки принадлежат плоскости, то вся прямая, проходящая через эти точки, тоже принадлежит этой плоскости, т.е.

$PQ \subset \alpha \Leftrightarrow c \subset \alpha$, но c была произвольной прямой $\Rightarrow$ утверждение доказано.



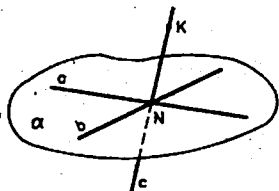
Задача 6. Две прямые a и b пересекаются в точке N . Доказать, что существует прямая проходящая через точку N и такая, что прямые a , b , c не лежат в одной плоскости.

Решение:

- 1) $\exists \alpha, a \subset \alpha, b \subset \alpha$;
- 2) $\exists K \notin \alpha$;
- 3) $KN \not\subset \alpha, a \cap b \cap KN = N$

Получили, что прямая KN проходит через точку N , общую точку прямых a и b , в то же время $KN \not\subset \alpha$, т.к. $K \notin \alpha$.

Значит, $\exists c \not\subset \alpha$, причем $c \cap a \cap b = N$.



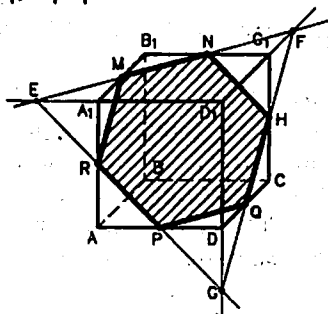
II. Встреча с сечением. Развитие пространственного воображения

При построении сечений развивается объемная фантазия, точки движутся, путешествуют, переходят с одной грани фигуры на другую. На картинах художников часто можно увидеть совершенно плоские изображения. Плоские изображения святых на старинных иконах очень выразительны, живы и эмоциональны. Это загадка плоского и пространственного изображений. Научить воспринимать плоскую картинку как объемную и пространственную — это одна из задач стереометрии.

Задача 1. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через середины ребер A_1B_1 , B_1C_1 и AD .

Решение:

- 1) Соединим точки M и N прямой, лежащей в плоскости $A_1B_1C_1D_1$.
- 2) Продолжим до пересечения с продолжением сторон A_1D_1 и C_1D_1 . Получаем точку $E \in AA_1D_1D$ и $F \in DD_1C_1C$.
- 3) В плоскости AA_1D_1D соединим две точки E и P до пересечения с ребром DD_1 , точнее, его продолжением, получаем точку $G \in DD_1C_1C$.

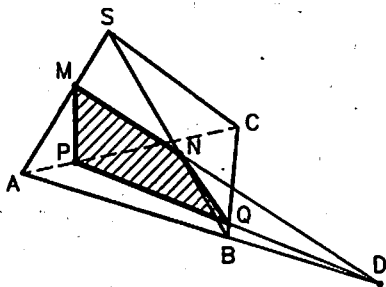


- 4) В плоскости грани DD_1C_1C получим построением две точки G и F . Соединяем их прямой до пересечения с ребром CD и C_1C .
- 5) Отмечаем точки пересечения с ребрами фигуры.
- 6) Сечение — $MNHQPR$.

Задача 2. Построить сечение треугольной пирамиды $SABC$ плоскостью, проходящей через точки M, N, P . Точка $M \in AS$ и делит ребро AS в отношении $1:3$, считая от вершины S . Точка $N \in BS$, середина ребра BS , и точка $P \in AC$ и делит ребро AC в отношении $1:4$, считая от точки A .

Решение:

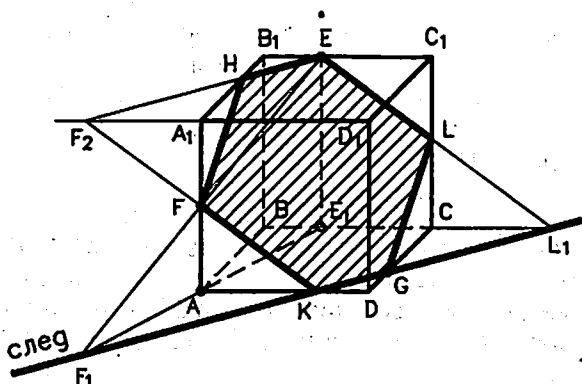
- 1) Соединим точки M и N , принадлежащие грани ABS .
- 2) Продолжим MN до пересечения с продолжением ребра AB , также принадлежащим грани ABS . Получаем точку D .
- 3) Точка $D \in ABC$, кроме того, $P \in ABC$. Соединим точки P и D , прямая $PD \subset ABC$.
- 4) Точка $Q = PD \cap BC$.
- 5) Соединим отрезки на гранях, получаем сечение $MNQP$.



В поисках следа

Мы задавали секущую плоскость тремя точками, так как мы знаем, что через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну. Следом плоскости называется прямая, по которой пересекаются грань фигуры и секущая плоскость. Иногда след сразу задан, когда, например, две точки сечения принадлежат одной грани, в другом случае его нужно найти.

Задача 3. Найдите сечение куба плоскостью, если три точки секущей плоскости соответственно лежат на ребрах B_1C_1 , AA_1 , CD .



Решение:

- 1) Заданы точки $E \in B_1C_1$, $F \in AA_1$, $G \in CD$.
- 2) Как построить след сечения на плоскости основания?
- 3) Спроецируем E на плоскость основания параллельно ребру AA_1 . Получаем E_1 .
- 4) Спроецируем точку F . Получаем A .
- 5) Рассмотрим плоскость $AFEE_1$.
- 6) Две прямые EF и AE_1 в плоскости $AFEE_1$ пересекаются в точке $F_1 \in ABCD$.
- 7) Соединяем F_1 и заданную точку G , находим след F_1G , по этой прямой пересекаются плоскость основания и секущая плоскость.
- 8) Ребро AD пересекается со следом F_1G в точке $K \in AA_1D_1D$.
- 9) Соединяем точки F и K и находим точку пересечения с продолжением ребра A_1D_1 , точку $F_2 \in A_1B_1C_1D_1$.
- 10) Соединяем F_2 и E , лежащие в плоскости $A_1B_1C_1D_1$.
- 11) При пересечении с ребром A_1B_1 получаем точку H .
- 12) Наконец, в плоскости BB_1C_1C соединяем две точки E и L_1 , при пересечении с ребром CC_1 получаем точку L .
- 13) Сечение $EHFKGL$ построено.

Заметим, что поиски следа могут оказаться безрезультатными по очень простой и прозаической причине: он окажется за пределами чертежа. Есть два пути:

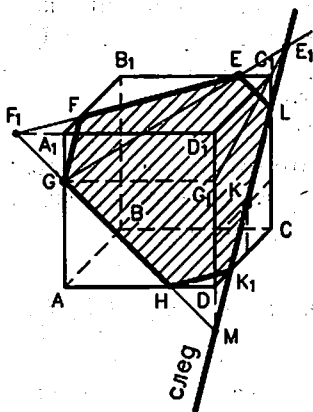
- 1) поискать след на другой плоскости, на плоскости другой грани;
- 2) использовать метод вспомогательных плоскостей.

Задача 4. Проведите сечение через три точки на ребре куба: G на ребре AA_1 , E на ребре B_1C_1 , K на грани CC_1D_1D .

Решение:

Придется нам расстаться с привычкой находить след на плоскости нижней грани, т.к. построения находятся за пределами чертежа.

Будем искать след на плоскости DD_1C_1C . Начинаем с параллельного проецирования точек G и E на плоскость грани CC_1D_1D , параллельно ребру A_1D_1 .



- 1) В плоскости EC_1G_1G находим пересечение прямых EG и C_1G_1 .

$$EG \cap C_1G_1 = E_1, E_1 \in DD_1C_1C.$$

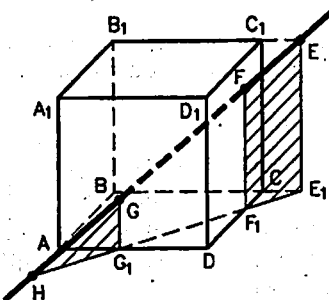
- 2) Теперь в плоскости боковой грани имеются две точки E_1 и K . Проведем через них прямую ME_1 , это след.
- 3) Продолжим ребро DD_1 , получаем точку $M \in ADD_1$, т.е. принадлежит плоскости передней грани.
- 4) В плоскости ADD_1 две точки G и M , соединим их, на продолжении находим точку F_1 .
Точка F_1 находится на продолжении стороны A_1D_1 и $F_1 \in A_1B_1C_1$.
- 5) В плоскости верхней грани $A_1B_1C_1$ проводим прямую F_1E и точку $F \in A_1B_1$.
- 6) Соединяем точки на гранях, получаем сечение ELK_1HGF .

Задача 5. Найдите точки пересечения прямой EH с гранями куба, если точка E лежит на продолжении B_1C_1 , а H на продолжении AB .

Решение:

- 1) Заданная точка E находится на продолжении стороны B_1C_1 . Спроецируем точку E параллельно ребру CC_1 на плоскость основания $ABCD$. Получим точку E_1 .

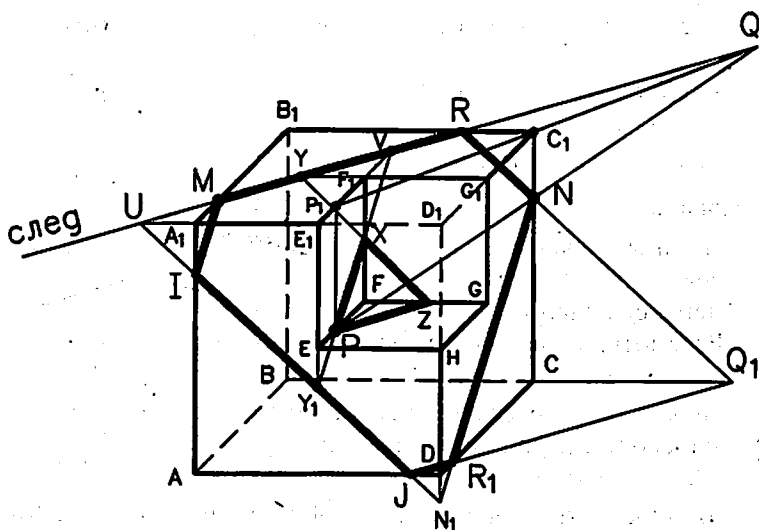
- 2) Теперь в плоскости грани $ABCD$ имеем две точки E_1 и H . Соединяем их.
 - 3) В точках G_1 и F_1 прямая E_1H пересекается с ребрами куба AD и CB .
 - 4) Соединим E и H .
 - 5) Проведем $FF_1 \parallel CG_1 \parallel CC_1$, это тот способ, который мы применяли при параллельном проектировании, параллельно CC_1 .
 - 6) $HE \cap FF_1 = F$ и $HE \cap G_1G = G$.
- Ответ:** точки $F \in CC_1D_1D$ и $G \in AA_1D_1D$.



Задача 6. Рассмотрим куб с вырезом. На поверхности этой невыпуклой фигуры зададим три точки, которые и определяют плоскость сечения. Точка M лежит на ребре A_1B_1 , точка N на ребре CC_1 , и точка P на ребре выреза EF .

Решение:

- 1) Будем искать след на плоскости грани $A_1B_1C_1D_1$.
- 2) Спроецируем на эту плоскость точку P параллельно ребру EE_1 . Получаем $P_1 \in A_1B_1C_1$.
- 3) Спроецируем на эту же плоскость точку N параллельно ребру CC_1 . Точка N проецируется в точку C_1 .
- 4) Соединим P_1 и C_1 , получаем прямую в плоскости $A_1B_1C_1$.
- 5) Соединим точки P и N , прямая PN пересекается с P_1C_1 в точке Q , которая, с одной стороны, принадлежит сечению, а с другой стороны — плоскости $A_1B_1C_1$.
- 6) Соединим точки M и Q , получаем след MQ .
- 7) След MQ пересекается с ребром B_1C_1 в точке R .
- 8) Пересечение следа с продолжением стороны A_1D_1 получаем точку $U \in AA_1D_1$.
- 9) Еще след пересекается с продолжением ребра E_1F_1 выреза, в результате получаем точку V .
- 10) Точка V принадлежит плоскости боковой грани выреза, поэтому соединяем P и V , получаем точку X при пересечении с ребром F_1F .



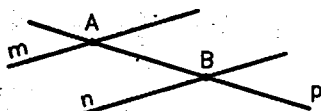
- 11) Кроме того, след MQ пересекается с продолжением ребра выреза F_1G_1 в точке Y .
- 12) Точки X и Y находятся в плоскости грани FF_1G_1G , соединяем их.
- 13) Прямая XY пересекается с ребром выреза в точке Z .
- 14) Соединяем P и Z .
- 15) В плоскости грани EE_1F_1F проводим прямую XP до пересечения с продолжением ребра EE_1 в точке Y_1 .
- 16) Соединяем точки U и Y_1 , которые находятся в грани AA_1D_1D , получаем точки пересечения с ребрами AA_1 и AD , точку $I \in AA_1$ и точку $J \in AD$.
- 17) Продолжаем прямую IJ до пересечения с продолжением ребра D_1D грани AA_1D_1D . Получаем точку N_1 .
- 18) Точка $N_1 \in DD_1C_1$, поэтому соединяем ее с точкой N , получаем точку $R_1 \in DC$.
- 19) Сечение шестиугольника $MNRN_1JI$ с внутренним вырезом, треугольником XPZ , построено.
- 20) Точка Q_1 контрольная, проверяет правильность построения.

III. Параллельность прямых и плоскостей

Задача 1. Докажите, что прямая, пересекающая две параллельные прямые, лежит в одной плоскости с данными параллельными прямыми.

Решение:

- 1) Заданы параллельные прямые, $m \parallel n$, которые пересечены секущей p .
- 2) Рассмотрим две пересекающиеся прямые



$$n \cap p = B$$

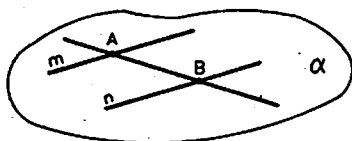
Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну, значит:

$$\exists \alpha \ n \subset \alpha, p \subset \alpha$$

- 3) В плоскости α через точку $A \notin n$ можно провести параллельную прямую, и притом только одну, итак:

$$m' \parallel n, A \in m', A \notin n, m' \subset \alpha$$

- 4) С другой стороны, в пространстве через точку A можно провести только одну прямую, параллельную данной, в нашем случае m , значит $m = m'$.



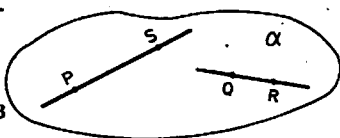
Замечание: Аналогично для случаев, когда прямая пересекает несколько параллельных между собой прямых, или когда несколько прямых пересекают две параллельные прямые.

Задача 2. Докажите, что если прямые PQ и RS скрещиваются, то прямые PS и QR также скрещиваются.

Решение:

Доказательство от противного, ad absurdum.

- 1) Пусть утверждение неверно.
- 2) Значит, PS и QR лежат в одной плоскости.



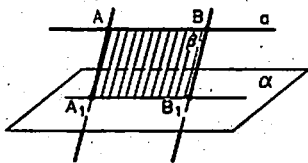
$$PS \subset \alpha; QR \subset \alpha.$$

- 3) $P \in \alpha, S \in \alpha$, т.к. $PS \subset \alpha$
 $Q \in \alpha, R \in \alpha$, т.к. $QR \subset \alpha$ по предположению.
- 4) Соединим P и Q , а также R и S . Получаем прямые PQ и RS , они также лежат в плоскости α , т.к. если две точки принадлежат плоскости, то и прямая, проходящая через эти точки, также лежит в плоскости.
- 5) Пришли к противоречию с условием, к «абсурду», т.к. прямые лежат в одной плоскости и, значит, не скрещиваются.
- 6) Предположение, что PS и QR не скрещиваются, было неверным, утверждение доказано.

Задача 3. Пусть прямая $a \parallel \alpha$, через точки A и B прямой проведены параллельные прямые, которые пересекаются с плоскостью α в точках A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что $AA_1 = BB_1$.

Решение:

- 1) $AA_1 \parallel BB_1$, они пересекаются третьей прямой a , значит, AA_1, BB_1 и a лежат в одной плоскости. Пусть это будет β .
- 2) Через прямую a , параллельную α , проведена плоскость β , $\alpha \cap \beta = A_1B_1 \Rightarrow AB \parallel A_1B_1$.
- 3) A_1ABB_1 — параллелограмм. Противоположные стороны параллелограмма равны.
 $AA_1 = BB_1$, что и требовалось доказать.



Задача 4. Даны две скрещивающиеся прямые s и d . Пусть точка $B \notin s$ и $B \notin d$.

Два вопроса:

- 1) Какой алгоритм проведения через точку B прямой, пересекающей s , и d ?
- 2) Можно ли провести две различные прямые через точку B , чтобы они пересекали s , и d ?

Решение:

Начнем с ответа на второй вопрос.

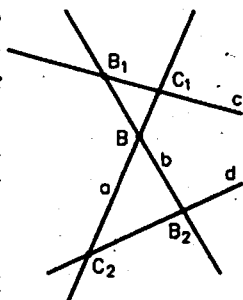
От противного. Предположим, что через точку B можно провести две различные прямые a и b , пересекающие c и d .

Через пересекающиеся прямые a и b можно провести единственную плоскость α , причем

$$a \subset \alpha, b \subset \alpha \Rightarrow B_1, C_1, B_2, C_2 \in \alpha.$$

Однако, если две различные точки принадлежат плоскости α , то и прямая, проходящая через эти точки, принадлежит плоскости α , $\Rightarrow B_1C_1 \subset \alpha, B_2C_2 \subset \alpha$.

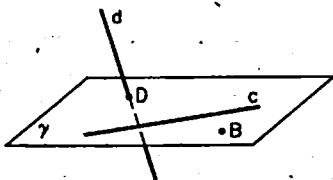
Но ведь $B_1C_1 = c$ и $B_2C_2 = d$, т.к. через две различные точки можно провести единственную прямую. В результате оказалось, что c и d лежат в одной плоскости α , что противоречит условию, ведь задано, что c и d скрещиваются.



Теперь первый вопрос:

1) Через прямую c и точку $B \notin c$ проведем единственную плоскость γ , $c \subset \gamma$, $B \in \gamma$.

2) Если $d \parallel \gamma$, то нельзя провести прямую через точку B , пересекающую c и d .



3) Если d пересекает плоскость γ , то $\gamma \cap d = D$ и BD — искомая прямая, проходящая через точку B и пересекающая две скрещивающиеся прямые. И здесь есть исключение. Если $BD \parallel c$, то нельзя построить прямую, пересекающую скрещивающиеся прямые.

Задача 5. Пусть отрезок MN не пересекает плоскость β , т.е. $MN \cap \beta = \emptyset$. Пусть K — середина MN . Через точки M, N и K проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость β соответственно в точках M_1, N_1 и K_1 . Найдите KK_1 , если $MM_1 = l_1$ и $NN_1 = l_2$.

Решение:

- 1) $MM_1 \parallel KK_1 \parallel NN_1$ — эти прямые лежат в одной плоскости γ , ведь они пересекают прямую MN .
- 2) MM_1N_1N — трапеция, KK_1 — средняя линия трапеции, MM_1 и NN_1 — основания трапеции.
- 3) Средняя линия трапеции равна полусумме оснований трапеции:

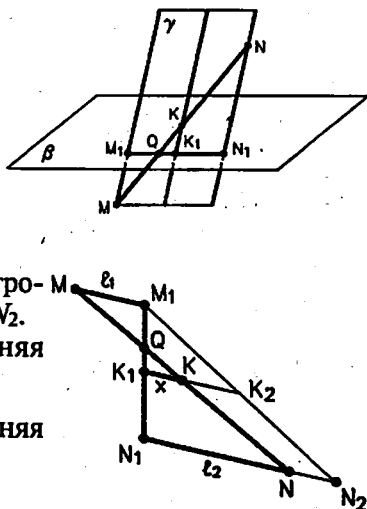
$$KK_1 = \frac{MM_1 + NN_1}{2} = \frac{l_1 + l_2}{2}.$$

Ответ: $\frac{l_1 + l_2}{2}$.

Задача 6. Пусть отрезок MN пересекает плоскость β , т.е. $MN \cap \beta = Q$. Пусть K — середина MN . Через точки M, N и K проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость β соответственно в точках M_1, N_1 и K_1 . Найдите KK_1 , если $MM_1 = l_1$ и $NN_1 = l_2$. Аналогично, но $MN \cap \beta = Q$.

Решение:

- 1) По-прежнему заметим, что $MM_1 \parallel KK_1 \parallel NN_1$, и т.к. все они пересекают прямую MN , то лежат в одной плоскости γ .
- 2) А это означает, что точки $M, M_1, N, N_1, Q, K, K_1$ лежат в одной плоскости.
- 3) Д/п (дополнительное построение) $M_1N_2 \parallel MN, KK_2, NN_2$.
- 4) $\triangle M_1N_1N_2$: K_1K_2 — средняя линия, т.к. $M_1K_1 = N_1K_1$.
- 5) $K_1K_2 = \frac{1}{2} N_1N_2$ — средняя линия треугольника.



6) $MM_1 = KK_2 = NN_2 = l_1$, т.к.

MM_1K_2K , KK_2N_2N и MM_1N_2N — параллелограмма.

7) Средняя линия

$K_1K_2 = x + l$, где x — искомое расстояние KK_1 .

8) $x + l_1 = \frac{l_2 + l_1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{l_2 - l_1}{2}$, при $l_2 > l_1$.

9) Случай $l_1 > l_2$

9.1) Д/п; $N_1M_2 \parallel MN$, MM_2 , KK_2 .

9.2) $\triangle M_1N_1M_2$: K_1K_2 — средняя линия.

9.3) $K_1K_2 = \frac{M_1M_2}{2}$

9.4) $K_1K_2 = x + l_2$

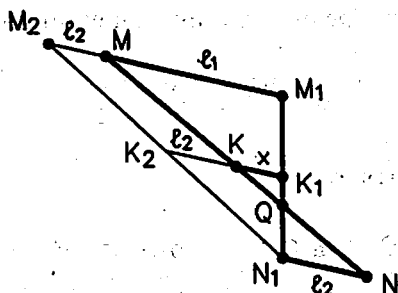
$$x + l_2 = \frac{l_1 + l_2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{l_1 - l_2}{2},$$

$$l_1 > l_2.$$

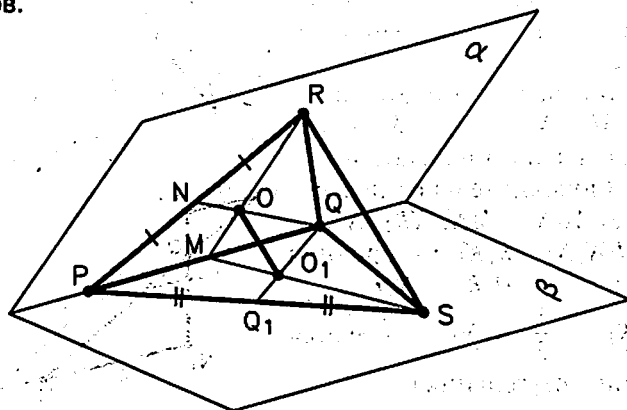
10) Обобщаем два случая:

$$K_1K_2 = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

Ответ: $\frac{|l_1 - l_2|}{2}$.



Задача 7. Заданы два треугольника $\triangle PQR$ и $\triangle PQS$. Докажите, что отрезок $OO_1 \parallel RS$, где O и O_1 — центры треугольников.



Решение:

1) O и O_1 — точки пересечения медиан треугольников $\triangle PQR$ и $\triangle PQS$. QN, MR, SM, QO_1 — медианы.

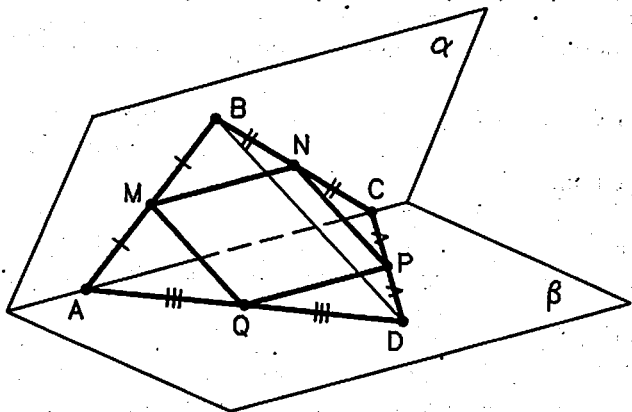
2) Рассмотрим $\triangle MSR$

$$\frac{OM}{RO} = \frac{1}{2}, \frac{MO_1}{SO_1} = \frac{1}{2}, \text{ так как}$$

в треугольнике медианы пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины.

3) $\triangle OMO_1 \sim \triangle RPS$ (подобны) по двум сторонам и углу между ними. $\Rightarrow OO_1 \parallel RS$, т.к. у подобных треугольников соответствующие углы равны.

Задача 8. Четыре точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости, они в пространстве образуют пространственный четырехугольник. Докажите, что $MNPQ$ — параллелограмм, где M, N, P, Q — середины отрезков AB, BC, CD, AD .

**Решение:**

1) $\triangle ABC$: $BN = CN, AM = BM$ по условию $\Rightarrow MN$ — средняя линия, $MN \parallel AC$, т.к. средняя линия треугольника, соединяющая середины двух сторон, параллельная третьей стороне.

2) $\triangle ACD$, PQ — средняя линия, поэтому $PQ \parallel AC$

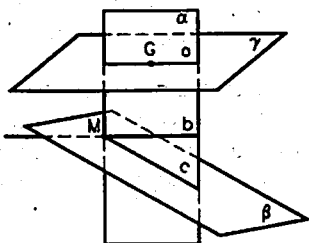
3) $(MN \parallel AC, PQ \parallel AC) \Rightarrow (MN \parallel PQ)$, т.к. две прямые, параллельные третьей, параллельны.

- 4) $\triangle BCD$ и $\triangle ABD$, аналогично, $QM \parallel BD$ и $PN \parallel BD$, и, наконец, $QM \parallel PN$.
 5) $MNPQ$ — параллелограмм по определению.

Задача 9. Пусть прямая b пересекает плоскость β , $b \cap \beta = M$ и b параллельна другой плоскости γ . Верно ли утверждение, что при этом $\gamma \cap \beta = p$, т.е. что γ и β пересекаются?

Решение:

- 1) Возьмем точку $G \in \gamma$, т.к. «...существуют точки, принадлежащие плоскости и не принадлежащие», т.е. $\exists G \in \gamma$.
- 2) Проведем плоскость α через прямую b и точку G , при этом $G \notin b$, в противном случае прямая b не параллельна плоскости γ .
- 3) Получим $\alpha \cap \gamma = a$, $G \in a$. $a \parallel b$, в противном случае прямые a и b пересекались бы и это противоречило бы условию.
- 4) Плоскости α и β имеют общую точку M , это точка пересечения прямой b и плоскости β . Но «если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку». Итак, $\alpha \cap \beta = c$.
- 5) В плоскости α прямая c пересекает одну из двух параллельных прямых, прямую b , значит, пересекает и вторую параллельную прямую, прямую a , т.е. $a \cap c = D \Rightarrow D \in \beta$, $D \in \gamma \Rightarrow \beta$ пересекается с γ . Утверждение верно.



Задача 10. Плоскость β пересекает прямую b , но $b \parallel a$. Докажите, что β пересекает и a .

Решение:

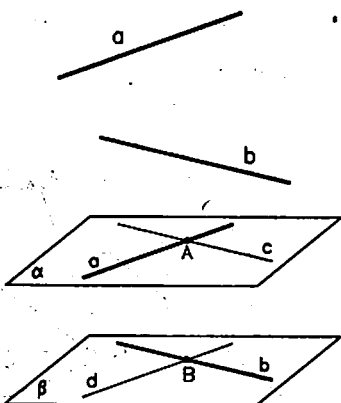
Следует из задачи 22.

В пункте 3) сложилась ситуация $(a \parallel b, b \cap \beta = M) \Rightarrow (a \cap \beta)$.

Задача 11. Докажите, что через любые две скрещивающиеся прямые a и b можно провести две плоскости α и β , т.е. $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, такие, что $\alpha \parallel \beta$.

Решение:

- 1) a и b скрещиваются.
- 2) Возьмем $A \in a$, $B \in b$.
- 3) Из точки A проведем прямую, параллельную b , из точки B прямую, параллельную a , т.к. «через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом единственным образом».
- 4) $\alpha \parallel \beta$, т.к. $a \parallel d$, $b \parallel c$.

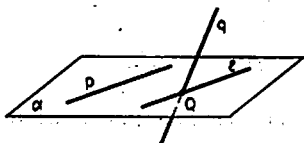


Задача 12. Докажите, что прямые p и q скрещиваются, если:

- 1) q пересекает l в одной точке, т.е. $q \cap l = Q$;
- 2) $q \cap p = \emptyset$;
- 3) $p \parallel l$.

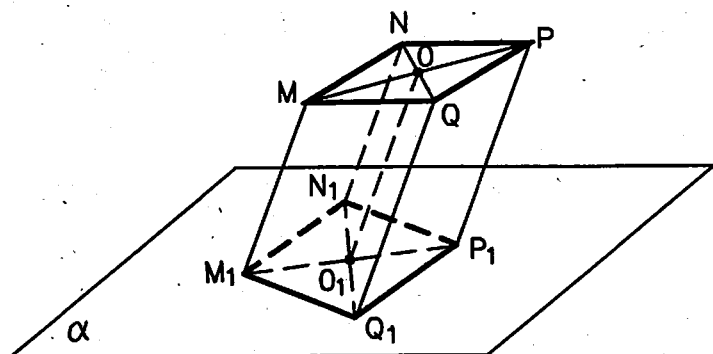
Решение:

- 1) Начнем с последнего условия: $p \parallel l$. По определению параллельных прямых они лежат в одной плоскости.
- 2) Проведем плоскость γ через две параллельные прямые p и l .
- 3) $q \cap l = Q$, т.к. q не может лежать в плоскости α . Известно, что на плоскости, если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она обязательно пересечет и другую параллельную прямую.
- 4) $(p \subset \alpha, q \cap \alpha = Q, Q \notin p) \Rightarrow p$ и q скрещиваются на основании признака скрещивающихся прямых.



Задача 13. Квадрат $MNPQ$ не пересекается с плоскостью α , через его вершины проведены параллельные между собой прямые, пересекающие плоскость α в точках M_1, N_1, P_1, Q_1 , причем $MM_1 = m, PP_1 = p, QQ_1 = q$. Найдите NN_1 .

Решение:



- 1) Речь идет о параллельном проектировании квадрата $MNPQ$, изображение его на плоскости α — параллелограмм $M_1N_1P_1Q_1$, т.к. $N_1O_1 = Q_1O_1$ и $M_1O_1 = P_1O_1$.
- 2) $NN_1 \parallel QQ_1 \parallel MM_1 \parallel PP_1$, значит, M_1MPP_1 — трапеция. Конечно, точки M_1, M, P, P_1 лежат в одной плоскости в силу параллельности $MM_1 \parallel PP_1$.

OO_1 — средняя линия трапеции

$$OO_1 = \frac{MM_1 + PP_1}{2},$$

т.к. средняя линия трапеции равна полусумме оснований трапеции

$$OO_1 = \frac{m + p}{2}$$

- 3) Из рассмотрения трапеции NN_1Q_1Q получаем

$$OO_1 = \frac{NN_1 + QQ_1}{2}$$

$$OO_1 = \frac{x + q}{2}, \text{ где } x = NN_1$$

$$\frac{m + p}{2} = \frac{x + q}{2}$$

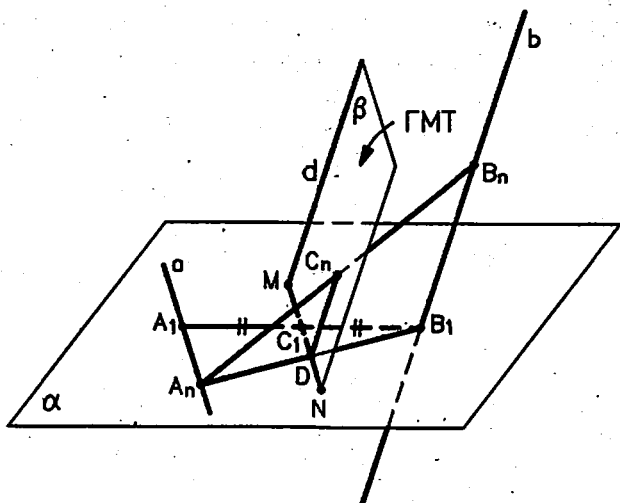
$$x = m + p - q$$

Ответ: $m + p - q$.

Задача 14. О геометрическом месте точек (ГМТ).

Пусть заданы две скрещивающиеся прямые a и b . Возьмем произвольную точку $A_1 \in a$ и $B_1 \in b$. Пусть C_1 — середина отрезка A_1B_1 . Верно ли, что плоскость β , проходящая через точку C_1 параллельно заданным прямым a и b , есть геометрическое место точек (ГМТ) середины отрезков A_nB_n с концами на заданных скрещивающихся прямых a и b ?

Решение:



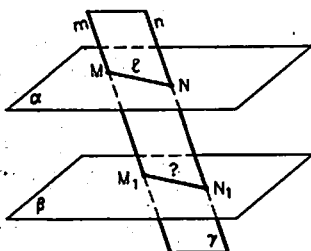
- 1) Рисунок основан на признаке скрещивающихся прямых: прямые скрещиваются, если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой.
- 2) a и b — скрещивающиеся прямые. $a \subset \alpha$, $\alpha \cap b = B_1$. Пусть $A_1 \in a$, C_1 — середина отрезка A_1B_1 . Проведем $MN \parallel a$, так, чтобы $C_1 \in MN$. Проведем $d \parallel b$ и $M \in d$.
- 3) Через две пересекающиеся прямые d и MN проведем плоскость β , и притом только одну.
- 4) $a \parallel \beta$, т.к. $a \parallel MN$; $b \parallel \beta$, т.к. $b \parallel d$. Итак, плоскость β параллельна двум заданным скрещивающимся прямым и проходит через середину отрезка A_1B_1 с концами на скрещивающихся прямых a и b .

- 5) Теперь докажем, что построенная плоскость β обладает таким замечательным свойством: любой отрезок с концами на заданных скрещивающихся прямых пересекает нашу плоскость в точке, являющейся серединой отрезка.
- 6) Для произвольного отрезка $A_n B_n$, $A_n \in a$, $B_n \in b$, $C_n \in \beta$ — точка пересечения $A_n B_n \cap \beta = C_n$. Докажем, что C_n — середина отрезка $A_n B_n$.
- 7) $\triangle A_1 B_1 A_n$. $C_1 C_n$ — средняя линия $\Rightarrow A_n C_n = B_1 C_n$.
- 8) $\triangle B_1 A_n B_n$, $C_n D \parallel B_1 B_n \Rightarrow C_n D$ — средняя линия $\Rightarrow A_n D = B_n D$.
- Доказали, что ГМТ — плоскость β .

Задача 15. $(\alpha \parallel \beta, M \in \alpha, N \in \alpha, m \parallel n, M \in m, N \in n, MN = l, m \cap \beta = M_1, n \cap \beta = N_1) \Rightarrow (M_1 N_1 = l)$

Решение:

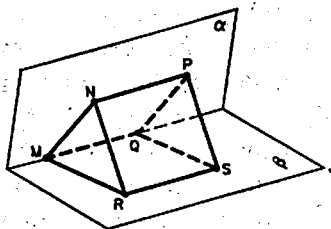
Две параллельные плоскости α и β пересекаются параллельными между собой прямыми m и n . При этом параллельные прямые m и n лежат в одной плоскости γ . В ситуации, когда две параллельные плоскости пересекаются третьей, линии пересечения параллельны. Это означает, что четырехугольник $M_1 M N N_1$ — параллелограмм, а у параллелограмма противоположные стороны равны, т.е. $MN = M_1 N_1 = l$.



Задача 16. Четыре точки M, N, P и Q не лежат в одной плоскости. Докажите, что $NPSR$ — параллелограмм, если $MNPQ$ и $MQSR$ — параллелограммы.

Решение:

- 1) $MNPQ$ — параллелограмм,
 $NP \parallel MQ, NP = MQ$
 - 2) $MQSR$ — параллелограмм,
 $MQ \parallel RS, MQ = SR$
 - 3) $NP \parallel MQ \parallel RS, NP = MQ = SR$.
- Получили $NP \parallel RS$ и $NP = RS$.

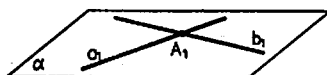


Таким образом, четыре точки N, P, R, S лежат в одной плоскости, т.к. $NP \parallel RS$, и $NPSR$ — параллелограмм, т.к. $NP = RS$.

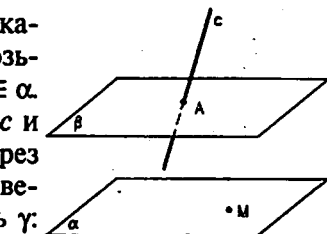
Задача 17. Пусть задана плоскость α и точка $A \notin \alpha$. Через точку A проведены прямые, параллельные плоскости α . Докажите, что все они лежат в одной плоскости.

Решение:

- 1) Две пересекающиеся прямые a и b , $a \cap b = A$, причем $a \parallel \alpha$, $b \parallel \alpha$.
- 2) Через две пересекающиеся прямые проведем единственную плоскость β : $a \subset \beta$, $b \subset \beta$.
- 3) $\alpha \parallel \beta$ согласно признаку параллельных плоскостей. При построении β имеем $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ и $a_1 \subset \alpha$, $b_1 \subset \alpha$, $a_1 \cap b_1 = A_1$.



- 4) Предположим, что $\exists$ прямая c , которая параллельна плоскости α , но не лежит в плоскости β , которая параллельна α . Значит, прямая c пересекает плоскость β .



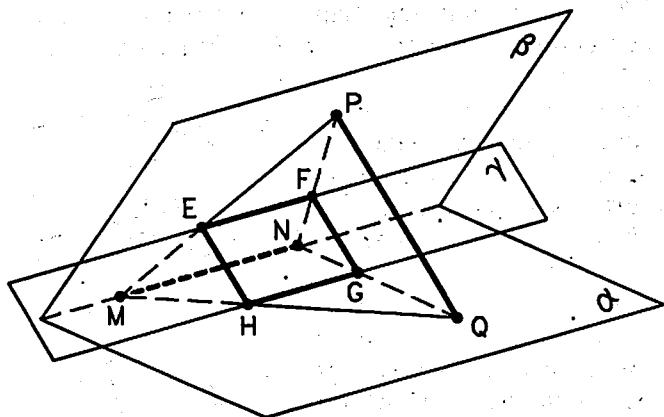
- 5) Докажем, что прямая c пересекает плоскость α . Для этого возьмем произвольную точку $M \in \alpha$. Возможны два случая: $M \notin c$ и $M \in c$. В первом случае через прямую c и точку $M \notin c$ проведем единственную плоскость γ : $c \subset \gamma$, $M \in \gamma$. Плоскость γ пересекает и плоскость β , и плоскость α , т.к. γ имеет общую точку с плоскостью β , и γ имеет общую точку с α . Это означает, что γ пересекается с β по прямой. Аналогично γ пересекается с α также по прямой. Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей параллельны между собой. И прямая c , пересекая одну из двух параллельных прямых, находящихся в плоскости γ , пересечет и другую, что означает, что c пересекает плоскость α . А это противоречит условию $c \parallel \alpha$.

Во втором случае, когда $M \in c$, означает $\alpha \cap c = M$ и получаем тот же вывод.

Итак, предположение, что $\exists$ прямая, проходящая через A , параллельная α и не лежащая в параллельной плоскости β , неверно. И действительно, все прямые лежат в одной плоскости β .

Задача 18. Два отрезка MN и PQ лежат на скрещивающихся прямых. Докажите, что плоскость, параллельная MN и PQ , пересекает MP , PN , QN и MQ в вершинах параллелограмма.

Решение:



- 1) $\gamma \parallel MN$, $\gamma \parallel PQ$, γ — плоскость, параллельная MN и PQ .
- 2) $MN \subset \beta \Rightarrow EF \parallel MN$, $HG \parallel MN \Rightarrow EF \parallel HG$, т.к. плоскость, проходящая через прямую, параллельную некоторой плоскости, пересекает ее по прямой, параллельной данной.
- 3) Аналогично $EH \parallel PQ$, $FG \parallel PQ \Rightarrow EH \parallel FG$.
- 4) Четырехугольник $EFGH$ — параллелограмм.

Задача 19. Докажите, что две плоскости параллельны между собой, если каждая из них параллельна третьей плоскости.

Решение:

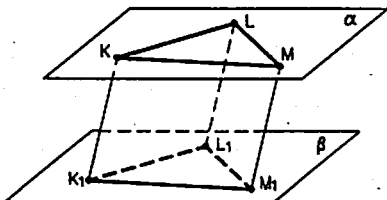
Ad absurdum, от противного.

Предположим, что плоскости не параллельны. Тогда они пересекаются. Тогда можно утверждать, что плоскости имеют общую точку. Мы пришли к противоречию, т.к. теорема о $\exists$ плоскости, параллельной данной, утверждает, что через точку, не принадлежащую данной плоскости, можно провести единственную плоскость, параллельную данной. Значит, предположение, что плоскости не параллельны, было ошибочным. Утверждение доказано.

Задача 20. Докажите равенство треугольников $\triangle KLM$ и $\triangle K_1L_1M_1$, если $KK_1 \parallel LL_1 \parallel MM_1$ и плоскости треугольников параллельны.

Решение:

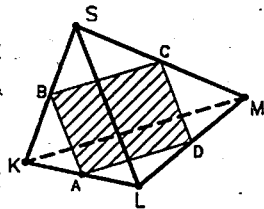
- 1) KK_1, LL_1, MM_1 — отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, следовательно, $MM_1 = LL_1 = KK_1$.
- 2) Четырехугольники $KMM_1K_1, KLL_1K_1, LMM_1L_1$ — параллелограммы, $KM = K_1M_1, LM = L_1M_1, KL = K_1L_1$.
- 3) $\triangle KLM = \triangle K_1L_1M_1$ по трем сторонам.



Задача 21. Постройте сечение тетраэдра $SKLM$ плоскостью, проходящей через середину ребра KL и параллельно ребрам SL и KM .

Решение:

- 1) $AB \parallel SL, AB \subset SKL$. В боковой плоскости SKL проведем $AB \parallel SL$, т.к. $ABCD \parallel SL$ по условию.
- 2) Аналогично $AD \parallel KL$.
- 3) В плоскости грани SLM проведем $CD \parallel SL$.
- 4) Фигура $ABCD$ — параллелограмм, т.к.
 $AB \parallel SL, CD \parallel SL \Rightarrow AB \parallel CD$.
 $AD \parallel KM \Rightarrow AD \parallel SLM \Rightarrow BC \parallel AD$.
- 5) Сечение $ABCD$ построено.



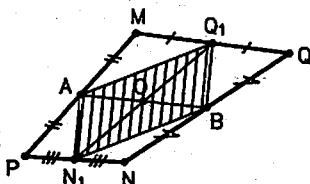
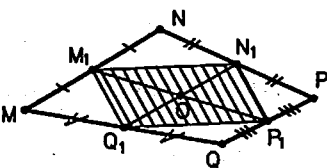
Задача 22. Точки M, N, P, Q образуют пространственный четырехугольник. Докажем, что прямые, соединяющие середины MN и PQ , NP и MQ , NQ и MP , пересекаются в одной точке.

Решение:

- 1) Рассмотрим четырехугольник $MNPQ$. Соединим середины его сторон.

$M_1N_1P_1Q_1$ — параллелограмм (задача 8). Диагонали параллелограмма M_1P_1 и Q_1N_1 пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Рассмотрим случай, когда соединяли середины MN и PQ , и MQ и NP (это концы диагоналей).

- 2) Рассмотрим третью прямую, соединяющую середины NQ и MP . Из тех же четырех точек M, N, P и Q рассмотрим четырехугольник $MQNP$.

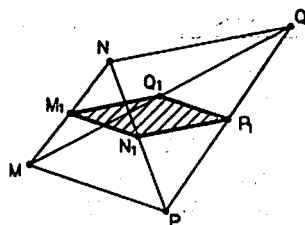


Четырехугольник $MQNP$ устанавливает порядок обхода вершин. Последовательно соединяем середины сторон, точно так же получаем параллелограмм AQ_1BN_1 . Как и в предыдущем случае, диагонали пересекаются в одной точке, и, конечно, точкой пересечения делятся пополам. Диагонали параллелограмма соединяют середины NQ и PM , и MQ и NP . Точка пересечения совпадает с точкой O предыдущего случая, т.к. это середина отрезка N_1Q_1 .

Замечание. Возникает естественный вопрос, почему плоское изображение — выпуклый четырехугольник. Докажем, что выводы верны и для изображения в виде четырехугольника с самопересечением.

Рассмотрим те же четыре точки M, N, P, Q и получаем четырехугольник $MNPQ$.

Соединяем середины MN, NP, PQ, QM последовательно, также получаем параллелограмм, так как:

1) $\triangle MNP$ M_1N_1 — средняя линия $\Rightarrow$ $M_1N_1 \parallel MP$ 2) $\triangle MQP$ Q_1P_1 — средняя линия $\Rightarrow$ $Q_1P_1 \parallel MP$ Следовательно, $M_1N_1 \parallel Q_1P_1$ 3) Аналогично, $M_1Q_1 \parallel P_1N_1$, таким образом, $M_1N_1P_1Q_1$ — параллелограмм.

Задача 23. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через три точки: $M \in AA_1$, $N \in BB_1$, $P \in DCC_1$.

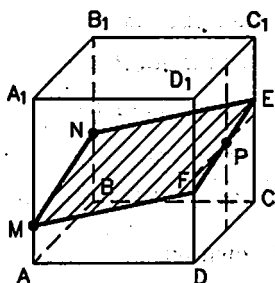
Решение:

- 1) В плоскости грани DD_1C_1C через точку P проведем прямую, параллельную MN , т.к. плоскость сечения пересекает плоскости параллельных граней по параллельным прямым.

 $MN \parallel EF$, $P \in EF$.

- 2) E и F — точки пересечения с ребрами DD_1 и CC_1 .

- 3) $NE \parallel MF$.

Сечение $MNEF$.

Задача 24. В тетраэдре $SMNP$: S — вершина тетраэдра, MNP — основание тетраэдра. Проведены биссектрисы плоских углов при вершине S : SM_1 , AN_1 , SP_1 — биссектрисы треугольников $\triangle MSN$, $\triangle NSP$, $\triangle MSP$. Докажите, что PM_1 , MN_1 и NP_1 пересекаются в одной точке.

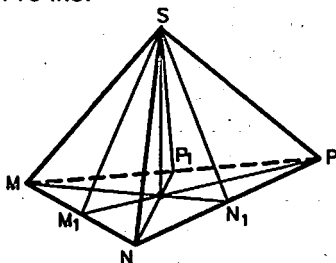
Решение:

- 1) $\triangle SMN$: SM_1 — биссектриса $\Rightarrow$

$$\frac{MM_1}{M_1N} = \frac{SM}{SN}$$

- 2) $\triangle SNQ$: SN_1 — биссектриса $\Rightarrow$

$$\frac{NN_1}{N_1P} = \frac{SN}{SP}$$



3) $\triangle SMP$: SP_1 — биссектриса $\Rightarrow$

$$\frac{PP_1}{P_1M} = \frac{SP}{SM}$$

4) Перемножим

$$\frac{MM_1}{M_1N} \cdot \frac{NN_1}{N_1P} \cdot \frac{PP_1}{P_1M} = \frac{SM}{SN} \cdot \frac{SN}{SP} \cdot \frac{SP}{SM} = 1$$

Следовательно, PM_1 , MN_1 , NP_1 пересекаются в одной точке.

Задача 25. При параллельном проектировании квадрата на плоскость α может ли изображение быть:

- 1) квадратом,
- 2) трапецией,
- 3) треугольником,
- 4) ромбом,
- 5) параллелограммом?

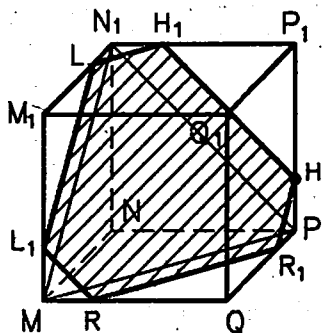
Решение:

- 1) Квадратом — да. Если плоскость квадрата параллельна плоскости α .
- 2) Трапецией — нет. При параллельном проецировании параллельные отрезки проецируются в параллельные, поэтому две боковые стороны трапеции никак не могут быть параллельными проекциями противоположных сторон квадрата.
- 3) Треугольником — нет, т.к. в треугольнике нет параллельных сторон.
- 4) Ромбом — да.
- 5) Параллелограммом — да. Выполняется свойство параллельности отрезков изображения при параллельном проецировании параллельных отрезков.

Задача 26. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $MNPQM_1N_1P_1Q_1$, которое проходит через точку $H \in PP_1$ и параллельно плоскости N_1MP .

Решение:

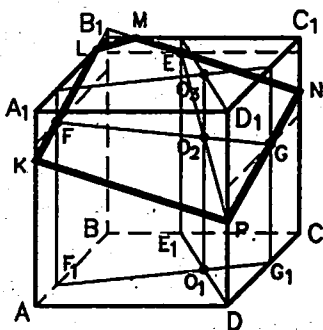
- 1) След сечения в плоскости NPP_1 параллелен следу N_1P параллельной плоскости N_1MP .
- 2) Из точки H_1 в плоскости $M_1N_1P_1$ проведем прямую, параллельную MP , т.к. сечение пересекает параллельные плоскости по параллельным прямым.
- 3) Аналогично, $LL_1 \parallel N_1M$, $L_1R \parallel H_1H$, $RR_1 \parallel MP$, $R_1H \parallel N_1M$.
- 4) Сечение $HH_1LL_1RR_1$ построено.



Задача 27. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через три точки: $E \in BB_1C_1C$, $F \in AA_1B_1B$, $G \in DD_1C_1C$ (трем граням куба).

Решение:

- 1) Применяем метод вспомогательных плоскостей. Он состоит в следующем.
- 2) Проводим $FF_1 \parallel AA_1$, $GG_1 \parallel DD_1$. Первая вспомогательная плоскость FGG_1 проходит через параллельные прямые $FF_1 \parallel GG_1$.
- 3) $EE_1 \parallel DD_1$. Вторая вспомогательная плоскость DD_1E_1 .
- 4) $FGG_1 \cap DD_1E_1 = O_1O_3$.
Нашли линию пересечения плоскостей.
- 5) $FG \cap O_1O_3 = O_2$
- 6) $O_2 \in O_1O_3$
- 7) В плоскости EE_1D соединим точки E и O_2 ,
 $EO_2 \cap DD_1 = P$
- 8) В плоскости боковой грани получаем след GP .
- 9) $PG \cap CC_1 = N$
- 10) $NE \cap B_1C_1 = M$



- 11) $L \in A_1B_1, F \cap AA_1 = K$
 12) Сечение $KLMNP$ построено.

Изложенный способ дополняет метод следов и удобен в тех случаях, когда построение следа выходит за пределы чертежа.

IV. Перпендикулярность прямых и плоскостей

Задача 1. Точка A не принадлежит плоскости α . Из этой точки проведен перпендикуляр к плоскости и две наклонные, $\sqrt{17}$ см и $\sqrt{37}$ см, соответственно. Найдите длину перпендикуляра, если известно, что разность проекций наклонных равна 2 см.

Решение:

- 1) $\triangle AOB$ — прямоугольный, $AO \perp \alpha$
 $\triangle AOC$ — прямоугольный.

- 2) Пусть $CO = x \Rightarrow BO = x + 2$

По теореме Пифагора

$$AO^2 + BO^2 = AB^2 \text{ и}$$

$$CO^2 + AO^2 = AC^2$$

Вычитая, получаем

$$BO^2 - CO^2 = AB^2 - AC^2$$

$$(BO - CO)(BO + CO) = 37 - 17$$

$$2 \cdot (x + x + 2) = 20$$

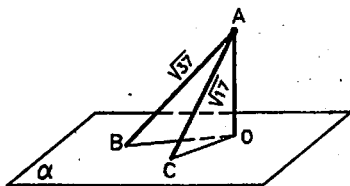
$$x = 4 \text{ (см)}; x + 2 = 6 \text{ (см)}$$

- 3) Аналогично

$$AO^2 = AB^2 - BO^2 = 37 - 36 = 1$$

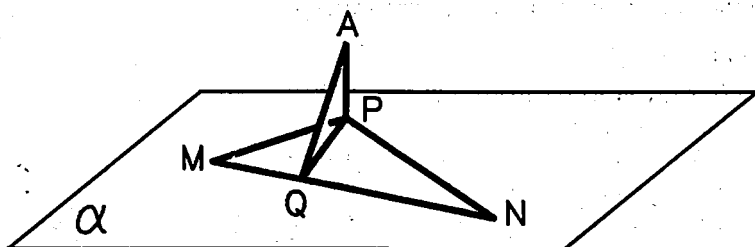
$$AO = 1 \text{ (см)}$$

Ответ: 1 см.



Задача 2. Задан прямоугольный треугольник $\triangle MNP$, его катеты равны 3 м и 4 м. Из вершин прямого угла восстановлен перпендикуляр AP к плоскости треугольника, равный 1 м. Найдите расстояние от точки A до гипотенузы $\triangle MNP$.

Решение:

1) Дополнительное построение $PQ \perp MN$.По теореме о трех перпендикулярах $AQ \perp MN$.2) $\triangle MNP$

$$PQ = \frac{MP \cdot PN}{MN}$$

$$MN = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (м)}$$

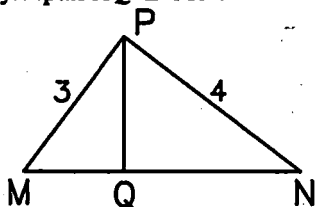
по теореме Пифагора.

$$PQ = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$$

3) $AQ^2 = PQ^2 + AP^2$

$$AQ^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + 1^2$$

$$AQ = \frac{13}{5} \text{ (м)}$$



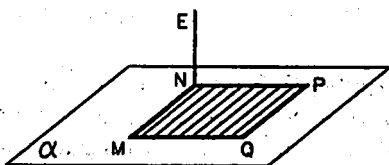
Ответ: 2,6 м.

Задача 3. К плоскости прямоугольника $MNPQ$ проведен перпендикуляр NE . Докажите, что $PQ \perp PNE$.

Решение:

1) $MNPQ$ — прямоугольник
 $\Rightarrow PQ \perp NP$.2) $NE \perp \alpha \Rightarrow NE \perp QP$ 3) $QP \perp PNE$, т.к. $QP \perp NE$,
 $QP \perp NP$, $NE \cap NP = N$

по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.



Задача 4. Задана правильная треугольная пирамида $SABC$. Докажите, что $SA \perp BC$, $SB \perp AC$, $SC \perp AB$ («противоположные ребра перпендикулярны»).

Решение:

1) Достаточно рассмотреть AS и BC .

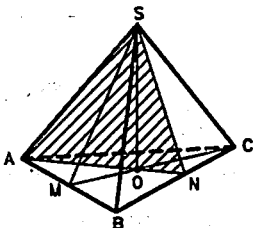
2) Рассмотрим $\triangle ABC$.

AN — медиана равностороннего треугольника, точка O — центр треугольника, точка пересечения медиан, биссектрис и высот, центр вписанной окружности $\Rightarrow AN \perp BC$, $O \in AN$.

3) $BC \perp ASN$, т.к. $BC \perp AN$, $BC \perp SO$.

Последнее, т.к. SO — перпендикуляр к плоскости основания. Или по теореме о трех перпендикулярах $SN \perp BC$.

4) Если BC — перпендикуляр к плоскости ASN , то $BC \perp SA$, т.к. $SA \subset ASN$.



Задача 5. Отрезок AB пересекает плоскость α в середине отрезка. Докажите, что точки A и B одинаково удалены от плоскости α .

Решение:

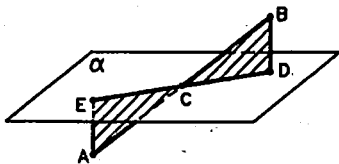
1) Д/п $AE \perp \alpha$, $BD \perp \alpha$.

2) $AE \parallel BD$, т.к. два перпендикуляра к одной плоскости параллельны.

3) Значит, AE и BD лежат в одной плоскости, которая пересекается с плоскостью α по прямой DE .

4) $\triangle ACE = \triangle BCD$ — прямоугольные треугольники равны по гипотенузе и острому углу.

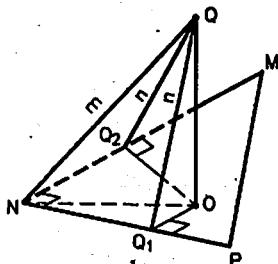
5) $AE = BD$, что и требовалось доказать.



Задача 6. Задан прямоугольный треугольник $\triangle MNP$, $\angle N$ — прямой угол, и точка Q не принадлежит плоскости MNP . Известно, что $QN = m$ и расстояние от точки Q до прямых, содержащих катеты, равно l . Найдите расстояние от точки Q до плоскости MNP .

Решение:

- 1) Д/п $QO \perp MNP$, $QQ_1 \perp MP$, $QQ_2 \perp NM$.
- 2) $\triangle QOQ_2 = \triangle QOQ_1$ — прямоугольные треугольники равны по гипотенузе и катету $\Rightarrow OQ_2 = OQ_1$.
- 3) $OQ_2 \perp MN$ и $OQ_1 \perp NP$ по теореме о трех перпендикулярах.
- 4) $\triangle QOQ_2N$ — прямоугольный.
 $NQ_2^2 = m^2 - n^2$ по теореме Пифагора.
- 5) $\triangle NQ_2O$ — прямоугольный, $\angle ONQ_2 = 45^\circ$; т.к. ON — биссектриса прямого угла, а точка O одинаково удалена от стороны угла $\angle MNP$.
 $ON^2 = (NQ_2 \cdot \sqrt{2})^2 = 2(m^2 - n^2)$
- 6) $\triangle QON$ — прямоугольный.
 $QO^2 = m^2 - 2(m^2 - n^2) = 2n^2 - m^2$

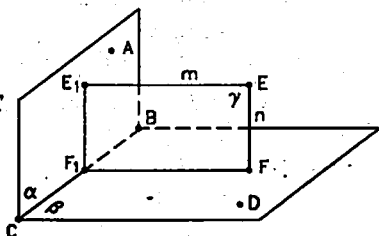


Ответ: $\sqrt{2n^2 - m^2}$.

Задача 7. Двугранный угол $ABCD$ равен 90° . Точка E находится на расстоянии m и n от граней двугранного угла. Найдите расстояние от точки E до ребра BC .

Решение:

- 1) Д/п $EE_1 \perp \alpha$, $EF \perp \beta$.
- 2) Через две пересекающиеся прямые $EE_1 \cap EF = E$ проведем единственную плоскость γ .
- 3) $CF_1 \perp EE_1$, т.к. $EE_1 \perp \alpha$, $CF_1 \subset \alpha$.
- 4) $CF_1 \perp EF$, т.к. $EF \perp \beta$, $CF_1 \subset \beta$.
- 5) $CF_1 \perp \gamma$, т.к. CF_1 перпендикулярен двум пересекающимся прямым, находящимся в плоскости γ .
- 6) $E_1F_1 \perp CF_1$, $FF_1 \perp CF_1 \Rightarrow \angle E_1F_1F$ — линейный угол двугранного угла $ABCD$, равный 90° .
- 7) Четырехугольник EE_1F_1F .
 $\angle E_1 = \angle F_1 = \angle F = 90^\circ \Rightarrow \angle E = 90^\circ$.
 EE_1F_1F — прямоугольник.



8) Диагональ прямоугольника:

$$EF_1 = \sqrt{m^2 + n^2}$$

9) $EF_1 \perp BC$, т.к. $EF_1 \subset \gamma$, $BC \perp \gamma$

$$EF_1 = \rho(E, BC) = \sqrt{m^2 + n^2}$$

Ответ: $\sqrt{m^2 + n^2}$.

Задача 8. Точка S находится на расстоянии h от плоскости $\triangle MPQ$, а расстояние от этой же точки до сторон $\triangle MPQ$ одно и то же и равно l . Найдите радиус окружности, вписанной в $\triangle MPQ$.

Решение:

1) M_1, P_1, Q_1 — точки касания.
 $OM_1 \perp MP$, $OP_1 \perp PQ$, $OQ_1 \perp MQ$
 по определению касательной.
 $SM_1 \perp MP$, $SP_1 \perp PQ$, $SQ_1 \perp MQ$
 по теореме о трех перпендикулярах.

2) $\triangle SOM_1, \triangle SOP_1, \triangle SOQ_1$ — прямоугольные, т.к. $SO \perp MPQ$.

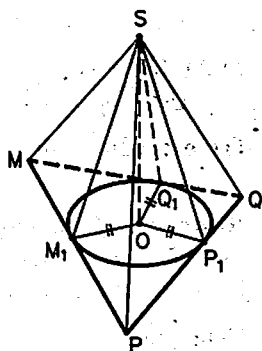
$$SM_1 = SP_1 = SQ_1 = l.$$

Треугольники равны по гипотенузе и катету.

3) $M_1O = P_1O = Q_1O = r$ — радиус вписанной окружности.

4) $r = \sqrt{l^2 - h^2}$ по теореме Пифагора.

Ответ: $\sqrt{l^2 - h^2}$.



Задача 9. Из некоторой точки A проведены две наклонные AB и AC . Расстояние от точки A до плоскости α , в которой лежат точки B и C , равно h , $\angle BAC = 90^\circ$. Найдите отрезок BC , если угол между наклонной AB и плоскостью α равен 60° , а между AC и α — 30° .

Решение:

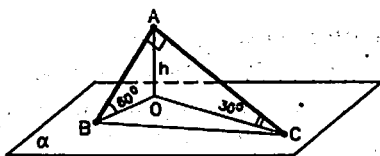
1) Д/п $AO \perp \alpha$

2) $\triangle AOB$ — прямоугольный. $\angle ABO = 60^\circ$.

$$3) AB = \frac{AO}{\sin 60^\circ} = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

4) $\triangle AOC$ — прямоугольный.

$$AC = \frac{AO}{\sin 30^\circ} = 2h$$



5) $\triangle ABC$ — прямоугольный по условию.

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ по теореме Пифагора.

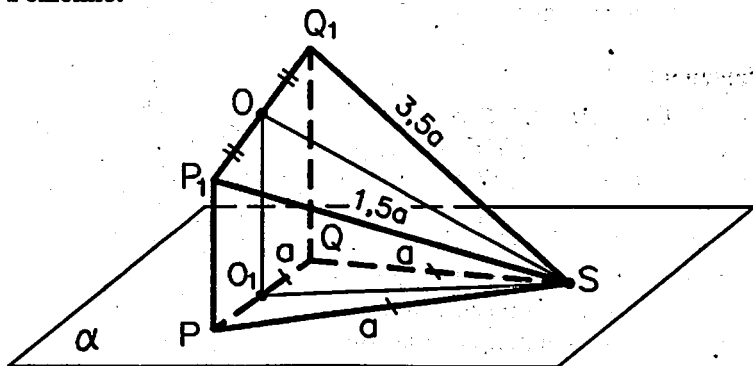
$$BC^2 = \frac{4h^2}{3} + 4h^2 = \frac{16}{3}h^2$$

$$BC = \frac{4h}{\sqrt{3}}$$

Ответ: $\frac{4h}{\sqrt{3}}$

Задача 10. К плоскости правильного треугольника PQS со стороной, равной a , восстановлены перпендикуляры PP_1 и QQ_1 , $SP_1 = 1,5a$; $SQ_1 = 3,5a$; отрезок P_1Q_1 не пересекает плоскость α . Найдите SO , где O — середина отрезка P_1Q_1 .

Решение:



1) $PP_1 \perp \alpha$, $QQ_1 \perp \alpha \Rightarrow \triangle PP_1S$ и $\triangle QQ_1S$ — прямоугольные.

$$2) PP_1 = \sqrt{(1,5a)^2 - a^2} = a\sqrt{1,25};$$

$$QQ_1 = \sqrt{(3,5a)^2 - a^2} = a \cdot \sqrt{2,5 \cdot 4,5}.$$

3) $PP_1 \parallel QQ_1$, т.к. два перпендикуляра к одной плоскости параллельны, значит, они лежат в одной плоскости.

- 4) PP_1Q_1Q — трапеция, OO_1 — средняя линия,
 $OO_1 \parallel PP_1 \parallel QQ_1$ — средняя линия трапеции параллельна
 основаниям и равна их полусумме:

$$OO_1 = \frac{PP_1 + QQ_1}{2} = \frac{\sqrt{1,25} + \sqrt{2,5 \cdot 4,5}}{2} \cdot a.$$

- 5) $SO_1 = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$ — высота в равностороннем треугольнике
 $\triangle PQS$.

- 6) $OO_1 \perp \alpha$ по свойству прямой, перпендикулярной к
 плоскости.

- 7) $\triangle OO_1S$ — прямоугольный.

$OS^2 = OO_1^2 + O_1S^2$ по теореме Пифагора

$$OS^2 = \left(\frac{\sqrt{1,25} + \sqrt{2,5 \cdot 4,5}}{2} \cdot a \right)^2 + \frac{3a^2}{4} = \frac{23}{4}a^2$$

Ответ: $\frac{\sqrt{23}}{2}a$.

Задача 11. Плоскости $\alpha \perp \beta$. Равносторонний $\triangle ABC \subset \alpha$,
 квадрат $ACDE \subset \beta$. Сторона квадрата равна m , найдите
 расстояние между точками B и D .

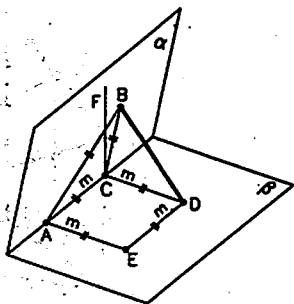
Решение:

- 1) Д/п $CF \perp AC$, $CF \subset \alpha$.
- 2) $CD \perp AC$, т.к. $ACDE$ — квадрат.
- 3) $CF \perp CD$, т.к. $\angle FCD = 90^\circ$ по
 определению $\alpha \perp \beta$.
- 4) $CD \perp AC$, $CD \perp CF \Rightarrow CD \perp \alpha \Rightarrow$
 $CD \perp BC$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости и определению прямой и плоскости.

- 5) $\triangle BCD$ — прямоугольный, $BC = CD$.

$$BD = \sqrt{2} \cdot CD = \sqrt{2}m$$

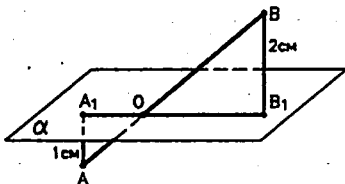
Ответ: $\sqrt{2}m$.



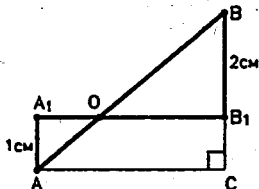
Задача 12. Отрезок AB длиной 5 см пересекает плоскость α , концы отрезка удалены от плоскости α на 2 см и на 1 см. Найдите проекцию отрезка AB на плоскость α .

Решение:

- 1) $BB_1 \parallel AA_1$ — два перпендикуляра к одной плоскости параллельны.
- 2) BB_1 и AA_1 лежат в одной плоскости, как параллельные прямые, прямая AB пересекает эти параллельные прямые и также лежит в этой плоскости.
- 3) $BB_1 \perp A_1B_1$, $AA_1 \perp A_1B_1$ по определению перпендикуляра и плоскости.



- 4) $BC = BB_1 + B_1C = 2 + 1 = 3$
 $\triangle ABC$ — прямоугольный.
 $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 5^2 - 3^2 = 16$
 $AC = 4$ (см)

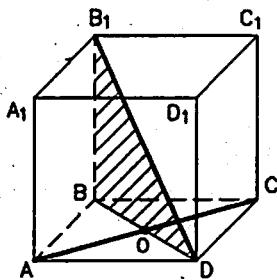


Ответ: 4 см.

Задача 13. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми, которые содержат диагональ грани куба и диагональ куба, если ребро куба равно m .

Решение:

- 1) $AC \perp B_1BD$, т.к. $BB_1 \perp ABC \Rightarrow AC \perp BD$ (диагонали квадрата перпендикулярны).
- 2) В $\triangle B_1BD$ опустим перпендикуляр из точки O , середины катета BD , на гипотенузу B_1D . Отрезок OO_1 и есть расстояние между скрещивающимися прямыми AC и B_1D , т.к. $OO_1 \perp AC$, ведь $AC \perp B_1BD$, и $OO_1 \perp B_1D$ по построению, и, наконец, концы отрезка, точки O и O_1 , лежат на скрещивающихся прямых.
- 3) $B_1B = m$ — ребро куба, $BD = m \cdot \sqrt{2}$ — диагональ грани, $B_1D = m \cdot \sqrt{3}$ — диагональ грани куба. Следует вспомнить, что квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

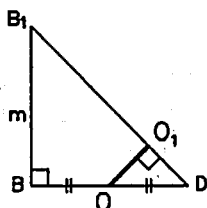


$$4) \triangle OO_1D \sim \triangle B_1BD$$

$$\frac{OO_1}{BB_1} = \frac{OD}{B_1D}$$

$$OO_1 = \frac{m\sqrt{2} \cdot m}{2 \cdot m \cdot \sqrt{3}} = \frac{m}{\sqrt{6}}$$

Ответ: $\frac{m}{\sqrt{6}}$



Задача 14. Заданы перпендикулярные плоскости α и β , $\alpha \perp \beta$, и их линия пересечения $\alpha \cap \beta = a$. Кроме того, пусть в плоскости β задана прямая b , перпендикулярная прямой a . Докажите, что $b \perp \alpha$.

Решение:

1) Д/п $c \perp a$, $c \subset \alpha$, $A \in c$.

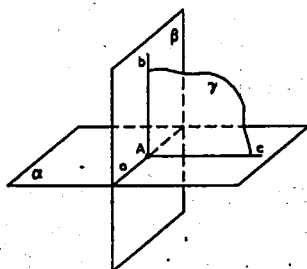
Получили две пересекающиеся прямые, одна из которых лежит в плоскости α , другая в плоскости β .

2) Д/п — проведем плоскость γ через две пересекающиеся прямые, т.е. $a \subset \gamma$, $b \subset \gamma$, $a \cap b = A$.

3) $a \perp \gamma$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, т.к. $a \perp b$, $a \perp c$.

4) $\angle(b, c) = 90^\circ$ по определению перпендикулярных плоскостей..

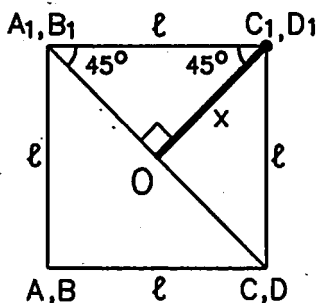
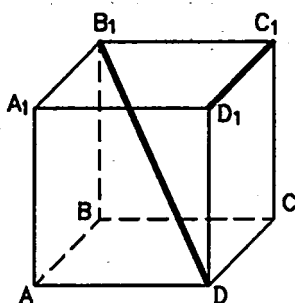
5) Вернемся к заданной прямой b . Теперь уже $b \perp a$ и $b \perp c \Rightarrow b \perp \alpha$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.



Задача 55. В кубе найдите расстояние между двумя скрещивающимися прямыми, одна из которых содержит диагональ куба, другая ребро куба, равное l .

Решение:

1) Спроецируем скрещивающиеся прямые на плоскость, перпендикулярную одной из прямых. В качестве такой



вспомогательной плоскости выберем плоскость грани $B_1B_1C_1C_1$.

- 2) Проекцией диагонали B_1D является B_1C . Точка D_1 проецируется в точку C_1 . Осталось опустить перпендикуляр из точки C_1 на B_1C . Длина этого перпендикуляра и есть расстояние между скрещивающимися прямыми B_1D и D_1C_1 .

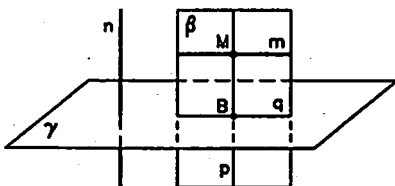
$$x = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

Ответ: $\frac{l}{\sqrt{2}}$

Задача 16. Задана плоскость γ и прямая $m \not\subset \gamma$. Пусть n — прямая, перпендикулярная γ . Докажите, что если $m \perp n$, то $m \parallel \gamma$.

Решение:

- 1) Возьмем точку $M \in m$.
- 2) Из точки M опустим перпендикуляр на плоскость γ , прямая p содержит перпендикуляр — $p \perp \gamma$.
- 3) $p \parallel n$ — две перпендикулярные прямые к плоскости параллельны.
- 4) Через две пересекающиеся прямые p и m проведем плоскость β . Плоскость β проходит через основание перпендикуляра точку B , общую для плоскостей β и γ . Это означает, что $\beta \cap \gamma = q$ — линия пересечения.
- 5) $q \perp p$ по определению перпендикуляра к плоскости.

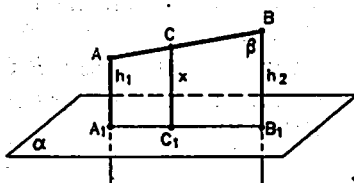


- 6) В плоскости β : $m \perp p, q \perp p \Rightarrow m \parallel q$ — две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны.
 7) $m \parallel \gamma$ по признаку параллельности прямой и плоскости.

Задача 17. Отрезок AB не пересекает плоскость α , точки A и B удалены соответственно на h_1 и h_2 . Точка $C \in AB$ и делит отрезок AB в отношении $m:n$. На каком расстоянии находится точка C от плоскости α ?

Решение:

- 1) Д/п $CC_1 \perp \alpha$.
- 2) $CC_1 \parallel AA_1 \parallel BB_1$ — перпендикулярные прямые к плоскости параллельны между собой.
- 3) AA_1, CC_1, BB_1 лежат в одной плоскости, потому что они параллельны и пересекают прямую AB : $AA_1 \subset \beta, CC_1 \subset \beta, BB_1 \subset \beta$.
- 4) $A_1B_1 = \alpha \cap \beta$ — линия пересечения плоскостей.
- 5) Рассмотрим трапецию ABB_1A_1 с основаниями AA_1 и BB_1 .

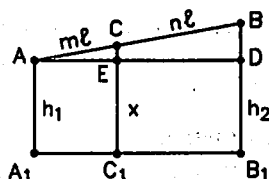


$$x = CC_1 = EC_1 + CE = h_1 + CE$$

$$\triangle ACE \sim \triangle ABD$$

$$\frac{CE}{BD} = \frac{m}{m+n} \Rightarrow CE = \frac{m}{m+n} \cdot (h_2 - h_1)$$

Пусть для определенности $h_2 > h_1$.



$$x = h_1 + \frac{m}{m+n} \cdot (h_2 - h_1) = \frac{h_2 m + h_1 n}{m+n}$$

Обозначим $\frac{m}{n} = \lambda$

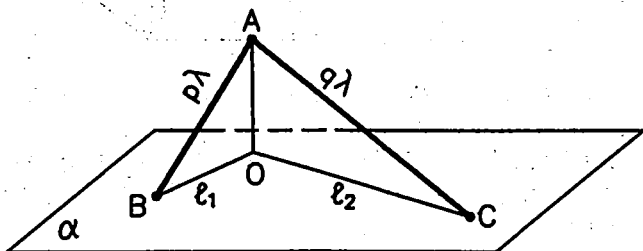
$$x = \frac{h_1 + \lambda h_2}{1 + \lambda}$$

Можно было применять формулы «деления отрезка в данном отношении».

Ответ: $\frac{h_1 n + h_2 m}{m+n}$.

Задача 18. Точка $A \notin \alpha$. Проведены две наклонные. Известно, что наклонные относятся как $p:q$, а проекции наклонных соответственно равны l_1 и l_2 . Найдите длины наклонных.

Решение:



1) $OA \perp \alpha \Rightarrow OA \perp OB, OA \perp OC$ по определению перпендикуляра к плоскости.

2) $\triangle AOB, \triangle AOC$ — прямоугольные. По теореме Пифагора:

$$AO^2 = AB^2 - BO^2 \text{ и } AO^2 = AC^2 - CO^2$$

3) $p^2\lambda^2 - l_1^2 = q^2\lambda^2 - l_2^2$

$$\lambda^2(p^2 - q^2) = l_1^2 - l_2^2$$

$$\lambda^2 = \frac{l_1^2 - l_2^2}{p^2 - q^2};$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{l_1^2 - l_2^2}{p^2 - q^2}}.$$

$$AB = p\lambda, AC = q\lambda,$$

где λ — коэффициент пропорциональности.

Ответ: $p \cdot \sqrt{\frac{l_1^2 - l_2^2}{p^2 - q^2}}, q \cdot \sqrt{\frac{l_1^2 - l_2^2}{p^2 - q^2}}.$

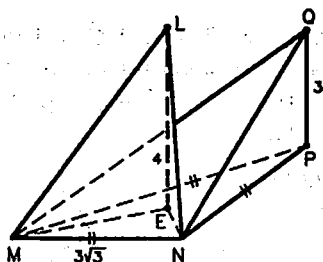
Задача 19. К плоскости равностороннего треугольника $\triangle MNP$ проведена перпендикулярная прямая PQ , в точке E пересекаются медианы, биссектрисы и высоты равностороннего треугольника $\triangle MNP$. Проведем $EL \parallel PQ$. Найдите ML, NL, MQ, NQ , если $MN = 3\sqrt{3}$ м, $LE = 4$ м, $PQ = 3$ м.

Решение:

- 1) $\triangle MNP$ — равносторонний треугольник, E — центр треугольника.

- 2) $MP = PN = NM = 3\sqrt{3}$ (м)

$$ME = \frac{MN}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3 \text{ (м)}.$$



- 3) $PQ \perp MNP$, $LE \parallel PQ \Rightarrow LE \perp MNP$ по свойствам перпендикулярных прямых и плоскостей.

- 4) $\triangle MEL$, $\triangle LEN$, $\triangle MPQ$, $\triangle NPQ$ — прямоугольные треугольники по определению прямой, перпендикулярной плоскости.

- 5) $\triangle MEL$, по теореме Пифагора:

$$LM^2 = ME^2 + LE^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \text{ (м}^2\text{)}$$

$$LM = 5 \text{ (м)}.$$

- 6) $\triangle LEM$, аналогично

$$LN = 5 \text{ (м)}.$$

- 7) $\triangle MPQ$, аналогично

$$QM^2 = MP^2 + PQ^2$$

$$QM^2 = (3\sqrt{3})^2 + 3^2 = 36$$

$$QM = 6 \text{ (м)}.$$

- 8) $\triangle QNP$, аналогично

$$QN = 6 \text{ (м)}.$$

Ответ: 5 м, 5 м, 6 м, 6 м.

Задача 20. Найдите расстояние между двумя скрещивающимися прямыми, содержащими диагонали двух граней куба, которые имеют общее ребро куба, т.е. являются соседними, и ребро куба равно d .

Решение:

Проецируем куб на плоскость α , перпендикулярную одной из скрещивающихся прямых. При построении изображения куба параллельным проектированием получаем

плоское изображение, а именно: как выглядит куб, если взгляд направлен вдоль диагоналей A_1C_1 и AC .

Расстояние между A_1C_1 и CD_1 есть длина перпендикуляра, опущенного из точки C_1 на проекцию CD_1

Вспомните, что при параллельном проецировании:

- Параллельные отрезки фигуры изображаются на плоскости проекции также параллельными проекциями.
- Прямолинейные отрезки фигуры изображаются на плоскости проекции отрезками.
- Отношения отрезков прямой сохраняются и на плоскости проекции.

Итак, спроецировали и получили:

x — расстояние между скрещивающимися прямыми.

1) $\triangle AA_1D_1$ — прямоугольный.

$x \cdot AD_1 = A_1D_1 \cdot AA_1$, где

$$AA_1 = d; A_1D_1 = \frac{d\sqrt{2}}{2},$$

$$AD_1^2 = AA_1^2 + A_1D_1^2$$

по теореме Пифагора.

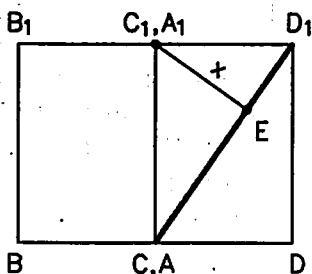
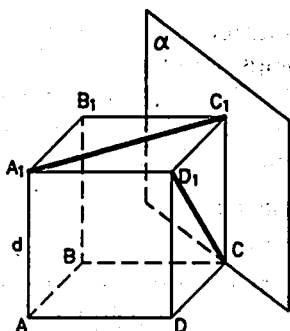
$$AD_1^2 = d^2 + \frac{d^2}{2} = \frac{3d^2}{2},$$

$$AD_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}d.$$

Окончательно получаем:

$$2) \quad x = \frac{\frac{d\sqrt{2}}{2} \cdot d}{\sqrt{\frac{3}{2}}d} = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

Ответ: $\frac{d}{\sqrt{3}}$

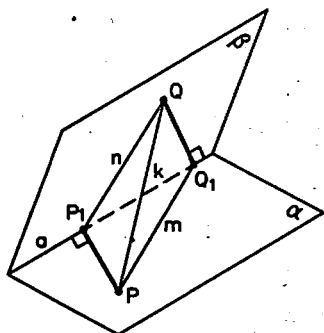


Задача 21. Плоскости α и β перпендикулярны, $\alpha \cap \beta = a$ — линия пересечения плоскостей. Пусть $P \in \alpha$, $Q \in \beta$ и из точек P и Q опущены перпендикуляры на линию пересечения плоскостей. Точки P_1 и Q_1 — основания перпендикуляров. Найдите PQ , если известно, что $PQ_1 = m$; $QP_1 = n$; $P_1Q_1 = k$.

Решение:

- 1) $PP_1 \perp \beta$, т.к. $PP_1 \perp a$.

Известно, что если две плоскости взаимно перпендикулярны, то прямая, лежащая в одной из плоскостей и перпендикулярная линии пересечения плоскостей, перпендикулярна другой плоскости.



- 2) Аналогично, $QQ_1 \perp \alpha$, т.к. $QQ_1 \perp a$.

- 3) $QP_1 \perp PP_1$, $PQ_1 \perp QQ_1$ по определению прямой, перпендикулярной плоскости.

- 4) «Цепочка» прямоугольных треугольников:

- 4.1. $\triangle P_1Q_1Q$ — прямоугольный

$$QQ_1^2 = PQ_1^2 - P_1Q_1^2$$

$$QQ_1^2 = n^2 - k^2$$

- 4.2. $\triangle QQ_1P$ — прямоугольный

$$QP^2 = QQ_1^2 + PQ_1^2$$

$$QP^2 = n^2 - k^2 + m^2$$

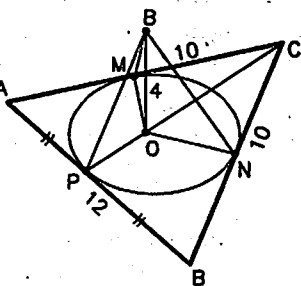
Ответ: $PQ = \sqrt{n^2 - k^2 + m^2}$.

Задача 22. Из точки O , центра вписанного круга равнобедренного треугольника $\triangle ABC$, восстановлен перпендикуляр к плоскости $\triangle ABC$, $OB = 4$ см. Найдите расстояние от точки B до сторон треугольника $\triangle ABC$, если $AB = 12$ см, $AC = BC = 10$ см.

Решение:

- 1) M , N , P — точки касания вписанной окружности, где $MO = NO = PO = r$.

- 2) $MO \perp AC$, $NO \perp BC$, $PO \perp AB$
по определению касательной.
3) $BN \perp BC$, $BP \perp AB$, $BM \perp AC$
по теореме о трех перпендику- A
лярах.



4) $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

по формуле Герона,

$$p = \frac{10 + 10 + 12}{2} = 16,$$

$$S_{ABC} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 48 \text{ (см}^2\text{)}.$$

5) $r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3 \text{ (см)}.$

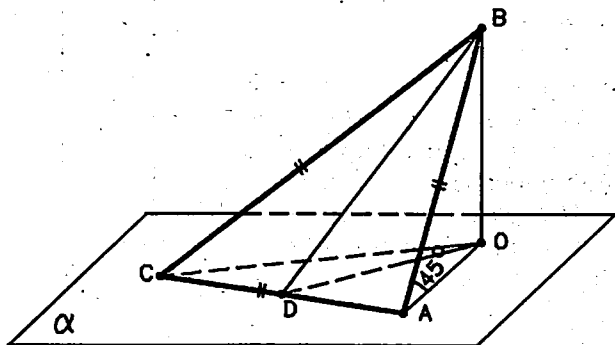
- 6) $\triangle BOP = \triangle BOM = \triangle BON$ по гипотенузе и катету $\Rightarrow$

$$BP = BM = BN = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ (см)}$$

Ответ: 5 см.

Задача 23. $\triangle ABC$ — равносторонний, сторона AB наклонена под углом 45° к плоскости α , а сторона AC лежит в плоскости α . Под каким углом наклонена плоскость $\triangle ABC$ к плоскости α ?

Решение:



- 1) Д/п угла между плоскостями: $BD \perp AC$, $BO \perp \alpha$.
По теореме о трех перпендикулярах $OD \perp AC$, $BD \perp AC$,
 $OD \perp AC \Rightarrow AC \perp BOD$.
 $\angle BDO$ — линейный угол двугранного угла $BACO$, угол
между плоскостью α и плоскостью треугольника $\triangle ABC$.

2) $\triangle ABO$ — прямоугольный, т.к. $BO \perp \alpha \Rightarrow BO \perp AO$ по определению перпендикуляра к плоскости.

$$BO = AO = a$$

3) $AB = \sqrt{2}a$ по теореме Пифагора.

4) $\triangle ABD$ — прямоугольный.

$$BD = AB \cdot \sin 60^\circ = a \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5) $\triangle DBO$ — прямоугольный

$$\sin D = \frac{BO}{BD} = \frac{a}{a \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Ответ: $\arcsin \frac{2}{\sqrt{6}}$

Задача 24. Пусть $\alpha \perp \beta$. Докажите, что если $a \not\subset \alpha$ и $a \perp \beta$, то $a \parallel \alpha$.

Решение:

1) Пусть $\alpha \cap \beta = b$ — линия пересечения плоскостей.

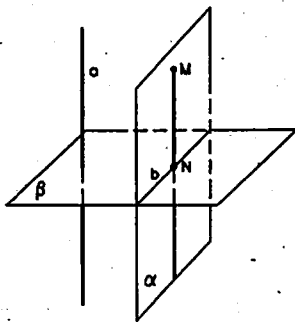
2) $M \in \alpha$, $M \notin b$. Возьмем точку M в плоскости α и не принадлежащую прямой b .

3) Д/п $MN \perp b$.

$MN \perp \beta$, т.к. $\alpha \perp \beta$ и $\alpha \cap \beta = b$.

4) $a \perp \beta$, $MN \perp \beta \Rightarrow a \parallel MN$ — две перпендикулярные прямые к одной плоскости параллельны.

5) $a \parallel MN$, $MN \subset \alpha \Rightarrow a \parallel \alpha$ — признак параллельности прямой и плоскости.



Задача 25. Задан прямоугольный треугольник MNP , P — вершина прямого угла. В точках M и N к плоскости треугольника восстановлены перпендикуляры MM_1 и NN_1 , $MM_1 = 1$ дм; $NN_1 = 5$ дм; $M_1P = \sqrt{5}$ дм, и отрезок M_1N_1 не пересекает плоскость α . Найдите C_1P , где C_1 — середина отрезка M_1N_1 .

- 8) $\triangle POC_1$ — прямоугольный
 $C_1P^2 = OC_1^2 + OP^2 = 4 + 5 = 9$
 $C_1P = 3$ (дм)

Ответ: 3 дм.

Задача 66. Точка K не принадлежит плоскости параллелограмма $EFGH$. Известно, что $KE = KG$ и $KF = KH$. Докажите, что KO — перпендикуляр к этой плоскости, где O — центр параллелограмма $EFGH$.

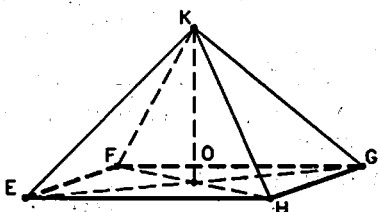
Решение:

- 1) Параллелограмм $EFGH$:
 $FO = HO$, $EO = GO$ —
 диагонали параллело-
 грамма пересекаются и
 точкой пересечения де-
 лятся пополам.

- 2) $\triangle FHK$ — равнобедренный
 с основанием FH , KO —
 медиана, проведенная к основанию $\Rightarrow KO \perp FH$.

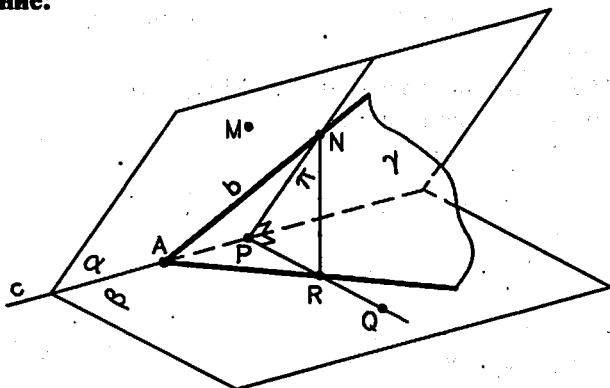
- 3) $\triangle GEK$ — равнобедренный, поэтому $KO \perp GE$.

- 4) $KO \perp FH$, $KO \perp GE$, $FH \cap GE = O \Rightarrow KO \perp EFGH$ по
 признаку перпендикулярности прямой и плоскости.



Задача 27. Прямая b пересекает плоскость β . Проведите через прямую b плоскость $\gamma \perp \beta$.

Решение:

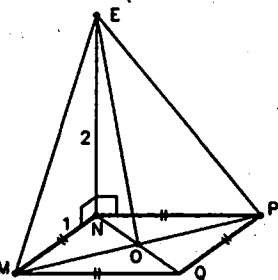


- 1) Пусть $M \notin b$. Через прямую b и точку M проведем плоскость α , $b \subset \alpha$, $M \in \alpha$. Плоскость α пересекается с плоскостью β , т.к. они имеют общую точку, ведь прямая b пересекает плоскость β . Пусть $\alpha \cap \beta = c$ — линия пересечения двух плоскостей.
- 2) Возьмем на прямой b произвольную точку N , $N \in b$.
- 3) В плоскости α опустим перпендикуляр из точки N на прямую c , $NP \perp c$, $NP \subset \alpha$.
- 4) В плоскости β восстановим перпендикуляр к прямой c в точке P , $PQ \perp c$, $PQ \subset \beta$.
- 5) Через две пересекающиеся прямые PN и PQ проведем плоскость π , $PN \subset \pi$, $PQ \subset \pi$.
- 6) $c \perp \pi$, т.к. $c \perp PN$, $c \perp PQ$ — признак перпендикулярности прямой и плоскости.
- 7) В плоскости π опустим перпендикуляр из точки N на прямую PQ , $NR \perp PQ$.
- 8) $NR \perp \beta$, т.к. $NR \perp c$, $NR \perp PQ$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.
- 9) Через две пересекающиеся прямые b и NR проведем плоскость γ , которая оказывается перпендикулярной плоскости β , т.к. она проходит через прямую NR , перпендикулярную плоскости β . AN и AR — следы плоскости β .

Задача 28. К плоскости квадрата $MNPQ$ в точке N восстановлен перпендикуляр $NE = 2$ м, сторона квадрата равна 1 м. Найдите расстояние от точки E до прямых, содержащих диагонали квадрата и его стороны.

Решение:

- 1) $\triangle MNE$ — прямоугольный, т.к. $EN \perp MNPQ$, аналогично $\triangle ENP$ — прямоугольный; $\Rightarrow$ расстояние от точки E до прямых, содержащих стороны MN и NP , одно и то же и равно 2 м.
- 2) $ME \perp MQ$, $EP \perp QP$, так как $NE \perp MNPQ$, $MN \perp MQ$, $NP \perp QP$ по теореме о трех перпендикулярах.



$$ME^2 = MN^2 + NE^2 = 1^2 + 2^2 = 5; ME = \sqrt{5} \text{ (м)};$$

$$EP^2 = NE^2 + NP^2 = 2^2 + 1^2 = 5; PE = \sqrt{5} \text{ (м)}$$

⇒ расстояние до прямых, содержащих стороны MQ и PQ , одно и то же и равно $\sqrt{5}$ (м).

3) Расстояние до диагонали NQ равно 2 м.

4) $\triangle NEO$ — прямоугольный.

$$EO^2 = EN^2 + ON^2 = 2^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4,5;$$

$$EO = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (м)}$$

Ответ: 2 м; $\sqrt{5}$ м; $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ м.

Задача 29. Основание равнобедренного треугольника $\triangle ABC$ совпадает с высотой и равно $2k$. Точка S удалена от плоскости треугольника на расстояние $\frac{3}{4}k$. Найдите расстояние от точки S до вершины треугольника при условии $SA = SB = SC$.

Решение:

- 1) Д/п $SO \perp ABC$.
- 2) $\triangle SOA = \triangle SOB = \triangle SOC$ по гипотенузе и катету.
- 3) $AO = BO = CO = R$ — радиус описанной окружности.
- 4) $R = \frac{abc}{4S}$; $a = b$; $c = 2k$.
- 5) $CD \perp AB$, $\triangle BCD$

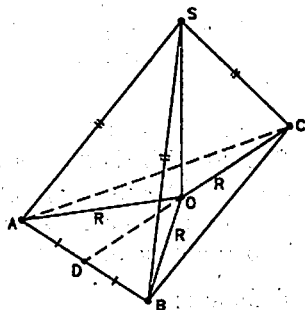
$$BC^2 = CD^2 + BD^2 = (2k)^2 + k^2 = 5k^2$$

$$a = b = k \cdot \sqrt{5}$$

$$6) S = S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot 2k = 2k^2$$

$$7) R = \frac{abc}{4S} = \frac{k \cdot \sqrt{5} \cdot k \cdot \sqrt{5} \cdot 2k}{4 \cdot 2k^2} = \frac{5k}{4}$$

8) $\triangle SOC$ — прямоугольный.



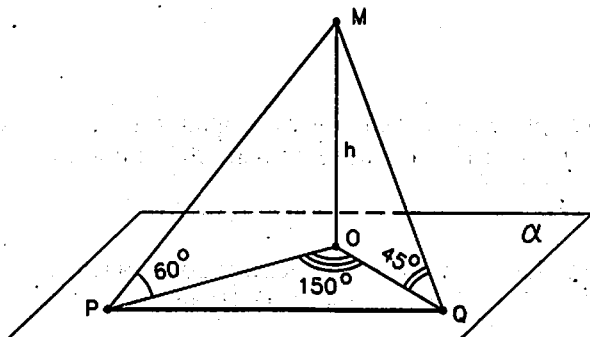
$$SC^2 = SO^2 + CO^2 = \left(\frac{5k}{4}\right)^2 + \left(\frac{3k}{4}\right)^2 = \frac{36k^2}{16},$$

$$SC = \frac{6k}{4} = 1,5k$$

Ответ: $1,5k$.

Задача 30. Точка M находится на расстоянии h от плоскости α . Проведены две наклонные MP и MQ (где P и Q — основания наклонных), соответственно под углами 45° и 60° . Найдите PQ , если $\angle POQ = 150^\circ$, где O — основание перпендикуляра MO , $MO \perp \alpha$.

Решение:



1) $\triangle POM$, $\triangle QOM$ — прямоугольные, т.к. $MO \perp \alpha$.

2) $OP = OM \operatorname{ctg} 60^\circ$, $OQ = OM \operatorname{ctg} 45^\circ$,

$$OP = \frac{h}{\sqrt{3}}, \quad OQ = h.$$

3) $\triangle POQ$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma$ — теорема косинусов

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2 \cdot OP \cdot OQ \cdot \cos 150^\circ$$

$$4) \quad PQ^2 = \frac{h^2}{3} + h^2 - 2 \cdot \frac{h}{\sqrt{3}} \cdot h \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$PQ^2 = \frac{7h^2}{3}; \quad PQ = h\sqrt{\frac{7}{3}}$$

Ответ: $h\sqrt{\frac{7}{3}}$.

V. Декартовы координаты и векторы в пространстве

Задача 1. Задан базис из трех единичных векторов $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Угол между векторами $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен 45° , $\vec{m} \wedge \vec{n} = 45^\circ$. Вектор $\vec{p}$ к ним перпендикулярен. Найдите длины вектора $\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$, $|\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}| = ?$

Решение:

Обозначим $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$.

$$|\vec{a}|^2 = (\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}) \cdot (\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}) = |\vec{m}|^2 + |\vec{n}|^2 + |\vec{p}|^2 + 2 \cdot \vec{m} \cdot \vec{n} + 2 \cdot \vec{m} \cdot \vec{p} + 2 \cdot \vec{n} \cdot \vec{p} = 1 + 1 + 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 + \sqrt{2};$$

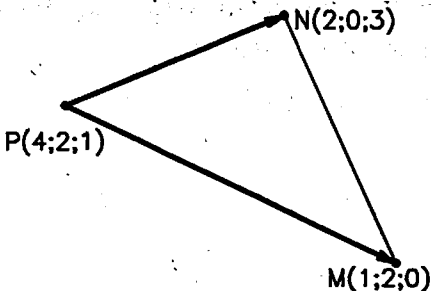
$$|\vec{a}| = \sqrt{3 + \sqrt{2}}.$$

Скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, а также $\vec{n}$ и $\vec{p}$ равно нулю, т.к. угол между ними 90° , и $\cos 90^\circ = 0$.

Ответ: $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$.

Задача 2. Треугольник $\triangle MNP$ задан координатами его вершин $M(1; 2; 0)$, $N(2; 0; 3)$, $P(4; 2; 1)$. Найдите $\cos P$.

Решение:



1) $\vec{PN} (1 - 4; 0 - 2; 3 - 1) =$ —

Координатами вектора $\vec{PN}$ являются числа $-3; -2; 2$.

2) $\vec{PM} (1 - 4; 2 - 2; 0 - 1) = (-3; 0; -1)$.

3) $\cos P = \frac{\vec{PN} \cdot \vec{PM}}{|\vec{PN}| \cdot |\vec{PM}|}$

Косинус угла между векторами

$$\overline{PN} \cdot \overline{PM} = 2 \cdot (-3) + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) = -8;$$

$$|\overline{PN}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

$$|\overline{PM}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{10};$$

$$\cos P = \frac{-8}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{10}} = -\frac{4}{\sqrt{30}}$$

Ответ: $-\frac{4}{\sqrt{30}}$

Задача 3. Даны четыре точки $M(-2; 0; -1)$, $N(-1; 1; 0)$, $P(1; -7; -4)$, $Q(0; -8; -5)$. Докажите, что $MNPQ$ — параллелограмм.

Решение:

1) $MNPQ$ — четырехугольник,

MP и NQ — диагонали. Найдем координаты середины отрезков MP и NQ , C_1 и C_2 соответственно:

$$C_1 \left(\frac{-2+1}{2}; \frac{0-7}{2}; \frac{-1-4}{2} \right) \text{ и } C_2 \left(\frac{-1+0}{2}; \frac{1-8}{2}; \frac{0-5}{2} \right),$$

получили

$$C_1 \left(-\frac{1}{2}; -\frac{7}{2}; -\frac{5}{2} \right) \text{ и } C_2 \left(-\frac{1}{2}; -\frac{7}{2}; -\frac{5}{2} \right).$$

Значит, в четырехугольнике $MNPQ$ диагонали пересекаются в точке $C_1 \left(-\frac{1}{2}; -\frac{7}{2}; -\frac{5}{2} \right)$ и точкой пересечения делятся пополам $\Rightarrow MNPQ$ — параллелограмм.

Задача 4. Задан квадрат $MNPQ$. Из вершины квадрата точки N восстановим перпендикуляр NE к плоскости квадрата. Найдите угол между скрещивающимися прямыми ME и NQ , если сторона квадрата равна 4 м, а $NE = 2$ м.

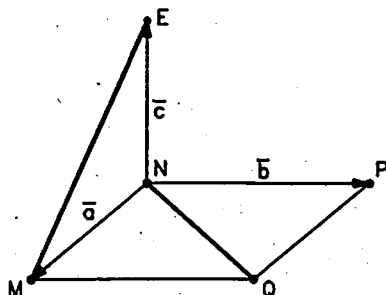
Решение:

1) В качестве базисных векторов выберем

$$\overline{NM} = \overline{a}; \overline{MQ} = \overline{b}; \overline{NE} = \overline{c}.$$

2) $\overline{ME} = \overline{NE} - \overline{NM} = \overline{c} - \overline{a};$

$$\overline{NQ} = \overline{NM} + \overline{MQ} = \overline{a} + \overline{b}.$$



3) Вычислим скалярное произведение $\overline{ME} \cdot \overline{NQ}$:

$$(\overline{c} - \overline{a}) \cdot (\overline{a} + \overline{b}) = \overline{c} \cdot \overline{a} + \overline{c} \cdot \overline{b} - \overline{a} \cdot \overline{a} - \overline{a} \cdot \overline{b} = -16.$$

4) $|\overline{c} - \overline{a}| = \sqrt{(\overline{c} - \overline{a}) \cdot (\overline{c} - \overline{a})} = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}.$

5) $|\overline{a} + \overline{b}| = \sqrt{(\overline{a} + \overline{b}) \cdot (\overline{a} + \overline{b})} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}.$

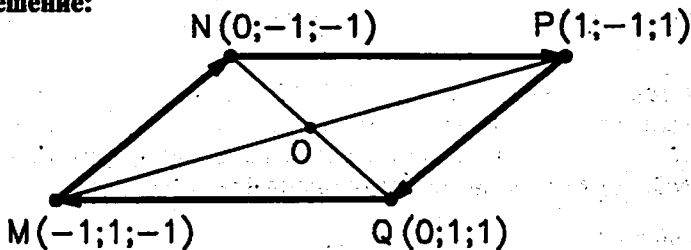
6) $\cos \alpha = \frac{-16}{2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{10}},$

$$\alpha = \pi - \arccos \frac{2}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\pi - \arccos \frac{2}{\sqrt{10}}.$

Задача 75. Даны четыре точки $M(-1; 1; -1)$, $N(0; -1; -1)$, $P(1; -1; 1)$, $Q(0; 1; 1)$. Докажите, что четырехугольник $MNPQ$ — ромб.

Решение:



1) Вектор $\overline{MN}$ имеет координаты:

$$0 - (-1) = 1; -1 - 1 = -2; -1 - (-1) = 0$$

получаем $\overline{MN}(1; -2; 0),$

аналогично: $\overline{MP}(1; 0; 2); \overline{PQ}(-1; 2; 0); \overline{QM}(-1; 0; -2).$

2) Длины векторов:

$$|MN| = |MP| = |PQ| = |QM| = \sqrt{1 + 4 + 0} = \sqrt{5}.$$

3) Координаты середины диагонали MP :

$$x = \frac{-1 + 1}{2} = 0; y = \frac{-1 + 1}{2} = 0; z = \frac{-1 + 1}{2} = 0.$$

Середина диагонали — точка $O(0; 0; 0)$.

4) Аналогично для диагонали NQ — середина та же: точка $O(0; 0; 0)$.

5) В четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, значит, $MNPQ$ — параллелограмм.

6) Стороны параллелограмма $MNPQ$ равны, поэтому $MNPQ$ является ромбом.

Задача 6. Известно, что $MNPQ$ — параллелограмм, причем три его вершины известны: $M(3; 4; -5)$, $N(-2; 10; 7)$, $Q(-9; 4; 11)$. Четвертую вершину P требуется найти.

Решение:

1) Середина диагонали NQ :

$$x = \frac{-2 - 9}{2} = -\frac{11}{2}; y = \frac{10 + 4}{2} = 7; z = \frac{7 + 11}{2} = 9.$$

Точка $O\left(-\frac{11}{2}; 7; 9\right)$ — середина диагонали.

2) Для координат середины диагонали MP получаем:

$$\begin{cases} \frac{3 + x_p}{2} = -\frac{11}{2} \\ \frac{4 + y_p}{2} = 7 \\ \frac{-5 + z_p}{2} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_p = -14 \\ y_p = 10 \\ z_p = 23 \end{cases}$$

Ответ: $P(-14; 10; 23)$.

Задача 7. Середина отрезка BC лежит на оси z . Найдите p и q , если $B(p; 10; 2)$ и $C(-5; q; -20)$.

Решение:

1) Координата середины отрезка BC :

$$x = \frac{p-6}{2}; y = \frac{10+q}{2}; z = \frac{2-20}{2} = -9.$$

- 2) Искомая точка на оси z имеет координаты $(0; 0; -9)$, поэтому

$$\frac{p-6}{2} = 0 \Leftrightarrow p = 6;$$

$$\frac{10+q}{2} = 0 \Leftrightarrow q = -10.$$

Ответ: $p = 6; q = -10$.

Задача 8. Даны три точки $M(5; 5; 6)$, $N(4; 7; 8)$, $P(6; 6; l)$. При каких значениях l треугольник $\triangle MNP$ равнобедренный?

Решение:

- 1) Стороны треугольника $\triangle MNP$ равны:

$$MN^2 = (5-4)^2 + (5-7)^2 + (6-8)^2 = 1 + 4 + 4 = 9$$

$$MP^2 = (5-6)^2 + (5-6)^2 + (6-l)^2 = 1 + (6-l)^2$$

$$NP^2 = (6-4)^2 + (7-5)^2 + (8-l)^2 = 8 + (8-l)^2$$

- 2) Пусть $MP = NP$

$$1 + (6-l)^2 = 8 + (8-l)^2$$

$$(6-l)^2 - (8-l)^2 = 8-1$$

$$-2 \cdot (14-2l) = 7 \Rightarrow 14-2l = -3,5$$

$$l_1 = 8,75$$

- 3) Или, например, $MN = MP$

$$1 + (6-l)^2 = 9$$

$$6-l = 9$$

$$6-l = \pm 2\sqrt{2};$$

$$l_2 = 6 - 2\sqrt{2}; l_3 = 6 + 2\sqrt{2}.$$

- 4) Осталось рассмотреть случай $MN = NP$

$$8 + (8-l)^2 = 9$$

$$(8-l)^2 = 1$$

$$l_4 = 9; l_5 = 7$$

Ответ: $\{9; 7; 6 - 2\sqrt{2}; 6 + 2\sqrt{2}; 8,75\}$.

Задача 9. Определите вид треугольника $\triangle PQR$, если его вершины заданы координатами:

- а) $P(6; 0; -8)$, $Q(-1; 7; -8)$, $R(-1; 0; -1)$;

- б) $P(0; 7; 5)$, $Q(1; 8; 5)$, $R(0; 7; 3)$;
 в) $P(-1; 3; -3)$, $Q(0; 5; 0)$, $R(4; 7; 3)$;
 г) $P(8; -2; 2)$, $Q(8; 0; 2)$, $R(7; 0; 3)$;
 д) $P(2; 1; 1)$, $Q(3; 10; 2)$, $R(4; 15; 5)$;
 е) $P(0; 2; 1)$, $Q(3; 0; 2)$, $R(1; 1; 13)$.

Решение:

а) $QP^2 = (6 + 1)^2 + (7 - 0)^2 + (-8 + 8)^2 = 98$
 $QR^2 = 0^2 + 7^2 + 7^2 = 98$
 $PR^2 = 7^2 + 0^2 + 7^2 = 98$

ΔPQR — равносторонний.

б) $QP^2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2$
 $QR^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$
 $PR^2 = 0^2 + 0^2 + 2^2 = 4$
 $QR^2 = QP^2 + PR^2$, т.е.

ΔPQR — прямоугольный.

в) $QP^2 = 1 + 4 + 9 = 14$
 $QR^2 = 16 + 4 + 1 = 21$
 $PR^2 = 25 + 16 + 16 = 57$

PR — наибольшая сторона ΔPQR .

$$\cos Q = \frac{QP^2 + QR^2 - PR^2}{2 \cdot QP \cdot QR} = \frac{14 + 21 - 57}{2 \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} < 0$$

$\angle Q$ — тупой угол.

ΔPQR — тупоугольный.

г) длины сторон ΔPQR

$$PQ^2 = (8 - 8)^2 + (-2 - 0)^2 + (2 - 2)^2 = 4; PQ = 2;$$

$$QR^2 = (8 - 7)^2 + (0 - 0)^2 + (2 - 3)^2 = 2; QR = \sqrt{2};$$

$$PR^2 = (8 - 7)^2 + (-2 - 0)^2 + (2 - 3)^2 = 6; PR = \sqrt{6}.$$

ΔPQR — прямоугольный треугольник.

д) Расстояния между точками P , Q , R и есть длины сторон треугольника ΔPQR .

$$PQ^2 = (2 - 3)^2 + (1 - 10)^2 + (1 - 2)^2 = 83; PQ = \sqrt{83};$$

$$QR^2 = (3 - 4)^2 + (10 - 15)^2 + (2 - 5)^2 = 35; QR = \sqrt{35};$$

$$PR^2 = (2 - 4)^2 + (1 - 15)^2 + (1 - 5)^2 = 216; PR = \sqrt{216}.$$

PR — наибольшая сторона ΔPQR

$$\cos Q = \frac{PQ^2 + QR^2 - PR^2}{2 \cdot PQ \cdot QR} = \frac{83 + 35 - 216}{2 \cdot \sqrt{83} \cdot \sqrt{35}} < 0$$

$\angle Q$ — тупой угол

$\triangle PQR$ — тупоугольный треугольник.

$$\begin{aligned} \text{е) } PQ^2 &= (3-0)^2 + (0-2)^2 + (2-1)^2 = 14; PQ = \sqrt{14}; \\ QR^2 &= (3-1)^2 + (0-1)^2 + (2-13)^2 = 126; QR = \sqrt{126}; \\ PR^2 &= (1-0)^2 + (1-2)^2 + (13-1)^2 = 146; PR = \sqrt{146}. \end{aligned}$$

PR — наибольшая сторона $\triangle PQR$, найдем

$$\cos Q = \frac{PQ^2 + QR^2 - PR^2}{2 \cdot PQ \cdot QR} = \frac{14 + 126 - 146}{2 \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{126}} < 0.$$

Значит $\angle Q$ — тупой угол

$\triangle PQR$ — тупоугольный треугольник.

Задача 10. Заданы две точки $P(0; 5; 7)$ и $Q(5; 4; -1)$. Найдите три точки X, Y, Z , каждая из которых лежит соответственно на оси абсцисс, ординат и аппликат, одинаково удаленные от точек P и Q .

Решение:

1) Точка X лежит на оси абсцисс:

$$X(x; 0; 0), PX = QX$$

$$(x-0)^2 + (0-5)^2 + (0-7)^2 = (x-5)^2 + (4-0)^2 + (-1-0)^2$$

$$x^2 + 74 = (x-5)^2 + 17$$

$$x^2 - (x-5)^2 = -57$$

$$5 \cdot (2x-5) = -57$$

$$10x = -32$$

$$x = -3,2$$

Координаты точки $X(-3,2; 0; 0)$.

2) Точка Y лежит на оси ординат.

$$Y(0; y; 0), PY = QY$$

$$(0-0)^2 + (5-y)^2 + (7-0)^2 = (5-0)^2 + (4-y)^2 + (-1-0)^2$$

$$(5-y)^2 - (4-y)^2 = 25 + 1 - 49$$

$$1 \cdot (9-2y) = -23$$

$$-2y = -32$$

$$y = 16$$

Координаты искомой точки $Y(0; 16; 0)$.

3) Точка Z лежит на оси аппликат.

$$Z(0; 0; z), PZ = ZQ$$

$$(0-0)^2 + (0-5)^2 + (z-7)^2 = (5-0)^2 + (4-0)^2 + (-1-z)^2$$

$$(z-7)^2 - (z+1)^2 = 25 + 16 - 25$$

$$-8 \cdot (2z-6) = 16$$

$$2z-6 = -2$$

$$z = 2$$

Координаты точки $Z(0; 0; 2)$.

Ответ: $(-3, 2; 0; 0); (0; 16; 0); (0; 0; 2)$.

Задача 11. Отрезок MN задан точкой $M(16; -8; 4)$ и его серединой, точкой $C(-1; 3; 5)$. Найдите координаты точки N , второго конца отрезка MN .

Решение:

Координаты середины отрезка:

$$x_c = \frac{16+x}{2}; y_c = \frac{-8+y}{2}; z_c = \frac{4+z}{2}.$$

$$\begin{cases} -1 = \frac{16+x}{2} \\ 3 = \frac{-8+y}{2} \\ 5 = \frac{4+z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -18 \\ y = -14 \\ z = 6 \end{cases}$$

Ответ: $N(-18; -14; 6)$.

Задача 12. Точки $M(-m; n; p)$ и $N(m; q; -p)$ — концы отрезка MN . Докажите, что середина отрезка, точка C , лежит на оси ординат.

Решение:

1) Координаты середины отрезка:

$$x_c = \frac{x_M + x_N}{2}; y_c = \frac{y_M + y_N}{2}; z_c = \frac{z_M + z_N}{2}.$$

$$2) \quad x_c = \frac{-m+m}{2} = 0; y_c = \frac{n+q}{2}; z_c = \frac{p-p}{2} = 0.$$

Получили $C\left(0; \frac{n+q}{2}; 0\right)$, точка C лежит на оси ординат.

Задача 13. Заданы две точки $B(1; 4; -2)$ и $C(5; 3; 4)$. Составьте уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек B и C .

Решение:

- 1) Точка $D(x; y; z)$ находится на одном и том же расстоянии от точек B и C :

$$BD = CD \Rightarrow BD^2 = CD^2$$

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2$$

$$-2x - 8y + 4z + 21 = -10x - 6y - 8z + 50$$

$$8x - 2y + 12z - 29 = 0$$

- 2) Обсуждение.

ГМТ является плоскостью, т.к. общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ где}$$

A, B и C — координаты вектора, перпендикулярного плоскости. Для того чтобы проверить, принадлежит ли точка плоскости, достаточно подставить координаты точки в уравнение плоскости. В случае верного равенства точка принадлежит плоскости. В качестве примера рассмотрим точку E , середину отрезка BC .

$$x_E = \frac{1+5}{2} = 3; y_E = \frac{4+3}{2} = 3,5; z_E = \frac{-2+4}{2} = 1.$$

Получили $E(3; 3,5; 1)$.

Ясно, что точка E одинаково удалена от концов отрезка. Теперь подставим координаты точки E в уравнение плоскости.

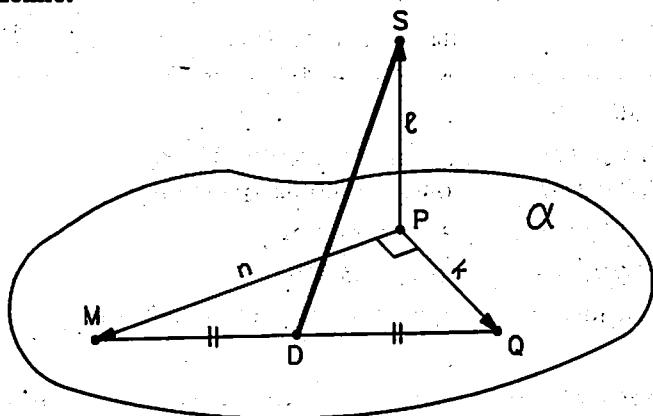
$$8 \cdot 3 - 2 \cdot 3,5 + 12 \cdot 1 - 29 = 24 - 7 + 12 - 29 = 0,$$

что означает, что точка E принадлежит плоскости.

Ответ: $8x - 2y + 12z - 29 = 0$ — уравнение плоскости.

Задача 14. Задан прямоугольный треугольник $\triangle MNQ$ с катетами $MP = p$, $PQ = k$. Из вершины прямого угла $\angle P$ к плоскости треугольника восстановлен перпендикуляр $PS = l$. Выберите базисные векторы, определите в этой системе координат координаты точек S и D — середины гипотенузы MQ и найдите расстояние SD с помощью формулы расстояния между двумя точками.

Решение:



1) Выберем в качестве базисных векторов векторы $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PS}$.

2) Точка $S(0; 0; 1)$ и точка $D\left(\frac{n}{2}; \frac{k}{2}; 0\right)$ являются концами отрезка SD .

Вспользуемся формулой расстояния между двумя точками:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

В нашем случае:

$$SD^2 = \left(\frac{n}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{k}{2} - 0\right)^2 + (0 - 1)^2$$

$$SD = \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{k^2}{4} + 1}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{k^2}{4} + 1}$.

Задача 15. Докажите, что $MNPQ$ равнобокая трапеция, если $M(1; 1; -3)$, $N(-3; -3; -3)$, $P(-3; 0; 1)$ и $Q(-2; 1; 1)$.

Решение:

1) Рассмотрим векторы:

$$\overrightarrow{MN}(-4; -4; 0), \overrightarrow{NP}(0; 3; 4), \overrightarrow{PQ}(1; 1; 0), \overrightarrow{QM}(3; 0; -4).$$

2) Из четырех векторов два вектора $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$ коллинеарны, т.к.

$$(-4; -4; 0) = -4(1; 1; 0), \text{ т.е. } \overline{MN} = -4\overline{PQ}.$$

3) С другой стороны, остальные два вектора $\overline{NP}$ и $\overline{QM}$ не коллинеарны, т.к. не существует такого числа $\lambda \neq 0$, что $\overline{MP} = \lambda \overline{QM}$.

4) $\overline{MN}$ и $\overline{PQ}$ — основания трапеции $MNPQ$,
 $\overline{NP}$ и $\overline{QM}$ — боковые стороны трапеции.

$$5) |\overline{NP}|^2 = 0^2 + 3^2 + 4^2 = 25, NP = 5$$

$$|\overline{QM}|^2 = 3^2 + 0^2 + (-4)^2 = 25, QM = 5$$

Следовательно, трапеция $MNPQ$ равнобокая.

Задача 16. Точка E одинаково удалена от трех точек M, P, Q . Найдите координаты точки E , если известно, что $M(2; 0; 4)$, $P(3; 0; 5)$, $Q(-2; -6; 1)$ и что точка E может располагаться только в одной из координатных плоскостей XY, XZ, YZ .

Решение:

1) Точка E расположена в плоскости XY , значит, $E(x, y, 0)$.

$$ME^2 = PE^2 = QE^2.$$

Найдем расстояние между точками M и E , заданных координатами:

$$ME^2 = (2 - x)^2 + (0 - y)^2 + (4 - 0)^2$$

аналогично

$$PE^2 = (3 - x)^2 + (0 - y)^2 + (5 - 0)^2$$

$$QE^2 = (-2 - x)^2 + (-6 - y)^2 + (1 - 0)^2.$$

$$\begin{cases} ME^2 = PE^2 \\ ME^2 = QE^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 + y^2 + 16 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 25 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 + 16 = x^2 + 4x + 4 + y^2 + 12y + 36 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x - 14 = 0 \\ -8x - 12y - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -\frac{77}{12} = -6\frac{5}{12} \end{cases}$$

Точка E , равноудаленная от точек M, P и Q , лежащая в плоскости XY , имеет координаты:

$$E\left(7; -6\frac{5}{12}; 0\right)$$

- 2) Теперь точка E переместилась на плоскость XZ , $E(x; 0; z)$.

$$ME^2 = PE^2 = QE^2$$

$$\begin{cases} ME^2 = PE^2 \\ ME^2 = QE^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(2-x)^2 + (4-z)^2 = (3-x)^2 + (z-5)^2$$

$$(2-x)^2 + (4-z)^2 = (-2-x)^2 + 36 + (1-z)^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -4x - 8z = -6x = 10z + 14 \\ -4x - 8z + 20 = 4x - 2z + 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2z = 14 \\ -8x - 6z = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -31\frac{1}{2} \\ z = 38\frac{1}{2} \end{cases}$$

Точка E , равноудаленная от точек M , P и Q , лежащая в плоскости XZ , имеет координаты:

$$E(-31,5; 0; 38,5).$$

- 3) Наконец точка E — на плоскости YZ , $E(0; y; z)$.

$$\begin{cases} PE^2 = ME^2 \\ PE^2 = QE^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$3^2 + y^2 + (5-z)^2 = 2^2 + y^2 + (4-z)^2$$

$$3^2 + y^2 + (5-z)^2 = 2^2 + (-6-y)^2 + (1-z)^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -10z + 34 = -8z + 20 \\ -10z + 34 = -2z + 12y + 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z = 14 \\ 8z + 12y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 7 \\ y = -5\frac{1}{4} \end{cases}$$

Точка E , равноудаленная от заданных точек M , P и Q , и лежащая в плоскости YZ , имеет координаты:

$$\left(0; -5\frac{1}{4}; 7\right)$$

Ответ: $\left(7; -6\frac{5}{12}; 0\right); (-31,5; 0; 38,5); \left(0; -5\frac{1}{4}; 7\right)$.

Задача 17. Даны точки $A(3; 7; 2)$, $B(4; 5; 0)$ и $C(0; -2; -7)$. Найдите точки, симметричные данным относительно начала координат.

Решение:

- 1) Точке $A(3; 7; 2)$ ставится в соответствие точка $A'(x; y; z)$, такая, что начало координат $O(0; 0; 0)$ является серединой отрезка AA' . По формулам для координат середины отрезка получаем:

$$0 = \frac{x+3}{2}; 0 = \frac{7+y}{2}; 0 = \frac{2+z}{2}$$

$$x = -3; y = -7; z = -2.$$

Окончательно: $A'(-3; -7; -2)$,

Аналогично $B'(-4; -5; 0)$; $C'(0; 2; 7)$.

Ответ: $(-3; -7; -2)$; $(-4; -5; 0)$; $(0; 2; 7)$.

Задача 18. Точка $M(3; 0; -4)$ при параллельном переносе переходит в точку $M'(7; 2; 3)$. В какие точки переходят $N(1; 1; 2)$, $O(0; 0; 0)$ и $P(-3; -2; -7)$?

Решение:

1) При параллельном переносе:

$$x' = x + a, y' = y + b, z' = z + c.$$

2) Определим a, b, c .

$$7 = 3 + a, 2 = 0 + b, 3 = -4 + c.$$

Получаем $a = 4, b = 2, c = 7$.

3) Точка $N(1; 1; 2)$ переходит в точку $N'(x'; y'; z')$.

$$x' = 1 + 4, y' = 1 + 2, z' = 2 + 7.$$

Получили $N'(5; 3; 9)$.

4) Точка $O(0; 0; 0)$, начало координат, переходит в точку $O'(x'; y'; z')$.

$$x' = 0 + 4; y' = 0 + 2; z' = 0 + 7$$

Получили $O'(4; 2; 7)$.

5) Точка $P(-3; -2; -7)$ переходит в точку $P'(x'; y'; z')$,

$$x' = -3 + 4; y' = -2 + 2; z' = -7 + 7.$$

Получаем $P'(1; 0; 0)$.

Ответ: $(5; 3; 9)$, $(4; 2; 7)$, $(1; 0; 0)$.

Задача 19. Докажите, что круг переходит в круг при движении в пространстве.

Решение:

1) Пусть задан круг радиуса R с центром O , принадлежащий плоскости α .

2) При движении плоскость переходит в плоскость, значит, α переходит в α' .

- 3) Итак, $\alpha \rightarrow \alpha', O \rightarrow O'$.
 4) $O' \in \alpha'$
 5) Рассмотрим произвольную точку M круга. $OM = O'M'$ при движении сохраняются расстояния.
 $OM \leq R \Rightarrow O'M' \leq R$
 6) В силу произвольности выбора точки M имеем $O'M' \leq R$, т.е. получили круг с центром в точке O' и радиусом R : «при движении круг переходит в круг».

Задача 20. Пусть прямая a не проходит через центр симметрии — точку O . Докажите, что прямая a переходит в параллельную ей прямую a' при преобразовании центральной симметрии.

Решение:

- 1) Выберем две точки на прямой a : $M_1 \in a$ и $M_2 \in a$.
 2) Выберем систему координат $OXYZ$ в точке O . В этой системе координат $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$.
 $M_1M_2 = OM_2 - OM_1$
 3) Преобразование центральной симметрии Z_0 переводит точку $M_1(x_1; y_1; z_1) \rightarrow M_1'(-x_1; -y_1; -z_1)$,
 точку $M_2(x_2; y_2; z_2) \rightarrow M_2'(-x_2; -y_2; -z_2)$.
 4) $M_1'M_2' = OM_2' - OM_1'$
 5) Сравним два вектора $M_1M_2(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ и $M_1'M_2'(-x_2 + x_1; -y_2 + y_1; -z_2 + z_1)$.
 Ясно, что $M_1M_2 = -M_1'M_2'$, то есть векторы коллинеарны $\Rightarrow a \parallel a'$.

Задача 21. Точки A, B и C лежат на одной прямой a . Докажите, что при движении точки A', B', C' , образы данных точек, также лежат на одной прямой.

Решение:

- 1) Пусть $A \in a, B \in a, C \in a$.
 Без ограничения общности можно считать, что точка B лежит между точками A и C .
 $AC = AB + BC$.

2) При движении

$$A \rightarrow A'; B \rightarrow B'; C \rightarrow C'; a \rightarrow a'.$$

3) $AC = A'C'$; $AB = A'B'$; $BC = B'C'$ — при движении сохраняются расстояния,

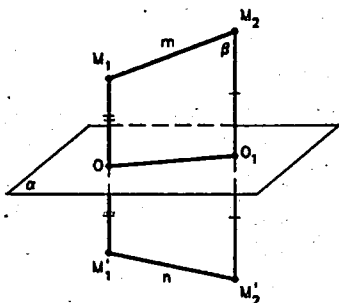
$$A'C' = A'B' + B'C',$$

что в свою очередь означает, что $A' \in a'$, $B' \in a'$, $C' \in a'$ — точки лежат на одной прямой.

Задача 22. Задано преобразование симметрии относительно плоскости α . Пусть при этом прямая l переходит в прямую m . Докажите, что m и l лежат в одной плоскости.

Решение:

- 1) Преобразование симметрии относительно плоскости α состоит в следующем. Из точки $M_1 \in l$ опускается перпендикуляр на плоскость α . Точка O — основание перпендикуляра M_1O . Затем отложим отрезок $OM_1' = OM_1$ на прямой M_1O . Аналогично $M_2O_1 = O_1M_2'$.

2) $M_1M_1' \parallel M_2M_2'$.

Перпендикулярные прямые к одной плоскости параллельны между собой.

3) $M_1M_1' \subset \beta$, $M_2M_2' \subset \beta$.

Параллельные прямые лежат в одной плоскости $\Rightarrow$ точки M_1 , M_1' , M_2 , M_2' лежат в плоскости β .

4) Получили $m \subset \beta$, $l \subset \beta$.

Задача 23. Гомотетия в пространстве является преобразованием подобия. Докажите.

Решение:

- 1) Зададим две точки M_1 и M_2 . Задано преобразование гомотетии H_0 . Точка O — центр гомотетии.

- 2) $\overline{OM_2} - \overline{OM_1} = \overline{M_1M_2}$ векторное равенство.
- 3) $H_0(M_1) = M_1'$, $H_0(M_2) = M_2'$.
- 4) Если k — коэффициент гомотетии, то по определению $\overline{OM_1'} = k\overline{OM_1}$ и $\overline{OM_2'} = k\overline{OM_2}$.
- 5) Умножим векторное равенство на k .
 $k\overline{OM_2} - k\overline{OM_1} = k\overline{M_1M_2}$, или
 $\overline{OM_2'} - \overline{OM_1'} = k\overline{M_1M_2}$, получаем $\overline{M_1'M_2'} = k\overline{M_1M_2}$,
 векторы коллинеарны, и $|\overline{M_1'M_2'}| = k|\overline{M_1M_2}|$, а это определение преобразования подобия, что и требовалось доказать.

Задача 24. Докажите, что квадрат переходит в равный квадрат при параллельном переносе.

Решение:

- 1) Рассмотрим квадрат $ABCD$. Задан параллельный перенос, при этом плоскость квадрата $ABCD$ переходит или сама в себя, или в параллельную ей плоскость. Все зависит от вектора параллельного переноса.
- 2) Итак, квадрат $ABCD$ в плоскости α переходит в четырехугольник $A'B'C'D'$ в плоскости α' .
- 3) Параллельный перенос является движением, при движении сохраняются расстояния.

$$AB = BC = CD = AD = A'B' = B'C' = C'D' = A'D'.$$

Диагонали также равны

$$AC = BD = A'C' = B'D'.$$

и точкой пересечения делятся пополам.

- 5) Суммируем нашу информацию о четырехугольнике $A'B'C'D'$: лежит в плоскости α' , стороны равны, диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам $\Rightarrow A'B'C'D'$ — квадрат, равный другому, т.е. при наложении квадраты совпадают.

Задача 25. Докажите, что при движении отрезок переходит в отрезок.

Решение:

- 1) Пусть при движении точка A переходит в точку A' , B переходит в точку B' . $AB = A'B'$ — при движении сохраняются расстояния.
- 2) Прямая a содержит отрезок AB . Известно, что a переходит в a' , т.к. «при движении прямая переходит в прямую».
- 3) Рассмотрим точку C отрезка AB

$$AC + BC = AB$$

$AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $AB = A'B'$, т.к. при движении сохраняются расстояния. Значит, $A'C' + B'C' = A'B'$, т.е. точка отрезка AB переходит в точку отрезка $A'B'$, т.е. «отрезок переходит в отрезок».

Задача 26. Существует ли параллельный перенос, при котором точка M переходит в точку M' , а точка P переходит в точку P' , если:

а) $M(15; 14; 13) \rightarrow M'(14; 13; 14)$

$$P(18; 11; 14) \rightarrow P'(15; 12; 13)$$

б) $M(-3; 2; 4) \rightarrow M'(0; 1; 3)$

$$P(3; -4; 5) \rightarrow P'(6; -3; 4)$$

в) $M(5; 6; 7) \rightarrow M'(4; 5; 6)$

$$P(8; 3; 7) \rightarrow P'(7; 2; 6)$$

г) $M(50; 50; 49) \rightarrow M'(49; 49; 49)$

$$P(47; 51; 50) \rightarrow P'(50; 50; 50)$$

д) $M(3; 5; 0) \rightarrow M'(4; 9; -2)$

$$P(1; 0; 0) \rightarrow P'(2; 4; -2).$$

Решение:

а) $\overline{MM'}(14 - 15; 13 - 14; 14 - 13) = \overline{MM'}(-1; -1; 1)$

$$\overline{PP'}(15 - 18; 12 - 11; 13 - 14) = \overline{PP'}(-3; 1; -1)$$

$$\overline{MM'} \neq \overline{PP'}$$

не существует параллельного переноса.

$$\begin{aligned} \text{б) } \overline{MM'}(0+3; 1-2; 3-4) &= \overline{MM'}(3; -1; -1) \\ \overline{PP'}(6-3; -3+4; 4-5) &= \overline{PP'}(3; 1; -1) \\ \overline{MM'} &\neq \overline{PP'} \end{aligned}$$

не существует параллельного переноса.

$$\begin{aligned} \text{в) } \overline{MM'}(4-5; 5-6; 6-7) &= \overline{MM'}(-1; -1; -1) \\ \overline{PP'}(7-8; 2-3; 6-7) &= \overline{PP'}(-1; -1; -1) \\ \overline{MM'} &= \overline{PP'} \end{aligned}$$

существует параллельный перенос.

$\vec{k} = (-1; -1; -1)$ параллельный перенос на вектор $\vec{k}$.

$$\begin{aligned} \text{г) } \overline{MM'}(49-50; 49-50; 49-49) &= \overline{MM'}(-1; -1; 0) \\ \overline{PP'}(50-47; 50-51; 50-50) &= \overline{PP'}(3; -1; 0) \\ \overline{MM'} &\neq \overline{PP'} \end{aligned}$$

не существует параллельного переноса.

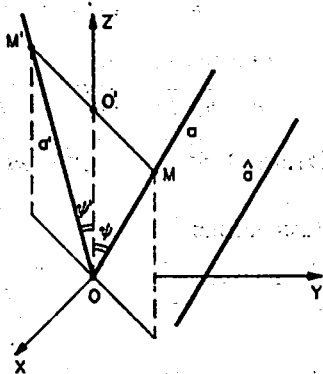
$$\begin{aligned} \text{д) } \overline{MM'}(4-3; 9-5; -2-0) &= \overline{MM'}(1; 4; -2) \\ \overline{PP'}(2-1; 4-0; -2-0) &= \overline{PP'}(1; 4; -2) \\ \overline{MM'} &= \overline{PP'} \end{aligned}$$

существует параллельный перенос на вектор $\vec{k}(1; 4; -2)$.

Задача 27. Прямая образует с осью симметрии угол ψ . Докажите, что в пространстве преобразование симметрии относительно прямой сохраняет угол ψ .

Решение:

- 1) Выберем систему координат $Oxyz$ таким образом: ось симметрии направим по оси Oz , через начало координат $O(0; 0; 0)$ проведем прямую, параллельную заданной прямой a .
- 2) Выберем на прямой a точку $M(x; y; z)$.
- 3) Точка M переходит в точку $M'(-x; -y; z)$, и точка O' является серединой отрезка MM' .



4) Рассмотрим вектор $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$ и вектор $\overrightarrow{OM'}(-x, -y, z)$.
 Ясно, что $|\overrightarrow{OM'}| = |\overrightarrow{OM}|$.

5) Наконец, по оси симметрии направлен вектор $\overrightarrow{OO'}(0; 0; z)$.

$$\begin{aligned} 6) \quad \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OO'} &= x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot z = z^2 \\ \overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OO'} &= -x \cdot 0 + (-y) \cdot 0 + z \cdot z = z^2 \end{aligned}$$

Вычислили скалярное произведение.

7) $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OO'}$, это означает

$$|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{OO'}| \cdot \cos \psi = |\overrightarrow{OM'}| \cdot |\overrightarrow{OO'}| \cdot \cos \psi' \text{ или } \cos \psi = \cos \psi', \text{ а это означает, что } \psi = \psi'.$$

Доказали, что прямая, образующая с осью симметрии угол ψ , переходит в прямую a' при преобразовании симметрии относительно прямой. Прямая a' также образует угол ψ с осью симметрии.

Задача 28. В качестве базисных векторов выбраны векторы $\underline{m}, \underline{n}, \underline{p}$. Угол между векторами $\underline{m}$ и $\underline{n}$ равен 45° , а вектор $\underline{p}$ им перпендикулярен. Найдите $|\underline{m} + \underline{n} + \underline{p}|$.

Решение:

$$\begin{aligned} &|\underline{m} + \underline{n} + \underline{p}|^2 \text{ скалярный квадрат.} \\ &(\underline{m} + \underline{n} + \underline{p}) \cdot (\underline{m} + \underline{n} + \underline{p}) = \underline{m} \cdot \underline{m} + \underline{m} \cdot \underline{n} + \underline{m} \cdot \underline{p} + \underline{n} \cdot \underline{m} + \\ &\quad + \underline{n} \cdot \underline{n} + \underline{n} \cdot \underline{p} + \underline{p} \cdot \underline{m} + \underline{p} \cdot \underline{n} + \underline{p} \cdot \underline{p} = m^2 + n^2 + p^2 + \\ &\quad + 2 \cdot m \cdot n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = m^2 + n^2 + p^2 + m \cdot n \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

Окончательно

$$|\underline{m} + \underline{n} + \underline{p}| = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2 + m \cdot n \cdot \sqrt{2}}$$

Ответ: $\sqrt{m^2 + n^2 + p^2 + m \cdot n \cdot \sqrt{2}}$.

Замечание:

- 1) $\underline{m}, \underline{n}, \underline{p}$ — векторы, m, n, p — длины векторов.
- 2) $|\underline{m} + \underline{n} + \underline{p}|$ — длина диагонали параллелепипеда.

Задача 29. Даны векторы: $\underline{b} = \underline{n}\underline{i} + 2\underline{j} - \underline{k}$ и $\underline{c} = -5\underline{j} - \underline{n}\underline{j} + 2\underline{k}$. При каком значении $\underline{n}$ $\underline{b} \perp \underline{c}$?

Решение:

$$b \cdot \bar{c} = 0$$

$$-5n - 2n - 2 = 0$$

$$-7n = 2$$

$$n = -\frac{2}{7}$$

Ответ: $n = -\frac{2}{7}$.**Задача 30.** Вычислите угол между прямыми MN и PQ , если заданы точки:

а) $M(0; -5; 1), N(1; -4; -1), P(4; -5; 0), Q(5; -5; -1);$

б) $M(3; 4; -1), N(5; 2; -1), P(-3; 2; -6), Q(0; 2; 3);$

в) $M(3; 20; 7), N(4; 20; 6), P(0; -3; 5), Q(0; -5; -3);$

г) $M(-1; -10; 12), N(-2; -10; 13), P(16; -8; 11), Q(16; -8; 9);$

д) $M(4; 3; 5), N(5; 4; 3), P(6; -4; -2), Q(4; 2; 6).$

Решение:

а) $\overline{MN}(1 - 0; -4 + 5; -1 - 1) = \overline{MN}(1; 1; -2)$

$$\overline{PQ}(5 - 4; -5 + 5; -1 - 0) = \overline{PQ}(1; 0; -1)$$

$$|\overline{MN}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\overline{MN} \cdot \overline{PQ} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) = 3$$

$$\cos \varphi = \frac{\overline{MN} \cdot \overline{PQ}}{|\overline{MN}| \cdot |\overline{PQ}|} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi = 30^\circ$$

б) $\overline{MN}(5 - 3; 2 - 4; -1 + 1) = \overline{MN}(2; -2; 0)$

$$\overline{PQ}(0 + 3; 2 - 2; 3 - 6) = \overline{PQ}(3; 0; -3)$$

$$|\overline{MN}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\overline{MN} \cdot \overline{PQ} = 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot (-3) = 6$$

$$\cos \varphi = \frac{\overline{MN} \cdot \overline{PQ}}{|\overline{MN}| \cdot |\overline{PQ}|} = \frac{6}{2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = 60^\circ$$

$$\text{в) } \overline{MN}(4-3; 20-20; 6-7) = \overline{MN}(1; 0; -1)$$

$$\overline{PQ}(0-0; -5+3; -3+5) = \overline{PQ}(0; -2; 2)$$

$$|\overline{MN}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{MN} \cdot \overline{PQ} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 = -2$$

$$\cos \varphi = \frac{\overline{MN} \cdot \overline{PQ}}{|\overline{MN}| \cdot |\overline{PQ}|} = \frac{-2}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\varphi = 120^\circ, \hat{\varphi} = 60^\circ$$

$$\text{г) } \overline{MN}(-2+1; -10+10; 13-12) = \overline{MN}(-1; 0; 1)$$

$$\overline{PQ}(16-16; -8+8; 9-11) = \overline{PQ}(0; 0; 2)$$

$$|\overline{MN}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = 2$$

$$\overline{MN} \cdot \overline{PQ} = -1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2$$

$$\cos \varphi = \frac{\overline{MN} \cdot \overline{PQ}}{|\overline{MN}| \cdot |\overline{PQ}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi = 45^\circ$$

$$\text{д) } \overline{MN}(6-4; -4-3; -2-5) = \overline{MN}(2; -7; -7)$$

$$\overline{PQ}(4-6; 2+4; 6+2) = \overline{PQ}(-2; 6; 8)$$

$$|\overline{MN}| = \sqrt{2^2 + (-7)^2 + (-7)^2} = \sqrt{102}$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 8^2} = \sqrt{4+36+64} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

$$\overline{MN} \cdot \overline{PQ} = 2 \cdot (-2) + (-7) \cdot 6 + (-7) \cdot 8 = -102$$

$$\cos \varphi = \frac{\overline{MN} \cdot \overline{PQ}}{|\overline{MN}| \cdot |\overline{PQ}|} = -\frac{102}{\sqrt{102} \cdot 2\sqrt{26}} = -\frac{\sqrt{102}}{2\sqrt{26}} = -\frac{\sqrt{51}}{2\sqrt{13}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{51}{52}}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{51}{52}}\right), \hat{\varphi} = \arccos\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{51}{52}}\right).$$

Замечание: При вычислении угла между векторами

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

и между прямыми

$$\cos \hat{\varphi} = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|},$$

угол между векторами φ : $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$, между прямыми $0 \leq \hat{\varphi} \leq 90^\circ$. У нас в ответе $\hat{\varphi}$.

Ответ: $30^\circ, 60^\circ, 60^\circ, 45^\circ, \arccos\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{51}{52}}\right)$.

Задача 31. Задан вектор $\vec{b}(-1; 0; -1)$. Вычислите углы между вектором $\vec{b}$ и векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Решение:

1) $\vec{i}(1; 0; 0)$, $\vec{b}(-1; 0; -1)$.

$$|\vec{i}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

$$\vec{i} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = -1$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{i} \cdot \vec{b}}{|\vec{i}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-1}{1 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Угол между вектором $\vec{b}$ и осью Ox равен 135° .

2) $\vec{j}(0; 1; 0)$, $\vec{b}(-1; 0; -1)$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{j} \cdot \vec{b}}{|\vec{j}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1)}{1 \cdot \sqrt{2}} = 0$$

$$\varphi = 90^\circ$$

Вектор $\vec{b}$ перпендикулярен оси Oy .

3) $\vec{k}(0; 0; 1)$, $\vec{b}(-1; 0; -1)$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{i} \cdot \vec{b}}{|\vec{i}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{0 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi = 45^\circ$$

Вектор $\vec{b}$ составляет угол 45° с осью Oz .

Ответ: $135^\circ, 90^\circ, 45^\circ$.

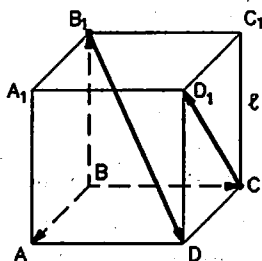
Задача 32. Задан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что векторы $\vec{B_1 D}$ и $\vec{C_1 D_1}$ перпендикулярны.

Решение:

1) В качестве векторов базиса выберем

$$\vec{BB_1} = \vec{a}(0; 0; 1), \vec{BC} = \vec{b}(0; 1; 0),$$

$$\vec{BA} = \vec{c}(1; 0; 0)$$



$$2) \quad \overline{B_1D} = \overline{B_1B} + \overline{BA} + \overline{AD} = -\overline{a} + \overline{c} + \overline{b}$$

$$\overline{CD_1} = \overline{CD} + \overline{DD_1} = \overline{c} + \overline{a}$$

$$\overline{B_1D} \cdot \overline{CD_1} = (-\overline{a} + \overline{c} + \overline{b}) \cdot (\overline{c} + \overline{a}) = \overline{b} \cdot \overline{c} + \overline{c} \cdot \overline{c} - \overline{a} \cdot \overline{c} - \overline{a} \cdot \overline{a} + \\ + \overline{c} \cdot \overline{a} + \overline{b} \cdot \overline{a} = \overline{b} \cdot \overline{c} - \overline{a} \cdot \overline{a} = 0$$

Получили, что прямая, содержащая диагональ куба, и прямая, содержащая диагональ грани, если они скрещиваются, перпендикулярны.

Задача 33. Базис образуют вектора $\overline{m}$, $\overline{n}$ и $\overline{p}$. $\overline{m}$ и $\overline{n}$, $\overline{n}$ и $\overline{p}$, $\overline{m}$ и $\overline{p}$ образуют углы 60° , и $|\overline{m}| = |\overline{n}| = |\overline{p}| = 1$. Найдите угол α между векторами:

$$1) \overline{m} \text{ и } \overline{n} + \overline{p}; 2) \overline{m} \text{ и } \overline{n} - \overline{p}; 3) (\overline{n} + \overline{p}) \text{ и } (\overline{n} - \overline{p}).$$

Решение:

1) Рассмотрим векторы $\overline{m}$ и $\overline{n} + \overline{p}$.

$$\cos \alpha = \frac{\overline{m} \cdot (\overline{n} + \overline{p})}{|\overline{m}| \cdot |\overline{n} + \overline{p}|}$$

$$|\overline{m}| = 1,$$

$$|\overline{n} + \overline{p}|^2 = (\overline{n} + \overline{p}) \cdot (\overline{n} + \overline{p}) = \overline{n} \cdot \overline{n} + 2 \cdot \overline{n} \cdot \overline{p} + \overline{p} \cdot \overline{p} = \\ = 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ + 1 = 3,$$

$$|\overline{n} + \overline{p}| = \sqrt{3}.$$

Вычислим, наконец, скалярное произведение:

$$\overline{m} \cdot (\overline{n} + \overline{p}) = \overline{m} \cdot \overline{n} + \overline{m} \cdot \overline{p} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ + 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{3}}$$

$$\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2) $\overline{m}$ и $(\overline{n} - \overline{p})$

Начнем с длин векторов

$$|\overline{m}| = 1,$$

$$|\overline{n} - \overline{p}|^2 = (\overline{n} - \overline{p}) \cdot (\overline{n} - \overline{p}) = \overline{n} \cdot \overline{n} - 2 \cdot \overline{n} \cdot \overline{p} + \overline{p} \cdot \overline{p} = \\ = 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ + 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{m} \cdot (\vec{n} - \vec{p})}{1 \cdot 1} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n} - \vec{m} \cdot \vec{p}}{1} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ -$$

$$- 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 0$$

$$\alpha = 90^\circ$$

$$3) (\vec{n} + \vec{p}) \text{ и } (\vec{n} - \vec{p})$$

$$|\vec{n} + \vec{p}| = \sqrt{3}, |\vec{n} - \vec{p}| = 1$$

$$(\vec{n} + \vec{p}) \cdot (\vec{n} - \vec{p}) = \vec{n} \cdot \vec{n} - \vec{p} \cdot \vec{p} = 0$$

$$\text{Получаем } (\vec{n} + \vec{p}) \perp (\vec{n} - \vec{p})$$

$$\alpha = 90^\circ$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}, 90^\circ, 90^\circ.$$

Задача 34. Задана сумма трех векторов $\vec{m} = \vec{n} + \vec{p} + \vec{q}$. Докажите, что $|\vec{m}| \leq |\vec{n}| + |\vec{p}| + |\vec{q}|$.

Решение:

1) Рассмотрим сумму трех векторов

$$\vec{m} = \vec{n} + \vec{p} + \vec{q}.$$

2) Обозначим $\vec{n} + \vec{p} = \vec{a}$.

3) Получаем $\vec{m} = \vec{a} + \vec{q}$.

4) Применяем правило треугольника при сложении двух векторов — и неравенство треугольника.

$$|\vec{m}| \leq |\vec{a}| + |\vec{q}|$$

Равенство, когда векторы коллинеарны.

5) Итак, получаем

$$|\vec{m}| \leq |\vec{n} + \vec{p}| + |\vec{q}| \leq |\vec{n}| + |\vec{p}| + |\vec{q}|$$

Задача 105. Найдите площадь треугольника MNP , его периметр и углы треугольника, если заданы координаты его вершин $M(0; 0; 6)$, $N(2; 0; 4)$, $P(-2; 2; 6)$.

Решение:

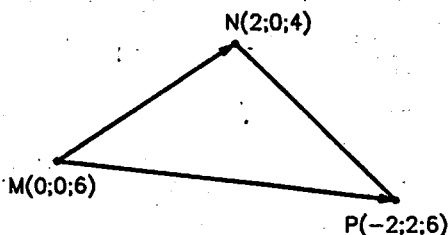
$$1) \overrightarrow{MN}(2 - 0; 0 - 0; 4 - 6) = \overrightarrow{MN}(2; 0; -2)$$

$$\overrightarrow{MP}(-2 - 0; 2 - 0; 6 - 6) = \overrightarrow{MP}(-2; 2; 0)$$

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 = -4$$



$$\cos M = \frac{\overline{MN} \cdot \overline{MP}}{|\overline{MN}| \cdot |\overline{MP}|} = \frac{-4}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\angle M = 120^\circ$$

$$2) S_{MNP} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MN} \cdot \overline{MP} \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

$$3) \overline{NP} = -2 - 2; 2 - 0; 6 - 4 = \overline{NP}(-4; 2 - 2)$$

$$|\overline{NP}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{6}$$

Периметр равен

$$|\overline{NP}| + |\overline{MN}| + |\overline{MP}| = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{6} + 4\sqrt{2}.$$

4) Найдем угол $\angle N$

$$\cos N = \frac{\overline{NM} \cdot \overline{NP}}{|\overline{NM}| \cdot |\overline{NP}|} = \frac{-4 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{12}{8\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\angle N = 30^\circ$$

$$5) \angle P = 180^\circ - \angle M - \angle N = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

Это согласуется с тем, что $\triangle MNP$ равнобедренный с основанием NP и $\angle N = \angle P = 30^\circ$.

Ответ: углы $\triangle MNP$: 30° , 30° , 120° ; периметр равен $2\sqrt{6} + 4\sqrt{2}$; площадь равна $2\sqrt{3}$.

Задача 36. Коллинеарны ли векторы: $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{b} = -9\vec{i} + 3\vec{j} - 18\vec{k}$?

Решение:

Координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны:

$$\frac{-9}{3} = \frac{3}{-1} = \frac{-18}{6} = -3,$$

что означает $\vec{b} = -3\vec{a}$, или $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, следовательно, вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Задача 37. Заданы векторы $\vec{m}(1; 10; 6)$, $\vec{n}(1; 1; 1)$, $\vec{p}(3; 3; 12)$. Коллинеарны ли эти векторы?

Решение:

- 1) Векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$, $\vec{m}$ и $\vec{p}$ не коллинеарны, т.к. координаты векторов не пропорциональны.
- 2) Предположим, что вектор $\vec{p}$ можно разложить по базисным векторам $\vec{m}$ и $\vec{n}$:

$$\vec{p} = x\vec{m} + y\vec{n}$$

- 3) Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x \cdot 0 + y \cdot 1 = 3 \\ x + y \cdot 1 = 3 \\ x \cdot 6 + y \cdot 1 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 0 \\ 0 \cdot 6 + 3 \cdot 1 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

т.к. последнее равенство неверно.

Таким образом, векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ не компланарны.

Задача 38. Даны четыре точки: $M(6; 1; 3)$, $N(-1; 9; 4)$, $P(13; -13; -4)$, $Q(2; 3; 1)$. Лежат ли эти точки в одной плоскости?

Решение:

- 1) Обсуждение. Можно составить уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$ и далее подставить координаты точек в это уравнение. Мы рассмотрим «векторное» решение.

- 2) $\vec{MN}(-1 - 6; 9 - 1; 4 - 3) = \vec{MN}(-7; 8; 1)$
 $\vec{NP}(13 + 1; -13 - 9; -4 - 4) = \vec{NP}(14; -22; -8)$
 $\vec{PQ}(-11; 16; 5)$

Если точки M , N , P , Q лежат в одной плоскости, то векторы $\vec{MN}$, $\vec{NP}$, $\vec{PQ}$ компланарны. Если предположить, что векторы компланарны, примем за векторы базиса два неколлинеарных вектора

$$\vec{MN}(-7; 8; 1) = \vec{a}$$

$$\vec{NP}(14; -22; -8) = \vec{b}$$

и пусть третий вектор $\vec{PQ}$ можно разложить по векторам базиса

$$\vec{PQ} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Забегая вперед скажем, что если существуют такие числа x и y , то векторы компланарны, если не существует чисел x и y , то соответственно не компланарны.

Для нахождения x и y получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -7x + 14y = -11 \\ 8x - 22y = 16 \\ x - 8y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x + 14y = -11 \\ 8x - 22y = 16 \\ x = 5 + 8y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = -\frac{4}{7} \end{cases}$$

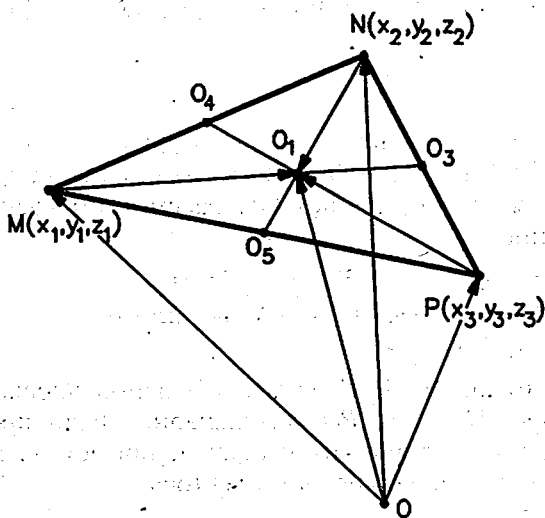
Векторы компланарны. Получили

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{7}\overrightarrow{MN} - \frac{4}{7}\overrightarrow{NP} \text{ или в виде } 7\overrightarrow{PQ} - 3\overrightarrow{MN} + 4\overrightarrow{NP} = 0$$

Говорят также, что векторы $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{NP}$ линейно зависимы. Точки M , N , P , Q лежат в одной плоскости.

Задача 39. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника MNP , если заданы вершины треугольника $M(x_1; y_1; z_1)$, $N(x_2; y_2; z_2)$, $P(x_3; y_3; z_3)$.

Решение:



$$\begin{aligned} 1) \quad \overrightarrow{OO_1} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MO_1} \\ \overrightarrow{OO_1} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PO_1} \\ \overrightarrow{OO_1} &= \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NO_1} \end{aligned}$$

по правилу треугольника.

- 2) Сложим три равенства, получим
 $3\overline{OO_1} = \overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP} + (\overline{MO_1} + \overline{PO_1} + \overline{NO_1})$

- 3) Выражение в скобках равно нулю, т.к.

$$\overline{MO_1} = \frac{2}{3}\overline{MO_3} = \frac{1}{3}(\overline{MN} + \overline{MP})$$

$$\overline{NO_1} = \frac{2}{3}\overline{NO_3} = \frac{1}{3}(\overline{NM} + \overline{NP})$$

$$\overline{PO_1} = \frac{2}{3}\overline{PO_3} = \frac{1}{3}(\overline{PM} + \overline{PN})$$

Известно, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины треугольника. Применили при сложении векторов правило параллелограмма.

- 4) $\overline{OO_1} = \frac{1}{3}(\overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP})$,

где $\overline{OO_1}(x; y; z)$ и в координатном виде

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Замечание:

Другой подход заключается в использовании формулы:

$$\overline{OO_1} = \frac{\overline{OM} + \lambda \overline{OO_3}}{1 + \lambda}, \lambda = 2,$$

где точка O_3 — середина отрезка NP ,

$$O_3 \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}, \frac{z_2 + z_3}{2} \right).$$

$$\text{Тогда } \lambda \overline{OO_3} = 2\overline{OO_3} = (\overline{x_2 + x_3}, \overline{y_2 + y_3}, \overline{z_2 + z_3})$$

подставим в формулу для $\overline{OO_1}$, получаем

$$\overline{OO_1} \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right).$$

Задача 40. Задано, что $\overline{m} = \lambda \overline{n}, \overline{p} = \mu \overline{n}$. Докажите, что:

1) $\overline{m} + \overline{p}$ и $\overline{n}$,

2) $\overline{m} - \overline{p}$ и $\overline{n}$,

3) $2\overline{m} - \overline{p}$ и $\overline{n}$,

4) $4\overline{m} + 7\overline{p}$ и $\overline{n}$ коллинеарны.

Решение:

$$1) \quad \overline{m} + \overline{p} = \lambda \overline{n} + \mu \overline{n} = (\lambda + \mu) \overline{n} = \hat{\lambda} \overline{n}, \text{ где } \hat{\lambda} = \lambda + \mu.$$

Коллинеарность векторов доказана.

$$2) \quad \overline{m} - \overline{p} = \lambda \overline{n} - \mu \overline{n} = (\lambda - \mu) \overline{n} = \hat{\mu} \overline{n}, \text{ где } \hat{\mu} = \lambda - \mu.$$

Коллинеарность векторов доказана

$$3) \quad 2\overline{m} - \overline{p} = 2\lambda \overline{n} - \mu \overline{n} = (2\lambda - \mu) \overline{n} = \delta \overline{n}, \text{ где } \delta = 2\lambda - \mu.$$

Коллинеарность векторов доказана.

$$4) \quad -4\overline{m} + 7\overline{p} = -4\lambda \overline{n} + 7\mu \overline{n} = (7\mu - 4\lambda) \overline{n} = \delta \overline{n},$$

Коллинеарность векторов доказана.

Задача 41. Найдите расстояние от точки $B(5; -1; 2)$ до:

- 1) осей координат,
- 2) координатных плоскостей.

Решение:

$$1) \text{ Ось абсцисс и вектор } \overline{i}(1; 0; 0).$$

Радиус-вектор $OB(5; -1; 2)$.

Вычислим скалярное произведение:

$$OB \cdot \overline{i} = 1 \cdot 5 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = 5 -$$

это проекция вектора OB на ось абсцисс.

$$OC = 5$$

Искомое расстояние

$$BC = \sqrt{|OB|^2 - OC^2}, \text{ где}$$

$$|OB| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{30}.$$

Окончательно получаем

$$BC = \sqrt{30 - 25} = \sqrt{5}$$

Расстояние от точки B до оси абсцисс равно $\sqrt{5}$.

$$2) \text{ Ось ординат и вектор } \overline{j}(0; 1; 0),$$

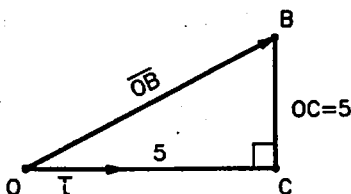
$$OB \cdot \overline{j} = -1, \rho = \sqrt{30 - 1} = \sqrt{29}.$$

Расстояние от точки B до оси ординат равно $\sqrt{29}$.

$$3) \text{ Ось аппликат и вектор } \overline{k}(0; 0; 1).$$

$$OB \cdot \overline{k} = 2, \rho = \sqrt{30 - 4} = \sqrt{26}.$$

Расстояние от точки B до оси аппликат равно $\rho = \sqrt{26}$.



4) Расстояние до координатных плоскостей:

- до плоскости xOy $\rho = 2$,
- до плоскости xOz $\rho = 1$,
- до плоскости yOz $\rho = 5$.

Задача 42. Заданы два вектора, при каком значении p векторы перпендикулярны:

- 1) $\vec{m}(1; 0; 4)$, $\vec{n}(2; 4; p)$,
- 2) $\vec{m}(-p; 2; -1)$, $\vec{n}(-p; p; -1)$,
- 3) $\vec{m}(p; -5; 4)$, $\vec{n}(p; p; 1)$,
- 4) $\vec{m}(7; p; 8)$, $\vec{n}(p; p; -1)$,
- 5) $\vec{m}(p; -1; 0)$, $\vec{n}(p; 4; 0)$?

Решение:

1) Вычислим скалярное произведение

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 4 \cdot p \text{ но } \vec{m} \cdot \vec{n} = 0$$

$$2 + 4p = 0 \Leftrightarrow p = -\frac{1}{2}.$$

Векторы перпендикулярны при $p = -\frac{1}{2}$.

2) $\vec{m} \cdot \vec{n} = p^2 + 2p + 1$ но $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$

$$p^2 + 2p + 1 = 0 \Leftrightarrow p = -1.$$

Векторы перпендикулярны при $p = -1$.

3) $\vec{m} \cdot \vec{n} = p^2 - 5p + 4$

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$$

$$p^2 - 5p + 4 = 0 \Leftrightarrow p_1 = 1, p_2 = 4$$

Векторы перпендикулярны при $p = 1$ и $p = 4$.

4) $\vec{m} \cdot \vec{n} = 7 \cdot p + p \cdot p + 8 \cdot (-1)$

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$$

$$p^2 + 7p - 8 = 0 \Leftrightarrow p_1 = -8, p_2 = 1$$

Векторы перпендикулярны при $p = -8$ и $p = 1$.

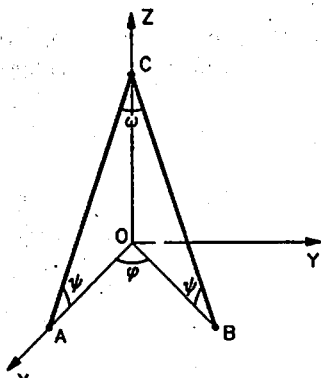
5) $\vec{m} \cdot \vec{n} = p \cdot p - 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0$

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$$

$$p^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow p_1 = -2, p_2 = 2$$

Векторы перпендикулярны при $p = -2$ и $p = 2$.

Задача 43. Проекции двух наклонных равны, найдите угол между проекциями, если наклонные проведены из одной точки, угол между наклонной и плоскостью равен ψ и, наконец, угол между наклонными равен ω .



Решение:

- 1) Перпендикуляр и две наклонные. Введем систему координат таким образом: OC — перпендикуляр, $C \in Oz$, AC — наклонная, $A \in Ox$, $\angle AOB = \varphi$ — угол между проекциями наклонных.
 $\triangle AOC = \triangle BOC$ — прямоугольные по двум катетам.
 Отсюда $AC = BC$ наклонные равны,
 $\angle CAO = \angle CBO = \psi$.

- 3) Пусть $OC = a$, $AO = \frac{a}{\operatorname{tg} \psi}$, $A\left(\frac{a}{\operatorname{tg} \psi}; 0; 0\right)$, $C(0; 0; a)$ и вектор $\overrightarrow{CA}\left(\frac{a}{\operatorname{tg} \psi}; 0; -a\right)$.

- 4) $OB = OA = \frac{a}{\operatorname{tg} \psi}$, $B\left(\frac{a}{\operatorname{tg} \psi} \cdot \cos \varphi; \frac{a}{\operatorname{tg} \psi} \cdot \sin \varphi; 0\right)$ и вектор $\overrightarrow{CB}\left(\frac{a}{\operatorname{tg} \psi} \cdot \cos \varphi; \frac{a}{\operatorname{tg} \psi} \cdot \sin \varphi; -a\right)$.

- 5) Вычислим скалярное произведение

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \psi \cdot \cos \varphi + a^2,$$

с другой стороны

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos \omega = (a^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \psi + a^2) \cdot \cos \omega$$

- 6) Осталось приравнять

$$a^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \psi \cdot \cos \varphi + a^2 = (a^2 \cdot \operatorname{ctg}^2 \psi + a^2) \cdot \cos \omega$$

$$\operatorname{ctg}^2 \psi \cdot \cos \varphi + 1 = \frac{\cos \omega}{\sin^2 \psi} \Rightarrow \operatorname{ctg}^2 \psi \cdot \cos \varphi = \frac{\cos \omega - \sin^2 \psi}{\sin^2 \psi}$$

$$\cos \varphi = \frac{\cos \omega - \sin^2 \psi}{\cos^2 \psi}.$$

Ответ: $\cos \varphi = \frac{\cos \omega - \sin^2 \psi}{\cos^2 \psi}.$

Задача 44. Докажите, что векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ коллинеарны, если коллинеарны векторы $\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{m} - \vec{n}$.

Решение:

1) $\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{m} - \vec{n}$ коллинеарны, значит

$$\vec{m} + \vec{n} = \lambda(\vec{m} - \vec{n}), \text{ или } \vec{m} + \vec{n} = \lambda\vec{m} - \lambda\vec{n}$$

$$\vec{m}(1 - \lambda) = -\vec{n}(1 + \lambda)$$

$$\vec{m} = \frac{1 + \lambda}{\lambda - 1}\vec{n}, \text{ или } \vec{m} = \hat{\lambda}\vec{n}, \text{ где } \hat{\lambda} = \frac{1 + \lambda}{\lambda - 1}.$$

Коллинеарность доказана.

2) $\lambda \neq 1$, т.к. в противном случае

$$\vec{m} + \vec{n} = 1 \cdot (\vec{m} - \vec{n})$$

$$2\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \vec{n} = 0.$$

Известно, что два вектора коллинеарны, если $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ и $a \neq 0$.

3) $\lambda \neq -1$, т.к. в противном случае

$$\vec{m} + \vec{n} = -1 \cdot (\vec{m} - \vec{n})$$

$$2\vec{m} = 0$$

$\vec{m} = 0$ — противоречит определению коллинеарности $\vec{m} \neq 0$.

Задача 45. Преобразуйте с помощью «правила многоугольника» сумму векторов:

1) $\overline{RS} + \overline{DO} + \overline{SQ} + \overline{QR} + \overline{AD} + \overline{OK} + \overline{KD},$

2) $\overline{AC} + \overline{EF} + \overline{CD} + \overline{FG} + \overline{GH} + \overline{DA},$

3) $\overline{MN} + \overline{NM} + \overline{AE} + \overline{FB} + \overline{EA} + \overline{BF} + \overline{MF},$

4) $\overline{EL} + \overline{DA} + \overline{HI} + \overline{LK} + \overline{IH} + \overline{KD},$

5) $\overline{AM} - \overline{MD} + \overline{BC} - \overline{FM} + \overline{FB} + \overline{CA}.$

Решение:

Правило многоугольника применяется на цепочке векторов:

$$\overline{H_1H_2} + \overline{H_2H_3} + \overline{H_3H_4} + \dots + \overline{H_kH_{k+1}} = \overline{H_1H_{k+1}},$$

т.е. результирующий вектор соединяет начало и конец построения.

$$1) \quad \overline{RS} + \overline{DO} + \overline{SQ} + \overline{QR} + \overline{AD} + \overline{OK} + \overline{KD} = (\overline{RS} + \overline{SQ} + \overline{QR}) + \\ + (\overline{DO} + \overline{OK} + \overline{KD}) + \overline{AD} = \overline{O} + \overline{O} + \overline{AD} = \overline{AD}$$

Стремимся получить цепочку векторов.

$$2) \quad \overline{AC} + \overline{EF} + \overline{CD} + \overline{FG} + \overline{GH} + \overline{DA} = (\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DA}) + \\ + (\overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GH}) = \overline{O} + \overline{EH} = \overline{EH}$$

Сумма конечного числа векторов не зависит от порядка, в котором они складываются.

$$3) \quad \overline{MN} + \overline{NM} + \overline{AE} + \overline{FB} + \overline{EA} + \overline{BF} + \overline{MF} = (\overline{MN} + \overline{NM}) + \\ + (\overline{AE} + \overline{EA}) + (\overline{FB} + \overline{BF}) + \overline{MF} = \overline{O} + \overline{O} + \overline{O} + \overline{MF} = \overline{MF}$$

$$4) \quad \overline{EL} + \overline{DA} + \overline{HI} + \overline{LK} + \overline{IH} + \overline{KD} = (\overline{EL} + \overline{LK} + \overline{KD} + \overline{DA}) + \\ + (\overline{HI} + \overline{IH}) = \overline{EA} + \overline{O} = \overline{EA}$$

$$5) \quad \overline{AM} + \overline{MD} + \overline{BC} + \overline{FM} + \overline{FB} + \overline{CA} = (\overline{AM} + \overline{MF} + \overline{FB} + \overline{BC} + \\ + \overline{CA}) + \overline{DM} = \overline{O} + \overline{DM} = \overline{DM}$$

При сложении векторов использовали переместительный и сочетательный законы.

Задача 46. Найдите точку E , чтобы $MN \perp PE$, если $M(3; 2; 1)$, $N(0; -2; 1)$, $P(1; 1; 1)$, а точка E лежит на оси Oy .

Решение:

$$1) \quad \overline{MN}(0 - 3; -2 - 2; 1 - 1) = \overline{MN}(-3; -4; 0)$$

$$2) \quad \overline{E}(0; y; 0), \overline{PE}(-1; y - 1; -1)$$

3) $\overline{MN} \cdot \overline{PE} = 0$ скалярное произведение равно нулю — условие перпендикулярности векторов.

$$-3 \cdot (-1) + (-4) \cdot (y - 1) + 0 \cdot (-1) = 0$$

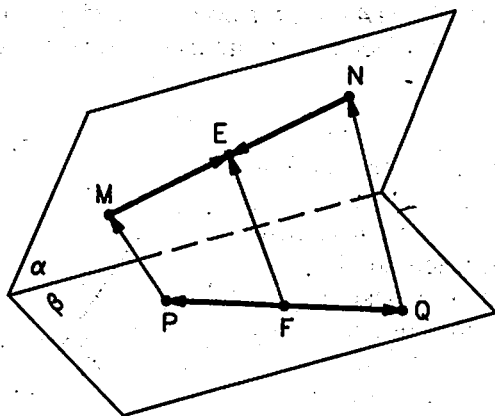
$$3 + 4 - 4y = 0$$

$$y = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$$

Ответ: $E\left(0; 1\frac{3}{4}; 0\right)$.

Задача 47. Даны четыре точки M, N, P, Q , не лежащие в одной плоскости. Докажите, что $\overline{MP} + \overline{NQ} > 2\overline{EF}$, где E и F — середины отрезков MN и PQ .

Решение:



- 1) Задано $M, N \in \alpha; P, Q \in \beta$.
- 2) $FENQ$ — пространственный четырехугольник. Рассмотрим сумму трех векторов по правилу многоугольника:

$$\overrightarrow{FQ} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NE} = \overrightarrow{FE},$$

Рассмотрим четырехугольник $FPME$

$$\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{FE}$$

Сложим левые и правые части.

- 3). $\overrightarrow{FQ} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{PF} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{FE}$
 $(\overrightarrow{FQ} + \overrightarrow{PF}) + (\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{ME}) + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{FE}$

Векторы $\overrightarrow{FQ}$ и $\overrightarrow{PF}$, $\overrightarrow{NE}$ и $\overrightarrow{ME}$ являются противоположными векторами, их сумма равна нулевому вектору:

$$\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{FE}$$

- 4) $\overrightarrow{QN}$ и $\overrightarrow{PM}$ неколлинеарные векторы, в противном случае точки M, N, P, Q оказались бы в одной плоскости, что противоречит условию. Известно, что при сложении двух неколлинеарных векторов, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ например, по правилу треугольника

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \Rightarrow |\vec{a}| + |\vec{b}| > |\vec{c}|$$

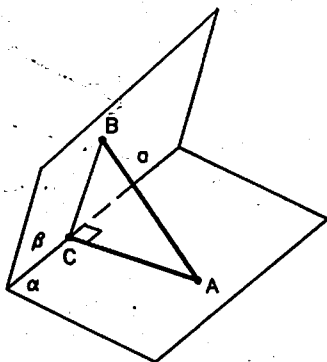
сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны. У нас

$$|\overrightarrow{QN}| + |\overrightarrow{PM}| > 2|\overrightarrow{FE}|.$$

Задача 48. Заданы две пересекающиеся плоскости α и β , причем $\alpha \cap \beta$. Точка $A \in \alpha$ отстоит от a на расстояние в n раз больше, чем от плоскости β . Найдите угол между плоскостями α и β .

Решение:

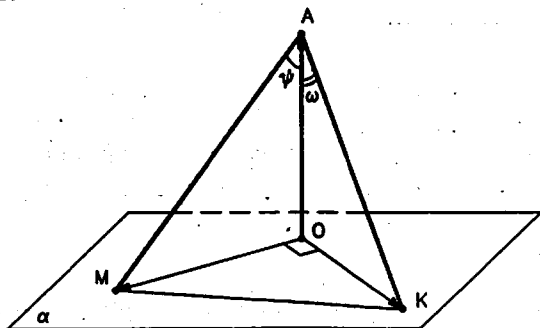
- 1) Дополнительное построение $AB \perp \beta$, $AC \perp a$.
- 2) $\triangle ABC$ — прямоугольный по определению перпендикуляра к плоскости.
- 3) $BC \perp a$ по теореме о трех перпендикулярах.
- 4) $BC \perp a$, $AC \perp a \Rightarrow \angle ACB$ — угол между плоскостями α и β . $\angle ACB = \varphi$.
- 5) $\sin \varphi = \frac{1}{n}$.



Ответ: $\arcsin \frac{1}{n}$.

Задача 49. Точка $A \notin \alpha$. Из этой точки проведены перпендикуляр к плоскости α и две наклонные разной длины, соответственно образующие с перпендикуляром углы ψ и ω . Известно, что проекции наклонных перпендикулярны. Найдите угол между наклонными.

Решение:



- 1) Искомый угол $\angle MAK = \gamma$.

- 2) Введем систему координат, точка O — начало, базисные векторы OA , OK , OM попарно перпендикулярны по условию.
- 3) Пусть $OA = a$, точка A имеет координаты $A(0; 0; 0)$, а точка M имеет координаты $M(a \operatorname{tg} \psi; 0; 0)$, $K(0; a \operatorname{tg} \omega; 0)$.
- 4) Векторы $AM(a \operatorname{tg} \psi; 0; -a)$, $AK(0; a \operatorname{tg} \omega; -a)$.
- 5) Скалярное произведение

$$\overline{AM} \cdot \overline{AK} = a \operatorname{tg} \psi \cdot 0 + (-a) \cdot (-a) = a^2$$

$$\overline{AM} \cdot \overline{AK} = |\overline{AM}| \cdot |\overline{AK}| \cdot \cos \gamma$$

$$a^2 = \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \omega + a^2} \cdot \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \psi + a^2} \cdot \cos \gamma$$

$$1 = \frac{1}{\cos \omega} \cdot \frac{1}{\cos \psi} \cdot \cos \gamma$$

$$\cos \gamma = \cos \omega \cdot \cos \psi.$$

Ответ: $\cos \gamma = \cos \omega \cdot \cos \psi$.

Задача 50. Задано, что векторы $\overline{m} + p_1 \overline{n}$ и $\overline{m} + p_2 \overline{n}$ не коллинеарны. Докажите, что $\overline{m}$ и $\overline{n}$ не коллинеарны, если $p_1 \neq p_2$, $p_1, p_2 \in R$.

Решение:

- 1) От противного. Пусть $\overline{m}$ и $\overline{n}$ коллинеарны $\overline{m} = \lambda \overline{n}$

- 2) $\overline{m} + p_1 \overline{n} = \lambda \overline{n} + p_1 \overline{n} = \overline{n}(\lambda + p_1)$

$$\overline{m} + p_2 \overline{n} = \lambda \overline{n} + p_2 \overline{n} = \overline{n}(\lambda + p_2)$$

$$\overline{m} + p_2 \overline{n} = \frac{\lambda + p_2}{\lambda + p_1} \cdot (\overline{m} + p_1 \overline{n}), \text{ или}$$

$$\overline{m} + p_2 \overline{n} = \hat{\lambda} \cdot (\overline{m} + p_1 \overline{n}), \text{ где}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\lambda + p_2}{\lambda + p_1}.$$

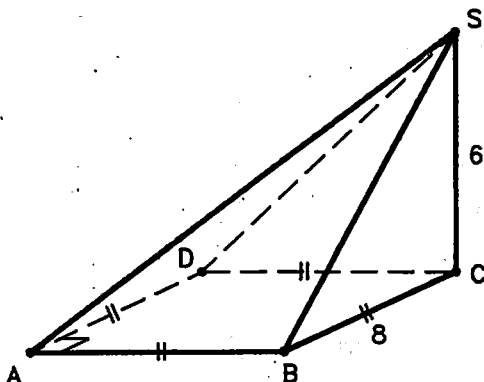
Пришли к противоречию с условием, следовательно, $\overline{m}$ и $\overline{n}$ не коллинеарны.

- 3) $\lambda \neq -p_1$ и $\lambda \neq -p_2$, так как иначе или $\overline{m} + p_1 \overline{n}$, или $\overline{m} + p_2 \overline{n}$ равны 0, и противоречит условию неколлинеарности.

VI. Многогранники

Задача 1. Найдите полную поверхность четырехгранной пирамиды, если в основании пирамиды квадрат со стороной 8 м. Высота пирамиды проходит через вершину квадрата и равна 6 м.

Решение:



- 1) SC — высота пирамиды. $\triangle CDS = \triangle CBS$ — прямоугольные, равны по двум катетам.

$$S_{CDS} = S_{CBS} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ (м}^2\text{)}$$

- 2) $BS \perp AB$, $DS \perp AD$ по теореме о трех перпендикулярах. $\triangle ABS = \triangle ADS$ — прямоугольные, равны по двум катетам.

$$BS = DS = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (м) по теореме Пифагора.}$$

$$S_{ABS} = S_{ADS} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 = 40 \text{ (м}^2\text{)}$$

- 3) $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$

$$S_{\text{бок}} = 24 + 24 + 40 + 40 = 128 \text{ (м}^2\text{)}$$

$$S_{\text{осн}} = 8 \cdot 8 = 64 \text{ (м}^2\text{)}$$

$$S_{\text{полн}} = 128 + 64 = 192 \text{ (м}^2\text{)}$$

Ответ: 192 м².

Задача 2. Найдите боковые ребра прямоугольного параллелепипеда, если стороны основания 3 м и 4 м, а диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 60°.

Решение:

- 1)
- $\triangle BDD_1$
- прямоугольный, т.к.

$$DD_1 \perp ABC$$

- 2)
- $\triangle ABD$
- прямоугольный, т.к.

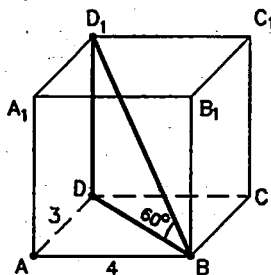
 $ABCD$ — прямоугольник

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 \text{ — по теореме Пифагора}$$

$$BD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (м)}$$

- 3)
- $DD_1 = BD \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$

$$DD_1 = 5 \cdot \sqrt{3} \text{ (м)}$$

Ответ: $5 \cdot \sqrt{3}$ м.

Задача 3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через ребра $A_1 D_1$ и BC проведено сечение, площадь которого равна $169\sqrt{2}$ м². Найдите: 1) ребро куба, 2) объем куба, 3) площадь поверхности куба, 4) диагональ куба.

Решение:

Пусть ребро куба $AA_1 = x$, тогда $A_1 B = x\sqrt{2}$

- 1)
- $S_{A_1 D_1 C B} = A_1 D_1 \cdot A_1 B = x \cdot x\sqrt{2} = x^2\sqrt{2}$

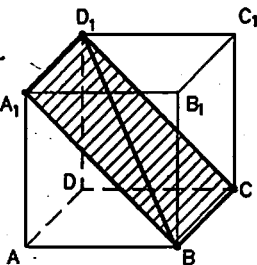
$$x^2\sqrt{2} = 169\sqrt{2}$$

$$x = 13 \text{ (м)}$$

- 2)
- $V = AA_1^3 = 13^3 = 2197 \text{ (м}^3\text{)}$

- 3)
- $S = 6 \cdot S_{AA_1 B_1 B} = 6 \cdot 13^2 = 1014 \text{ (м}^2\text{)}$

- 4)
- $BD_1 = \sqrt{13^2 + 13^2 + 13^2} = 13\sqrt{3} \text{ (м)}$

Ответ: 13 м, 2197 м³, 1014 м², $13\sqrt{3}$ м.

Задача 4. Найдите боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды, если высота пирамиды равна 3 дм, а сторона основания $\sqrt{14}$ дм.

Решение:

- 1)
- $ABCD$
- квадрат,
- $AB = \sqrt{14}$

$$AO = BO = DO = CO = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \sqrt{7} \text{ (дм)}$$

2) $\triangle AOP$ — прямоугольный,

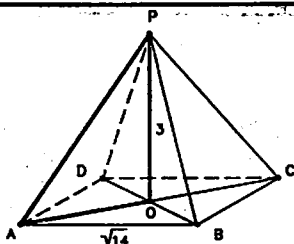
PO — высота

$AP^2 = AO^2 + OP^2$ по теореме Пифагора

$$AP^2 = (\sqrt{7})^2 + 3^2 = 16$$

$$AP = 4 \text{ (дм)}$$

Ответ: 4 дм.



Задача 5. Найдите стороны основания и высоту правильной четырехугольной пирамиды, если ее $S_{\text{бок}} = 369 \text{ дм}^2$, а $S_{\text{полн}} = 450 \text{ дм}^2$.

Решение:

- 1) $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$, где
 $S_{\text{осн}} = S_{ABCD}$, $ABCD$ — квадрат.
- 2) $S_{ABCD} = 450 - 369 = 81 \text{ (дм}^2\text{)}$
- 3) $AB = BC = CD = AD = \sqrt{81} = 9 \text{ (дм)}$
- 4) $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} \cdot h_a$, где

$P_{ABCD} = 4 \cdot 9 = 36 \text{ (дм)}$ — периметр квадрата

h_a — апофема

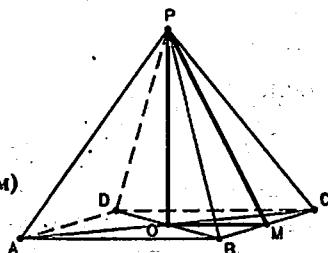
$$h_a = \frac{369}{18} = \frac{41}{2} \text{ (дм)}$$

- 5) $\triangle POM$, $OM = \frac{1}{2}AB = \frac{9}{2}$

$$PO^2 = PM^2 - OM^2 = \left(\frac{41}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{32}{2} \cdot \frac{50}{2} = 400$$

$PO = 20 \text{ (дм)}$ — высота пирамиды.

Ответ: сторона — 9 дм, высота — 20 дм.



Задача 6. Площадь основания n -угольной пирамиды 2 см^2 . Построено сечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию, площадь сечения $\frac{25}{128} \text{ см}^2$. Чему равно расстояние между плоскостью сечения и плоскостью основания, если высота пирамиды равна 1 см?

Решение:

1) На треугольной пирамиде покажем алгоритм решения задачи.

2) $A_1B_1C_1$ — сечение

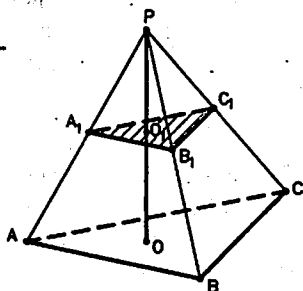
$$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{PO_1^2}{PO^2}$$

3) Пусть $PO_1 = x$

$$\frac{\frac{25}{128}}{2} = \frac{x^2}{1^2} \Rightarrow x = \frac{5}{16} \text{ (см)}$$

4) $OO_1 = PO - PO_1 = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16} \text{ (см)}$

Ответ: $\frac{11}{16}$ см.



Задача 7. Сколько диагоналей у треугольной призмы, четырехугольной, n -угольной?

Решение:

1) Диагональю призмы называется отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани.

2) У треугольной призмы ни одной, у четырехугольной — 4.

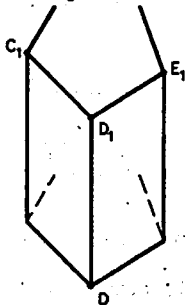
3) Для n -угольной сложнее.

Каждая вершина призмы — это вершина трехгранного угла. Обозначим основания призмы $ABCDEF...$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1...$. Отрезки, соединяющие вершины оснований BF_1, AB_1, CD_1 и т.д. В комбинаторике это число пар для элементов двух множеств, которое равно произведению количеств элементов каждого множества.

$$N = M \cdot K$$

Количество элементов первого множества — это количество вершин основания $ABCDEF...$, т.е. равно n , значит, $M = n$.

Количество элементов второго множества равно $n - 3$, т.е. исключаются три вершины.



Например, для вершины D исключаются точки C_1, D_1, E_1 , т.к. существующие отрезки $DC_1, DE_1, DD_1 \in$ боковым граням призмы. Итак, $k = n - 3$. Получаем $N = n(n - 3)$

Ответ: 0; 4; $n(n - 3)$.

Задача 8. В правильной четырехугольной призме диагональ образует угол α , $0^\circ < \alpha < 45^\circ$, с плоскостью боковой грани. Какой угол образует эта же диагональ, но уже с плоскостью основания?

Решение:

- 1) $ABCD$ — квадрат,
 $AB = BC = CD = AD = a$,
 $CC_1 = h$

- 2) $\triangle AD_1B$ — прямоугольный,
 $AB \perp AA_1D_1$

$$BD_1 = \frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

- 3) $\triangle BDD_1$ — прямоугольный,
 $DD_1 \perp ABC$

$$\sin x = \frac{h}{BD_1} = \frac{h \sin \alpha}{a}$$

- 4) $BD_1^2 = AB^2 + AD^2 + DD_1^2$ — диагональ прямоугольного параллелепипеда

$$BD_1^2 = a^2 + a^2 + h^2$$

- 5) $\frac{a^2}{\sin^2 \alpha} = 2a^2 + h^2$

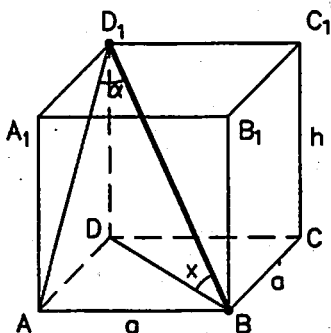
$$a^2 \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 2 \right) = h^2$$

$$\frac{h^2}{a^2} = \frac{1 - 2\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$\frac{h}{a} = \sqrt{\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}}$$

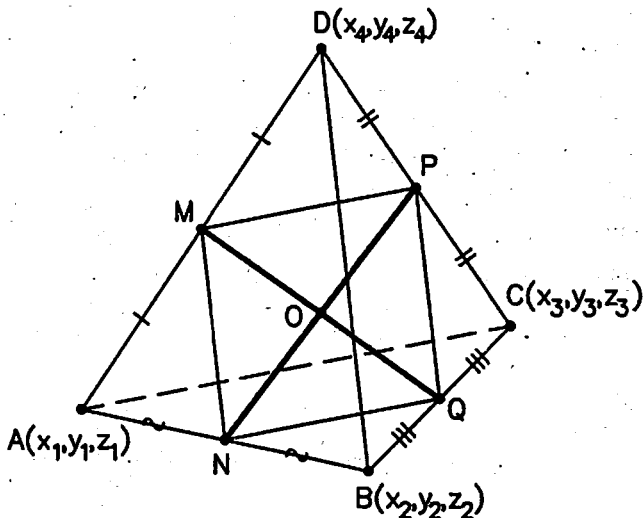
- 6) $\sin x = \sqrt{\cos 2\alpha}$.

Ответ: $\arcsin \sqrt{\cos 2\alpha}$.



Задача 9. Докажите, что в тетраэдре отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, пересекаются в одной точке с координатами $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$, $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$, $z = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}$, т.е. среднеарифметическое координат четырех вершин тетраэдра $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$.

Решение:



- 1) $MNPQ$ — параллелограмм, см. задачу о пространственном четырехугольнике.

$$MN \parallel BD, PQ \parallel BD \Rightarrow MN \parallel PQ$$

$$MP \parallel AC, NQ \parallel AC \Rightarrow MP \parallel NQ$$

- 2) MQ и NP — диагонали параллелограмма, они пересекаются и точкой пересечения делятся пополам в точке O .
3) Точка M — середина AD

$$x_M = \frac{x_1 + x_4}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_4}{2}, z_M = \frac{z_1 + z_4}{2}$$

- 4) Точка Q — середина отрезка BC

$$x_Q = \frac{x_2 + x_3}{2}, y_Q = \frac{y_2 + y_3}{2}, z_Q = \frac{z_2 + z_3}{2}$$

5) Точка O — середина отрезка MQ

$$x_0 = \frac{x_M + x_Q}{2}, y_0 = \frac{y_M + y_Q}{2}, z_0 = \frac{z_M + z_Q}{2}$$

6) Окончательно получаем:

$$x_0 = \frac{\frac{x_1 + x_4}{2} + \frac{x_2 + x_3}{2}}{2}, y_0 = \frac{\frac{y_1 + y_4}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2}}{2},$$

$$z_0 = \frac{\frac{z_1 + z_4}{2} + \frac{z_2 + z_3}{2}}{2}.$$

Задача 10. Две высоты заданы в правильной треугольной пирамиде, H — высота пирамиды и h — высота основания. Найдите величину двугранного угла при ребре основания пирамиды.

Решение:

- 1) $\triangle ABC$ — равносторонний
 AE — высота основания

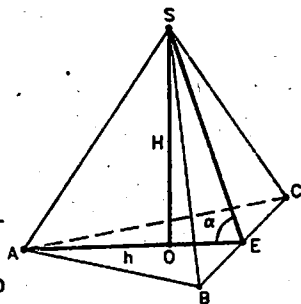
$$OE = \frac{1}{3} AE,$$

Высота является и медианой.

- 2) $SE \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах.
 3) α — линейный угол двугранного угла $ABCS$.

$$4) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{SO}{OE} = \frac{H}{\frac{1}{3}h} = \frac{3H}{h}.$$

Ответ: $\arctg \frac{3H}{h}$.



Задача 11. Стороны основания прямой треугольной призмы равны 30 м, 63 м, 51 м. Высота призмы 45 м. Вычислите площадь сечения, которое проходит через большую высоту основания и боковое ребро.

Решение:1) $\triangle ABC$

$$p = \frac{30 + 63 + 51}{2} = 72 - \text{полупериметр}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{72 \cdot 9 \cdot 42 \cdot 21} = 21 \cdot 12 \cdot 3 = 756 \text{ (м}^2\text{)}$$

$$2) \quad h = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 756}{30} = 50,4 \text{ (м), где } a = 30 \text{ м}$$

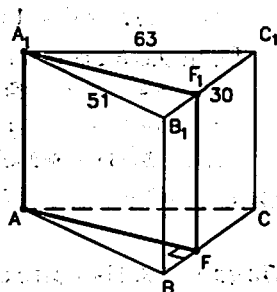
$$AF = 50,4 \text{ м.}$$

3) Сечение AA_1F_1F — прямоугольник, т.к. $AF \parallel A_1F_1$ — линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей параллельны.

$AA_1 \parallel F_1F$, т.к. $AA_1 \parallel BB_1 \Rightarrow AA_1F_1F$ — параллелограмм, но $AA_1 \perp A_1F_1$ и $AA_1 \perp AF$, т.к. $AA_1 \perp ABC$ и $AA_1 \perp A_1B_1C_1$, значит, AA_1F_1F — прямоугольник.

$$4) \quad S_{AA_1F_1F} = AF \cdot F_1F = 50,4 \cdot 45 = 2268 \text{ (м}^2\text{)}$$

Ответ: 2268 м^2 .



Задача 12. Проведено сечение треугольной призмы перпендикулярно боковому ребру длиной 13 см. Из трех сторон сечения известны две стороны — 6 см и 8 см прямоугольного треугольника. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Решение:

1) $S_{\text{бок}} = P_{\perp} \cdot l$, где $P_{\perp}$ — периметр перпендикулярного сечения, l — длина бокового ребра, $l = 13$ см.

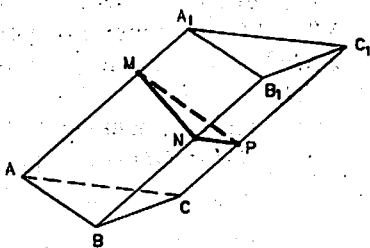
2) Перпендикулярное сечение $\triangle MNP$.

3) Известно, что $\triangle MNP$ — прямоугольный по условию.

4) Задача сводится к нахождению периметра $\triangle MNP$. Если гипотенуза равна 8 см, то второй катет равен

$$\sqrt{64 - 36} = 2\sqrt{7} \text{ (см) и}$$

$$P_{\perp} = 6 + 8 + 2\sqrt{7} = 14 + 2\sqrt{7} = 2\sqrt{7} \cdot (\sqrt{7} + 1)$$



$$S_{\text{бок}} = 2\sqrt{7} \cdot (\sqrt{7} + 1) \cdot 13 = 26\sqrt{7} \cdot (\sqrt{7} + 1) \text{ (см}^2\text{)}$$

Если же 6 см и 8 см — катеты, то гипотенуза равна

$$\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \text{ (см), а}$$

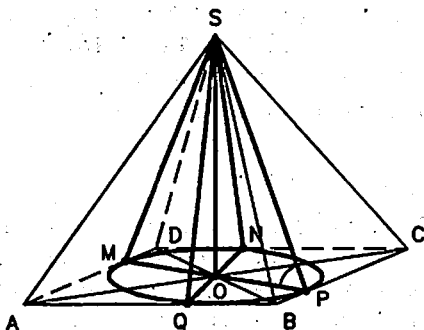
$$P_{\perp} = 6 + 8 + 10 = 24 \text{ (см)}$$

$$S_{\text{бок}} = 24 \cdot 13 = 312 \text{ (см}^2\text{)}$$

Ответ: 312 см^2 и $26\sqrt{7} \cdot (\sqrt{7} + 1) \text{ см}^2$.

Задача 13. Найдите объем пирамиды, у которой в основании лежит ромб с острым углом 45° и стороной, равной 6 см. Все боковые грани пирамиды наклонены под одним и тем же углом, также равным 45° .

Решение:



$$1) V_{ABCD S} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot h$$

$OP \perp BC, ON \perp DC, OM \perp AD, OQ \perp AB$

$SP \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах.

$\angle SPO$ — линейный угол двугранного угла $SBCA$.

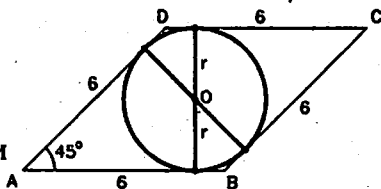
2) $\triangle SOP = \triangle SON = \triangle SOM = \triangle SOQ$ — прямоугольные треугольники, равные по катету и острому углу $\Rightarrow OP = ON = OM = OQ = r$ — радиус вписанной окружности.

$$3) S_{\text{осн}} = S_{ABCD} = 6 \cdot 6 \cdot \sin 45^\circ = 18\sqrt{2} \text{ (см}^2\text{)}$$

$$2r = \frac{S_{ABCD}}{AB} = \frac{18\sqrt{2}}{6} = 3\sqrt{2}$$

$$r = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (см)}$$

4) $\triangle SOP$ — прямоугольный и равнобедренный $\Rightarrow$



$$SO = OP = r$$

$$h = SO = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ (см)}$$

$$5) \quad V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 18\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 18 \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: 18 см³.

Задача 14. В тетраэдре основанием является треугольник со сторонами 5 м, 12 м, 13 м. Боковые грани тетраэдра составляют с основанием один и тот же угол 30° . Найдите объем пирамиды.

Решение:

- 1) Треугольник $\triangle ABC$ — прямоугольный, т.к.

$$5^2 + 12^2 = 13^2$$

- 2) O — центр вписанной окружности, т.к. двугранные углы при ребрах основания равны.

$$3) \quad S_{ABC} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ (м}^2\text{)}$$

- 4) Радиус вписанной окружности

$$r = \frac{2S}{P}, \quad P — \text{периметр}$$

$$r = \frac{2 \cdot 30}{5 + 12 + 13} = 2 \text{ (м)}$$

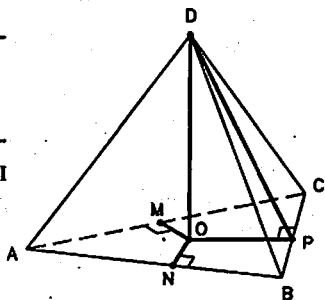
- 5) $\triangle DOP$ — прямоугольный, $\angle DPO = 30^\circ$

$$h = DO = r \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = 2\sqrt{3} \text{ (м)}$$

$$6) \quad V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн}} \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot 2\sqrt{3} = 20\sqrt{3} \text{ (м}^3\text{)}.$$

Ответ: $20\sqrt{3}$ м³.



Задача 15. Найдите площадь поверхности правильной пирамиды, в основании которой квадрат, боковое ребро 3 дм и наклонено к основанию под углом 45° .

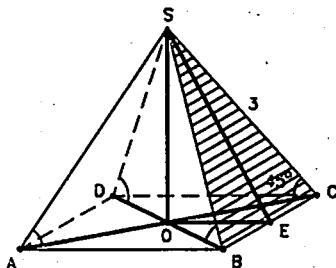
Решение:1) $\triangle SOC$

$$OC = SC \cdot \cos 45^\circ = 3 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AC = 2OC = 3\sqrt{2} \text{ (дм)}$$

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 9 \text{ (дм}^2\text{)}$$

3) Дополнительное построение $OE \perp BC$ $SE \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах.4) $\triangle SOE$ — прямоугольный

$$SO = OC = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$OE = \frac{AC}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$$

$$SE^2 = SO^2 + OE^2 = \frac{9}{2} + \frac{9}{4} = \frac{27}{4} \text{ по теореме Пифагора}$$

$$SE = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$5) S_{бок} = \frac{P}{2} \cdot SE = 2 \cdot AB \cdot SE = 2 \cdot 3 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{3} \text{ (дм}^2\text{)},$$

 P — периметр $ABCD$

$$6) S_{полн} = S_{осн} + S_{бок} = 9 + 9\sqrt{3} = 9 \cdot (1 + \sqrt{3}) \text{ (дм}^2\text{)}$$

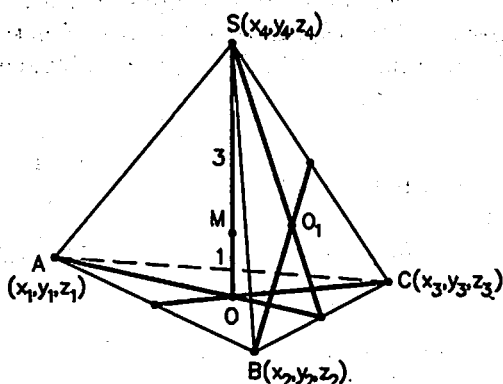
Ответ: $9 \cdot (1 + \sqrt{3}) \text{ дм}^2$.

Задача 16. Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке. Точка пересечения делит медиану тетраэдра в отношении 3:1, считая от вершины. Докажите, что точка пересечения медианы тетраэдра имеет координаты

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4},$$

$$z = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}.$$

Решение:



1) Медиана тетраэдра — это отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан на противоположной грани.

2) Точка $O\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$ — точка пересечения медиан $\triangle ABC$.

3) Аналогично на гранях SBC , SAC , SAB .

4) Разделим отрезок SO в отношении 3:1, считая от вершины S .

5) $SM = 3OM$

$$x_M = \frac{x_S + 3 \cdot x_O}{1 + 3} = \frac{x_4 + x_3 + x_2 + x_1}{4}$$

аналогично y_M , z_M .

6) Для грани SBC медианы треугольника пересекаются в точке O_1

$$x = \frac{x_2 + x_3 + x_4}{3}, y = \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3}, z = \frac{z_2 + z_3 + z_4}{3}$$

Разделив отрезок AO_1 в отношении 3:1, получаем точку $M_1 \in AO_1$. Точка M_1 имеет координаты:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}, z = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4} \Rightarrow$$

$$M = M_1.$$

Доказали, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке, т.к. для остальных граней выкладки дадут ту же точку.

Задача 17. В правильном тетраэдре $SABC$ точки K, L, M — суть середины ребер AS, CS, AB . Найдите угол между медианой CK треугольника $\triangle ACS$ и отрезком ML , соединяющим середины сторон.

Решение:

- 1) Базис из трех некопланарных векторов:

$$\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \overrightarrow{BS} = \vec{b}, \overrightarrow{BC} = \vec{c},$$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = l$ — ребра равны в правильном тетраэдре.

- 2) ML и CK представим в виде линейной комбинации векторов базиса.

$$\overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{a})$$

$$\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$$

- 3) Скалярное произведение $\overrightarrow{ML}$ и $\overrightarrow{CK}$

$$\overrightarrow{ML} \cdot \overrightarrow{CK} = |\overrightarrow{ML}| \cdot |\overrightarrow{CK}| \cdot \cos \varphi, \text{ и еще}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ML} \cdot \overrightarrow{CK} &= \frac{1}{4}\vec{ca} + \frac{1}{4}\vec{cb} - \frac{1}{2}\vec{a}^2 + \frac{1}{4}\vec{ba} + \frac{1}{4}\vec{b}^2 - \frac{1}{2}\vec{bc} - \frac{1}{4}\vec{a}^2 - \frac{1}{4}\vec{ab} + \\ &+ \frac{1}{2}\vec{ac} = \rho^2 \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{4}\rho^2 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{ML}^2 = \rho^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}\rho^2$$

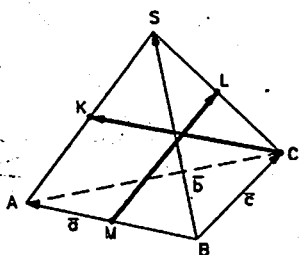
$$\overrightarrow{CK}^2 = \rho^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}\rho^2$$

$$|\overrightarrow{ML}| = \frac{l}{\sqrt{2}}, |\overrightarrow{CK}| = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

- 4) Угол между прямыми ML и CK

$$\cos \alpha = |\cos \varphi| = \frac{|\overrightarrow{ML} \cdot \overrightarrow{CK}|}{|\overrightarrow{ML}| \cdot |\overrightarrow{CK}|} = \frac{\left| -\frac{1}{4}\rho^2 \right|}{\frac{l}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}l} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Ответ: $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$



Задача 18. Найдите сторону основания правильной четырехугольной пирамиды с боковым ребром $\sqrt{2}$ м и полной поверхностью 8 м^2 .

Решение:

1) Для правильной пирамиды

$S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$, где

$$S_{\text{осн}} = x^2, S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot y,$$

$AB = x$, апофема $h_a = y$

2) $\triangle BSE$ — прямоугольный

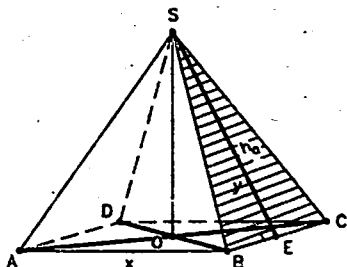
$BS^2 = BE^2 + SE^2$, или

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$$

3) Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \cdot 2 \\ x^2 + 2xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 - 2xy = 0 \\ x^2 + 2xy = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ответ: 2 м.



Задача 19. В четырехугольной пирамиде боковые ребра имеют один и тот же угол наклона с основанием пирамиды. В основании пирамиды прямоугольник со сторонами 1 см и 2 см, высота пирамиды равна $\frac{4}{\sqrt{5}}$ см. Чему равна площадь

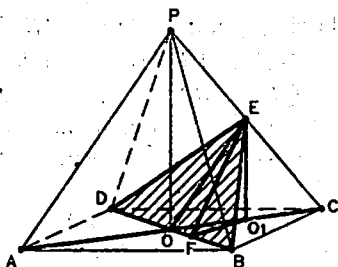
сечения, которое параллельно боковому ребру и проходит через диагональ основания пирамиды?

Решение:

1) Построение.

$\triangle PAC$, д/п $OE \parallel AP$, д/п ED , BE . Сечение $\triangle BED$ построено. $AP \parallel BDE$, т.к. $AB \parallel OE$ и $OE \subset BDE$ — прямая, не принадлежит плоскости и параллельная прямой, принадлежащей плоскости, параллельна плоскости.

2) $AO = CO$, $OE \parallel AP \Rightarrow PE = CE$



3) Д/п $EO_1 \perp AC$, $EO_1 \perp ABCD$

4) Д/п $O_1F \perp BD$, $EF \perp BD$ по теореме о трех перпендикулярах.

5) Основание $ABCD$. Д/п $CF_1 \perp BD$.

6) $\triangle BCD$ — прямоугольный

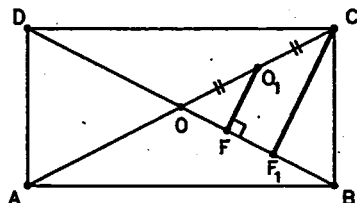
$BD^2 = CD^2 + BC^2$ по теореме Пифагора

$$BD^2 = 2^2 + 1^2, BD = \sqrt{5}$$

7) $CF_1 \cdot BD = CD \cdot BC$

$$CF_1 = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{5}}$$

$$O_1F = \frac{1}{2}CF_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ (см)}$$



8) $\triangle EFO_1$ — прямоугольный

$$EO_1 = \frac{1}{2}OP = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$EF^2 = O_1F^2 + EO_1^2 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$$

$$EF = 1 \text{ (см)}$$

$$9) S_{BDE} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ (см}^2\text{)}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ см}^2$.

Задача 20. Прямоугольный треугольник с катетами 6 дм и 8 дм — основание прямой треугольной призмы. Высота призмы 12 дм. Чему равна площадь сечения, которое перпендикулярно гипотенузе и проходит через ее середину?

Решение:

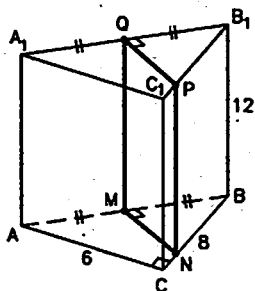
1) Построение. $MN \perp AB$, $MN \subset ABC$

$MQ \perp AB$, $MQ \subset AA_1B_1B$.

$QP \parallel MN$ — две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, линии пересечения параллельны.

Наконец, $MQ \parallel PN$.

Сечение $MNPQ$ — прямоугольник.



$$2) \quad S_{MNPQ} = MN \cdot MQ$$

$$MQ = AA_1 = 12 \text{ (дм)}$$

$$3) \quad AC = 6 \text{ дм}, BC = 8 \text{ дм}$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$$

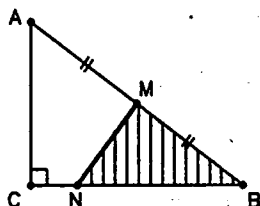
$$AB = 10 \text{ (дм)}$$

$$MB = \frac{1}{2} AB = 5 \text{ (дм)}$$

$$\triangle MNB \sim \triangle CAB$$

$$\frac{MN}{CA} = \frac{MB}{CB}, \quad \frac{MN}{6} = \frac{5}{8},$$

$$MN = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} \text{ (дм)}$$



$$4) \quad S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = \frac{15}{4} \cdot 12 = 45 \text{ (дм}^2\text{)}$$

Ответ: 45 дм².

Задача 21. Задана правильная треугольная пирамида $SABC$, ее боковая поверхность равна 36 м^2 , а боковое ребро $SA = 5 \text{ м}$. Найдите площадь основания.

Решение:

1) Обозначим сторону основания $2x$.

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot h_a, \text{ где}$$

$$P \text{ — периметр основания, } P = 2x + 2x + 2x = 6x$$

$$h_a \text{ — апофема, } h_a^2 = 25 - x^2$$

$$2) \quad S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot 6x \cdot \sqrt{25 - x^2}$$

$$x\sqrt{25 - x^2} = 12$$

$$x^2(25 - x^2) = 144$$

$$x^4 - 25x^2 + 144 = 0$$

$$x^2 = t, \quad t^2 - 25t + 144 = 0$$

$$t_1 = 9, \quad t_2 = 16$$

$$x = 3 \text{ или } x = 4$$

3) Две пирамиды удовлетворяют условию задачи, у них различные площади оснований:

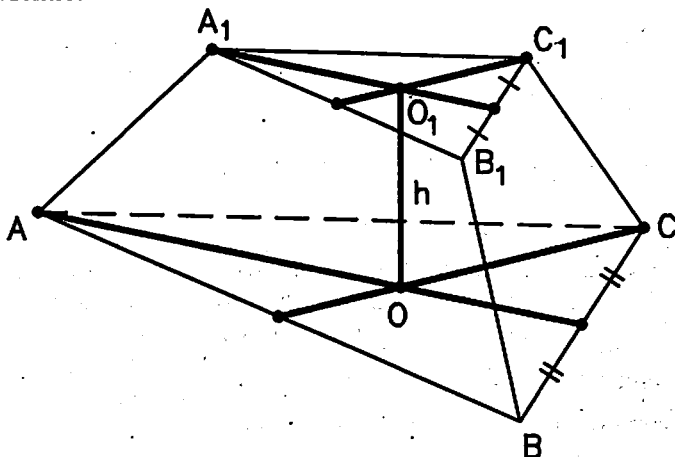
$$S_1 = \frac{(2x)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = x^2\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ (м}^2\text{)}$$

$$S_2 = \frac{(2x)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = x^2 \sqrt{3} = 9\sqrt{3} \text{ (м}^2\text{)}$$

Ответ: $9\sqrt{3} \text{ м}^2$, $16\sqrt{3} \text{ м}^2$.

Задача 22. Найдите боковое ребро правильной треугольной усеченной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$, если $AB = 24 \text{ см}$, $A_1B_1 = 15 \text{ см}$, $h = 9 \text{ см}$, где h — высота усеченной пирамиды.

Решение:



- 1) Точки O и O_1 — центры равносторонних треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$

$$R = AO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3} \text{ (см)}$$

$$r = AO_1 = \frac{A_1B_1}{\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3} \text{ (см)}$$

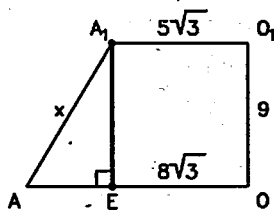
- 2) Д/п $A_1E \perp AO$. $\triangle AA_1E$

$AA_1^2 = AE^2 + A_1E^2$ по теореме Пифагора

$$AE = AO - A_1O_1 = 8\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$AA_1^2 = (3\sqrt{3})^2 + 9^2 = 27 + 81 = 108$$

$$AA_1 = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \text{ (см)}$$



Ответ: $6\sqrt{3} \text{ см}$.

Задача 23. Найдите полную поверхность прямой треугольной призмы, в основании которой лежит треугольник со сторонами 10 дм и 6 дм и углом между ними равен $\frac{2\pi}{3}$.

Из трех боковых граней наибольшая имеет площадь 140 дм².

Решение:

1) $\triangle ABC$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \frac{2\pi}{3} -$$

теорема косинусов

$$AC^2 = 100 + 36 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 196$$

$$AC = 14 \text{ (дм)}$$

2) $S_{A_1C_1C} = 140 \text{ дм}^2$

AA_1C_1C — прямоугольник, т.к. призма прямая.

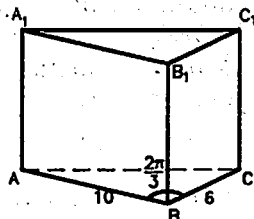
$$CC_1 = 140 : 14 = 10 \text{ (дм)}$$

3) $S_{\text{бок}} = P \cdot h$, где

P — периметр основания, h — высота прямой призмы.

$$S_{\text{бок}} = (10 + 6 + 14) \cdot 10 = 300 \text{ (дм}^2\text{)}$$

Ответ: 300 дм².

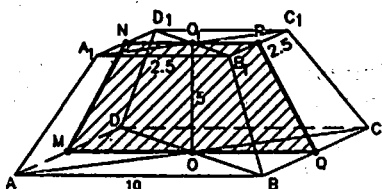


Задача 24. Найдите апофему правильной четырехугольной пирамиды с высотой 5 см и основаниями 10 см и 2,5 см.

Решение:

1) $MNPQ$ — сечение, MN и PQ — апофемы граней AA_1D_1D и BB_1C_1C .

2) В равнобокой трапеции основания 10 см и 2,5 см, высота 5 см.



$$PQ^2 = \left(\frac{MQ - NP}{2}\right)^2 + OO_1^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 + 5^2 = \frac{225}{4} + 25 = \frac{325}{4};$$

$$PQ = \frac{5}{2}\sqrt{13} \text{ (см)}.$$

Ответ: $\frac{5}{2}\sqrt{13}$ см.

Задача 25. Плоский угол при вершине в правильной треугольной пирамиде равен 90° , сторона основания равна a . Найдите площадь сечения, проходящего через апофему и ребро пирамиды.

Решение:

1) PN — апофема

$\triangle BPC$ — равнобедренный с основанием BC

$\angle BPC = 90^\circ$, PN — биссектриса.

$\triangle BPN$ — прямоугольный, равнобедренный,

$$\angle BPN = \angle PBN = 45^\circ \Rightarrow PN = BN = \frac{a}{2}$$

2) $\triangle ABC$ — равносторонний, AN — медиана

$$ON = \frac{1}{3}AN = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

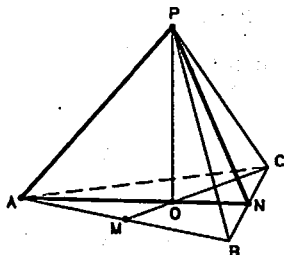
3) $\triangle PON$ — прямоугольный

$$PO^2 = PN^2 - ON^2$$

$$PO^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{6}; PO = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

$$4) S_{APN} = \frac{1}{2} \cdot AN \cdot PO = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a^2}{4\sqrt{2}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{8}$$

Ответ: $\frac{a^2\sqrt{2}}{8}$ кв.ед.



Задача 26. Основанием прямого параллелепипеда является параллелограмм со сторонами 3 м и 1,6 м и острым углом $\frac{\pi}{3}$. Диагональное сечение равно $5,2 \text{ м}^2$. Найдите полную поверхность параллелепипеда.

Решение:

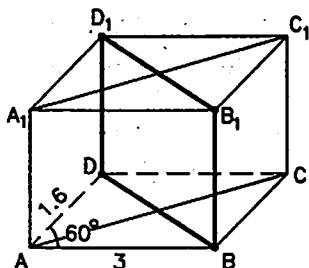
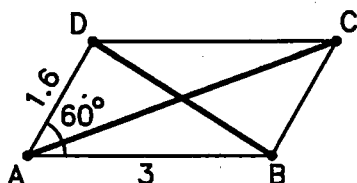
1) Рассмотрим основание параллелепипеда. $\triangle ABD$

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cdot \cos 60^\circ \text{ — по теореме косинусов.}$$

$$BD^2 = 1,6^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1,6 \cdot 0,5 = 2,6^2$$

$$BD = 2,6 \text{ (м)}$$

$$2) AC^2 + BD^2 = 2 \cdot (3^2 + 1,6^2)$$



$$AC^2 = 16,36 \text{ (м}^2\text{)}$$

$$AC \approx 4 \text{ м}$$

3) В условии задачи нет информации о том, какое из сечений рассматривается — BB_1D_1D или AA_1C_1C . Осуществляем перебор вариантов.

4) Пусть $S_{BB_1D_1D} = 5,2 \text{ м}^2$

Прямоугольник BB_1D_1D (т.к. прямой параллелепипед)

$$S_{BB_1D_1D} = BD \cdot BB_1$$

$$BB_1 = \frac{5,2}{2,6} = 2 \text{ (м)}$$

$$S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 2 \cdot 1,6 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ + (1,6 + 1,6 + 3 + 3) \cdot 2 = 4,8\sqrt{3} + 18,4 \approx 26,7 \text{ (м}^2\text{)}$$

5) Теперь пусть $S_{AA_1C_1C} = 5,2 \text{ м}^2$

$$S_{AA_1C_1C} = AC \cdot AA_1$$

$$AA_1 = \frac{5,2}{4} = 1,3 \text{ (м)}$$

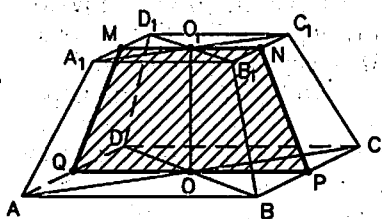
$$S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 4,8\sqrt{3} + (1,6 + 1,6 + 3 + 3) \cdot 1,3 = 4,8\sqrt{3} + 11,96 = 20,3 \text{ (м}^2\text{)}$$

Ответ: $26,7 \text{ м}^2$ и $20,3 \text{ м}^2$.

Задача 27. Найдите апофему правильной усеченной четырехугольной пирамиды, если стороны оснований m и n , высота пирамиды H .

Решение:

1) Сечение $MNPQ$ проходит через ось OO_1 , перпендикулярно ребру BC . PN — апофема.



2) Трапеция $MNPQ$ — равнобокая, высота трапеции H , основания m и n .

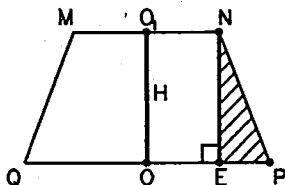
3) $\triangle NEP$

$PN^2 = NE^2 + EP^2$ по теореме Пифагора

$$PE = \frac{1}{2}|m - n|$$

$$PN^2 = H^2 + \frac{1}{4}(m - n)^2$$

$$PN = \sqrt{H^2 + \frac{1}{4}(m - n)^2}$$



Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{4H^2 + (m - n)^2}$.

Задача 28. Перпендикулярным сечением наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной, равной 15 см. Найдите площадь боковой поверхности треугольной призмы, если боковое ребро равно 10 см. Можно ли найти полную поверхность?

Решение:

1) $S_{\text{бок}} = P_{\perp} \cdot l$, где $P_{\perp}$ — периметр перпендикулярного сечения, l — боковое ребро.

$$S_{\text{бок}} = (15 + 15 + 15) \cdot 10 = 450 \text{ (см}^2\text{)}$$

2) Полную поверхность найти нельзя, т.к. площадь основания не определена.

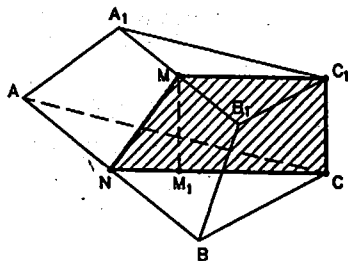
Ответ: 450 см^2 .

Задача 29. $ABCA_1B_1C_1$ — усеченная пирамида, $AB = BC = AC = 10$ дм, $A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1 = 6$ дм, $CC_1 \perp ABC$. Найдите площадь грани AA_1B_1B , если $CC_1 = 2$ дм.

Решение:

Сечение $MNCC_1$ проходит через ребро CC_1 и точку M — середину ребра A_1B_1 .

$MC_1 \parallel NC$ — линии пересечения параллельных плоскостей ABC и $A_1B_1C_1$ третьей плоскостью $MNCC_1$, параллельны между собой.



Мы доказали, что сечение усеченной пирамиды, проходящее через точку M и C_1C , является трапецией, т.к. $MC_1 \parallel NC$, а $MN \parallel C_1C$, т.к. ребра пересекаются, или точнее сказать: «...ребра усеченной пирамиды лежат на прямых, которые пересекаются в одной точке».

$\angle C_1MB_1 = \angle CNB = 90^\circ$, т.к. $MC_1 \parallel NC$ и $MB_1 \parallel NB$, равенство углов следует из сонаправленности сторон.

Наконец, рассматриваем плоскость основания, NM_1 — проекция, MM_1 — перпендикуляр, MN — наклонная. По теореме о трех перпендикулярах $MN \perp AB$, т.к. MN — апофема.

$\triangle MM_1N$ — прямоугольный

$$NM_1 = NC - MC_1 = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (дм)}$$

$$MM_1 = CC_1 = 2 \text{ (дм)}$$

$$MN^2 = MM_1^2 + NM_1^2 \text{ по теореме Пифагора}$$

$$MN^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 16$$

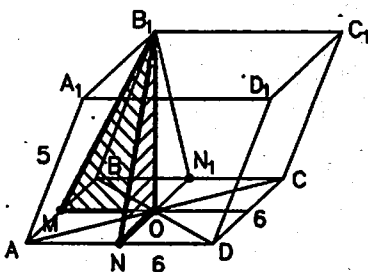
$$MN = 4 \text{ (дм)}$$

Ответ: 4 дм.

Задача 30. Найдите боковую поверхность параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если $B_1 A = B_1 B = B_1 C = B_1 D$, $AA_1 = 5$ см, $ABCD$ — квадрат, $AB = 6$ см.

Решение:

- 1) Задано, что точка B_1 одинаково удалена от вершин квадрата $ABCD$. Из равенства наклонных, проведенных из одной точки, следует равенство проекций. Значит, основание перпендикуляра $B_1 O$ одинаково удалено от вершин квадрата, т.е. O — центр квадрата, точка пересечения диагоналей.



- 2) Д/п $OM \perp AB$, $ON \perp AD$

$$OM = ON = 3 \text{ (м)}$$

B_1M — наклонная, MO — проекция наклонной, B_1O — перпендикуляр к плоскости $ABCD$. По теореме о трех перпендикулярах:

$$B_1M \perp AB, B_1N \perp AD.$$

- 3) $\triangle B_1MO$ прямоугольный, т.к.
 $B_1O \perp ABCD$

$$B_1M^2 = MO^2 + B_1O^2 \text{ — по теореме Пифагора}$$

$$B_1N^2 = ON^2 + B_1O^2$$

Осталось найти B_1O — высоту параллелепипеда. Это можно сделать из прямоугольного треугольника $\triangle BB_1O$:

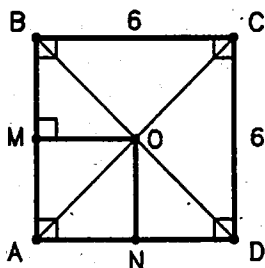
$$B_1O^2 = BB_1^2 - BO^2 = 5^2 - (3\sqrt{2})^2 = 7; B_1O = \sqrt{7} \text{ (м)}$$

Окончательно получаем

$$B_1M^2 = 3^2 + (\sqrt{7})^2 = 16; B_1M = 4 \text{ (м)}$$

- 4) $S_{\text{бок.}} = 4S_{\triangle AB_1B} = 4 \cdot AB \cdot B_1M = 4 \cdot 6 \cdot 4 = 96 \text{ (м}^2\text{)}$

Ответ: 96 м^2 .



Задача 31. Докажите, что в октаэдре в каждой вершине имеют место быть две пары взаимно перпендикулярных ребер.

Решение:

Октаэдр — восьмигранник, составленный из двух правильных четырехугольных пирамид, боковые грани которых — равнобедренные треугольники.

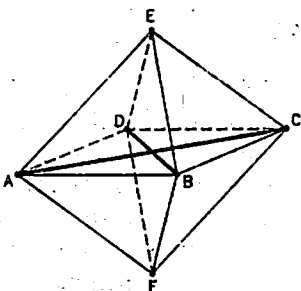
Пусть ребро октаэдра равно a , тогда сторона квадрата $ABCD$ также равна a . Рассмотрим $\triangle ABC$.

$AE = CE$ ребра октаэдра. AC — диагональ квадрата $ABCD$, $AC = a\sqrt{2}$. Получаем:

$$AC^2 = AE^2 + CE^2, \text{ т.к. } (a\sqrt{2})^2 = a^2 + a^2,$$

это означает, что $\angle AEC = 90^\circ$, т.е. $AE \perp CE$.

Аналогично для $\triangle BDE$, $\angle BED = 90^\circ$, т.е. $BE \perp DE$. Аналогично для любой из вершин октаэдра.



Задача 32. Задан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Тетраэдр $CAD_1 B_1$ задан длинами боковых ребер $B_1 C = l_1$, $D_1 C = l_2$, $AC = l_3$. Найдите по этим размерам длину, ширину и высоту параллелепипеда.

Решение:

- 1) Обозначим u , v , w неизвестные линейные размеры прямоугольного параллелепипеда.

- 2) По теореме Пифагора:

$$u^2 + v^2 = l_3^2$$

$$w^2 + v^2 = l_1^2 \Leftrightarrow$$

$$u^2 + w^2 = l_2^2$$

$$2(u^2 + v^2 + w^2) = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2$$

$$v^2 + w^2 = l_1^2 \Leftrightarrow$$

$$u^2 + w^2 = l_2^2$$

$$2u^2 + 2l_1^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2$$

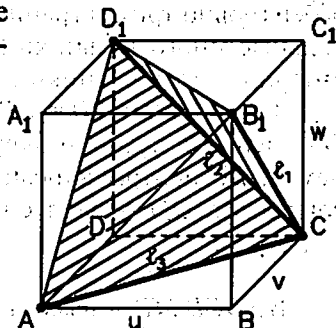
$$v^2 + w^2 = l_1^2 \Leftrightarrow$$

$$u^2 + w^2 = l_2^2$$

$$u^2 = \frac{1}{2}(l_2^2 + l_1^2 - l_3^2)$$

$$v^2 = \frac{1}{2}(l_1^2 + l_3^2 - l_2^2)$$

$$w^2 = \frac{1}{2}(l_1^2 + l_2^2 - l_3^2)$$



Ответ: длина равна $\sqrt{\frac{1}{2}(l_2^2 + l_1^2 - l_3^2)}$,

ширина — $\sqrt{\frac{1}{2}(l_1^2 + l_3^2 - l_2^2)}$,

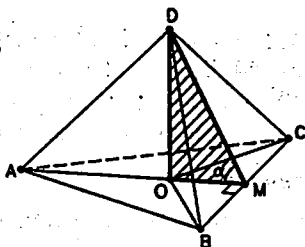
высота — $\sqrt{\frac{1}{2}(l_1^2 + l_2^2 - l_3^2)}$.

Задача 33. Пусть α и β двугранные углы двух правильных многогранников — тетраэдра (четырехгранника) и октаэдра (восьмигранника). Найдите α и β и докажете, что $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Решение:

- 1) Правильный тетраэдр

Пусть l — ребро тетраэдра, $OD \perp ABC$, $OM \perp BC \Rightarrow MD \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах. По определению правильного тетраэдра в каждой вершине сходится одинаковое количество ребер (ровно три), и грани — правильные многоугольники (равносторонние треугольники).



Значит, $AD = BD = CD = l \Rightarrow AO = BO = CO$, т.е. точка O — центр описанной окружности $\triangle ABC$. В равностороннем $\triangle ABC$ центры вписанной и описанной окружностей совпадают. OM — радиус вписанной окружности:

$$OM = r = \frac{l}{2\sqrt{3}}$$

В $\triangle BCD$ MD — высота в равностороннем треугольнике

$$MD = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\angle DMO$ — линейный угол двугранного угла $ABCD$

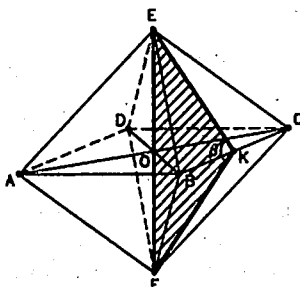
$$\cos \alpha = \frac{OM}{MD} = \frac{l}{2\sqrt{3}} : l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Получили } \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

Ясно, что у правильного тетраэдра все двугранные углы равны.

2) Октаэдр

В каждой вершине октаэдра сходятся четыре ребра, боковые грани — равносторонние треугольники. Октаэдр составлен из двух правильных пирамид, основанием которых являются квадраты. Все двугранные углы октаэдра равны. Рассмотрим двугранный угол $EBCF$. Пусть K — середина ребра BC , тогда $EK \perp BC$ и $FK \perp BC$, т.к. $\triangle EBC$ и $\triangle BFC$ — равносторонние $\Rightarrow \angle EKF$ —



линейный угол двугранного угла $EBCF$.

Рассмотрим $\triangle ECF$. $EF = \sqrt{2}$ — диагональ квадрата со стороной 1, $EK = \frac{\sqrt{3}}{2}$ — высота равностороннего треугольника.

$$FK = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ высота равностороннего } \triangle FBC$$

$$\angle EFK = \beta,$$

$$\cos \beta = \frac{EK^2 + FK^2 - EF^2}{2 \cdot EK \cdot FK} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Получаем } \cos \beta = -\frac{1}{3}$$

- 3) Сумма двугранных углов правильного тетраэдра и октаэдра.

$$\text{Получили } \cos \alpha = \frac{1}{3}, \cos \beta = -\frac{1}{3}.$$

Ясно, что $\beta = \pi - \alpha$ и $\alpha + \beta = \pi$

Или, если пойти по пути тригонометрических преобразований:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{\sqrt{8}}{3} \cdot \frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{1}{9} - \frac{8}{9} = -1 \end{aligned}$$

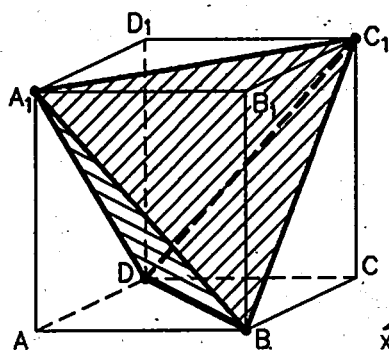
$$\alpha + \beta = \pi$$

Ответ: $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha = 70^\circ 32'$, $\cos \beta = -\frac{1}{3}$, $\beta = 109^\circ 28'$,
 $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Задача 34. «Куб и октаэдр». Задан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что $A_1 B C_1 D$ правильный тетраэдр, а многоугольник $E F M N P Q$ — октаэдр, где E, F, M, N, P, Q — центры граней.

Решение:

- 1) В каждой вершине многогранник $A_1 B C_1 D$ сходятся ровно три ребра. Наконец, его грани являются равносторонними треугольниками, т.к.



$$A_1C_1 = BC_1 = BA_1 = A_1D = BD = C_1D$$

и равны $l\sqrt{2}$, где l — ребро куба.

Следовательно, A_1BC_1D — правильный тетраэдр.

- 2) В каждой из вершин многогранника сходится по 4 ребра, восемь боковых граней являются треугольниками. Докажем, что это равносторонние треугольники.

Пусть ребро куба равно $2a$. Выберем систему координат $Oxyz$, тогда вершины восьмиугольника имеют координаты:

$$E(a; 0; a), F(2a; a; a), M(a; 2a; a), N(0; a; a), P(a; a; 2a), Q(a; a; 0)$$

Осталось найти длины ребер:

$$EF = a\sqrt{2}, FM = a\sqrt{2}, MN = a\sqrt{2}, \text{ и т. д.}$$

Все длины ребер равны $a\sqrt{2}$. В таком случае боковые грани — правильные треугольники, т.е. $EFMNPQ$ — октаэдр.

Задача 35. Задана правильная усеченная пирамида $ABCA_1B_1C_1$. Найдите площадь $\triangle ABC_1$, а также его ортогональной проекции на плоскость ABC , если $AB = 24$ см, $A_1B_1 = 15$ см, $h = 9$ см, где h — высота усеченной пирамиды.

Решение:

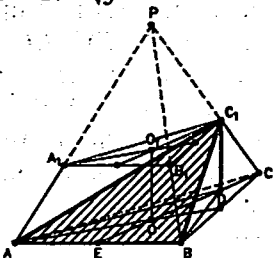
- 1) $\triangle A_1B_1C_1$ — равносторонний, точка O_1 — центр треугольника, центр описанной окружности,

$$O_1C_1 = \frac{A_1B_1}{\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}}$$

- 2) Аналогично для $\triangle ABC$: $OO_1 \perp ABC$, $C_1D \perp ABC$

$$3) \quad ED = OD + OE = O_1C_1 + \frac{1}{3}CE = \frac{15}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27}{\sqrt{3}}$$

- 4) Рассмотрим C_1D — перпендикуляр к плоскости ABC , C_1E — наклонная, ED — проекция наклонной, AB — прямая, находящаяся в плоскости ABC . $CE \perp AB$ — медиана в равнобедренном треугольнике перпендикулярна стороне треугольника. По теореме о трех перпендикулярах $C_1E \perp AB$, т.е. C_1E — высота $\triangle ABC_1$.



$$S_{ABC_1} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot C_1E$$

- 5) Площадь ортогональной проекции:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot \frac{27}{\sqrt{3}} = 108\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}$$

- 6) $\triangle C_1ED$ — прямоугольный треугольник

$C_1E^2 = DE^2 + C_1D^2$ по теореме Пифагора

$$C_1E^2 = \left(\frac{27}{\sqrt{3}}\right)^2 + 9^2 = 27 \cdot 9 + 9^2 = 9 \cdot 36$$

$$C_1E = 3 \cdot 6 = 18 \text{ (см)}$$

$$7) \quad S_{ABC_1} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 18 = 216 \text{ (см}^2\text{)}$$

Ответ: 216 см^2 , $108\sqrt{3} \text{ см}^2$.

Задача 36. Боковые ребра треугольной призмы перпендикулярны, а один из двугранных углов, образованных боковыми гранями, равен 90° . Через ребро этого двугранного угла проведено сечение, перпендикулярное противоположной грани. Сечение делит ребро основания на два отрезка a см и b см. Высота призмы равна h см. Найдите площадь сечения.

Решение:

- 1) Построение сечения. Задан двугранный угол N_1MM_1P , равный 90° . Через ребро этого угла MM_1 проведем сечение, перпендикулярное грани NN_1P_1P . Проведем $M_1E \perp N_1P_1$ в плоскости верхнего основания $M_1N_1P_1$.

Через две пересекающиеся прямые M_1E и EF проведем сечение M_1EFM . $EF \parallel M_1M$, т.к. сечение проходит через прямую $M_1M \parallel NN_1P_1P$ — это следует, в свою очередь, из параллельности боковых ребер призмы.

$M_1E \parallel MF$, т.к. две параллельные плоскости MNP и $M_1N_1P_1$ пересекаются плоскостью MM_1EF и линии пересечения параллельны. Значит, MM_1EF — параллелограмм. Но MM_1 перпендикулярно основанию $M_1N_1P_1 \Rightarrow MM_1 \perp M_1E$ по определению перпендикуляра к плоскости, т.е. MM_1EF — прямоугольник.

$$S_{MM_1EF} = MM_1 \cdot M_1E$$

Найдем M_1E .

- 2) $\angle P_1M_1N_1 = 90^\circ$ — линейный угол двугранного угла, $x = M_1E$, M_1E — высота прямо-
угольного треугольника

$$x^2 = ab, x = \sqrt{ab}$$

Высота, опущенная на гипотенузу, есть среднее геометрическое длин отрезков гипотенузы, на которые их делит основание перпендикуляра.

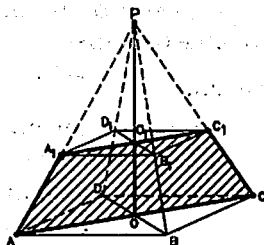
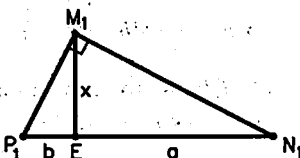
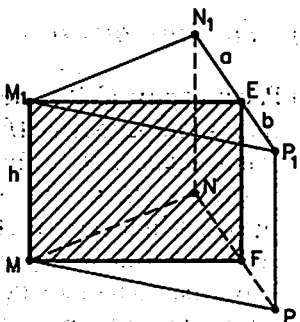
- 3) $S_{MM_1EF} = MM_1 \cdot M_1E = h\sqrt{ab} \text{ (см}^2\text{)}$

Ответ: $h\sqrt{ab} \text{ (см}^2\text{)}$.

Задача 376. Найдите площади диагональных сечений правильной четырехугольной усеченной пирамиды с основаниями a и b и высотой, равной h .

Решение:

- 1) Диагональные сечения AA_1C_1C и BB_1D_1D проходят через два несоседних боковых ребра.
- 2) Пирамида — правильная, значит, $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ — квадраты,



точки O и O_1 — центры квадратов, OO_1 — высота усеченной пирамиды.

- 3) Диагональные сечения — это трапеции с основаниями $A_1C_1 = b\sqrt{2}$ и $AC = a\sqrt{2}$ и высотой $OO_1 = h$

$$S_{A_1C_1C} = \frac{1}{2} \cdot (AC + A_1C_1) \cdot OO_1 = \frac{a\sqrt{2} + b\sqrt{2}}{2} \cdot h$$

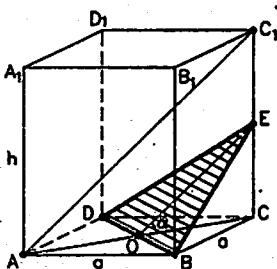
$$S_{A_1C_1C} = S_{B_1D_1D} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (a + b) \cdot h$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (a + b) \cdot h$

Задача 38. Найдите двугранный угол, образованный плоскостью сечения, проведенного в правильной призме $ABCA_1B_1C_1D_1$ через BD и параллельного AC_1 , и плоскостью основания. Найдите площадь сечения, площадь ортогональной проекции сечения, если $AB = a$, $AA_1 = h$.

Решение:

- 1) Построение сечения. Рассмотрим $\triangle ACC_1$. Точка O — центр квадрата, середина диагонали AC . Проведем в $\triangle ACC_1$ $OE \parallel AC_1$. Соединим точки D и E , B и E на соответствующих гранях призмы. Сечение BDE построено, BD — диагональ основания принадлежит сечению, кроме того, $AC_1 \parallel BDE$, т.к. $AC_1 \parallel OE$ и $OE \subset BDE$.



- 2) Сечение $\triangle BDE$. Докажем, что $OE \perp BD$.

CE перпендикулярен к плоскости $ABCD$, OE — наклонная, OC — проекция наклонной. $OC \perp BD$, т.к. диагонали квадрата перпендикулярны. $OE \perp BD$ по теореме о трех перпендикулярах.

- 3) $\triangle ACC_1$, OE — средняя линия

$$OE = \frac{1}{2}AC_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2 + h^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + h^2}$$

- 4) $BD = \sqrt{2}a$ — диагональ квадрата.

- 5) Площадь сечения

$$S_{BDE} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + h^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{2a^2 + h^2} \cdot a$$

6) Ортогональная проекция

$$S_{BDC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} a^2$$

$$7) \cos \alpha = \frac{S_{BDC}}{S_{BDE}} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{2a^2 + h^2} \cdot a} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2a^2 + h^2}} \text{ или } \cos \alpha = \frac{OC}{OE}$$

Величина двугранного угла равна

$$\arccos \alpha = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2a^2 + h^2}}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{2}a}{4} \sqrt{2a^2 + h^2}; \frac{1}{2}a^2; \arccos \alpha = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2a^2 + h^2}}$$

Задача 39. Найдите угол наклона каждой из диагоналей прямого параллелепипеда, в основании которого параллелограмм со сторонами a и b , диагональ параллелограмма d и боковое ребро параллелепипеда равно l .

Решение:

1) $AA_1 \perp ABCD$ — прямой параллелепипед

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CC_1}{AC}, \operatorname{tg} \beta = \frac{DD_1}{BD}$$

$$CC_1 = DD_1 = l$$

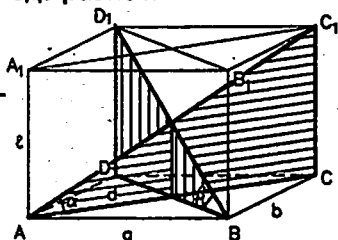
2) $ABCD$ — параллелограмм

$AD^2 + CD^2 + BC^2 + AB^2 = AC^2 + BD^2$ — сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов диагоналей.

$$BD^2 = 2a^2 + 2b^2 - d^2$$

$$3) \operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{d}; \operatorname{tg} \beta = \frac{l}{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - d^2}}$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{d}; \operatorname{tg} \beta = \frac{l}{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - d^2}}$$

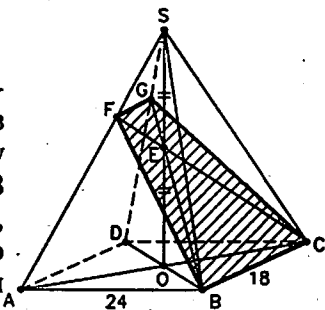


Задача 40. У пирамиды $SABCD$ боковые ребра равны. В основании пирамиды прямоугольник $ABCD$ со сторонами

18 см и 24 см. Через каждую из сторон основания и середину высоты E пирамиды, равной 18 см, проведены два сечения. Найдите площади этих сечений.

Решение:

- 1) Построение сечения. Построим сечение, проходящее через сторону основания BC и точку E — середину высоты SO . В $\triangle ASC$ проведем прямую CE , получаем $F \in AS$, аналогично получаем $G \in SD$. Соединяем точки B, F, G, C — получаем сечение $BFGC$.



- 2) Общие соображения.
Задано $AS = BS = CS = DS \Rightarrow$ точка O , основание перпендикуляра SO , есть центр описанной около прямоугольника окружности, $AO = DO = CO = BO$, точка пересечения диагоналей прямоугольника.
 $FG \parallel AD$, это означает, что $FG \parallel BC$, $BFGC$ — трапеция.

- 3) $S_{BFGC} = \frac{1}{2} BG \cdot CF \cdot \sin \angle CEB$ —

«половина произведения диагоналей на синус угла между ними».

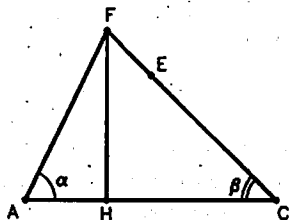
- 4) $\triangle ACF$

$$AH = FH \cdot \operatorname{ctg} \alpha, CH = FH \cdot \operatorname{ctg} \beta$$

$$AH + CH = AC$$

$$FH \cdot (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = AC$$

$$FH = \frac{AC}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$$



- 5) $\triangle ABC$ — прямоугольный

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \text{ по теореме Пифагора}$$

$$AC^2 = 24^2 + 18^2 = 30^2, AC = 30 \text{ (см)}$$

- 6) $\triangle ASO$ — прямоугольный, т.к. $SO \perp ABCD$

$$\angle OAS = \alpha,$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{OA}{SO} = \frac{\frac{1}{2}AC}{SO} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$$

- 7) $\triangle EOC$ — прямоугольный, т.к. $EO \perp ABCD$

$$\angle ECO = \beta$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{OC}{OE} = \frac{\frac{1}{2}AC}{OE} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

$$8) FH = \frac{AC}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \frac{30}{\frac{5}{6} + \frac{5}{3}} = 12 \text{ (см)}$$

9) $\triangle FHC$ — прямоугольный

$$FC = \frac{FH}{\sin \beta}$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{5}{3} \Rightarrow \sin \beta = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$FC = \frac{12}{\frac{3}{\sqrt{34}}} = 4\sqrt{34} \text{ (см)}$$

10) $CF = BG = 4\sqrt{34}$ (см), т.к. $\triangle AFC = \triangle DGB$

11) Синус угла $\angle CEB$.

Пусть $\angle CEB = \gamma$

Рассмотрим $\triangle BEC$

$$EC^2 = EO^2 + CO^2 = 9^2 + 15^2 = 9 \cdot 34$$

$$EC = 3\sqrt{34}$$

$$\cos \gamma = \frac{EB^2 + CE^2 - BC^2}{2 \cdot EB \cdot CE} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 34 - 18^2}{2 \cdot 9 \cdot 34} = \frac{18 \cdot 6}{18 \cdot 34} = \frac{8}{17}$$

$$\sin \gamma = \frac{15}{17}$$

$$12) S_{BFGC} = \frac{1}{2} \cdot BG \cdot CF \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 34 \cdot \frac{15}{17} = 240 \text{ (см}^2\text{)}$$

13) Аналогично, когда сечение проходит через AB и E .

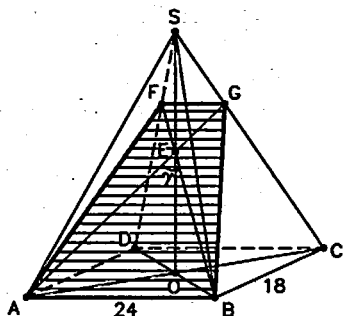
Изменился только $\sin \gamma$

$$\cos \gamma = \frac{AE^2 + BE^2 - AB^2}{2 \cdot AE \cdot BE} =$$

$$= \frac{2 \cdot 9 \cdot 34 - 24^2}{2 \cdot 9 \cdot 34} =$$

$$= \frac{36 \cdot (17 - 16)}{36 \cdot 17} = \frac{1}{17}$$

$$\sin \gamma = \frac{1}{17}$$



$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{288}}{17} = \frac{12\sqrt{2}}{17}$$

$$S_{AFGB} = \frac{1}{2} \cdot AG \cdot BF \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot \sqrt{34})^2 \cdot \frac{12\sqrt{2}}{17} = 16 \cdot 12 \cdot \sqrt{2} = 192\sqrt{2} \text{ (см}^2\text{)}$$

Ответ: 240 см^2 , $192\sqrt{2} \text{ см}^2$.

Задача 41. Стороны оснований правильной усеченной пирамиды $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ относятся как $\frac{A_1 B_1}{AB} = \frac{m}{n}$, высота пирамиды равна h и апофема a . Найдите площади оснований.

Решение:

- 1) O и O_1 — центры оснований.

Пирамида правильная, основания — квадраты и OO_1 — высота усеченной пирамиды.

- 2) $MNPQ$ — сечение пирамиды плоскостью, проходящей через OO_1 и середины сторон квадрата, точки N и P .

- 3) $MNPQ$ — равнобокая трапеция. Основания трапеции $2nx$ и $2mx$, $MN = PQ = a$, $OO_1 = h$

- 4) $\triangle MNR$ — прямоугольный

$$MN^2 = NR^2 + MR^2$$

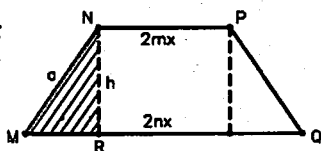
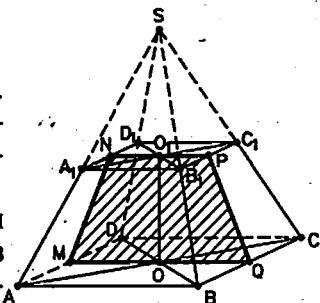
$$a^2 = (nx - mx)^2 + h^2$$

$$x^2 = \frac{a^2 - h^2}{(n - m)^2}$$

5) $S_{ABCD} = AB^2 = MQ^2 = (2nx)^2 = 4n^2 \cdot \frac{a^2 - h^2}{(n - m)^2}$

$$S_{A_1 B_1 C_1 D_1} = A_1 B_1^2 = NP^2 = (2mx)^2 = 4m^2 \cdot \frac{a^2 - h^2}{(n - m)^2}$$

Ответ: $4n^2 \cdot \frac{a^2 - h^2}{(n - m)^2}$; $4m^2 \cdot \frac{a^2 - h^2}{(n - m)^2}$



VII. Тела вращения

Задача 1. Найдите диагональ осевого сечения цилиндра, если площадь основания 20 см^2 , а площадь осевого сечения в два раза больше.

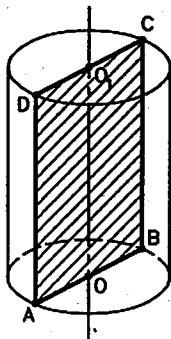
Решение:

1) Осевое сечение $ABCD$ — прямоугольник

$$S_{ABCD} = AD \cdot AB$$

$$\begin{cases} 40 = AD \cdot 2r \\ \pi r^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AD \cdot r = 20 \\ r^2 = \frac{20}{\pi} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} AD^2 \cdot r^2 = 400 \\ r^2 = \frac{20}{\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AD^2 = \frac{400}{r^2} \\ r^2 = \frac{20}{\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AD^2 = 20\pi \\ r^2 = \frac{20}{\pi} \end{cases}$$



2) Диагональ осевого сечения

$$AC^2 = AB^2 + AD^2 \text{ по теореме Пифагора}$$

$$AC^2 = (2r)^2 + AD^2 = \frac{80}{\pi} + 20\pi$$

$$AC = 2\sqrt{\frac{20}{\pi} + 5\pi} \text{ (см)}$$

Ответ: $2\sqrt{\frac{20}{\pi} + 5\pi}$ см.

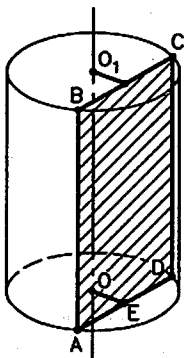
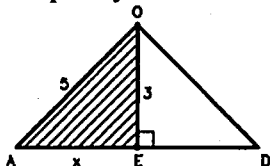
Задача 2. Найдите площадь сечения цилиндра, проведенного параллельно оси на расстоянии 3 см от оси, если высота цилиндра 13 см, а радиус основания цилиндра равен 5 м.

Решение:

1) Сечение $ABCD$ — прямоугольник.

$$S_{ABCD} = AD \cdot AB$$

2) $\triangle AOE$ — прямоугольный



$$AE^2 = OA^2 - OE^2 \text{ по теореме Пифагора}$$

$$AE^2 = 25 - 9 = 16, AE = 4 \text{ (см)}$$

$$AD = 2 \cdot AE, AD = 8 \text{ (см)}$$

3) Сечение

$$S_{ABCD} = 8 \cdot 13 = 104 \text{ (см}^2\text{)}$$

Ответ: 104 см^2 .

Задача 3. Отрезок MN длиной 20 см расположен как карандаш в стакане: точка M на окружности нижнего основания цилиндра, точка N — на окружности верхнего основания цилиндра. Высота цилиндра 12 см, а диаметр основания равен длине отрезка MN . Найдите расстояние от MN до оси цилиндра.

Решение:

- 1) Проведем сечение, параллельное оси, проходящее через MN .

Дополнительное построение:

$MM_1 \parallel NN_1$ и $NN_1 \parallel OO_1$. Получили $MM_1 \parallel NN_1$, значит, прямые MM_1 и NN_1 лежат в одной плоскости, $MN \subset$ сечению.

- 2) $\triangle MNN_1$ — прямоугольный

$$MN_1^2 = MN^2 - NN_1^2 \text{ по теореме Пифагора}$$

$$MN_1^2 = 20^2 - 12^2 = 256, MN_1 = 16 \text{ (см)}$$

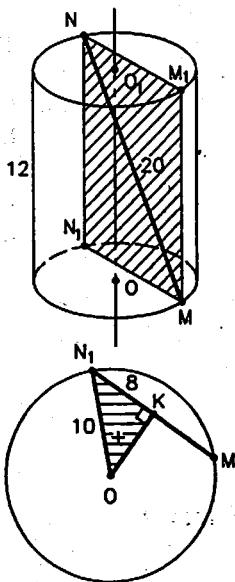
- 3) Искомое расстояние OK .

$\triangle N_1KO$ — прямоугольный

$$OK^2 = N_1O^2 - N_1K^2 \text{ по теореме Пифагора}$$

$$OK^2 = 10^2 - 8^2 = 36, OK = 6 \text{ (см)}$$

Ответ: 6 см.



Задача 4. В цилиндре находится квадрат $ABCD$, стороны квадрата AB и CD являются хордами оснований цилиндра. Найдите площадь квадрата $ABCD$, если высота цилиндра 6 см, а радиус оснований 21 см.

Решение:

- 1) Спроецируем квадрат $ABCD$ на плоскость нижнего основания. При параллельном проецировании параллельные отрезки проецируются в параллельные отрезки.
- 2) Итак, проекция четырехугольника ABC_1D_1 и $AB \parallel C_1D_1$, $AD_1 \parallel BC_1$
- 3) Диагонали четырехугольника ABC_1D_1 равны, т.к. равны наклонные AC и BD как диагонали квадрата $ABCD$, и равны перпендикуляры CC_1 и DD_1 , т.к. точки C и D , расположенные на верхнем основании, одинаково удалены от другого основания. Итак, $BD_1 = AC_1$, наконец, $AD_1 < AD$, т.к. проекция меньше наклонной. ABC_1D_1 — прямоугольник, $\angle BC_1D_1 = 90^\circ$ — вписанный угол $\Rightarrow BD_1$ — диаметр

$$BD_1 = AC_1 = 42 \text{ (см)}$$

- 3) $\triangle BDD_1$

$$BD^2 = DD_1^2 + D_1B^2 \text{ по теореме Пифагора}$$

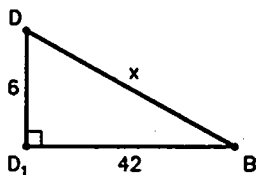
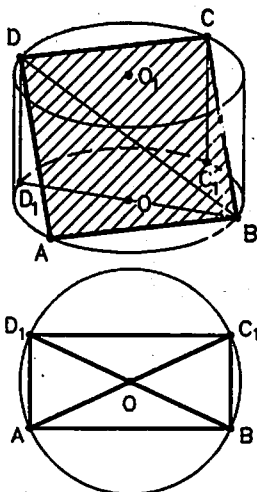
$$BD^2 = 6^2 + 42^2 = 1800$$

$$BD = 30\sqrt{2} \text{ (см)}$$

- 4) Квадрат $ABCD$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC = 900 \text{ (см}^2\text{)}$$

Ответ: 900 см^2 .

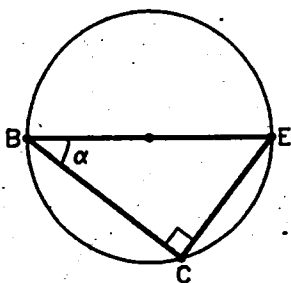


Задача 5. В цилиндре проведены два сечения $ABCD$ и $ABEF$, где AB — образующая. Двугранный угол $CABF$ равен α , где $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Найдите $\frac{S_{ABCD}}{S_{ABEF}}$, если $ABEF$ — осевое сечение.

Решение:

- 1) Осевое сечение $ABEF$ — прямоугольник

$$S_{ABEF} = BE \cdot AB$$



- 2) Сечение $ABCD$ — тоже прямоугольник

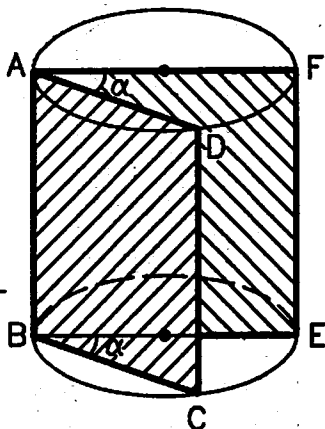
$$S_{ABCD} = BC \cdot AB$$

$$3) \frac{S_{ABCD}}{S_{ABEF}} = \frac{BC \cdot AB}{BE \cdot AB} = \frac{BC}{BE}$$

- 4) $\triangle BCE$ — прямоугольный, т.к. BE — диаметр и $\angle BCE$ — вписанный угол, равный 90° .

$$\frac{BC}{BE} = \cos \alpha$$

Ответ: $\cos \alpha$.



Задача 6. Найдите отношение площадей осевого сечения и боковой поверхности цилиндра.

Решение:

$$1) S_{\text{осев.сеч.}} = 2rH$$

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi rH, \text{ где}$$

r — радиус цилиндра, H — высота цилиндра

$$\frac{S_{\text{ос.с.}}}{S_{\text{бок.}}} = \frac{2rH}{2\pi rH} = \frac{1}{\pi}$$

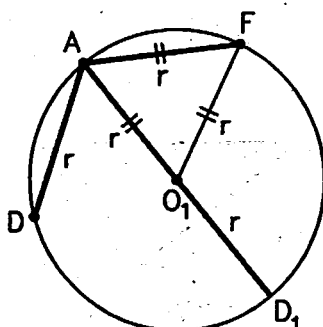
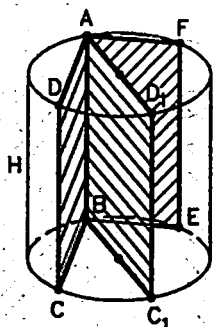
Ответ: $\frac{1}{\pi}$

Задача 7. В цилиндре проведены два сечения $ABCD$ и $ABEF$, где AB — образующая цилиндра. Площадь каждого из этих сечений равна половине площади осевого сечения. Найдите угол между плоскостями сечений $ABCD$ и $ABEF$.

Решение:

- 1) ABC_1D_1 — осевое сечение

$$S_{ABC_1D_1} = BC_1 \cdot C_1D_1 = H \cdot 2r, \text{ где}$$



H — высота цилиндра, r — радиус основания цилиндра.

$$2) S_{ABCD} = S_{ABEF} = \frac{1}{2} S_{ABC_1D_1} = H \cdot r$$

$$3) S_{ABCD} = BC \cdot CD = BC \cdot H = H \cdot r \Rightarrow BC = AD = BE = AF = r$$

$\triangle AO_1F$ — равносторонний

$$\angle FAO_1 = 60^\circ \Rightarrow \angle DAF = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

Ответ: 120° .

Задача 8. Найдите полную поверхность цилиндра, если радиус основания равен r , а угол между диагональю осевого сечения и образующей равен α .

Решение:

$$1) BC = AD = 2r \text{ — диаметр основания}$$

$$2) \triangle ABC \text{ — прямоугольный}$$

$$AB = BC \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 2r \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

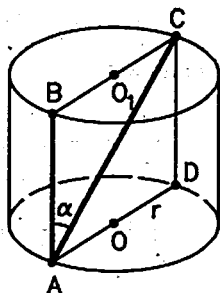
$$3) \text{ Боковая поверхность}$$

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi r \cdot AB = 2\pi r \cdot 2r \operatorname{ctg} \alpha = 4\pi r^2 \operatorname{ctg} \alpha$$

$$4) \text{ Полная поверхность}$$

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}} = 4\pi r^2 \operatorname{ctg} \alpha + 2\pi r^2 = 2\pi r^2 (2\operatorname{ctg} \alpha + 1)$$

Ответ: $2\pi r^2 (2\operatorname{ctg} \alpha + 1)$.



Задача 9. Найдите угол между диагональю осевого сечения и образующей цилиндра, если $S_{\text{бок.}}$ равна площади круга, описанного около осевого сечения цилиндра.

Решение:

$$1) \text{ Боковая поверхность цилиндра:}$$

$S_{\text{бок.}} = 2\pi rh$, где

r — радиус основания, h — высота цилиндра

- 2) Осевое сечение. $ABCD$ — прямоугольник, AC и BD — диагонали прямоугольника, $AC \cap BD = O$ — центр описанного круга, $AO = DO = BO = CO = R$ — радиус описанного круга.

- 3) Радиус описанного круга.

$\triangle AOO_1$.

$AO^2 = O_1O^2 + O_1A^2$ по теореме Пифагора:

$$R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2$$

- 4) Вычисления

$S_{\text{бок.}} = S_{\text{круга}}; 2\pi rh = \pi R^2$

$$2rh = \frac{h^2}{4} + r^2$$

Разделим на $\frac{h^2}{4} > 0$

$$\frac{8r}{h} = 1 + \left(\frac{2r}{h}\right)^2; \left(\frac{2r}{h}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2r}{h} + 1 = 0$$

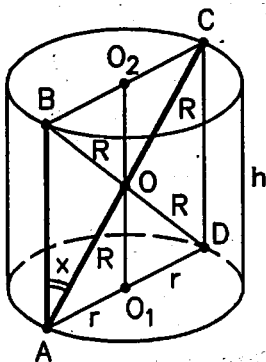
Из $\triangle ABC$

$$\frac{2r}{h} = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg} x = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$x_1 = 15^\circ, x_2 = 75^\circ$$

Ответ: $15^\circ, 75^\circ$.



Задача 10. Площадь основания конуса равна S , а осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник. Найдите площадь осевого сечения конуса.

Решение:

- 1) Площадь основания конуса

$$S_{\text{осн.}} = \pi R^2$$

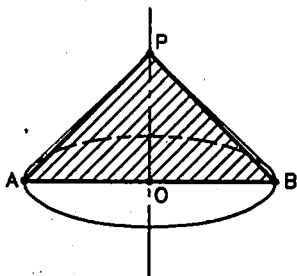
$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

Диаметр $AB = 2R = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

2) Осевое сечение $\triangle ABP$

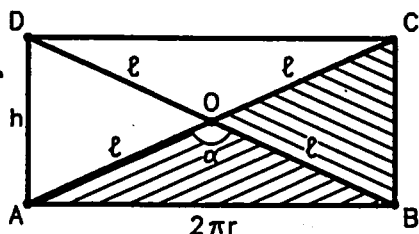
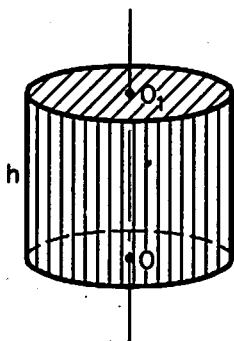
$$S_{ABP} = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{S}{\pi}}\right)^2 = \frac{S}{\pi}$$

Ответ: $\frac{S}{\pi}$.



Задача 11. Прямоугольник $ABCD$ является разверткой цилиндра. Заданы диагонали $AC = BD = 2l$, $\angle AOB = \alpha$, где O — центр прямоугольника. Найдите боковую и полную поверхности цилиндра.

Решение:



1) Боковая поверхность цилиндра:

$$S_{\text{бок}} = S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 2l \cdot \sin \alpha = 2l^2 \sin \alpha$$

2) $\triangle AOB$

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \alpha \text{ — теорема косинусов;}$$

$$AB^2 = l^2 + l^2 - 2l^2 \cos \alpha = 2l^2(1 - \cos \alpha)$$

Но $AB = 2\pi r$, r — радиус основания

$$(2\pi r)^2 = 2l^2(1 - \cos \alpha)$$

$$\pi r^2 = \frac{l^2(1 - \cos \alpha)}{2\pi}$$

3) Площадь полной поверхности цилиндра:

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}} = S_{\text{бок.}} + 2\pi r^2 = 2r^2 \sin \alpha + \frac{r^2(1 - \cos \alpha)}{\pi}$$

Ответ: $2r^2 \sin \alpha$; $2r^2 \sin \alpha + \frac{r^2(1 - \cos \alpha)}{\pi}$.

Задача 12. Найдите площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через две образующие, угол между которыми равен φ , если заданы высота конуса h и радиус основания r .

Решение:

Сечение конуса плоскостью, проходящей через образующие, проходит и через вершину конуса, т.к. в вершине пересекаются все образующие конуса.

1) Образующая.

$\triangle SKO$ — прямоугольный

$$SK^2 = OK^2 + OS^2$$

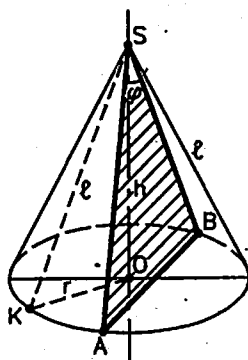
$$l^2 = r^2 + h^2$$

2) Сечение SAB .

$$S_{SAB} = \frac{1}{2} \cdot AS \cdot BS \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \sin \varphi =$$

$$= \frac{1}{2} l^2 \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} \cdot (r^2 + h^2) \cdot \sin \varphi$$

Ответ: $\frac{1}{2} (r^2 + h^2) \sin \varphi$.



Задача 13. Точки A и B лежат на окружности основания конуса, радиус основания 75 м, высота конуса 60 м. Высота пирамиды $OABP$ равна 36 м, где P — вершина конуса, точка O — центр основания конуса. Найдите площадь $\triangle ABP$.

Решение:

1) Образующие.

$\triangle AOP$ — прямоугольный

AP — образующая

$$AP^2 = OA^2 + OP^2 \text{ — по теореме Пифагора}$$

$$AP^2 = 60^2 + 75^2 = 15^2 \cdot (16 + 25) = 15^2 \cdot 41$$

$$AP = 15\sqrt{41} \text{ (m)}$$

- 2) Д/п: M — середина AB

 $OO_1 \perp ABP$

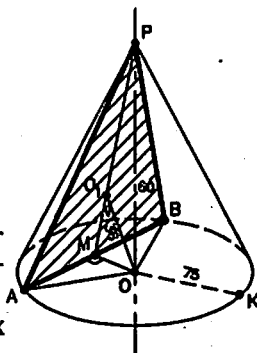
$AB \subset ABP$, MO — наклонная,

O_1M — проекция наклонной

$OM \perp AB$, т.к. $\triangle AOB$ — равнобедренный с основанием AB , OM — медиана.

По теореме о трех перпендикулярах

$O_1M \perp AB \Rightarrow$ основание перпендикуляра — точка $O_1 \in PM$ — медиане, проведенной к основанию равнобедренного треугольника $\triangle ABP$ с основанием AB . Р



- 3) а) $\triangle OO_1P$ — прямоугольный

$$O_1P^2 = OP^2 - OO_1^2 = 60^2 - 36^2 = 24 \cdot 96 = 48^2$$

$$O_1P = 48 \text{ (M)}$$

б) $OO_1^2 = O_1P \cdot O_1M$ — среднее геометрическое

$$36^2 = 48 \cdot O_1M$$

$$O_1M = 27 \text{ (м)}$$

B) $MP = 48 + 27 = 75$ (M)

$$MO^2 = O_1M \cdot MP \text{ — среднее геометрическое}$$

$$MO^2 = 27 \cdot 75 = 45^2$$

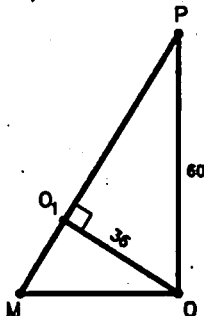
$$MO = 45 \text{ (M)}$$

г) ΔAOM — прямоугольный

$$AM^2 = OA^2 - MO^2 = 75^2 - 45^2 = 30 \cdot 120 = 60^2$$

$AM = 60 \text{ (m)}$

$$4). \quad S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot MP = 60 \cdot 75 = 4500 \text{ (м}^2\text{)}$$



Ответ: 4500 м².

Задача 14. Площадь основания конуса S , осевого сечения конуса — Q . Чему равна высота конуса?

Решение:

- 1) $S_{\text{осн.}} = \pi r^2$, r — радиус основания конуса

$$S_{\text{ос.сеч.}} = 2rh, h — \text{высота конуса}$$

- $$2) \quad h = \frac{Q}{2r}, \quad r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

$$3) \quad h = \frac{Q}{2 \cdot \sqrt{\frac{S}{\pi}}} = \frac{Q\sqrt{\pi}}{2\sqrt{S}}$$

Ответ: $\frac{Q\sqrt{\pi}}{2\sqrt{S}}$.

Задача 15. Найдите градусную меру угла φ кругового сектора, который является разверткой поверхности конуса высотой 12 м и с радиусом основания 5 м.

Решение:

1) $\triangle AOP$ — прямоугольный

$AP^2 = OA^2 + OP^2$ — по теореме Пифагора

$$AP^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$$

$$AP = 13 \text{ (м)}$$

2) Развертка и боковая поверхность конуса:

$$S_{\text{бок.}} = \pi r l$$

$$S_{\text{бок.}} = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 65\pi \text{ (м}^2\text{)}$$

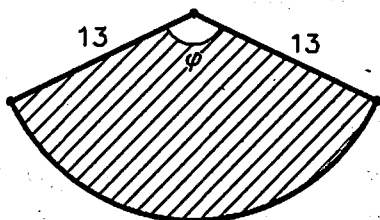
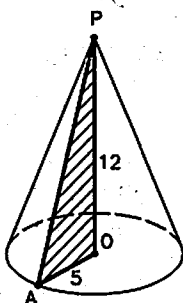
Развертка боковой поверхности представляет собой сектор — часть круга, центральный угол которого φ . Найдем φ .

3) Вычисления.

$$\frac{\pi r^2}{360} \cdot \varphi = \pi r l$$

$$\varphi = \frac{360r}{l} = \frac{360 \cdot 5}{13} = 138^\circ 28'$$

Ответ: $\varphi = 138^\circ 28'$.



Задача 16. Через две образующие конуса проведено сечение. Найдите градусную меру угла φ между образующими, если осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник, площадь которого в два раза больше площади сечения, и r — радиус основания конуса.

Решение:

1) $\triangle PAB$ — осевое сечение

$$AB = 2r, \angle APB = 90^\circ$$

$AP = BP$ — образующие

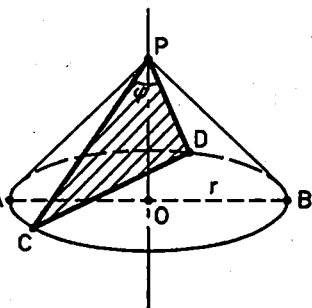
$$\angle PAB = \angle PBA = 45^\circ$$

$$OP = OB = r$$

$$S_{\text{вор}} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OP = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r = r^2$$

- 2) PCD — сечение, проходящее через две образующие PC и PD

$$S_{PCD} = \frac{1}{2} S_{APB} \text{ по условию}$$



- 3) Сечение.

$$S_{PCD} = \frac{1}{2} \cdot PC \cdot PD \cdot \sin \varphi -$$

«...половина произведения двух сторон на синус угла между ними...».

$$PC = PD = \frac{2r}{\sqrt{2}} - \text{образующие конуса}$$

$$S_{PCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2r}{\sqrt{2}} \cdot \sin \varphi = r^2 \sin \varphi$$

- 4) Вычисления.

$$\sin \varphi = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = 30^\circ.$$

Ответ: $\varphi = 30^\circ$.

Задача 17. Высота конуса PO разделена точками деления на три части $PA = AB = BO$, где P — вершина конуса, O — центр круга основания. Через точки A и B проведены плоскости, параллельные основанию. Найдите площади оснований, если S — площадь основания круга.

Решение:

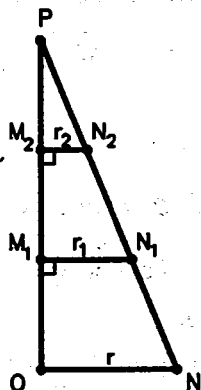
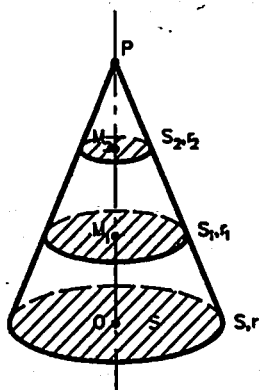
- 1) Подobie.

$\triangle PM_2N_2 \sim \triangle PON$ — признак подобия по двум углам

$\triangle PM_1N_1 \sim \triangle PON$, аналогично.

$$2) \frac{r_2}{r} = \frac{PM_2}{PO} \Rightarrow \frac{r_2^2}{r^2} = \frac{PM_2^2}{PO^2} \Rightarrow \frac{\pi r_2^2}{\pi r^2} = \frac{PM_2^2}{PO^2}$$

$$\frac{S_2}{S} = \left(\frac{1}{3}\right)^2, S_2 = \frac{1}{9}S$$



$$3) \quad \frac{\pi}{r} = \frac{PM_1}{PO} \Rightarrow \frac{\pi}{r} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\pi r^2}{\pi r^2} = \frac{4}{9} \cdot \frac{S_1}{S} = \frac{4}{9}$$

$$S_1 = \frac{4}{9}S$$

Ответ: $\frac{1}{9}S, \frac{4}{9}S$.

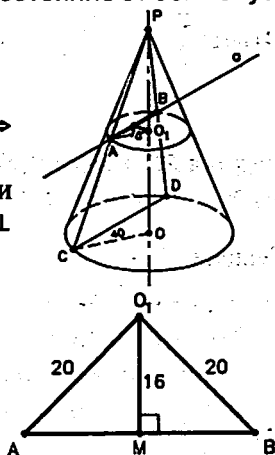
Задача 18. Прямая a , перпендикулярная оси конуса, пересекает конус и делит образующие конуса пополам. Найдите отрезок прямой, находящийся внутри конуса, если радиус основания конуса равен 40 м и расстояние от оси конуса до прямой равно 16 м.

Решение:

- 1) $\triangle PDC$: AB — средняя линия $\Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow AB$ — основание.
- 2) Проведем плоскость через a и перпендикулярную OP , т.к. $AB \perp OP$ по условию
- 3) AO_1 — средняя линия $\triangle OPC$,

$$AO_1 = \frac{1}{2}CO = 20 \text{ (м)}$$

- 4) $\triangle AO_1B$ — равнобедренный, $O_1M \perp AB$



$$AM = \frac{1}{2}AB = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{4 \cdot 36} = 12 \text{ (м)}$$

$$AB = 24 \text{ (м)}$$

Ответ: 24 м.

Задача 19. Угол между образующей конуса и основанием равен 75° . Найдите радианную меру угла развернутой боковой поверхности конуса.

Решение:

- 1) Пусть радиус основания r
 $\triangle AOP$ — прямоугольный

$$AP = \frac{AO}{\cos 75^\circ} = \frac{r}{\cos 75^\circ}$$

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ &= \cos (30^\circ + 45^\circ) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

- 2) Окружность.

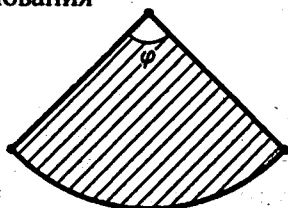
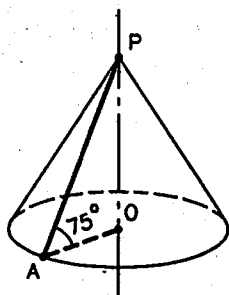
$l = 2\pi r$ — длина окружности основания

- 3) Развертка.

$$\varphi = \frac{2\pi r}{\frac{r}{\cos 75^\circ}} = \frac{2\pi \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{2} (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \approx \frac{\pi}{2} \cdot 1,035$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} \cdot 1,035$.



Задача 20. Высота усеченного конуса равна 48 дм, радиусы оснований 36 дм и 72 дм. Чему равна образующая?

Решение:

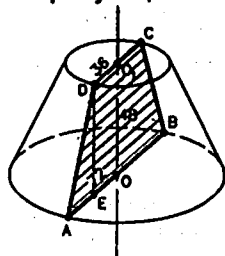
- 1) Трапеция $ABCD$ — равнобокая.

Д/п: $DE \perp AB$

- 2) $\triangle ADE$ — прямоугольный

$AD^2 = DE^2 + AE^2$ — по теореме Пифагора

$$DE = OO_1 = 48 \text{ (дм)}$$



$$AE = OA - OE = 72 - 36 = 36 \text{ (дм)}$$

3) Вычисления.

$$AD^2 = 48^2 + 36^2 = 12^2 \cdot (4^2 + 3^2) = 12^2 \cdot 5^2 = 60^2$$

$$AD = 60 \text{ (дм)}$$

Ответ: 60 дм.

Задача 21. Образующая усеченного конуса имеет угол наклона α с плоскостью основания. Найдите площадь осевого сечения, если r_1 и r_2 — радиусы оснований.

Решение:

1) $ABCD$ — равнобокая трапеция.

Д/п: $BE \perp AD$

$$2AE = AD - BC = 2r_1 - 2r_2 \quad (r_1 > r_2)$$

$$AE = r_1 - r_2$$

2) $\triangle ABE$ — прямоугольный

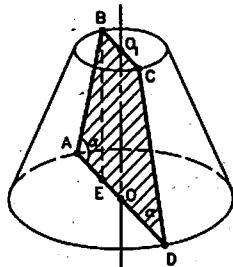
$$BE = AE \cdot \operatorname{tg} \alpha = (r_1 - r_2) \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

3) Осевое сечение.

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BE = \frac{2r_1 + 2r_2}{2} \cdot (r_1 - r_2) \cdot \operatorname{tg} \alpha =$$

$$= (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) \operatorname{tg} \alpha = (r_1^2 - r_2^2) \operatorname{tg} \alpha$$

Ответ: $(r_1^2 - r_2^2) \operatorname{tg} \alpha$.



Задача 22. Найдите высоту равностороннего цилиндра, вписанного в конус с высотой, равной h , и радиусом основания r .

Решение:

1) Говорят, что задан равносторонний цилиндр, если высота цилиндра равна диаметру окружности основания цилиндра.

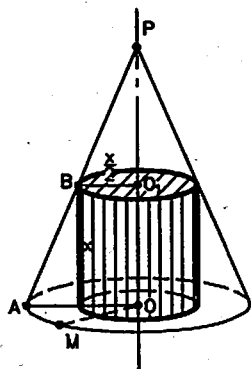
2) Подобные треугольники.

$$\triangle PO_1B \sim \triangle POA$$

$$\frac{BO_1}{AO} = \frac{PO_1}{PO}$$

$$BO_1 = \frac{1}{2}x, PO = h$$

$$PO_1 = h - x$$



3) Вычисления.

$$\frac{\frac{1}{2}x}{r} = \frac{h-x}{h}$$

$$\frac{1}{2}xh = rh - rx$$

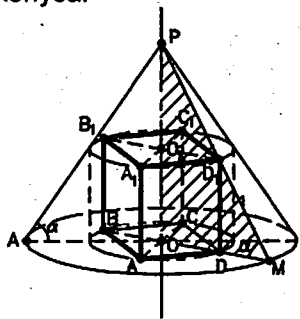
$$x = \frac{2rh}{h+2r}$$

Ответ: $\frac{2rh}{h+2r}$

Задача 23. «Куб и конус». Найдите площадь поверхности куба, вписанного в конус, если образующая конуса равна l и составляет угол α с основанием конуса.

Решение:

- 1) Пусть ребро вписанного куба равно x . Тогда $OO_1 = x$, квадрат $A_1B_1C_1D_1$ вписан в окружность с центром в точке O_1 . Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $\frac{x}{\sqrt{2}}$.



- 2) Подобные треугольники.

$$\triangle PO_1D_1 \sim \triangle POM \Rightarrow \frac{O_1D_1}{MO} = \frac{PO_1}{PO}$$

$$MO = MP \cdot \cos \alpha = l \cdot \cos \alpha$$

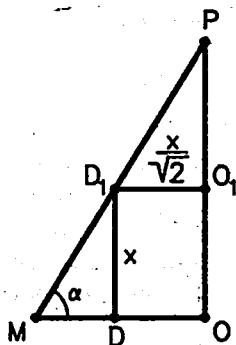
$$PO = MP \cdot \sin \alpha = l \cdot \sin \alpha$$

- 3) Вычисления.

$$S_{\text{пов. куба}} = 6x^2$$

$$\frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{l \cos \alpha} = \frac{l \sin \alpha - x}{l \sin \alpha}$$

$$x = \frac{l \sin \alpha \cos \alpha}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{l \sin 2\alpha}{\sqrt{2} \sin \alpha + 2 \cos \alpha}$$



Ответ: $\frac{6l^2 \sin^2 2\alpha}{(\sqrt{2} \sin \alpha + 2 \cos \alpha)^2}$

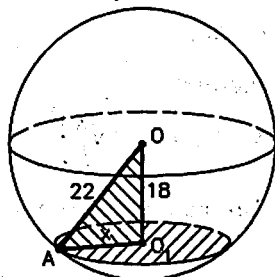
Задача 24. Найдите площадь сечения шара радиусом 22 см, если плоскость сечения находится на расстоянии 18 см от центра.

Решение:

- 1) $\triangle OAO_1$ — прямоугольный
 x — радиус сечения
 $x^2 = 22^2 - 18^2 = 4 \cdot 40 = 160 \text{ (см}^2\text{)}$

- 2) Площадь сечения:
 $S = \pi x^2 = \pi \cdot 160 \text{ (см}^2\text{)}$

Ответ: $160\pi \text{ см}^2$.



Задача 25. Задан центр сферы и ее радиус. Составьте уравнение сферы, если точки O — центр, R — радиус сферы:

- 1) $O(4; -2; -11); R = 4$
 2) $O(-1; 0; 5); R = 0,3$
 3) $O\left(\frac{1}{2}; \sqrt{3}; -3\right), R = \sqrt{5}$

Решение:

- 1) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 + (z + 11)^2 = 16$
 2) $(x + 1)^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 0,09$
 3) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - \sqrt{3})^2 + (z + 3)^2 = 5$

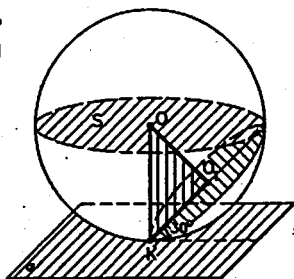
Задача 26. Через точку касания проведена плоскость под углом 30° к касательной плоскости в этой же точке. Найдите площадь сечения, если площадь сечения шара диаметральной плоскостью равна 5.

Решение:

- 1) Большой круг:

$$S = \pi R^2$$

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \text{ — радиус шара}$$



2) $\triangle O O_1 K$ — прямоугольный

$$OK = R; \angle K O O_1 = 30^\circ$$

$$r = KO_1 = \frac{1}{2}R$$

3) Сечение:

$$S_c = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{\pi}} \right)^2 = \frac{S}{4}$$

$$\text{Так как } S=5, \text{ то } S_c = \frac{5}{4}$$

Ответ: $\frac{5}{4}$

Задача 27. Найдите радиус сферы R и координаты центра сферы, заданной уравнениями:

1) $x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - z = 0$

2) $x^2 + 6x + y^2 + y + z^2 = 0$

3) $x^2 - 14x + y^2 + 8y + z^2 + 4z = 0$

4) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 + 6z - 11 = 0$

5) $x^2 + 10x + y^2 - 6y + z^2 - 8z - 50 = 0$

Решение:

Метод выделения полных квадратов.

1) $x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - z = 0$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 2y + 1 - 1 + z^2 - z + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$O\left(1; 1; \frac{1}{2}\right), R = 1,5$$

2) $x^2 + 6x + y^2 + y + z^2 = 0$

$$x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 + y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + z^2 = 0$$

$$(x+3)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = 9\frac{1}{4}$$

$$O\left(-3; \frac{1}{2}; 0\right), R = \frac{\sqrt{37}}{2}$$

3) $x^2 - 14x + y^2 + 8y + z^2 + 4z = 0$

$$(x-7)^2 - 49 + (y+4)^2 - 16 + (z+2)^2 - 4 = 0$$

$$(x-7)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 69$$

$$O(7; -4; -2), R = \sqrt{69}$$

$$4) \quad x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 + 6z - 11 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 4y + 4 - 4 + z^2 + 6z + 9 - 9 - 11 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 25$$

$$O(1; -2; -3), R = 5$$

$$5) \quad x^2 + 10x + y^2 - 6y + z^2 - 8z - 50 = 0$$

$$x^2 + 10x + 25 - 25 + y^2 - 6y + 9 - 9 + z^2 - 8z + 16 - 16 - 50 = 0$$

$$(x+5)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 10^2$$

$$O(-5; 3; 4), R = 10$$

Ответ: точка O — центр шара, R — радиус шара.

$$1) \quad O\left(1; 1; \frac{1}{2}\right), R = 1,5$$

$$2) \quad O\left(-3; \frac{1}{2}; 0\right), R = \frac{\sqrt{37}}{2}$$

$$3) \quad O(7; -4; -2), R = \sqrt{69}$$

$$4) \quad O(1; -2; -3), R = 5$$

$$5) \quad O(-5; 3; 4), R = 10.$$

Задача 28. «Призма и конус». Образующая конуса / наклонена к плоскости основания под углом α . У правильной треугольной призмы, вписанной в конус, все ребра равны. Чему равна площадь полной поверхности призмы?

Решение:

- 1) Высоты конуса, радиус основания.

$\triangle AOP$ — прямоугольный

$$PO = AP \cdot \sin \alpha = l \cdot \sin \alpha$$

$$OA = AP \cdot \cos \alpha = l \cdot \cos \alpha$$

- 2) Треугольная призма.

Пусть ребро призмы равно x .

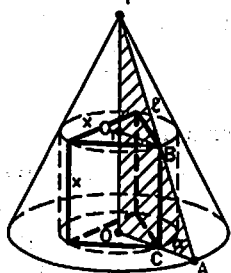
Призма правильная, значит, основания призмы — правильные треугольники.

$\frac{x}{\sqrt{3}}$ — радиус окружности, описанной около треуголь-

ника — основания призмы.

- 3) Подобие.

$$\triangle PO_1B \sim \triangle POA$$



$$\frac{O_1B}{OA} = \frac{PO_1}{PO} \text{ или } \frac{\frac{x}{\sqrt{3}}}{l \cos \alpha} = \frac{l \sin \alpha - x}{l \sin \alpha}$$

$$x = \frac{\sin 2\alpha}{\frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{3}} + 2 \cos \alpha}$$

4) Полная поверхность призмы:

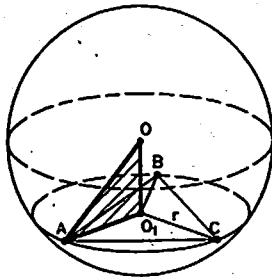
$$S_{\text{полн.}} = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}}$$

$$S_{\text{полн.}} = 2 \cdot \frac{x^2 \sqrt{3}}{4} + 3x^2 = x^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \right), \text{ где } x \text{ — ребро призмы}$$

$$S_{\text{полн.}} = \frac{l^2 \sin^2 2\alpha}{\left(\frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{3}} + 2 \cos \alpha \right)^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \right)$$

Ответ: $\frac{l^2 \sin^2 2\alpha}{4 \left(\frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{3}} + 2 \cos \alpha \right)^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \right).$

Задача 29. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника $\triangle ABC$, если вершины треугольника находятся на одном и том же расстоянии от центра шара $OA = OB = OC = 39$ дм, и $AB = 24$ дм, $BC = 30$ дм, $AC = 18$ дм, радиус шара — 39 дм.



Решение:

1) Площадь треугольника $\triangle ABC$:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ — по формуле Герона}$$

$$p = \frac{AB + BC + AC}{2} = 36 \text{ (дм)} \text{ — полупериметр}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{36 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 18} = 36 \cdot 6 = 216 \text{ (дм}^2\text{)}$$

2) Сечение шара плоскостью ABC — круг, радиуса r .

$$r = \frac{abc}{4S}$$

$$r = \frac{18 \cdot 24 \cdot 30}{4 \cdot 216} = 15 \text{ (дм)}$$

3) $\triangle AOO_1$ — прямоугольный

$OO_1^2 = OA^2 - AO_1^2$ — по теореме Пифагора

$$OO_1^2 = 39^2 - 15^2 = 24 \cdot 54 = 144 \cdot 9 = 36^2$$

$$OO_1 = 36 \text{ (дм)}$$

Ответ: 36 дм.

Задача 30. Задан шар радиуса R . Найдите зависимость $h = h(x)$, где x — диагональ прямоугольника, вершины которого лежат на поверхности шара. Найдите область определения и множество значений функции $h = h(x)$.

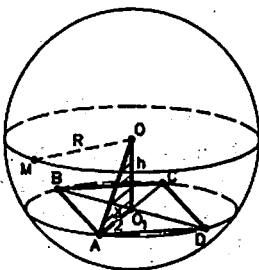
Решение:

1) Обозначения:

$OO_1 = h$ — расстояние от центра шара до плоскости прямоугольника $ABCD$;

$AC = BD = x$ — диагонали прямоугольника $ABCD$;

$R = OM$ — радиус шара.



2) Прямоугольник.

Диагонали прямоугольника равны, $O_1 = AC \cap BD$ — центр описанной окружности, $OKP \left(O_1; \frac{x}{2} \right)$.

3) $\triangle AOO_1$ — прямоугольный

$$h^2 = R^2 - \frac{x^2}{4} \text{ — по теореме Пифагора}$$

$$h = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$$

4) Область определения и множество значений:

Область определения $D(h)$ находим из условия:

$$R^2 - \frac{x^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 2R$$

$$D(h) = (0; 2R]$$

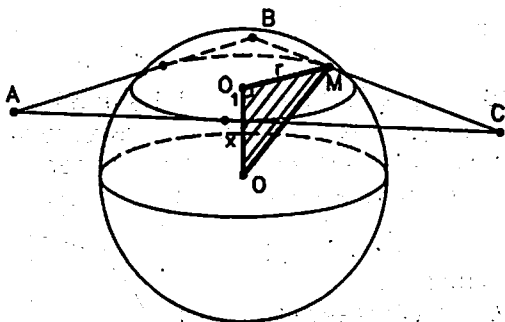
Случай $h = 0$ соответствует прямоугольнику, вписанному в большую окружность.

Множество значений $E(h) = [0; R)$.

Ответ: $h = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$, $D(h) = [0; 2R)$, $E(h) = (0; R]$.

Задача 31. Шар радиусом 1 м касается сторон треугольника $\triangle ABC$, $AB = 2$ м, $BC = 2$ м, $AC = 2,4$ м. Вычислите расстояние от центра шара до плоскости ABC .

Решение:



1) Сечение.

Всякое сечение плоскостью шара представляет собой круг. Окружность $ОКР(О_1, r)$ — вписанная окружность в $\triangle ABC$. Найдем радиус r .

2) Вычисления.

$$r = \frac{2S}{P}, \text{ где}$$

$$P = AB + BC + AC = 2 + 2 + 2,4 = 6,4 \text{ (м)} — \text{периметр}$$

$$S = \sqrt{3,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot 0,8} = 10^{-2} \cdot \sqrt{32 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 8} =$$

$$= 16 \cdot 12 \cdot 10^{-2} = 1,92 \text{ (м}^2\text{)}$$

$$r = \frac{2 \cdot 1,92}{6,4} = 0,6 \text{ (м)} — \text{радиус вписанной окружности}$$

3) $\triangle OO_1M$ — прямоугольный

$$OM^2 = O_1O^2 + O_1M^2 — \text{по теореме Пифагора}$$

$$x = O_1O = \sqrt{1^2 - 0,6^2} = 0,8 \text{ (м)}$$

Ответ: 0,8 м.

Задача 32. Площадь ромба $ABCD$ равна 6 см^2 , а его стороны касаются шаровой поверхности. Найдите расстояние от центра шара до плоскости $ABCD$, если $AB = 2,5 \text{ см}$ и радиус шара $R = 2 \text{ см}$.

Решение:

1) Ромб.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}Pr, \text{ где}$$

P — периметр ромба $ABCD$,
 r — радиус вписанной окружности.

2) Вычисления.

$$P = AB + BC + CD + AD = 4AB = 4 \cdot 2,5 = 10 \text{ (см)}$$

$$r = \frac{2S}{P} = \frac{2 \cdot 6}{10} = 1,2 \text{ (см)}$$

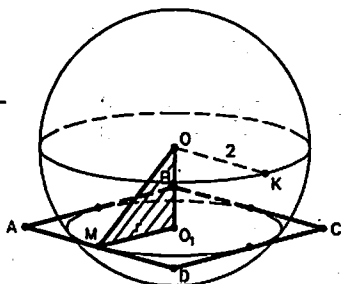
3) $\triangle OMO_1$ — прямоугольный

$$OM^2 = O_1M^2 + O_1O^2 \text{ — по теореме Пифагора}$$

$$O_1O^2 = 2^2 - 1,2^2 = 2,56 = 1,6^2$$

$$OO_1 = 1,6 \text{ (см)}$$

• **Ответ:** 1,6 см.



Задача 33. «Конус и сфера». Конус вписан в сферу радиусом $R = 5$ см, образующая конуса $l = 6$ см. Найдите площадь основания конуса.

Решение:

1) $\triangle SOM$ — прямоугольный

Обозначим $OO_1 = x$

$$SO = SO_1 + O_1O = R + x = 5 + x$$

$$MS^2 = OM^2 + SO_1^2 \text{ — по теореме Пифагора}$$

$$OM^2 = 6^2 - (5 + x)^2 = 11 - 10x - x^2$$

2) $\triangle O_1OM$ — прямоугольный

$$MO_1^2 = O_1O^2 + MO^2$$

$$MO^2 = 5^2 - x^2$$

3) Вычисления.

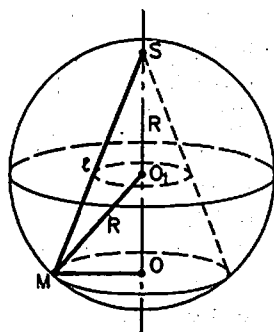
$$25 - x^2 = 11 - 10x - x^2$$

$$-10x = 14$$

$$x = -1,4$$

$OO_1 < 0$ — это означает, что рисунок не соответствует геометрической ситуации.

Начнем с угла $\angle SO_1M = \alpha$



$$\cos \alpha = \frac{R^2 + R^2 - l^2}{2R^2} = \frac{2R^2 - l^2}{2R^2} = \frac{50 - 36}{50} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

α — острый угол

Значит, вписанный конус находится в верхнем полушарии:

$$SO = R - x$$

$$OM^2 = 11 + 10x - x^2$$

$$25 - x^2 = 11 + 10x - x^2$$

$$x = 1,4 \text{ (см)}$$

$$OM^2 = 25 - 1,96 = 4,8^2$$

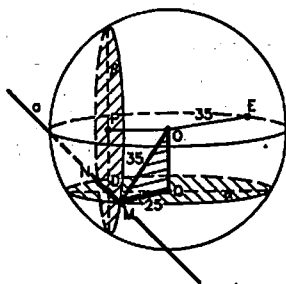
$$S = \pi r^2 = \pi \cdot 23,04$$

Ответ: $23,04\pi$.

Задача 34. Пусть α и β — две перпендикулярные плоскости и $\alpha \cap \beta = a$. Прямая a пересекает сферу в точках M и N . Найдите длину отрезка MN , если шар имеет радиус 35 мм, а радиусы окружностей, по которым плоскости α и β пересекают сферу, одинаковы и равны 25 мм.

Решение:

- 1) $OQ \perp \alpha$, $OP \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = a$
- 2) $OP = OQ$, т.к. радиусы окружностей сечения равны по условию.
- 3) $OPDQ$ — квадрат, $\angle PDQ = 90^\circ$ — линейный угол двугранного угла $QMNP$ равен 90° , т.к. плоскости α и β перпендикулярны.
 $PD \parallel OQ$ и $OP \parallel QD$, т.к. два перпендикуляра к одной прямой сами параллельны
- 2) $\triangle OMQ$ — прямоугольный
 $OQ \perp MQ$, т.к. $OQ \perp \alpha$
 $OM^2 = MQ^2 + OQ^2$
 $OQ^2 = 35^2 - 25^2 = 10 \cdot 60$
 $OQ = 10\sqrt{6}$ (мм)
- 3) Опять квадрат $OQDP$.
 $OP = OQ = DQ = PD = 10\sqrt{6}$
- 4) $\triangle DMQ$ — прямоугольный



Точка D — середина MN

$$MQ^2 = DM^2 + DQ^2$$

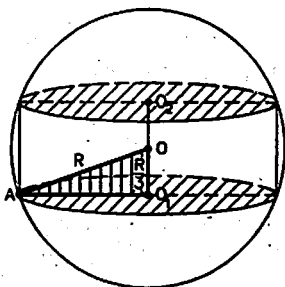
$$DM^2 = 625 - 600 = 25$$

$$DM = 5$$

$$MN = 2DM = 2 \cdot 5 = 10 \text{ (мм)}$$

Ответ: 10мм

Задача 35. «Шар и цилиндр». Расстояние от центра шара до плоскости сечения составляет треть радиуса шара R . В шар вписан цилиндр, основанием которого является полученное сечение шара. Найдите полную поверхность цилиндра. Чему равно отношение площадей поверхности сферы и полной поверхности цилиндра?



Решение:

1) $\triangle AOO_1$ — прямоугольный

$AO^2 = O_1O^2 + O_1A^2$ — по теореме Пифагора

$$x^2 = AO_1^2 = R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2 = \frac{8R^2}{9}$$

$$x = AO_1 = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$$

2) Цилиндр.

$$\text{Радиус основания } r = AO_1 = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Высота цилиндра } H = O_1O_2 = 2 \cdot \frac{R}{3} = \frac{2R}{3}$$

3) Поверхность цилиндра:

$$\begin{aligned} S_{\text{полн.}} &= 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot H = 2\pi \cdot \left(\frac{2R\sqrt{2}}{3}\right)^2 + 2\pi \cdot \frac{2R\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2R}{3} = \\ &= \frac{16\pi R^2}{9} + \frac{8\pi R^2\sqrt{2}}{9} = \frac{8\pi R^2}{9} (2 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

4) Сфера.

$$S = 4\pi R^2$$

5) Вычисления:

$$\frac{S_{\text{сфера}}}{S_{\text{пл.и.}}} = \frac{4\pi R^2}{\frac{8\pi R^2}{9}(2 + \sqrt{2})} = \frac{36}{8(2 + \sqrt{2})} \approx 1,32$$

Ответ: $\frac{8\pi R^2}{9}(2 + \sqrt{2})$; 1,32.

Задача 36. Площадь поверхности сферы равна 225π дм². Найдите расстояние между плоскостями, если они параллельны и их сечениями являются окружности радиусами 4,5 дм и 6 дм.

Решение:

1) Сфера, радиус.

 $S = 4\pi R^2$, найдем R^2 — радиус сферы

$$225\pi = 4\pi R^2$$

$$R^2 = \frac{225}{4}$$

2) Расстояния от центра сферы:

$$h_1^2 = R^2 - r_1^2 = \frac{225}{4} - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{144}{4} = 36$$

$$h_1 = 6 \text{ (дм)}$$

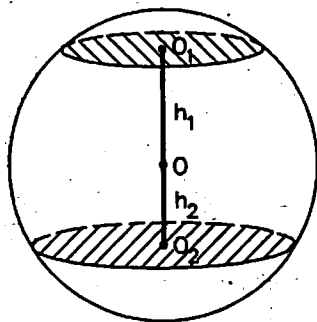
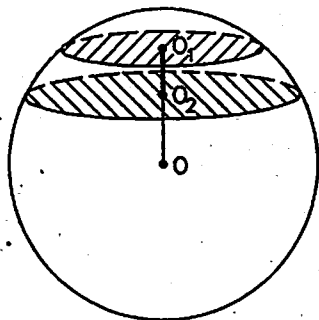
$$h_2^2 = R^2 - r_2^2 = \frac{225}{4} - 36 = \frac{81}{4}$$

3) Рассмотрим случай

$$OO_1 = OO_2 + O_1O_2$$

Точка O_2 расположена между точками O и O_1 .

$$OO_1 = h_1 = 6 \text{ (дм)}$$



$$OO_2 = h_2 = 4,5 \text{ (дм)}$$

$$6 = 4,5 + O_1O_2$$

$$x = O_1O_2 = 1,5 \text{ (дм)}$$

- 4) Рассмотрим теперь другой случай, когда точка O — центр сферы — находится между O_1 и O_2 — центрами окружностей сечений.

$$O_1O_2 = OO_1 + OO_2 = h_1 + h_2 = 4,5 + 6 = 10,5 \text{ (дм)}$$

Ответ: 1,5 дм; 10,5 дм.

Задача 37. «Сфера и тетраэдр». Найдите отношение площадей поверхности сферы и правильного тетраэдра, вписанного в сферу.

Решение:

- 1) Пусть R — радиус сферы.

DO_1 — высота тетраэдра.

$$DO_1 = DO + OO_1 = R + x$$

$$OO_1 \perp ABC$$

- 2) Ребро тетраэдра.

$\triangle OO_1B$ — прямоугольный

$$r^2 = R^2 - x^2$$

радиус описанной окружности около $\triangle ABC$, основания тетраэдра

$$r = \frac{AB}{\sqrt{3}} \Rightarrow AB = BC = AC = \sqrt{3(R^2 - x^2)}$$

- 4) $\triangle BDO_1$ — прямоугольный

$$BD^2 = O_1B^2 + O_1D^2 \text{ — по теореме Пифагора}$$

$$3(R^2 - x^2) = R^2 - x^2 + (R + x)^2, \text{ т.к.}$$

в правильном тетраэдре все ребра равны.

- 5) Вычисления:

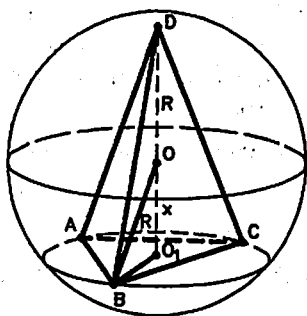
$$3R^2 - 3x^2 = R^2 - x^2 + R^2 + 2Rx + x^2$$

$$3x^2 + 2Rx - R^2 = 0, x > 0 \Rightarrow x = \frac{R}{3}, x = -R \text{ — не подходит}$$

$$AB^2 = 3 \left(R^2 - \frac{R^2}{9} \right) = \frac{8R^2}{3}$$

- 6) Площадь правильного тетраэдра:

$$S = 4S_{ABC} = 4 \cdot \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{8R^2}{\sqrt{3}}$$



7) Отношение:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{сфера}} = \frac{8R^2}{\sqrt{3} \cdot 4\pi R^2} \approx 0,37$$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{3}\pi} \approx 0,37$.

Задача 38. На сфере заданы точки A и B . Угол между радиусом, проведенным в точку A , и отрезком AB равен 30° . Найдите площадь поверхности сферы, если $AB = 18$ см.

Решение:

1) $\triangle AOB$ — равнобедренный

$AO = BO = R$, R — радиус сферы

OO_1 — медиана, $AO_1 = BO_1 \Rightarrow OO_1 \perp AB$

$AO_1 = 9$

2) $\triangle AOO_1$ — прямоугольный

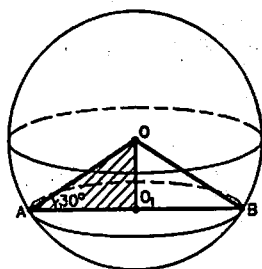
$$AO = \frac{AO_1}{\cos 30^\circ} = \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3} \text{ (см)}$$

3) Площадь поверхности сферы:

$$S = 4\pi R^2$$

$$S = 4\pi \cdot (6\sqrt{3})^2 = 432\pi \text{ (см}^2\text{)}$$

Ответ: $432\pi \text{ см}^2$.



Задача 39. «Шар и пирамида». Найдите отношение радиуса шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, к высоте пирамиды, если плоский угол при вершине пирамиды равен φ .

Решение:

1) Высота пирамиды:

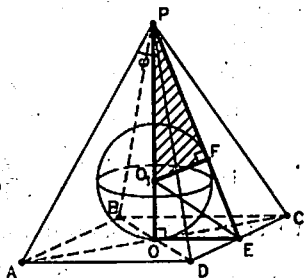
$OP = OO_1 + PO_1$, где OO_1 — радиус вписанного шара.

2) Биссектриса.

O_1E — биссектриса угла $\angle OEP$

$$O_1O = O_1F$$

$$3) \frac{O_1O}{O_1P} = \frac{O_1F}{O_1P} = \frac{OE}{PE} = \sin \angle OPE$$



4) $\triangle PDE$ — прямоугольный

$$\angle DPE = \angle CPE = \frac{\varphi}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{DE}{PE}, DE = OE, \text{ т.к. } ABCD — \text{квадрат} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{O_1O}{O_1P}$$

Ответ: $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$.

Задача 40. Докажите, что сфера и полусфера имеют одинаковые площади поверхностей, если их радиусами соответственно являются высота и сторона одного и того же правильного треугольника.

Решение:

1) В правильном треугольнике a — сторона,

$$h = a \frac{\sqrt{3}}{2} — \text{высота}$$

2) Сфера.

R — радиус сферы.

$$R_1 = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S = 4\pi R_1^2$$

$$S = 4\pi \cdot \left(a \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a^2$$

3) Полусфера.

Поверхность полусферы состоит из:

$$\hat{S} = S_1 + S_2,$$

$$S_1 = \frac{1}{2} 4\pi R_2^2 = 2\pi R_2^2, \text{ т.е.}$$

половины сферической поверхности

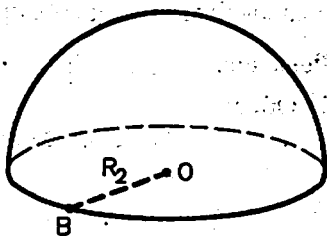
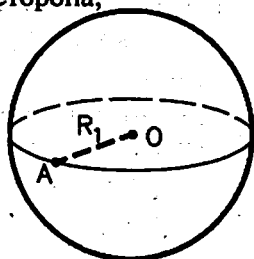
$$S_2 = \pi R_2^2 —$$

основание полусферы, большой круг

$$\hat{S} = 2\pi R_2^2 + \pi R_2^2 = 3\pi R_2^2$$

при $R_2 = a$ получаем

$$\hat{S} = 3\pi a^2, \text{ т.е. } S = \hat{S}.$$



VIII. Объемы многогранников

Задача 1. Найдите площадь поверхности куба, если известно, что при уменьшении ребра куба на 1 м его объем уменьшается на 19 м^3 .

Решение:

1) Общее выражение:

$$(x + \Delta x)^3 - x^3 = \Delta V, \text{ где}$$

Δx — изменение длины ребра куба;

ΔV — изменение объема куба.

2) Вычисления.

По условию $\Delta x = -1$, $\Delta V = -19$

Получаем квадратное уравнение:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_1 = -2, x_2 = 3$$

подходит только положительный корень $x = 3$

Площадь поверхности куба:

$$S = 6x^2 = 6 \cdot 3^2 = 54 \text{ (м}^2\text{)}$$

Ответ: 54 м^2 .

Задача 2. Длина, ширина и высота прямоугольного параллелепипеда соответственно равны 4,5 дм, 2 дм и 3 дм. Найдите ребро куба, имеющего тот же объем. Как при этом изменится площадь поверхности?

Решение:

1) Объем.

$$V_{\text{параллелепипеда}} = 4,5 \cdot 2 \cdot 3 = 27 \text{ (дм}^3\text{)}$$

$$V_{\text{пар-да}} = V_{\text{куба}}$$

$$a = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ (дм)} \text{ — ребро куба}$$

2) Площадь поверхности:

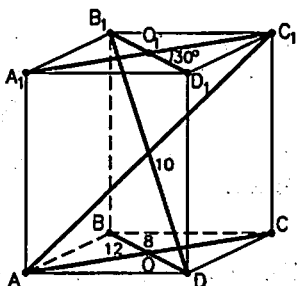
$$S_{\text{пар-да}} = (4,5 \cdot 2 + 4,5 \cdot 3 + 2 \cdot 3) = 57 \text{ (дм}^2\text{)}$$

$$S_{\text{куба}} = 6a^2 = 6 \cdot 3^2 = 54 \text{ (дм}^2\text{)}$$

$$S_{\text{куба}} < S_{\text{пар-да}}$$

Ответ: 3 дм; уменьшается.

Задача 3. Диагонали основания прямого параллелепипеда равны 12 см и 8 см, угол между ними равен 30° . Найдите объем прямого параллелепипеда, если его диагональ равна 10 см.



Решение:

1) Параллелограмм.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC \cdot \sin 30^\circ$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 24 \text{ (см}^2\text{)}$$

2) Высота.

$\triangle B_1BD$ — прямоугольный, т.к. $B_1B \perp ABCD$

$B_1D^2 = B_1B^2 + BD^2$ — по теореме Пифагора

$$B_1B^2 = 10^2 - 8^2 = 36$$

$$B_1B = 6 \text{ (см)}$$

3) Объем.

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h = 24 \cdot 6 = 144 \text{ (см}^3\text{)}$$

4) Диагональ $AC_1 = 10$ см — не подходит по условию задачи, т.к. $AC_1 > AC = 12$

Ответ: 144 см^3 .

Задача 4. Угол между диагональными сечениями прямого параллелепипеда равен 45° . Найдите его объем, если S_1 , S_2 , S_3 — площади основания и диагональных сечений.

Решение:

1) Пусть h — высота прямого параллелепипеда, тогда $\frac{S_2}{h}$ и

$\frac{S_3}{h}$ — диагонали основания.

$$S_{\text{осн.}} = S_1 = \frac{S_2}{2 \cdot h} \cdot \frac{S_3}{h} \cdot \sin 45^\circ$$

$$h^2 = \frac{S_2 \cdot S_3}{S_1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ или } h = \sqrt{\frac{S_2 \cdot S_3}{S_1}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2}}{2}$$

2) Объем.

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h = S_1 \cdot \sqrt{\frac{S_2 \cdot S_3}{S_1}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2}}{2} = \frac{\sqrt{S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot \sqrt{2}}}{2} \text{ (куб. ед.)}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{\sqrt{2} \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}}{2}$ куб. ед.

Задача 5. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если его диагональ, равная a , составляет угол φ с основанием и угол ψ с боковой гранью.

Решение:

1) Высота.

$\triangle B_1BD$ — прямоугольный,
 $B_1B \perp ABCD$

$h = B_1B = a \cdot \sin \varphi$ — высота

$BD = a \cdot \cos \varphi$ — диагональ основания

2) $\triangle B_1C_1D$ — прямоугольный,

т.к. $B_1C_1 \perp D_1C_1$

$C_1D = a \cdot \cos \psi$ — диагональ боковой грани

$B_1C_1 = a \cdot \sin \psi$ — длина

3) Ширина.

$\triangle BDC$ — прямоугольный

$BD^2 = BC^2 + CD^2$ — по теореме Пифагора

$$CD^2 = a^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \psi$$

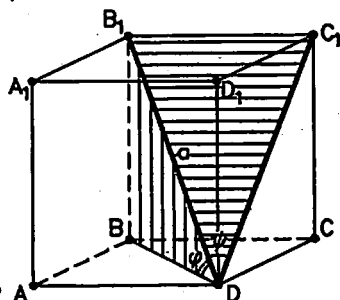
$$CD = a \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \psi}$$

4) Объем.

$$V = a \sin \psi \cdot a \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \psi} \cdot a \sin \varphi =$$

$$= a^3 \cdot \sin \psi \cdot \sin \varphi \cdot \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \psi}$$

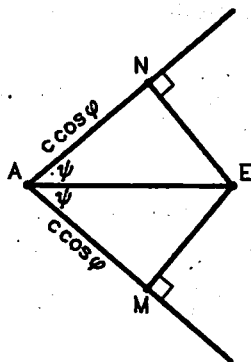
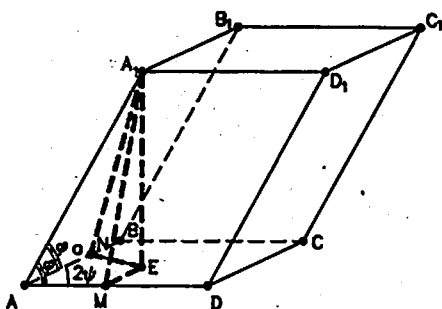
Ответ: $a^3 \cdot \sin \psi \cdot \sin \varphi \cdot \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \psi}$.



Задача 6. Боковое ребро s параллелепипеда составляет угол φ с соседними ребрами основания a и b , угол между которыми равен 2ψ . Найдите объем параллелепипеда.

Решение:

- 1) $A_1E \perp ABCD$, A_1E — высота
Д/п: $A_1M \perp AD$, $A_1N \perp AB$
- 2) $\Delta A_1AM = \Delta A_1AN$ — прямоугольные по гипотенузе c и острому углу $\varphi \Rightarrow A_1M = A_1N$
 $AM = AN = c \cos \varphi$
- 3) $NE \perp AB$, $ME \perp AD$ по теореме о трех перпендикулярах;
 A_1E — перпендикуляр к плоскости $ABCD$, A_1M и A_1N — наклонные,



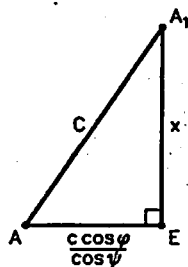
- 4) $\Delta A_1ME = \Delta A_1NE$ по гипотенузе и катету $\Rightarrow$
 $NE = ME$, AE — биссектриса
 ΔAME — прямоугольный

$$AE = \frac{AM}{\cos \psi} = \frac{c \cos \varphi}{\cos \psi}$$

- 5) ΔA_1AE — прямоугольный, т.к.
 $AE \perp ABCD$

$$AA_1^2 = AE^2 + A_1E^2$$

$$x = A_1E = \sqrt{c^2 - \frac{c^2 \cos^2 \varphi}{\cos^2 \psi}} = c \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \psi}}$$



- 6) Объем:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h = ab \sin 2\psi \cdot c \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \psi}} =$$

$$= 2abc \sin \psi \sqrt{\cos^2 \psi - \cos^2 \varphi}$$

Ответ: $2abc \sin \psi \sqrt{\cos^2 \psi - \cos^2 \varphi}$.

Задача 7. Найдите объем параллелепипеда, если:

- а) $a = b = c = m$, $\psi = 45^\circ$, $\varphi = 90^\circ$, где ψ , φ определены в предыдущей задаче;
 б) $\psi = 45^\circ$, $\varphi = 90^\circ$;
 в) $\varphi = 2\psi = 60^\circ$, $a = b = c = m$;
 г) $\varphi = 2\psi$, $0 < 2\psi < 90^\circ$, $a = b = c = m$;
 д) $\psi = 45^\circ$.

Решение:

- а) Найти объем куба с ребром $\overline{m}$. Результат ясен: $V = m^3$.
 С другой стороны:

$$\begin{aligned} V &= 2abc \sin \psi \sqrt{\cos^2 \psi - \cos^2 \varphi} = \\ &= 2 \cdot \overline{m} \cdot \overline{m} \cdot \overline{m} \cdot \sin 45^\circ \cdot \sqrt{\cos^2 45^\circ - \cos^2 90^\circ} = \\ &= 2m^3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = m^3 \end{aligned}$$

- б) Найдите объем прямоугольного параллелепипеда. Результат ясен: $V = abc$. С другой стороны:

$$V = 2abc \sin \psi \sqrt{\cos^2 \psi - \cos^2 \varphi} = 2abc \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = abc$$

- в) Найдите объем параллелепипеда, все грани которого — одинаковые ромбы с острым углом 60° и стороной, равной m :

$$\begin{aligned} V &= 2abc \cdot \sin \psi \cdot \sqrt{\cos^2 \psi - \cos^2 \varphi} = \\ &= 2 \cdot m \cdot m \cdot m \cdot \sin 30^\circ \cdot \sqrt{\cos^2 30^\circ - \cos^2 60^\circ} = \\ &= 2 \cdot m^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2 \cdot m^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{m^3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- г) Найдите объем параллелепипеда, все ребра которого равны m и при вершине A (например) все плоские углы трехгранного угла равны 2ψ .

$$\begin{aligned} V &= 2abc \cdot \sin \psi \cdot \sqrt{\cos^2 \psi - \cos^2 \varphi} = \\ &= 2 \cdot m \cdot m \cdot m \cdot \sin \psi \cdot \sqrt{\cos^2 \psi - \cos^2 2\psi} = \\ &= 2m^3 \cdot \sin \psi \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos 2\psi}{2} - \frac{1 + \cos 4\psi}{2}} = \\ &= 2m^3 \cdot \sin \psi \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(\cos 2\psi - \cos 4\psi)} = 2m^3 \cdot \sin \psi \cdot \sqrt{\cos 3\psi} \cdot \sin \psi \end{aligned}$$

- д) Найдите объем параллелепипеда, в основании которого лежит прямоугольник $a \times b$, а ребро c составляет угол φ с каждой из сторон прямоугольника.

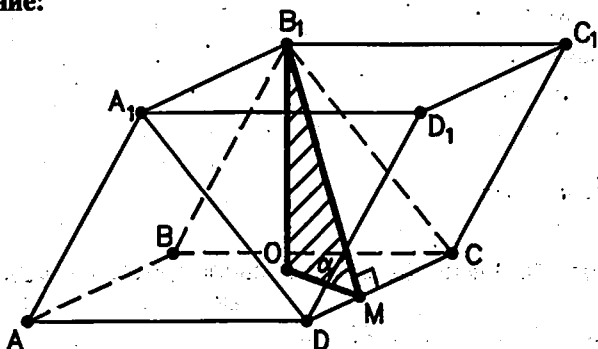
$$\begin{aligned}
 V &= 2abc \cdot \sin \psi \cdot \sqrt{\cos^2 \psi - \cos^2 \varphi} = \\
 &= 2 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \sin 45^\circ \cdot \sqrt{\cos^2 45^\circ - \cos^2 \varphi} = \\
 &= 2abc \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \cos^2 \varphi} = abc \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}} = \\
 &= abc \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\cos 2\varphi}{2}} = abc \cdot \sqrt{-\cos 2\varphi}
 \end{aligned}$$

Ответ: а) m^3 ; б) abc ; в) $\frac{m^3}{\sqrt{2}}$; г) $2m^3 \sin \psi \sqrt{\cos 3\psi \cdot \sin \psi}$;

д) $abc\sqrt{-\cos 2\varphi}$.

Задача 8. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведено сечение $CDA_1 B_1$ под углом α к основанию. Площадь основания в два раза больше площади сечения, ребро $CD = b$. Найдите объем параллелепипеда, если S — площадь сечения.

Решение:



- 1) Высота.

Д/п: $B_1O \perp ABCD$, $B_1M \perp CD$, по теореме о трех перпендикулярах $OM \perp CD$

$\angle B_1MO$ — линейный угол двугранного угла B_1CDB

$\triangle B_1OM$ — прямоугольный

$$h = B_1O = B_1M \cdot \sin \alpha = \frac{S}{CD} \cdot \sin \alpha = \frac{S}{b} \cdot \sin \alpha$$

2) Объем.

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h = 2s \cdot \frac{s}{b} \cdot \sin \alpha = \frac{2s^2}{b} \sin \alpha$$

Ответ: $\frac{2s^2}{b} \sin \alpha$.

Задача 9. Найдите объем правильной четырехугольной призмы, если диагональ боковой грани и сторона основания призмы равны соответственно m и n .

Решение:

1) Основание.

$ABCD$ — квадрат (по определению правильной призмы).

$$S_{ABCD} = n^2$$

2) Высота.

$\triangle C_1CD$ — прямоугольный, т.к.

$$CC_1 \perp ABCD$$

$DC_1^2 = C_1C^2 + CD^2$ по теореме Пифагора

$$m^2 = n^2 + x^2$$

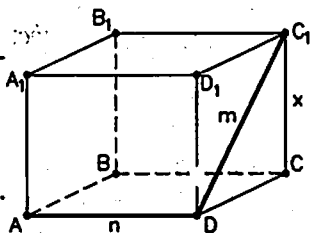
$$x = \sqrt{m^2 - n^2}$$

3) Объем:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h$$

$$V = n^2 \cdot \sqrt{m^2 - n^2}$$

Ответ: $n^2 \cdot \sqrt{m^2 - n^2}$.



Задача 10. Найти объем правильной треугольной призмы, высота которой равна меньшей высоте основания, со сторонами 12 дм, 15 дм и 21 дм.

Решение:

1) Площадь основания призмы:

$$S_{\text{осн.}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ — формула Герона}$$

$$p = \frac{12 + 15 + 21}{2} = 24 \text{ (дм)} \text{ — полупериметр}$$

$$S_{\text{осн.}} = \sqrt{24 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 3} = 12 \cdot 2 \cdot \sqrt{6} = 24\sqrt{6} \text{ (дм}^2\text{)}$$

2) Высоты основания:

$$h = \frac{2S}{a}$$

Три высоты:

$$h_1 = \frac{2 \cdot 24\sqrt{6}}{12} = 4\sqrt{6} \text{ (дм)}$$

$$h_2 = \frac{2 \cdot 24\sqrt{6}}{15} = 3,2\sqrt{6} \text{ (дм)}$$

$$h_3 = \frac{2 \cdot 24\sqrt{6}}{21} = 2\frac{2}{7}\sqrt{6} \text{ (дм)}$$

$$\min(h_1, h_2, h_3) = 2\frac{2}{7}\sqrt{6} \text{ (дм)}$$

3) Объем призмы:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h = 24\sqrt{6} \cdot 2\frac{2}{7}\sqrt{6} = 329\frac{1}{7} \text{ (дм}^3\text{)}$$

Ответ: $329\frac{1}{7} \text{ дм}^3$.

Задача 11. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если сторона и диагональ основания соответственно равны 3 и 6, а диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 30° .

Решение:

1) Высота.

 $\triangle C_1CA$ — прямоугольный, т.к. $C_1C \perp ABCD$

$$h = CC_1 = AC \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

2) Площадь основания:

$$S_{\text{осн.}} = S_{ABCD} = AD \cdot CD$$

$$AD^2 = AC^2 - CD^2 = 6^2 - 3^2 = 27$$

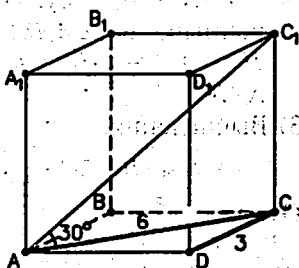
$$AD = 3\sqrt{3}$$

$$S_{\text{осн.}} = 3\sqrt{3} \cdot 3 = 9\sqrt{3}$$

3) Объем:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h = 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 54 \text{ (куб. ед.)}$$

Ответ: 54 куб. ед.



Задача 12. Через вершины A_1 , B и C правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ проведено сечение A_1BC . Плоскость сечения составляет с плоскостью основания угол 45° . Найдите объем призмы, если площадь основания равна $7\sqrt{3} \text{ см}^2$.

Решение:

1) Основание.

$\triangle ABC$ — равносторонний по определению правильной призмы.

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

где $a = AB = BC = AC$ — сторона равностороннего треугольника.

Пусть h — высота в равностороннем треугольнике $\triangle ABC$, $h = AD$.

$$a = \frac{2h}{\sqrt{3}} \text{ подставим в } S_{ABC}$$

$$S_{ABC} = \frac{4h^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}, \text{ или } h^2 = \sqrt{3} \cdot S_{ABC}$$

2) Объем призмы:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot H$$

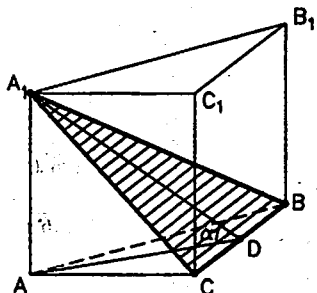
$\triangle A_1AD$ — прямоугольный, т.к. $A_1A \perp ABC$, и равнобедренный, т.к. $\angle A_1DA = 45^\circ$

$H = A_1A = AD = h$, т.е. высота призмы равна высоте $\triangle ABC$.

3) Вычисления:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot H = 7\sqrt{3} \cdot \sqrt{\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{3}} = 21\sqrt{7} \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: $21\sqrt{7} \text{ см}^3$.



Задача 13. Найдите объем прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которой заданы площади диагонального сечения $DD_1 B_1 B$ — 36 см^2 , грани $AA_1 B_1 B$ — 68 см^2 , грани $AA_1 D_1 D$ — 40 см^2 , основания $ABCD$ — 32 см^2 .

Решение:

Пусть боковое ребро призмы равно x

$$AA_1 = BB_1 = DD_1 = CC_1 = x$$

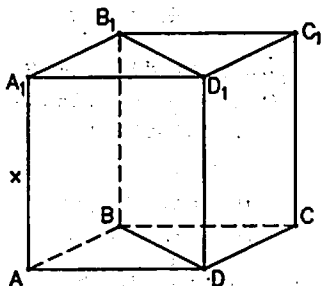
- 1) Стороны треугольника.

AA_1B_1B , DD_1B_1B , AA_1D_1D — прямоугольники, т.к. призма прямая.

$$AB = \frac{S_{AA_1B_1B}}{AA_1} = \frac{68}{x}$$

$$BD = \frac{S_{BB_1D_1D}}{BB_1} = \frac{36}{x}$$

$$AD = \frac{S_{AA_1D_1D}}{DD_1} = \frac{40}{x}$$



- 2) Уравнение.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16 \text{ (см}^2\text{)}$$

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{68}{x} + \frac{36}{x} + \frac{40}{x} \right) = \frac{72}{x} \text{ — полупериметр } \triangle ABC$$

$$16 = \sqrt{\frac{72}{x} \cdot \frac{4}{x} \cdot \frac{36}{x} \cdot \frac{32}{x}} = \frac{72 \cdot 8}{x^2}$$

$$x^2 = \frac{72 \cdot 8}{16} = 36$$

$$x = 6 \text{ (см)}$$

- 3) Объем призмы:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h = S_{ABCD} \cdot h = 32 \cdot 6 = 192 \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: 192 см^3 .

Задача 14. Диагональ боковой грани прямой треугольной призмы равна $2d$ и образует угол φ с боковым ребром. Основание призмы — равнобедренный треугольник, в котором задан тупой угол 2γ . Найдите объем призмы.

Решение:

- 1) Пусть $2d$ — диагональ грани

AA_1C_1C .

Это первый случай.

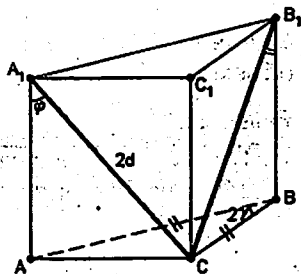
- 2) $\triangle AA_1C$ — прямоугольный, т.к.

$AA_1 \perp ABC$

$$AC = 2d \sin \varphi$$

$$AA_1 = 2d \cos \varphi$$

- 3) Основание.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BE$$

BE — медиана, проведенная к основанию AC , при этом она является и биссектрисой, и высотой.

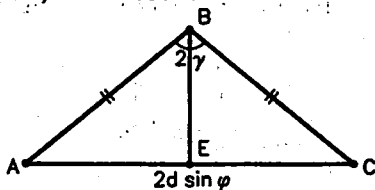
Следовательно,

$$\angle ABE = \angle CBE = \gamma$$

$$AE = CE = d \sin \varphi$$

$$BE = CE \cdot \operatorname{ctg} \gamma$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BE$$



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2d \sin \varphi \cdot d \sin \varphi \cdot \operatorname{ctg} \gamma = d^2 \sin^2 \varphi \cdot \operatorname{ctg} \gamma$$

4) Объем призмы:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h = S_{ABC} \cdot AA_1 = d^2 \sin^2 \varphi \cdot \operatorname{ctg} \gamma \cdot 2d \cos \varphi = \\ = d^3 \sin 2\varphi \cdot \sin \varphi \cdot \operatorname{ctg} \gamma$$

5) Теперь пусть $2d$ — диагональ грани CC_1B_1B

$$B_1C = 2d$$

Это второй случай (и последний!)

6) $\triangle B_1BC$ — прямоугольный

$$BC = 2d \sin \varphi$$

$$BB_1 = 2d \cos \varphi$$

7) $\triangle ABC$ — равнобедренный с основанием AC

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin 2\gamma = \frac{1}{2} \cdot 2d \sin \varphi \cdot 2d \sin \varphi \cdot \sin 2\gamma = \\ = 2d^2 \sin^2 \varphi \cdot \sin 2\gamma$$

8) Объем призмы:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h = S_{ABC} \cdot h = 2d^2 \sin^2 \varphi \cdot \sin 2\gamma \cdot 2d \cos \varphi = \\ = 2d^3 \sin 2\varphi \cdot \sin \varphi \cdot \sin 2\gamma$$

Ответ: $d^3 \sin 2\varphi \cdot \sin \varphi \cdot \operatorname{ctg} \gamma$; $2d^3 \sin 2\varphi \cdot \sin \varphi \cdot \sin 2\gamma$.

Задача 15. Высота правильного тетраэдра h . Найдите его объем.

Решение:

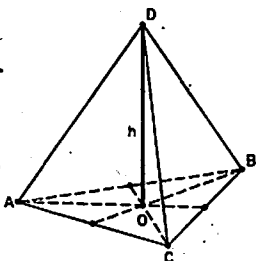
1) Пусть x — сторона равностороннего треугольника $\triangle ABC$.
 AO — радиус описанной окружности,

$$AO = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

2) Уравнение.

 $\triangle AOD$ — прямоугольный, т.к. $DO \perp ABC$ $AD = x$ — ребро тетраэдра $AD^2 = AO^2 + DO^2$ — по теореме Пифагора

$$x^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + h^2 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x^2 = h^2 \Leftrightarrow x = h\sqrt{\frac{3}{2}}$$



3) Объем тетраэдра:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{x^2 \sqrt{3}}{4 \cdot 3} \cdot h = \left(h\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3 \cdot 4} h =$$

$$= h^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3 \cdot 4} \cdot h = h^3 \frac{\sqrt{3}}{8}$$

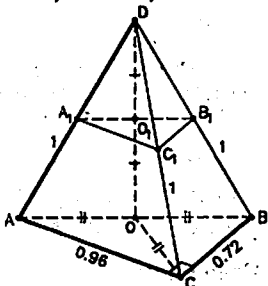
Ответ: $h^3 \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Задача 16. Плоскость, проходящая через середину высоты тетраэдра $DABC$ параллельно основанию ABC , делит тетраэдр на две части. Чему равны их объемы, если $\angle C = 90^\circ$, $DA = DB = DC = 1$ м; $AC = 0,96$ м; $BC = 0,72$ м?

Решение:

1) Центр описанной окружности — точка O . DO — высота тетраэдра $\triangle AOD = \triangle COD = \triangle BOD$ по гипотенузе и катету: $DA = DB = DC$ и OD — общий катет.Получаем $OA = OC = OB$.

Основание перпендикуляра DO есть центр описанной около треугольника $\triangle ABC$ окружности; середина гипотенузы прямоугольного треугольника $\triangle ABC$.



2) Высота.

 $\triangle COD$ — прямоугольный, т.к. $OD \perp ABC$

$$OC = OB = OA = \frac{1}{2} AB$$

 $AB^2 = AC^2 + BC^2$ — по теореме Пифагора

$$AB^2 = 0,96^2 + 0,72^2 = 0,24^2 \cdot (4^2 + 3^2) = 1,2^2$$

$$AB = 1,2 \text{ (м)}$$

$$OC = \frac{1}{2}AB = 0,6 \text{ (м)}$$

$\triangle COD$ — прямоугольный, т.к. $OD \perp ABC$

$$CD^2 = DO^2 + CO^2 \text{ — по теореме Пифагора}$$

$$DO^2 = 1^2 - 0,6^2 = 0,64$$

$$DO = 0,8 \text{ (м)}$$

3) Объем:

$$V_{DABC} = \frac{1}{3}S_{осн.} \cdot h = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot DO$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 0,96 \cdot 0,72 = 0,48 \cdot 0,72$$

$$V_{DABC} = \frac{1}{3} \cdot 0,48 \cdot 0,72 \cdot 0,8 = 0,48 \cdot 0,24 \cdot 0,8 = 0,09216 \text{ (м}^3\text{)}$$

4) Подобные тела.

Тетраэдры $DA_1B_1C_1$ и $DABC$ — подобны, $k = 2$ — коэффициент подобия

$$V_{DABC} = V_{DA_1B_1C_1} = k^3$$

5) Вычисления.

$$V_{DA_1B_1C_1} = \frac{1}{8}V_{DABC} = \frac{1}{8} \cdot 0,09216 = 0,01152 \text{ (м}^3\text{)}$$

Объем усеченной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$ равен:

$$V = V_{DABC} - V_{DA_1B_1C_1} = 0,09216 - 0,01152 = 0,08064 \text{ (м}^3\text{)}$$

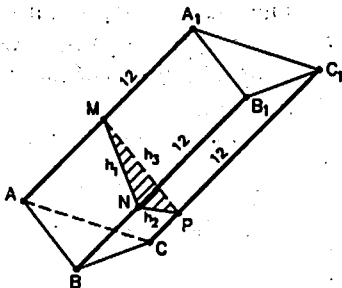
Ответ: $0,01152 \text{ м}^3$ и $0,08064 \text{ м}^3$.

Задача 17. Площади боковых граней наклонной треугольной призмы равны 888 см^2 , 312 см^2 , 720 см^2 , а боковое ребро — 12 см . Найдите объем призмы.

Решение:

1) Высоты.

Боковые грани призмы — параллелограммы. Известно, что площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту. В качестве основания рассмотрим боковое ребро. Найдем h_1 , h_2 , h_3 — высоты в каждом параллелограмме.



$$h_1 = \frac{888}{12} = 74 \text{ (см)}, h_2 = \frac{312}{12} = 26 \text{ (см)}, h_3 = \frac{720}{12} = 60 \text{ (см)}$$

2) Площадь.

$\triangle MNP$ — перпендикулярное сечение призмы

$$S_{MNP} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}; p = \frac{74+26+60}{2} = 80 \text{ — полупериметр}$$

$$S_{MNP} = \sqrt{80 \cdot 6 \cdot 54 \cdot 20} = 40 \cdot 6 \cdot 3 = 720 \text{ (см}^2\text{)}$$

3) Объем:

$$V = S_{MNP} \cdot l \text{ —}$$

произведение площади перпендикулярного сечения на боковое ребро

$$V = 720 \cdot 12 = 8640 \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: 8640 см^3 .

Задача 18. Найдите объем тетраэдра $DABC$, у которого $DA = DB = DC = 3 \text{ дм}$, в основании лежит треугольник $\triangle ABC$, в котором $AB = AC = 3 \text{ дм}$, $BC = 4 \text{ дм}$.

Решение:

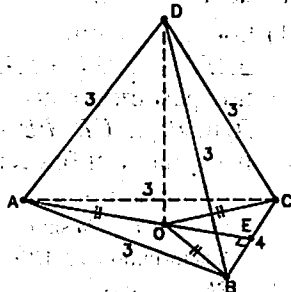
1) $DO \perp ABC$ — высота пирамиды.

Точка O — центр описанной окружности около $\triangle ABC$, т.к. боковые ребра равны.

2) Основание.

$\triangle ABC$ — равнобедренный с основанием BC .

AE — высота, проведенная к основанию



$$AC^2 = AE^2 + CE^2 \text{ — по теореме Пифагора}$$

$$CE = \frac{1}{2}BC, \text{ т.к. } AE \text{ и высота, и медиана, и биссектриса}$$

$$CE = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \text{ (дм)}$$

$$AE^2 = AC^2 - CE^2 = 9 - 4 = 5$$

$$AE = \sqrt{5} \text{ (дм)}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \text{ (дм}^2\text{)}$$

3) Описанная окружность.

$$R = AO = BO = CO$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{9}{2\sqrt{5}} \text{ (см)}$$

4) Высота.

$\triangle BOD$ — прямоугольный, т.к. $DO \perp ABC$

$$BD^2 = DO^2 + BO^2 \text{ — по теореме Пифагора}$$

$$DO^2 = BD^2 - BO^2 = 9 - \frac{81}{20} = \frac{99}{20}$$

$$DO = 3\sqrt{\frac{11}{20}} \text{ (дм)}$$

5) Объем:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 3 \cdot \sqrt{\frac{11}{20}} = \sqrt{11} \text{ (дм}^3\text{)}$$

Ответ: $\sqrt{11}$ дм³.

Задача 19. Найдите объем четырехугольной пирамиды $PABCD$, если $ABCD$ — прямоугольник, основание пирамиды, $PA = PB = PC = PD = a$, $\angle APD = 2\varphi$, $\angle CPD = 2\psi$.

Решение:

1) Боковые грани.

$$\triangle APD = \triangle BPC \text{ и } \triangle APB = \triangle CPD$$

по трем сторонам

Д/п: $PE \perp CD$, PE — и высота, и медиана, и биссектриса

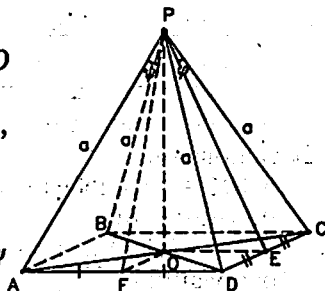
$$CE = a \sin \varphi$$

$$DC = 2CE = 2a \sin \varphi$$

Аналогично из $\triangle APD$, $AD = 2a \sin \psi$

$$PE = a \cos \varphi$$

$$PF = a \cos \psi$$



2) Высота.

$\triangle POE$ — прямоугольный, т.к. $PO \perp ABCD$

$$PE^2 = OE^2 + PO^2$$

$$PO^2 = PE^2 - OE^2 = a^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \psi$$

$$PO = a \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \psi}$$

3) Основание.

$$S_{ABCD} = AD \cdot DC = 2a \sin \psi \cdot 2a \sin \varphi = 4a^2 \sin \psi \cdot \sin \varphi$$

4) Объем:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot PO = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 4a^2 \sin \psi \cdot \sin \varphi \cdot a \cdot \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \psi} = \\
 &= \frac{4}{3} a^3 \sin \psi \cdot \sin \varphi \cdot \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \psi} \text{ (куб. ед.)}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{4}{3} a^3 \sin \psi \cdot \sin \varphi \cdot \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \psi}$ куб. ед.

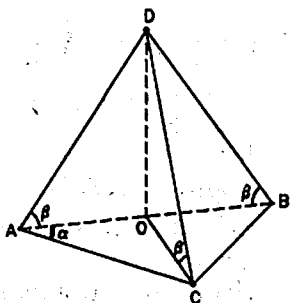
Задача 20. Найдите объем пирамиды, основанием которой является прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α . Все боковые ребра составляют с плоскостью основания один и тот же угол β .

Решение:

1) Высота.

Д/п: $DO \perp ABC$

Прямоугольные треугольники $\triangle AOD = \triangle BOD = \triangle COD$ равны (у них общий катет DO и заданный угол β) $\Rightarrow AO = BO = CO$, т.е. основание перпендикуляра DO является центром описанной окружности около треугольника $\triangle ABC$. В прямоугольном треугольнике $\triangle ABC$ это середина гипотенузы.



$$AO = BO = CO = \frac{c}{2}$$

$\triangle BOD$ — прямоугольный

$$DO = BO \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{c}{2} \operatorname{tg} \beta$$

2) Основание.

$\triangle ABC$ — прямоугольный

$$BC = AB \cdot \sin \alpha = c \sin \alpha$$

$$AC = AB \cdot \cos \alpha = c \cos \alpha$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} c^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha$$

3) Объем:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha \cdot \frac{c}{2} \operatorname{tg} \beta = \\ = \frac{1}{24} c^3 \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$$

Ответ: $\frac{1}{24} c^3 \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$.

Задача 21. В пирамиде $DABC$: D — вершина, $\triangle ABC$ — основание пирамиды. Задано, что $\angle ADB = \angle BDC = \angle ADC = 90^\circ$, $DA = m$, $DB = n$, $DC = p$. Найдите объем пирамиды.

Решение:

1) Общие рассуждения.

Для вычисления объема пи-

рамиды $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h$ в качестве основания рассмотрим треугольник $\triangle ABC$. Стороны треугольника можно найти, рассматривая боковые грани и применяя теорему Пифагора. Затем находим S_{ABC} по трем сторонам по формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, далее весьма и весьма непросто найти высоту DO .

2) Другой путь.

Пусть треугольник $\triangle ABD$ — основание пирамиды, а C — ее вершина.

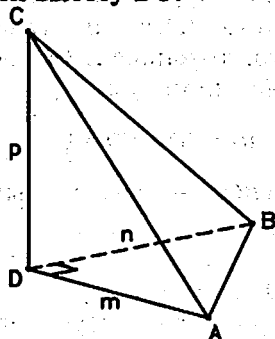
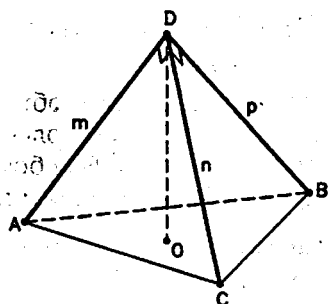
$\triangle ABD$ — прямоугольный по условию

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AD = \frac{1}{2} mn$$

$CD \perp ABD$, т.к. $CD \perp BD$ и $CD \perp AD$ по условию $\Rightarrow$
 CD — высота пирамиды.

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{1}{3} S_{ABD} \cdot CD = \frac{1}{2} mnp \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} mnp$$

Ответ: $\frac{1}{6} mnp$.



Задача 22. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ проведена плоскость параллельно основанию ABC , которая и проходит через середину высоты пирамиды и пересекает ребра в точках A_1, B_1, C_1 . Найдите объемы пирамиды $DA_1B_1C_1$ и усеченной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$, если $AB = m$, $h_a = 1,2m$, где h_a — апофема EE_1 усеченной пирамиды.

Решение:

1) Апофема.

Д/п: E — середина отрезка BC ,
 $AE \perp BC$, $DO \perp ABC$

По теореме о трех перпендикулярах $DE \perp BC$

Кроме того, $DE \perp B_1C_1$, т.к. $BC \parallel B_1C_1 \Rightarrow EE_1 \perp BC$,
 $EE_1 \perp B_1C_1 \Rightarrow EE_1$ — апофема усеченной пирамиды.

$$DE = 2EE_1 = 2 \cdot 1,2m = 2,4m$$

В $\triangle DOE$: O_1E — средняя линия, $O_1E \parallel OE$, т.к. линии пересечения параллельных плоскостей также параллельны.

2) Высота.

$\triangle DOE$ — прямоугольный, т.к. $DO \perp ABC$

$$OE = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{3} \cdot m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}m}{6},$$

точка O — центр равностороннего треугольника $\triangle ABC$.

$DE^2 = DO^2 + OE^2$ по теореме Пифагора

$$DO^2 = (2,4m)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}m}{6}\right)^2 = m^2 \cdot \left(2,4^2 - \frac{1}{12}\right)$$

$$DO = 2,38m$$

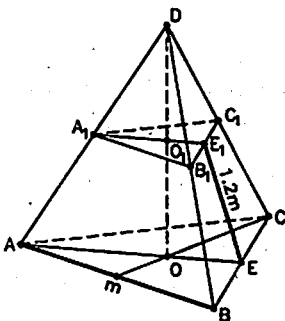
3) Основание.

$$S_{\text{осн.}} = S_{ABC} = \frac{m^2\sqrt{3}}{4} \approx 0,43m^2$$

4) Объем:

$$V_{DABC} = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot 0,43m^2 \cdot 2,38m = 0,34m^3$$

$$V_{DA_1B_1C_1} = \frac{1}{8}V_{DABC} = \frac{1}{8}0,34m^3 = 0,043m^3$$



Пирамиды $DABC$ и $DA_1B_1C_1$ подобны и

$$\frac{V_{DA_1B_1C_1}}{V_{DABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, k = \frac{1}{2} \text{ — коэффициент подобия}$$

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = V_{DABC} - V_{DA_1B_1C_1} = 0,34\text{ м}^3 - 0,043\text{ м}^3 = 0,297\text{ м}^3$$

Ответ: $0,043\text{ м}^3$; $0,297\text{ м}^3$.

Задача 23. Найдите объем тетраэдра, боковые ребра которого составляют один и тот же угол φ с высотой тетраэдра, а основанием является треугольник, у которого заданы одна сторона a и все углы: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

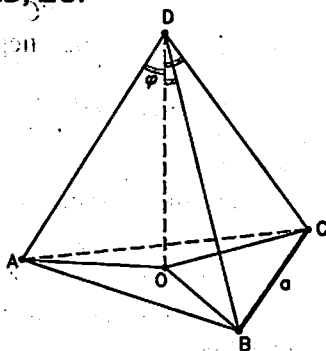
Решение:

- 1) Д/п: $OD \perp ABC$, OD — высота тетраэдра.

$\triangle AOD = \triangle BOD = \triangle COD$, т.к. OD — общий катет, и $\angle ADO = \angle BDO = \angle CDO = \varphi$, по катету и острому углу.

Из равенства треугольников следует $AO = BO = CO = R$ — радиус описанной окружности

т.и $R = \frac{a}{2\sin \alpha}$ из теоремы косинусов.



- 2) Высота тетраэдра. $\triangle AOD$ — прямоугольный

$$DO = AO \cdot \operatorname{ctg} \varphi = R \operatorname{ctg} \varphi = \frac{a}{2\sin \alpha} \cdot \operatorname{ctg} \varphi$$

- 3) Основание тетраэдра.

$$\triangle ABC, BC = a, \angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}abc \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2}a^2 \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

- 4) Объем тетраэдра:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot \frac{a}{2\sin \alpha} \cdot \operatorname{ctg} \varphi = \\ &= \frac{1}{6} a^3 \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin^2 \alpha} \cdot \operatorname{ctg} \varphi \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{6} a^3 \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin^2 \alpha} \cdot \operatorname{ctg} \varphi$.

Задача 24. Найдите объем правильной усеченной пирамиды $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если $AC = 12\sqrt{2}$ дм, $A_1 C_1 = 8\sqrt{2}$ дм, а площадь сечения $AA_1 C_1 C$ равна 60 дм².

Решение:

1) Общие соображения.

Основаниями правильной усеченной пирамиды являются квадраты. В каждом из квадратов $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ заданы диагонали квадрата AC и $A_1 C_1$. Что касается сечения правильной усеченной четырехугольной пирамиды, то это равнобокая трапеция $AA_1 C_1 C$, т.к. $AA_1 = CC_1$. Наконец, для того чтобы вычислить объем усеченной пирамиды, можно воспользоваться двумя путями:

а) Вычислить объемы каждой из пирамид $PABCD$ и $PA_1 B_1 C_1 D_1$ и рассмотреть их разность.

б) Применить формулу:

$$V = \frac{1}{3}h(Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2} + Q_2)$$

Заметим, что вместо площади основания используется сумма площадей верхнего и нижнего оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды плюс их среднее геометрическое.

2) Q_1 и Q_2 — площади верхнего и нижнего оснований.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC^2$, т.е. площадь квадрата равна половине квадрата его диагоналей.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(12\sqrt{2})^2 = 144 \text{ (дм}^2\text{)}$$

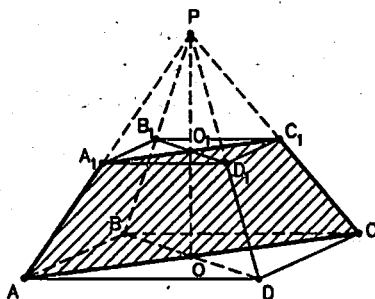
$$\text{Аналогично, } S_{A_1 B_1 C_1 D_1} = \frac{1}{2}A_1 C_1^2 = \frac{1}{2}(8\sqrt{2})^2 = 64 \text{ (дм}^2\text{)}$$

3) Вычисления.

$$Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2} + Q_2 = 144 + \sqrt{144 \cdot 64} + 64 = 144 + 96 + 64 = 304 \text{ дм}^2$$

4) Высота правильной усеченной пирамиды OO_1 .

Площадь трапеции:



$$S_{AC_1C} = \frac{1}{2} (AC + AC_1) \cdot OO_1$$

$$60 = \frac{1}{2} (12\sqrt{2} + 8\sqrt{2}) \cdot h$$

$$h = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \text{ (дм)}$$

5) Объем правильной усеченной четырехугольной пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} h (Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2} + Q_2) = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 304 = 304\sqrt{2} \text{ (дм}^3\text{)}$$

Ответ: $304\sqrt{2} \text{ дм}^3$.

IX. Объемы и поверхности тел вращения

Задача 1. Конструкторы боролись за уменьшение космического аппарата. Найдите вес проводки из алюминиевой и медной проволоки, если длина проводки 350 м, диаметр медной проволоки 2 мм, а алюминиевой 3 мм, плотность алюминия $2,6 \text{ г/см}^3$, а меди $8,9 \text{ г/см}^3$.

Решение:

Объем цилиндра:

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

$$V_{Al} = \pi \cdot (1,5 \cdot 10^{-1})^2 \cdot 350 \cdot 10^2 = \pi \cdot 2,25 \cdot 350 = 2472,8 \text{ (см}^3\text{)}$$

$$G_{Al} = V \cdot \rho = 2472,8 \cdot 2,6 = 6,429 \text{ (кг)}$$

Объем проводки из меди:

$$V_{Cu} = \pi \cdot (1 \cdot 10^{-1})^2 \cdot 350 \cdot 10^2 = 350\pi = 1099 \text{ (см}^3\text{)}$$

$$G_{Cu} = V \cdot \rho = 1099 \cdot 8,9 = 9,781 \text{ (кг)}$$

Ответ: вес проволоки из меди 9 кг 781 г, из алюминия 6 кг 429 г.

Задача 2. Изготавливается свинцовый трубопровод для перемещения жидких радиоактивных веществ. Необходимый расход обеспечивается трубой 24/6, где $r = 24 \text{ мм}$ — внутренний радиус трубы, $\delta = 6 \text{ мм}$ — толщина стенки трубы. Найдите массу свинца для изготовления пятидесятиметрового трубопровода (плотность свинца $11,4 \text{ г/см}^3$).

Решение:

1) Объем полого цилиндра:

$$V = \pi(R^2 - r^2) \cdot L, \text{ где}$$

R — внешний радиус трубы (м);

r — внутренний радиус трубы (м);

L — длина трубы (м).

$$V = \pi((24 + 6)^2 - 24^2) \cdot 10^{-6} \cdot 50 = \pi \cdot 6 \cdot 54 \cdot 50 \cdot 10^{-6} = \\ = 1,62 \cdot 10^{-2} \cdot \pi \text{ (м}^3\text{)}$$

Масса свинца:

$$G = V \cdot \rho = 16,2\pi \cdot 11,4 = 580 \text{ (кг)}$$

Ответ: 580 кг.

Задача 3. Найдите объем цилиндра, если площадь квадрата, вписанного в круг основания цилиндра, равна $S_{\text{кв.}}$, а площадь боковой поверхности цилиндра равна $S_{\text{бок.}}$.

Решение:

1) Объем цилиндра:

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

2) Площадь вписанного квадрата:

$$S_{\text{кв.}} = \frac{1}{2} (2r)^2 -$$

ведь диагональю квадрата является диаметр описанной около квадрата окружности.

$$S_{\text{кв.}} = 2r^2$$

$$r^2 = \frac{S_{\text{кв.}}}{2}$$

3) Высота цилиндра.

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi r h$$

$$h = \frac{S_{\text{бок.}}}{2\pi r} = \frac{S_{\text{бок.}}}{2\pi \sqrt{\frac{S_{\text{кв.}}}{2}}} = \frac{S_{\text{бок.}}}{\sqrt{2}\pi \sqrt{S_{\text{кв.}}}}$$

4) Вычисления:

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot \frac{S_{\text{кв.}}}{2} \cdot \frac{S_{\text{бок.}}}{\sqrt{2}\pi \sqrt{S_{\text{кв.}}}} = \frac{\sqrt{S_{\text{кв.}}} \cdot S_{\text{бок.}}}{2\sqrt{2}}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{S_{\text{кв.}}} \cdot S_{\text{бок.}}}{2\sqrt{2}}$

Задача 4. Найдите зависимость объема цилиндра от радиуса основания цилиндра, если площадь основания равна площади осевого сечения цилиндра.

Решение:

- 1) Основание и сечение.

$$\pi r^2 = 2r \cdot h$$

$$h = \frac{\pi r}{2}$$

- 2) Объем цилиндра:

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{\pi r}{2}$$

$$V = \frac{\pi^2}{2} r^3$$

Ответ: $V(r) = \frac{\pi^2}{2} r^3$ — кубическая парабола.

Задача 5. Восьмиугольная правильная призма вписана в цилиндр. Найдите отношение объемов призмы и цилиндра.

Решение:

- 1) Объем цилиндра:

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

- 2) Объем призмы:

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h$$

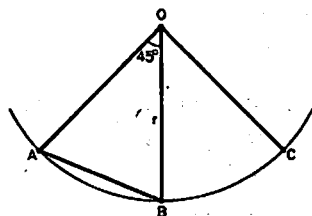
- 3) Площадь восьмиугольника.

$$S = 8 \cdot S_{\text{OAB}} = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \sin 45^\circ = \frac{r^2 \sqrt{2}}{4} \cdot 8 = 2\sqrt{2} r^2$$

- 4) Отношение объемов:

$$\frac{V_{\text{призмы}}}{V_{\text{цилиндра}}} = \frac{2\sqrt{2} r^2 \cdot h}{\pi r^2 \cdot h} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \approx 0,9$$

Ответ: 0,9.



Задача 6. «Призма и цилиндр». Стороны треугольника в основании прямой призмы равны 6 см, 8 см и 10 см. Найдите объем цилиндра высотой 20 см, если призма вписана в цилиндр.

Решение:

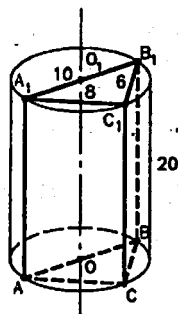
- 1) Основание треугольной призмы.

Замечаем

$10^2 = 6^2 + 8^2$, следовательно, $\triangle ABC$ — прямоугольный

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC$ — половина произведения катетов.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ (см}^2\text{)}$$



- 2) Центр описанной окружности прямоугольного треугольника $\triangle ABC$ совпадает с серединой гипотенузы AB .

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

- 3) Объем цилиндра:

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot 20 = 500\pi \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: $500\pi \text{ (см}^3\text{)}$.

Задача 7. Теплоноситель дейтерий, или «тяжелая вода», подается в ядерный реактор с помощью цилиндрических насосов. Внутренний диаметр цилиндра равен 9 см, а ход поршня 170 мм. Поршень делает 1 ход в 1 секунду. Найдите производительность насоса.

Решение:

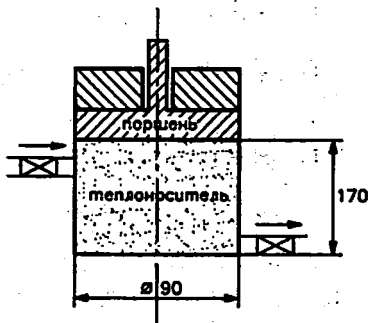
- 1) Рабочий объем цилиндра насоса:

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

$$r = \frac{90}{2} = 45 \text{ (мм)}$$

$$h = 170 \text{ (мм)}$$

$$V = \pi \cdot 45^2 \cdot 170 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-3} = 3,44 \cdot 10^{-4} \cdot \pi \text{ (м}^3\text{)}$$



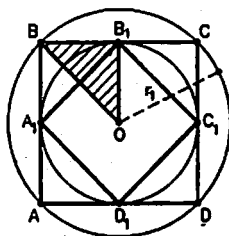
- 2) Часовая производительность насоса:

$$Q = 3600V = 3,44 \cdot 10^{-4} \cdot \pi \cdot 3600 \approx 3,89 \text{ м}^3\text{/час}$$

Ответ: объемная производительность насоса для теплоносителя равна $3,89 \text{ м}^3\text{/час}$.

Задача 8. Докажите, что (V_n) бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, где V_1 — заданный цилиндр, имеющий радиус основания r_1 и высоту h . В цилиндр вписана правильная четырехугольная призма, в призму вписан цилиндр, имеющий объем V_2 , в цилиндр вписывается правильная четырехугольная призма и т.д. Найдите сумму объ-

емов цилиндров $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$.



Решение:

- 1) Объем первого, самого большого, цилиндра:

$$V_1 = \pi r_1^2 \cdot h$$

$\triangle OBB_1$ — равнобедренный прямоугольный треугольник. Гипотенузой треугольника является радиус первого, самого большого цилиндра — r_1 . Катет OB_1 является радиусом второго по величине, вложенного цилиндра:

$$r_2 = \frac{r_1}{\sqrt{2}}$$

Аналогично, $r_3 = \frac{r_2}{\sqrt{2}}$, $r_4 = \frac{r_3}{\sqrt{2}}$, и т.д.

- 3) Последовательность:

$$V_1 = \pi r_1^2 \cdot h$$

$$V_2 = \pi \left(\frac{r_1}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot h$$

$$V_3 = \pi \left(\frac{r_1}{2} \right)^2 \cdot h$$

$$V_n = \pi \left(\frac{r_1}{(\sqrt{2})^{n-1}} \right)^2 \cdot h$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \pi \left(\frac{r_1}{(\sqrt{2})^n} \right)^2 \cdot h : \pi \left(\frac{r_1}{(\sqrt{2})^{n-1}} \right)^2 \cdot h$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1}{2}$$

(V_n) — геометрическая прогрессия, $q < 1$

4) Сумма объемов «вложенных» цилиндров:

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \frac{V_1}{1-q} = \frac{\pi r_1^2 \cdot h}{1 - \frac{1}{2}} = 2\pi r_1^2 \cdot h, \text{ т.е.}$$

равняется удвоенному первоначальному объему.

Ответ: (V_n) — геометрическая прогрессия, $q < 1$;

$$V = 2V_1 = 2\pi r_1^2 \cdot h.$$

Задача 9. Условие предыдущей задачи, только вписаны не четырехугольные правильные призмы, а треугольные. Точно так же нужно доказать, что последовательность объемов призм (V_n) образует геометрическую прогрессию. Найти знаменатель прогрессии и сумму членов прогрессии

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k$$

Решение:

1) Первый член последовательности:

$$V_1 = \pi r_1^2 \cdot h$$

2) Рассмотрим $\triangle AOA_1$, $\angle A_1AO = 30^\circ$,

$$AO = r_1, OA_1 = r_2$$

$$r_2 = \frac{1}{2}r_1,$$

$$\text{аналогично, } r_3 = \frac{1}{2}r_2, r_4 = \frac{1}{2}r_3, \text{ etc.}$$

3) Последовательность:

$$V_1 = \pi r_1^2 \cdot h$$

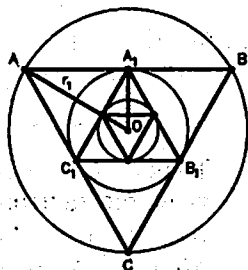
$$V_1 = \pi \left(\frac{1}{2}r_1 \right)^2 \cdot h$$

$$V_2 = \pi \left(\frac{1}{4}r_1 \right)^2 \cdot h$$

$$V_n = \pi \left(\frac{1}{2^{n-1}}r_1 \right)^2 \cdot h$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1}{4}$$

(V_n) — геометрическая прогрессия, $q < 1$



4) Сумма объемов цилиндров:

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k = \frac{\pi r^2 \cdot h}{1-q} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \pi r^2 h = \pi r^2 h + \frac{1}{3} \pi r^2 h, \text{ т.е.}$$

сумме объемов первоначального цилиндра и конуса, имеющих одно и то же основание.

Ответ: (V_n) — геометрическая прогрессия, $q < 1$; $\frac{4}{3} \pi r^2 h$.

Задача 10. Правильная восьмиугольная призма, у которой высота равна стороне основания c , описана около цилиндра. Найдите его объем.

Решение:

1) Объем цилиндра:

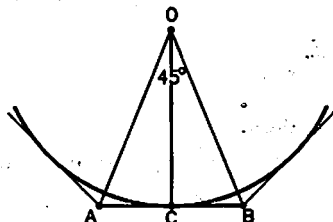
$$V = \pi r^2 \cdot h$$

$$r = OD, h = c$$

2) $\triangle AOD$ — прямоугольный

$$AD = BD, AO = BO, AB = c$$

$$OD = AC \cdot \operatorname{ctg} 22,5^\circ = \frac{c}{2} \cdot \operatorname{ctg} 22,5^\circ$$



Точка O — центр правильного восьмиугольника — является центром вписанной и описанной окружностей. Поэтому $\triangle OAB$ — равнобедренный с основанием AB , OD — медиана, проведенная к основанию, при этом она является одновременно и биссектрисой, и высотой.

3) Объем цилиндра:

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot OD^2 \cdot h = \pi \cdot \frac{c^2}{4} \operatorname{ctg}^2 22,5^\circ \cdot c = \frac{\pi}{4} \cdot c^3 \cdot \operatorname{ctg}^2 22,5^\circ$$

По формуле половинного угла:

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

получаем

$$\operatorname{ctg} 22,5^\circ = \frac{1 + \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\operatorname{ctg}^2 22,5^\circ = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot c^3 \cdot (3 + 2\sqrt{2})$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} \cdot c^3 \cdot (3 + 2\sqrt{2})$.

Задача 11. Снегоуборочная машина собирает снег в кучу в виде конуса. Образующая конуса равна 1 м, а диаметр основания 1,6 м. Чему равен объем снега?

Решение:

Объем конуса:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

$$r = \frac{D}{2} = \frac{1,6}{2} = 0,8 \text{ (м)}$$

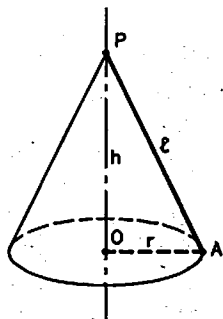
Высота конуса:

$$h^2 = l^2 - r^2 = 1^2 - 0,8^2 = 0,6^2$$

$$h = 0,6 \text{ (м)}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot 0,8^2 \cdot 0,6 = \pi \cdot 0,8^2 \cdot 0,2 = 0,128\pi \approx 0,402 \text{ (м}^3\text{)}$$

Ответ: 0,402 м³.



Задача 12. Объем конуса равен $3\pi \text{ дм}^3$, а диаметр основания 0,5 дм. Найдите высоту конуса и образующую.

Решение:

1) Объем конуса:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

$$V = 3\pi \text{ (дм}^3\text{)}$$

$$r = \frac{D}{2} = \frac{0,5}{2} = 0,25 \text{ (дм)}$$

2) Высота конуса:

$$h = \frac{V}{\frac{1}{3} \pi r^2} = \frac{3\pi}{\frac{1}{3} \pi \cdot 0,25^2} = \frac{9}{\frac{1}{16}} = 144 \text{ (дм)}$$

3) Образующая конуса:

$$l^2 = h^2 + r^2 = 144^2 + \frac{1}{16}$$

$$l \approx 144,0002 \text{ (дм)}$$

Ответ: 144 дм; 144,0002 дм.

Задача 13. Образующая конуса равна 6,5 дм, площадь осевого сечения конуса 15 дм^2 . Найдите объем конуса.

Решение:

1) Осевое сечение конуса.

Плоскость проходит через ось конуса OP . Сечение конуса — равнобедренный треугольник $\triangle PAB$ с основанием AB , $PA = PB$ — образующие конуса.

2) Прямоугольный треугольник.

PO — медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, она является одновременно и биссектрисой, и высотой.

$\triangle POB$ — прямоугольный, $PO = h$, $OB = r$

Площадь треугольника $\triangle PAB$:

$$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PO = rh$$

$$S = 15$$

Образующая:

$$l^2 = h^2 + r^2$$

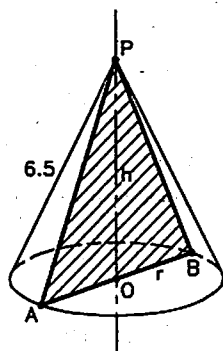
$$l = 6,5$$

3) Система уравнений:

$$\begin{cases} rh = 15 \\ r^2 + h^2 = 6,5^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2rh = 30 \\ r^2 + h^2 = 6,5^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2rh = 30 \\ (r+h)^2 = 30 + 42,25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} rh = 15 \\ (r+h)^2 = 8,5^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} rh = 15 \\ r+h = 8,5 \\ r+h = -8,5 \end{cases}$$

Случай $r + h = -8,5$ не рассматриваем, т.к. сумма двух положительных чисел $r > 0$ и $h > 0$ не может равняться отрицательному числу. Итак,



$$\begin{cases} rh = 15 \\ r + h = 8,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 6 \\ h = 2,5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} r = 2,5 \\ h = 6 \end{cases}$$

4) Объем конуса:

$$V_1 = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 6^2 \cdot 2,5 = 90\pi \text{ (дм}^3\text{)}$$

$$V_2 = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 2,5^2 \cdot 6 = 37,5\pi \text{ (дм}^3\text{)}$$

Ответ: $90\pi \text{ (дм}^3\text{)}$; $37,5\pi \text{ (дм}^3\text{)}$.

Задача 14. Равнобедренный прямоугольный треугольник, имеющий площадь $0,5 \text{ дм}^2$, вращается вокруг оси, содержащей катет. Найдите объем тела вращения.

Решение:

1) При вращении $\triangle ABC$ вокруг оси OO_1 , содержащей катет AC , получаем конус.

$h = AC$, $r = BC$, $AC = BC$, т.к. треугольник равнобедренный.

2) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} (AC)^2$

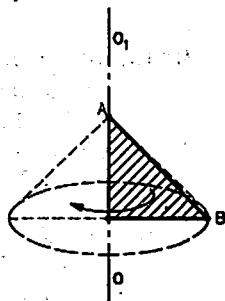
$$0,5 = \frac{1}{2} AC^2$$

$$AC = 1 \text{ (дм)}; BC = 1 \text{ (дм)}.$$

3) Объем конуса:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{\pi}{3} \text{ (дм}^3\text{)}$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} \text{ дм}^3$.



Задача 15. Ломаная $L(x)$ вращается вокруг оси Ox .

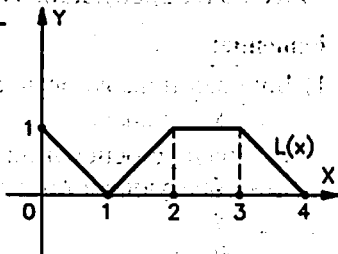
Найдите объем тела вращения.

Решение:

1 способ решения:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

V_1 — конус, $r = 1$, $h = 1$



$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{\pi}{3}$$

V_2 — конус, соответственно, $V_2 = \frac{\pi}{3}$

V_3 — цилиндр, $r = 1$, $h = 1$

$$V_3 = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$$

V_4 — конус, $r = 1$, $h = 1$

$$V_4 = \frac{\pi}{3}$$

Получаем:

$$V = 3 \cdot \frac{\pi}{3} + \pi = 2\pi \text{ (куб. ед.)}$$

2 способ решения:

Функция $L(x)$:

$$L(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1, & 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & 2 \leq x \leq 3 \\ 4-x, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \pi L^2(x) dx = \int_0^1 \pi (1-x)^2 dx + \int_1^2 \pi (x-1)^2 dx + \int_2^3 \pi \cdot 1^2 dx + \\ &+ \int_3^4 \pi (4-x)^2 dx = \left(-\frac{(1-x)^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{(x-1)^3}{3} \right) \Big|_1^2 + x \Big|_2^3 - \\ &= \frac{(4-x)^3}{3} \Big|_3^4 \cdot \pi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi + \frac{\pi}{3} = 2\pi \text{ (куб. ед.)} \end{aligned}$$

Ответ: 2π куб. ед.

Задача 16. По заданной площади боковой поверхности конуса S и образующей l найдите объем конуса.

Решение:

1) Боковая поверхность конуса:

$$S = S_{\text{бок.}} = \pi r l, \text{ где}$$

r — радиус основания конуса;

l — образующая конуса.

$$r = \frac{S}{\pi l}$$

2) Высота конуса:

$$h^2 = l^2 - r^2 = l^2 - \frac{S^2}{\pi^2 l^2}$$

$$h = \sqrt{l^2 - \frac{S^2}{\pi^2 l^2}}$$

3) Объем конуса:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{S^2}{\pi^2 l^2} \cdot \sqrt{l^2 - \frac{S^2}{\pi^2 l^2}}$$

Ответ: $\frac{1}{3} \pi \cdot \frac{S^2}{\pi^2 l^2} \cdot \sqrt{l^2 - \frac{S^2}{\pi^2 l^2}}$.

Задача 17. Найдите объем конуса, если угол между образующей l и высотой конуса равен β .

Решение:

1) $\triangle AOP$ — прямоугольный, т.к. OP — высота конуса.

$$AO = l \cdot \sin \beta$$

$$PO = l \cdot \cos \beta$$

$$r = AO, h = PO$$

2) Объем конуса:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot l \sin^2 \beta \cdot l \cos \beta = \frac{1}{3} \pi l^3 \sin^2 \beta \cdot \cos \beta =$$

$$= \frac{1}{6} \pi l^3 \sin 2\beta \cdot \cos \beta$$

Ответ: $\frac{1}{6} \pi l^3 \sin 2\beta \cdot \cos \beta$ куб. ед.

Задача 18. Найдите объем конуса, который получается при проведении плоскости, параллельной основанию данного конуса и проходящей через середину высоты заданного конуса. Радиус основания заданного конуса равен r и составляет половину его высоты.

Решение:

1) Объем конуса:

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h, h = 2r$$

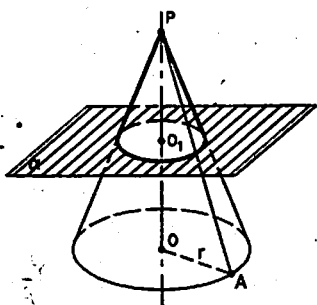
$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2r = \frac{2}{3}\pi r^3$$

2) Подобие.

Два конуса подобны, $k = \frac{1}{2}$ — коэффициент подобия.

$$V_2 = k^3 \cdot V_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{12}\pi r^3$$

Ответ: $\frac{1}{12}\pi r^3$.



Задача 19. Найдите развертку боковой поверхности конуса в виде сектора, его длину дуги, радиус, угол, площадь сектора, если объем конуса равен $40,5\pi \text{ м}^3$ и высота конуса равна 6 м.

Решение:

1) Объем конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$

$$40,5\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 6$$

$$r^2 = 20,25$$

$$r = 4,5 \text{ (м)} \text{ — радиус основания конуса}$$

2) Образующая конуса:

$$l^2 = h^2 + r^2$$

$$h = 6 \text{ (м)}, r = 4,5 \text{ (м)}$$

$$l^2 = 6^2 + 4,5^2 = 56,25$$

$$l = 7,5 \text{ (м)} \text{ — образующая конуса}$$

3) Площадь боковой поверхности конуса:

$$S_{\text{бок.}} = \pi rl = \pi \cdot 4,5 \cdot 7,5 = 33,75 \text{ (м}^2\text{)}$$

Площадь сектора развертки равна $33,75 \text{ м}^2$.

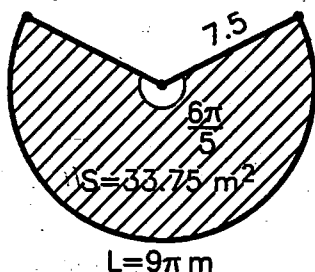
4) Длина дуги сектора развертки.

$$L = 2\pi r = 2\pi \cdot 4,5 = 9\pi \text{ (м)}$$

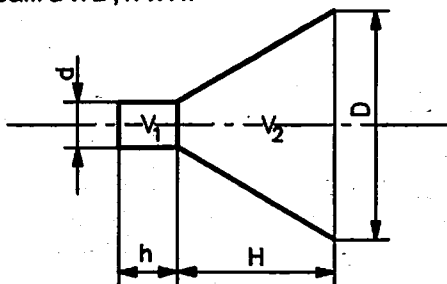
5) Угол сектора развертки:

$$\alpha = \frac{L}{l} = \frac{9\pi}{7,5} = \frac{6\pi}{5}$$

Ответ: 9π м; $7,5$ м; $\frac{6\pi}{5}$; $33,75$ м².



Задача 20. Ракетный двигатель состоит из цилиндрической части, камеры сгорания КС и расширяющейся части — «юбки». Найдите объемы и площадь поверхности по заданным размерам d и D , h и H .



Решение:

1) Общие рассуждения.

В реальности камера сгорания и «юбка» имеют более сложную форму, особенно «юбка». Тяга двигателя создается движением раскаленного газа из КС в расширяющейся части — «юбке».

2) Объем камеры сгорания ракетного двигателя:

$$V_1 = \pi r^2 \cdot h = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{\pi d^2}{4} \cdot h$$

3) Объем «юбки» двигателя:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi H \left[\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2} + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \right] = \frac{1}{12}\pi H (D^2 + D \cdot d + d^2)$$

4) Площадь поверхности двигателя:

$$S = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 + 2\pi \cdot \frac{d}{2} \cdot h + \pi \cdot \left(\frac{d}{2} + \frac{D}{2} \right) \cdot l, \text{ где}$$

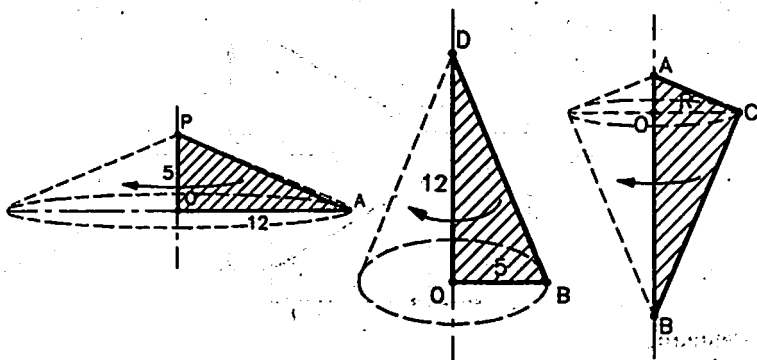
$$l = \sqrt{H^2 + \frac{(D-d)^2}{4}}$$

Ответ: $\frac{\pi d^2 h}{4}; \frac{\pi H}{12} (D^2 + D \cdot d + d^2);$

$$\frac{\pi d^2}{4} + \pi d h + \frac{\pi (D+d)}{2} \cdot \sqrt{H^2 + \frac{(D-d)^2}{4}}.$$

Задача 21. Прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 12 см вращается вокруг оси (поочередно), содержащей его катеты и гипотенузу. Сравните объемы полученных фигур.

Решение:



1) $r = 12$ (см), $h = 5$ (см)

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi 12^2 \cdot 5 = 240\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

2) $r = 5$ (см), $h = 12$ (см)

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi 5^2 \cdot 12 = 100\pi \text{ (см}^3\text{)}$$

3) В результате вращения треугольника вокруг оси, содержащей гипотенузу, мы получаем два конуса, имеющих одно и то же основание, радиусом R . Найдём этот радиус R .

В прямоугольном треугольнике $\triangle ABC$:

$$R \cdot AB = AC \cdot BC$$

$$R = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}$$

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h_1 + \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot (h_1 + h_2) = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot AB = \\ = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{60^2}{13^2} \cdot 13 = \frac{1200}{13}\pi \approx 92,3\pi$$

4) Сравниваем объемы трех фигур:

$$V_1 = 240\pi$$

$$V_2 = 100\pi$$

$$V_3 = 92,3\pi$$

$$V_3 < V_2 < V_1$$

Ответ: $92,3\pi$; 100π ; 240π ; $V_3 < V_2 < V_1$.

Задача 22. Парабола $y = x^2$, $x \in [-1; 1]$ вращается вокруг оси Ox . Найдите объем тела вращения.

Решение:

1) Объем тела вращения:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

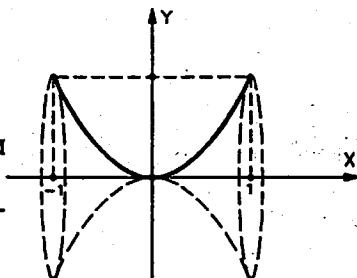
$a = -1$ — нижний предел интеграла,

$b = 1$ — верхний предел интеграла.

$$f(x) = x^2$$

2) Вычисления.

$$V = \int_{-1}^1 \pi x^4 dx = \pi \int_{-1}^1 x^4 dx = \pi \left. \frac{x^5}{5} \right|_{-1}^1 = \pi \cdot \frac{1}{5} + \pi \cdot \frac{1}{5} = \frac{2\pi}{5} \text{ (куб. ед.)}$$



Ответ: $\frac{2\pi}{5}$ куб. ед.

Задача 23. Образующая / усеченного конуса наклонена к плоскости основания усеченного конуса под углом α . Найдите объем усеченного конуса, если его боковая поверхность равна Q .

Решение:

- 1) Объем усеченного конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R \cdot r + r^2), \text{ где}$$

h — высота усеченного конуса,

R и r — радиусы оснований.

Найдем h , r и R .

- 2) Высота усеченного конуса
- h
- .

$\triangle ABC$ — прямоугольный

$h = l \sin \alpha$ — высота усеченного конуса

$BC = l \cos \alpha$, но

$$BC = R - r$$

Получаем

$$R - r = l \cos \alpha$$

- 3) Площадь боковой поверхности усеченного конуса:

$$S_{\text{бок.}} = \pi(R + r) \cdot l$$

$$S = \pi(R + r) \cdot l$$

$$R + r = \frac{S}{\pi l}$$

- 4) Радиусы оснований.

Система уравнений:

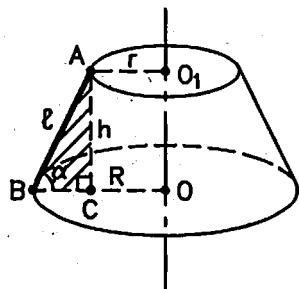
$$\begin{cases} R - r = l \cos \alpha \\ R + r = \frac{S}{\pi l} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = r + l \cos \alpha \\ 2r = \frac{S}{\pi l} - l \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = r + l \cos \alpha \\ r = \frac{S}{2\pi l} - \frac{l \cos \alpha}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = \frac{S}{2\pi l} + \frac{l \cos \alpha}{2} \\ r = \frac{S}{2\pi l} - \frac{l \cos \alpha}{2} \end{cases}$$

- 5) Вычисления.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R \cdot r + r^2) = \frac{1}{3}\pi \cdot l \sin \alpha \cdot \left(\frac{S^2}{4\pi^2 l^2} \cdot 3 + \frac{l^2 \cos^2 \alpha}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{12}\pi \cdot l \sin \alpha \cdot \left(\frac{3S^2}{\pi^2 l^2} + l^2 \cos^2 \alpha \right) \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{12}\pi \cdot l \sin \alpha \cdot \left(\frac{3S^2}{\pi^2 l^2} + l^2 \cos^2 \alpha \right)$.



Задача 24. Когда в июле привезли сено и сложили, получили цилиндр высотой 3,5 м и радиусом основания 2,3 м. При последней «обработке» стога вилами и граблями оказалось, что высота его осталась той же, но верхняя часть приняла форму полушара. Узнайте массу стога первоначальной цилиндрической формы и окончательной, обтекаемой для дождя, если плотность сена $0,023 \text{ кг/дм}^3$.

Решение:

- 1) Стог — «полуфабрикат».

$$V = \pi r^2 \cdot h,$$

$r = 2,3 \text{ (м)}$ — радиус основания стога,

$h = 3,5 \text{ (м)}$ — высота стога сена.

$$V = \pi \cdot 2,3^2 \cdot 3,5 \approx 58,14 \text{ (м}^3\text{)} — \text{объем стога сена.}$$

$$P_1 = V \cdot \rho = 58,14 \cdot 10^3 \cdot 0,028 = 1627,92 \text{ (кг)} \approx 1,628 \text{ (т)}$$

- 2) Придаем стогу сена обтекаемую форму, которая обеспечивает сохранность сена.

Цилиндрическая часть:

$$h = 3,5 - 2,3 = 1,2 \text{ (м)}, r = 2,3 \text{ (м)}$$

$$V_{\text{цил.}} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 2,3^2 \cdot 1,2 = 19,933 \text{ (м}^3\text{)}$$

Объем полушара ($R = 2,3 \text{ м}$):

$$V_{\text{ш.}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 2,3^3 \approx 25,47 \text{ (м}^3\text{)}$$

$$V = V_{\text{цил.}} + V_{\text{ш.}} = 19,933 + 25,47 = 45,403 \text{ (м}^3\text{)}$$

И, наконец, вес обработанного стога сена:

$$P_2 = 45,403 \cdot 10^3 \cdot 0,028 = 1271,28 \text{ (кг)} = 1,271 \text{ (т)}$$

Ответ: 1,628 т; 1,271 т.

Задача 25. Вместо того чтобы использовать известные гайки в виде грузил, рыболов решил изготовить их в виде шариков из 0,75 кг свинца, диаметр шарика $d = 15 \text{ мм}$. Сколько получилось грузил, если плотность свинца $11,35 \text{ г/см}^3$.

Решение:

- 1) Объем свинцового шарика:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{15}{2} \right)^3 \approx 1766 \text{ (мм}^3\text{)}$$

2) Масса одного грузила:

$$G = 1766 \cdot 10^{-3} \cdot 11635 \approx 20 \text{ (г)}$$

3) Количество свинцовых грузил:

$$n = 750 : 20 \approx 37$$

Ответ: 37.

Задача 26. На судоремонтном заводе потребовалось вырезать заготовку из металла для изготовления корпуса. Площадь заготовки, которая была вырезана, равнялась $20\pi \text{ м}^2$, она состояла из круга для основания корпуса и сектора, который вырезали из некоторого круга. Сектор составлял $1/6$ часть этого круга. Найдите радиус основания, образующую, высоту и объем конуса.

Решение:

- 1) Заготовка вырезается из металла.
- 2) Длина окружности основания равна длине дуги сектора развертки:

$$\frac{2\pi l}{6} = 2\pi r$$

В левой части равенства — шестая часть окружности, в правой — длина окружности основания.

$$l = 6r$$

- 3) Площадь полной поверхности корпуса:

$$S_{\text{полн.}} = \pi r^2 + \pi r l$$

$$20\pi = \pi r^2 + \pi r \cdot 6r$$

$$r^2 = \frac{20}{7}$$

$$r = \sqrt{\frac{20}{7}} \text{ (м)}, l = 6\sqrt{\frac{20}{7}} \text{ (м)} \text{ или } r = 2\sqrt{\frac{5}{7}} \text{ (м)}, l = 12\sqrt{\frac{5}{7}} \text{ (м)}$$

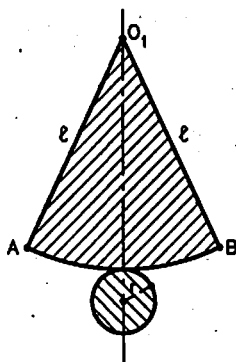
- 4) Высота корпуса:

$$h^2 = l^2 - r^2, \text{ где}$$

l — образующая конуса,

r — радиус основания

$$h^2 = 36 \cdot \frac{20}{7} - \frac{20}{7} = 35 \cdot \frac{20}{7} = 100$$



$h = 10$ (м) — высота конуса.

5) Объем конуса:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{20}{7} \cdot 10 = \frac{200\pi}{21} \text{ (м}^3\text{)}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{20}{7}}$ м; $6\sqrt{\frac{20}{7}}$ м; 10 м; $\frac{200\pi}{21}$ м³.

Задача 27. Плоскость α параллельна основанию конуса радиуса a , отсекает меньший конус с основанием, равным b . Как соотносятся объемы тел вращения?

Решение:

1) Пусть V_1 , V_2 , V_3 — объемы большего, меньшего и усеченного конуса, соответственно.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{a^3}{b^3} -$$

объемы двух подобных тел относятся между собой как кубы их соответствующих размеров.

2) Объем усеченного конуса:

$$V_3 = V_1 - V_2 = \frac{a^3}{b^3} \cdot V_2 - V_2 = V_2 \cdot \left(\frac{a^3}{b^3} - 1 \right)$$

3) Объемы тел пропорциональны:

$$V_1 : V_2 : V_3 = \frac{a^3}{b^3} : 1 : \left(\frac{a^3}{b^3} - 1 \right)$$

Ответ: $\frac{a^3}{b^3} : 1 : \left(\frac{a^3}{b^3} - 1 \right)$.

Задача 28. Найдите площадь осевого сечения и объем усеченного конуса, у которого диаметры оснований равны соответственно 12 см и 24 см, а образующая равна 10 см.

Решение:

1) Объем усеченного конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + R \cdot r + r^2)$$

$$2R = 24 \text{ (см)}, 2r = 12 \text{ (см)}, h = ?$$

- 2) Найдем высоту усеченной пирамиды.

$\triangle ABC$ — прямоугольный,

$AB = 10$ (см)

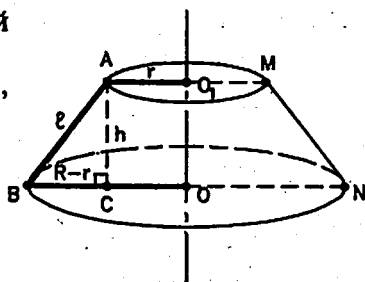
$$BC = 12 - 6 = 6 \text{ (см)}$$

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 \text{ по теореме}$$

Пифагора

$$10^2 = AC^2 + 6^2 \Rightarrow AC^2 = 10^2 - 6^2 = 8^2$$

$$h = 8 \text{ (см)}$$



- 3) Вычисления.

$$V = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + R \cdot r + r^2) = \frac{1}{3}\pi \cdot 8 \cdot (12^2 + 12 \cdot 6 + 6^2) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot 8 \cdot 36 \cdot (4 + 2 + 1) = 672\pi \text{ (см}^3\text{)}$$

Осевое сечение $AMNB$.

$$S_{AMNB} = \frac{1}{2} \cdot (AM + BN) \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot (D + d) \cdot h =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (24 + 12) \cdot 8 = 144 \text{ (см}^2\text{)}$$

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

Ответ: $672\pi \text{ см}^3$; 144 см^2 .

Задача 29. В цилиндр вписан шар. Найдите отношение их объемов.

Решение:

- 1) Объем цилиндра:

$$V_{\text{цилиндра}} = \pi r^2 \cdot h, h = 2r$$

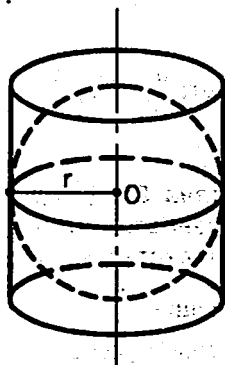
$$V_{\text{цилиндра}} = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$$

- 2) Объем шара:

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- 3) Отношение объемов:

$$\frac{V_{\text{шара}}}{V_{\text{цилиндра}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi r^3} = \frac{2}{3}$$



Ответ: $\frac{2}{3}$.

Задача 30. Площадь полной поверхности конуса равна $S_{\text{полн.}}$, а боковой поверхности $S_{\text{бок.}}$. Найдите объем конуса.

Решение:

1) Площадь основания конуса:

$$S_{\text{осн.}} = S_{\text{полн.}} - S_{\text{бок.}}$$

В то же время

$$S_{\text{осн.}} = \pi r^2, \text{ где}$$

r — радиус основания конуса.

$$r^2 = \frac{S_{\text{осн.}}}{\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{S_{\text{осн.}}}{\pi}} = \sqrt{\frac{S_{\text{полн.}} - S_{\text{бок.}}}{\pi}}$$

2) Образующая конуса:

$$S_{\text{бок.}} = \pi r l$$

$$l = \frac{S_{\text{бок.}}}{\pi r} = \frac{S_{\text{бок.}}}{\pi \sqrt{\frac{S_{\text{полн.}} - S_{\text{бок.}}}{\pi}}}$$

$$l^2 = h^2 + r^2$$

Найдем высоту конуса:

$$\begin{aligned} h^2 &= l^2 - r^2 = \frac{S_{\text{бок.}}^2}{\pi(S_{\text{полн.}} - S_{\text{бок.}})} - \frac{S_{\text{полн.}} - S_{\text{бок.}}}{\pi} = \\ &= \frac{S_{\text{бок.}}^2 - (S_{\text{полн.}} - S_{\text{бок.}})^2}{\pi(S_{\text{полн.}} - S_{\text{бок.}})} = \frac{2S_{\text{полн.}} \cdot S_{\text{бок.}} - S_{\text{полн.}}^2}{\pi(S_{\text{полн.}} - S_{\text{бок.}})} \\ h &= \sqrt{\frac{2S_{\text{полн.}} \cdot S_{\text{бок.}} - S_{\text{полн.}}^2}{\pi(S_{\text{полн.}} - S_{\text{бок.}})}} \end{aligned}$$

3) Объем конуса:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{S_{\text{полн.}} - S_{\text{бок.}}}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2S_{\text{полн.}} \cdot S_{\text{бок.}} - S_{\text{полн.}}^2}{\pi(S_{\text{полн.}} - S_{\text{бок.}})}} = \\ &= \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{(2S_{\text{полн.}} \cdot S_{\text{бок.}} - S_{\text{полн.}}^2) \cdot (S_{\text{полн.}} - S_{\text{бок.}})} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } V = \frac{1}{3\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{(2S_{\text{полн.}} \cdot S_{\text{бок.}} - S_{\text{полн.}}^2) \cdot (S_{\text{полн.}} - S_{\text{бок.}})}.$$

Задача 31. Найдите отношение высоты цилиндра к радиусу шара, если и цилиндр, и шар входят в некоторое отверстие по скользящей посадке, а их объемы равны.

Решение:

Объем шара и цилиндра:

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_{\text{цилиндра}} = \pi R^2 \cdot h$$

 $V_{\text{шара}} = V_{\text{цилиндра}}$ по условию

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^2 h$$

$$\frac{h}{R} = \frac{4}{3}$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

Задача 32. Вершина равностороннего треугольника лежит на оси вращения, а сторона перпендикулярна оси вращения. Найдите объем фигуры вращения, которая получается при вращении равностороннего треугольника со стороной, равной m , вокруг оси.

Решение:

1) Общие соображения.

В результате вращения равностороннего треугольника вокруг оси OO_1 получаем усеченный конус с конической полостью. Сначала найдем объем усеченного конуса.

Затем объем конуса, объем полости. Затем вычтем из объема усеченного конуса объем конуса полости.

2) Объем усеченного конуса:

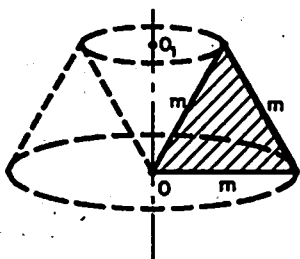
$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R \cdot r + r^2), \text{ где}$$

 R — радиус основания, $R = m$, r — радиус основания (верхнего)

$$r = m \sin 30^\circ = \frac{m}{2}$$

 h — высота конуса

$$h = m \cos 30^\circ = \frac{m\sqrt{3}}{2}$$



$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{m\sqrt{3}}{2} \cdot \left(m^2 + m \cdot \frac{m}{2} + \frac{m^2}{4}\right) = \frac{\pi m\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{7}{4}m^2 = \frac{7\sqrt{3}\pi}{24}m^3$$

3) Объем конуса (внутренней полости):

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$

r — радиус основания конуса, $r = \frac{m}{2}$

h — высота конуса, $h = \frac{m\sqrt{3}}{2}$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{m}{2}\right)^2 \cdot \frac{m\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{24}m^3$$

4) Объем тела вращения:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{7\sqrt{3}\pi}{24}m^3 - \frac{\sqrt{3}\pi}{24}m^3 = \frac{6\sqrt{3}\pi}{24}m^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{4}m^3$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}m^3$.

Задача 33. Плоскость пересекает шар диаметром 78 см и делит его на две части. Сечение шара — круг радиусом 15 см. Найдите объемы частей шара.

Решение:

1) Д/п: $OO_1 \perp \alpha$, O_1 — центр круга сечения, радиус шара — 39 см.

2) $\triangle AOO_1$ — прямоугольный
 $AO^2 = OO_1^2 + O_1A^2$ — по теореме
 Пифагора

$$39^2 = OO_1^2 + 15^2$$

$$OO_1 = 36 \text{ (см)}$$

3) Высота сегмента H :

$$H_1 = BO_1 = 39 - 36 = 3 \text{ (см)}$$

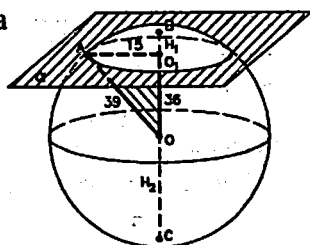
$$CO_1 = H_2 = 2R - H_1 = 78 - 3 = 75 \text{ (см)}$$

4) Объемы шаровых сегментов:

$$V_1 = \pi H_1^2 \left(R - \frac{H_1}{3}\right) = \pi \cdot 3^2 \cdot \left(39 - \frac{3}{3}\right) = \pi \cdot 9 \cdot 38 = 342\pi \text{ (см}^3\text{)}$$

$$V_2 = \pi H_2^2 \left(R - \frac{H_2}{3}\right) = \pi \cdot 75^2 \cdot \left(39 - \frac{75}{3}\right) = \pi \cdot 78750 \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: $342\pi \text{ см}^3$ и $78750\pi \text{ см}^3$.



Задача 34. Найдите отношение высоты конуса к его образующей, если развертка его боковой поверхности является полукругом.

Решение:

- 1) Полуокружность.

$$\pi l = 2\pi r$$

$$l = 2r$$

- 2) Высота конуса h :

$$h^2 = l^2 - r^2 = (2r)^2 - r^2 = 3r^2$$

$$h = r\sqrt{3}$$

- 3) Отношение:

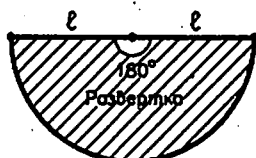
$$\frac{h}{l} = \frac{r\sqrt{3}}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ясно, что

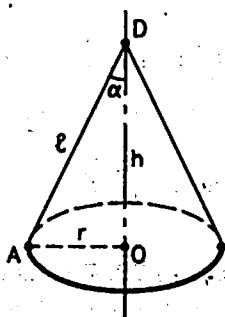
$$\frac{h}{l} = \cos \alpha$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Длина окружности
основания конуса $2\pi r$



Задача 35. Источник излучения удалили от центра шара на расстояние 5 км. Найдите ту часть поверхности шара, которая облучается, если радиус шара 3 км.

Решение:

- 1) Площадь сферического сегмента:

$$S = 2\pi RH, \text{ где}$$

$R = 3$ (км) — радиус шара

$H = KO_1$ — высота шарового сегмента.

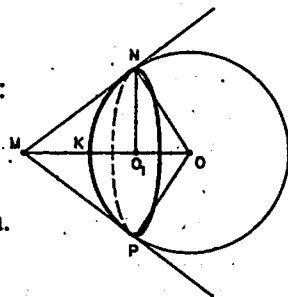
Найдем высоту шарового сегмента.

- 2) $\triangle MON$ — прямоугольный

$$ON^2 = OO_1 \cdot OM, \text{ т.е.}$$

катет в прямоугольном треугольнике есть среднее геометрическое между проекцией катета на гипотенузу и гипотенузой.

$$3^2 = OO_1 \cdot 5$$



$$OO_1 = \frac{9}{5} = 1,8 \text{ (км)}$$

3) Высота сферического сегмента H :

$$H = KO_1 = OK - OO_1 = 3 - 1,8 = 1,2 \text{ (км)}$$

4) Площадь сферического сегмента:

$$S = 2\pi RH = 2\pi \cdot 3 \cdot 1,2 = 7,2\pi \text{ (км}^2\text{)}$$

Ответ: $7,2\pi \text{ (км}^2\text{)}$.

Задача 36. Волейбольный мяч согласно требованиям Международной федерации волейбола «...выполняется из мягкой одноцветной кожи, имеет окружность 64-66 см...». Найдите, сколько кожи пойдет на волейбольный мяч. Не забудьте небольшое количество кожи добавить на швы (примерно 7% от площади поверхности волейбольного мяча. Больше нельзя, т.к. очень строго контролируется вес мяча — 270–280 г.).

Решение:

1) По-видимому, Международная федерация волейбола говорит о большой окружности в 65 см.

$$2\pi R = 65$$

$$R = \frac{65}{2\pi} \text{ (см)}$$

2) Площадь поверхности сферы:

$$S_1 = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{65}{2\pi}\right)^2 = \frac{65^2}{\pi} \approx 1345,54 \text{ (см}^2\text{)}$$

3) Площадь кожи на швы:

$$S_{\text{шв.}} = 1345,54 \cdot 0,07 = 94,19 \text{ (см}^2\text{)}$$

4) Сколько же нужно кожи для волейбольного мяча (кожу «меряют» в дм):

$$S = S_1 + S_{\text{шв.}} = 1439,73 \text{ (см}^2\text{)} \approx 15 \text{ (дм}^2\text{)}$$

Ответ: 15 дм^2 .

Задача 37. «Конус и шар». Осевое сечение конуса — равно-сторонний треугольник. Пусть центр шара совпадает с серединой высоты, а диаметр шара — с высотой конуса. Найдите отношение: а) полной поверхности конуса к площади поверхности шара; б) боковой и полной поверхности конуса.

Решение:

- 1) Пусть r — радиус основания конуса.

$$l = 2r, l — \text{образующая}$$

$\triangle ABC$ — равносторонний,

$$AB = BC = AC = 2r$$

- 2) Основание конуса:

$$S_{\text{осн.}} = \pi r^2$$

- 3) Площадь боковой поверхности конуса:

$$S_{\text{бок.}} = \pi r l = \pi r \cdot 2r = 2\pi r^2$$

- 4) Полная поверхность конуса:

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}} = \pi r^2 + 2\pi r^2 = 3\pi r^2$$

- 5) Высота конуса:

$$h = 2r \cdot \cos 30^\circ = 2r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$$

- 6) Радиус шара:

$$R = \frac{h}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

- 7) Площадь поверхности шара:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4\pi \cdot \frac{r^2 \cdot 3}{4} = 3\pi r^2$$

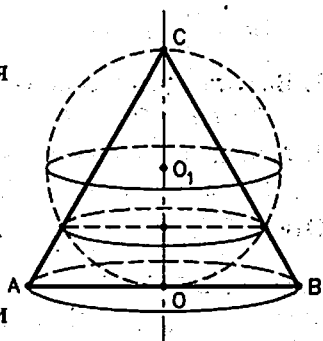
- 8) Отношение площадей полной поверхности шара и конуса:

$$\frac{S_{\text{полн.}}}{S_{\text{шара}}} = \frac{3\pi r^2}{3\pi r^2} = 1$$

- 9) Отношение боковой и полной поверхности конуса:

$$\frac{S_{\text{бок.}}}{S_{\text{полн.}}} = \frac{2\pi r^2}{3\pi r^2} = \frac{2}{3}$$

Ответ: $1; \frac{2}{3}$.



Задача 38. Повар вырезает шаровой сектор из яблока, заполняет вареньем из клубники, смазывает смесью из сметаны, сахара и муки и ставит яблоки в духовку. Найдите

объем шарового сектора для варенья, если диаметр яблока 8 см, диаметр основания соответствующего шарового сегмента равен 6,4 см.

Решение:

- 1) Объем шарового сектора:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h, \text{ где}$$

$$R = \frac{8}{2} = 4 \text{ (см)} — \text{ радиус шара,}$$

h — высота соответствующего шарового сегмента.

- 2) $\triangle OAO_1$ — прямоугольный

$$OA^2 = x^2 + O_1A^2 — \text{ по теореме Пифагора}$$

$$x^2 = 4^2 - 3,2^2 = 0,8 \cdot 7,2 = 0,8^2 \cdot 9$$

$$x = 0,8 \cdot 3 = 2,4 \text{ (см)}$$

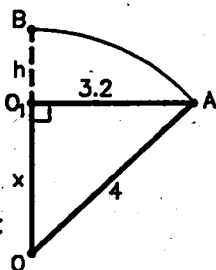
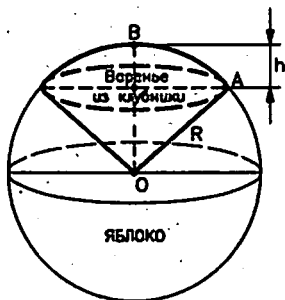
- 3) Высота шарового сегмента:

$$h = BO_1 = 4 - 2,4 = 1,6 \text{ (см)}$$

- 4) Вычисление объема шарового сектора:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{2}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 1,6 = 17\pi \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: $17\pi \text{ см}^3$.



Задача 39. Угол между радиусами кругового сектора равен $22,5^\circ$. Найти объем тела вращения, если ось вращения содержит один из двух радиусов, ограничивающих сектор, и радиус равен 16 см.

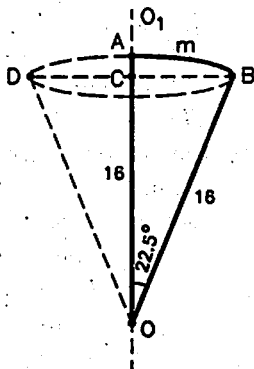
Решение:

- 1) Круговой сектор $OAmB$ вращается вокруг оси OO_1 . Тело вращения — шаровой сектор. AC — высота шарового сегмента.

$$2) AC = OA - OC = R - R \cos 22,5^\circ = 16 \cdot (1 - \cos 22,5^\circ)$$

- 3) Формула половинного угла:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$



В нашем случае

$$\cos^2 22,5^\circ = \frac{1 + \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 22,5^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

4) Высота шарового сегмента h :

$$h = AC = 16 \left(1 - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \right) = 8(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})$$

5) Объем шарового сектора:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot h = \frac{2}{3}\pi \cdot 16^2 \cdot 8 \cdot (2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}) \approx 208\pi \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: $\approx 208\pi \text{ см}^3$

Задача 40. Для глубоководных работ был сконструирован батискаф, который представлял из себя сферу диаметром 4 м. Цилиндрическая полость диаметром 2,4 м, проходящая внутри сферы, делает батискаф похожим на спасательный круг. В этой полости, омываемой водой, находятся двигатели батискафа. Найдите площадь поверхности батискафа.

Решение:

1) Высота цилиндра H :

$\triangle AOB$ — прямоугольный

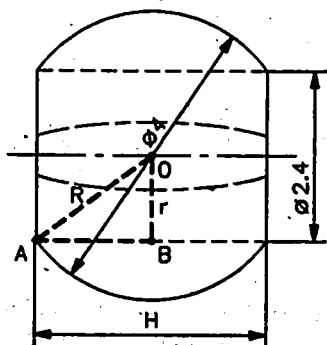
$AO = R = 2 \text{ (м)}, BO = r = 1,2 \text{ (м)}$

$AO^2 = AB^2 + BO^2$ — по теореме Пифагора

$$AB^2 = 2^2 - 1,2^2 = 4 - 1,44 = 2,56$$

$$AB = 1,6 \text{ (м)}$$

$$H = 2AB = 3,2 \text{ (м)}$$



2) Поверхность батискафа состоит из:

— сферы

$S_1 = 4\pi R^2$ — площадь поверхности сферы;

— внутренней цилиндрической части

$S_2 = 2\pi r \cdot H$, где

r — радиус цилиндрической части поверхности,

H — длина цилиндрической части.

— двух сферических частей поверхности шарового сектора — они вырезаны из сферической поверхности

$$S_3 = 2 \cdot 2\pi R \cdot h, \text{ где}$$

R — радиус сферы,

h — высота сферического сегмента

$$h = \frac{2R - H}{2}$$

3) Вычисления:

$$S_1 = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi \text{ (м}^2\text{)}$$

$$S_2 = 2\pi rH = 2\pi \cdot 1,2 \cdot 3,2 = 7,68\pi \text{ (м}^2\text{)}$$

$$S_3 = 2 \cdot 2\pi R \cdot h = 2 \cdot 2\pi R \cdot \frac{2R - H}{2} = 2 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{4 - 3,2}{2} = 3,2\pi \text{ (м}^2\text{)}$$

$$S = S_1 + S_2 - S_3 = 16\pi + 7,68\pi - 3,2\pi = 20,48\pi \approx 64,3 \text{ (м}^2\text{)}$$

Попутно заметим, что батискаф изготовлен из высокопрочного материала, весьма дорогостоящего. У нас получилось $64,3 \text{ м}^2$, что соответствует площади трехкомнатной квартиры.

Задача 41. Найдите сумму площадей поверхностей двух шаров, один из которых имеет радиус $R = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sin \alpha$, дру-

гой — $r = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cos \alpha$, где $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$. Зависит ли эта сумма

от угла α ? Чему равен радиус шара, поверхность которого равна сумме поверхностей заданных двух шаров?

Решение:

1) Площади поверхностей шаров:

$$S_1 = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sin \alpha \right)^2 = 4\pi \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$

$$S_2 = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cos \alpha \right)^2 = \cos^2 \alpha$$

2) Сумма поверхностей шаров:

$$S = S_1 + S_2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

3) $S = S(\alpha) = 1 \quad \alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$

Не зависит от α .

4) Радиус шара:

$$S = 4\pi x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{4\pi}, x = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

Ответ: 1; не зависит от α ; $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$

Задача 42. «Цилиндр и шар». Найдите отношение поверхностей двух тел вращения, причем ось вращения одна и та же. В первом случае вращается полукруг вокруг диаметра, т.е. ось вращения содержит диаметр. Второе тело получается вращением квадрата со стороной, равной радиусу той же окружности, и ось вращения содержит сторону квадрата.

Решение:

- 1) При вращении полукруга вокруг оси O_1O_2 , содержащей диаметр, равный $2R$, получаем шар радиуса R . Площадь поверхности шара равна

$$S = 4\pi R^2$$

- 2) Теперь квадрат $ABCD$, $AB = BC = CD = AD = R$. В результате получаем цилиндр. Поверхность цилиндра состоит из оснований:

$$S_{\text{осн.}} = \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi R^2$$

и боковой поверхности:

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi R \cdot H = 2\pi R \cdot R = 2\pi R^2$$

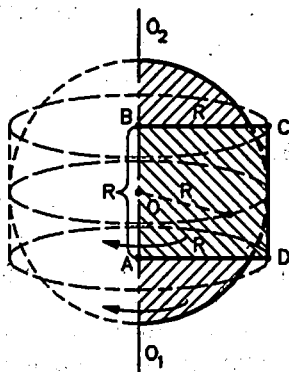
Таким образом, площадь полной поверхности цилиндра равна:

$$S_{\text{цилиндра}} = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}} = 2\pi R^2 + 2\pi R^2 = 4\pi R^2$$

- 3) Отношение площадей поверхностей шара и цилиндра равно:

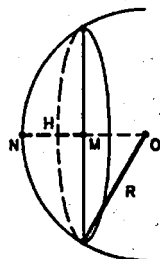
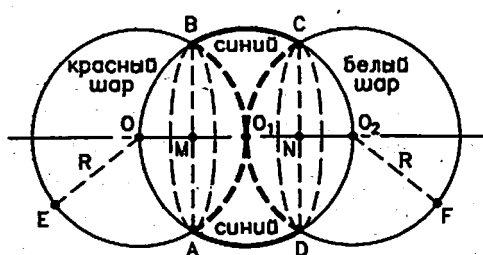
$$\frac{S_{\text{ш.}}}{S_{\text{ц.}}} = \frac{4\pi R^2}{4\pi R^2} = 1$$

Ответ: 1.



Задача 43. «Три шара». Красный, белый и синий шары имеют одинаковый радиус R . Центры красного и белого шаров расположены на концах диаметра синего шара. Найдите объем той части синего шара, что находится вне белого и вне красного шаров.

Решение:



1) Четыре шаровых сегмента.

$$V_{\text{шар.сегм.}} = \pi H^2 \cdot \left(R - \frac{H}{3} \right)$$

Так как $R = 2H$, то подставим $H = \frac{R}{2}$

$$V_{\text{шар.сегм.}} = \pi \cdot \left(\frac{R}{2} \right)^2 \cdot \left(R - \frac{R}{6} \right) = \pi \cdot \frac{R^2}{4} \cdot \frac{5R}{6} = \frac{5\pi R^3}{24}$$

Найдем объем четырех таких шаровых сегментов:

$$V = 4 \cdot \frac{5\pi R^3}{24} = \frac{5\pi R^3}{6}$$

2) Объем синего шара:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

3) Вычисления:

$$V_{\Phi} = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{5\pi R^3}{6} = \frac{1}{2}\pi R^3$$

Ответ: $\frac{1}{2}\pi R^3$.

Задача 44. «Развертка». Из круга радиусом l вырезали круговой сектор с углом α градусов. Затем круговой сектор свернули и получили коническую поверхность. Найдите диаметр основания конуса.

Решение:

- 1) Длина дуги сектора равна длине окружности основания.
- 2) Длина дуги:

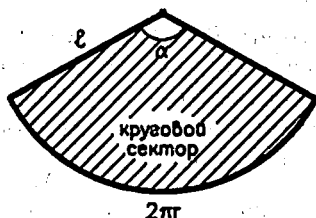
$$L = \frac{2\pi l}{360^{\circ}} \cdot \alpha$$

- 3) Равенство:

$$\frac{2\pi l}{360^{\circ}} \cdot \alpha = 2\pi r$$

$$2r = d = \frac{l\alpha}{180^{\circ}} \text{ — диаметр основания}$$

Ответ: $\frac{l\alpha}{180^{\circ}}$.



Задача 45. «Шар и цилиндр». В шар вписан цилиндр. Найдите отношение $\frac{r}{h}$ (радиуса основания цилиндра к его высоте) для цилиндра, который имеет максимальный объем.

Решение:

- 1) Пусть радиус шара R , обозначим $2x = AB$ — высоту цилиндра.

- 2) $\triangle OBC$ — прямоугольный
 $OC^2 = OB^2 + BC^2$ — по теореме Пифагора

$$BC^2 = r^2 = OC^2 - OB^2 = R^2 - x^2$$

- 3) Объем вписанного цилиндра:

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi(R^2 - x^2) \cdot 2x =$$

$$= \pi R^2 \cdot 2x - \pi \cdot 2x^3, \quad x \in (0; R)$$

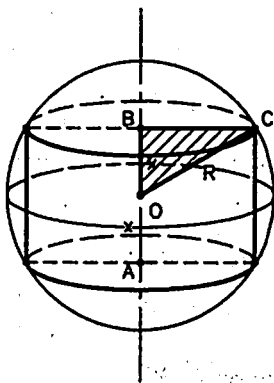
- 4) Рассмотрим $V = V(x)$ — многочлен, функция и производная существуют всюду.

$V'(x) = 0$ — уравнение критических точек

$$2\pi R^2 - 6\pi x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{3} R^2$$

$$h = 2x$$



$$h^2 = 4x^2$$

$$h^2 = \frac{4}{3}R^2$$

5) Отношение радиуса основания к высоте:

$$\frac{r^2}{h^2} = \frac{R^2 - x^2}{4x^2} = \frac{R^2 - \frac{1}{3}R^2}{\frac{4}{3}R^2} = \frac{\frac{2}{3}R^2}{\frac{4}{3}R^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Задача 46. «Шар и призма». Из правильной треугольной призмы выточен шар. Найдите отношение объемов и площадей поверхности шара и призмы, если шар вписан в призму.

Решение:

1) Шар вписан в правильную треугольную призму, центр шара находится на одном и том же расстоянии от трех боковых граней и двух оснований призмы. Это расстояние равно радиусу вписанного шара — r .

2) Объем вписанного шара:

$$V_{\text{ш.}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

3) Площадь поверхности вписанного шара:

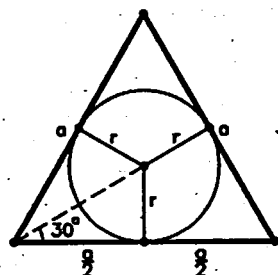
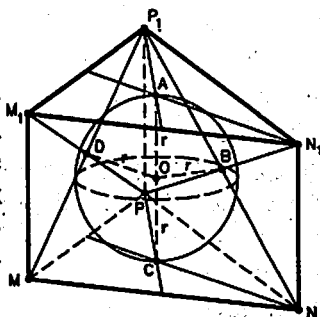
$$S_{\text{ш.}} = 4\pi r^2$$

4) Высота призмы:

$$h = 2r$$

5) Площадь основания призмы.

При ортогональном проектировании шара на плоскость основа-



ния призмы (например, нижнего) получаем круг, вписанный в правильный треугольник.

$$\frac{a}{2} = r \operatorname{ctg} 30^\circ = r\sqrt{3},$$

$$a = 2r\sqrt{3}$$

$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{a}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3}r^2$$

6) Объем призмы:

$$V_{\text{пр.}} = S_{\text{пр.}} \cdot h = 3\sqrt{3}r^2 \cdot 2r = 6\sqrt{3}r^3$$

7) Площадь полной поверхности призмы:

$$S_{\text{полн.}} = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}} = 6\sqrt{3}r^2 + 3 \cdot a \cdot h =$$

$$= 6\sqrt{3}r^2 + 3 \cdot 2r\sqrt{3} \cdot 2r = 6\sqrt{3}r^2 + 12\sqrt{3}r^2 = 18\sqrt{3}r^2$$

8) Отношение площадей поверхностей:

$$\frac{S_{\text{шара}}}{S_{\text{призмы}}} = \frac{4\pi r^2}{18\sqrt{3}r^2} = \frac{4\pi}{18\sqrt{3}} \approx 0,4$$

9) Отношение объемов шара и призмы:

$$\frac{V_{\text{шара}}}{V_{\text{призмы}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{6\sqrt{3}r^3} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \approx 0,4$$

Ответ: $\approx 0,4$

Задача 47. «Шар и пирамида». Около правильной четырехугольной пирамиды описан шар радиусом 10 дм, а в пирамиду вписан шар радиусом 4 дм. Найдите объем пирамиды.

Решение:

1) Обозначим высоту пирамиды

$$PABCD \quad PO_1 = x$$

2) $\triangle APO_1$ — прямоугольный

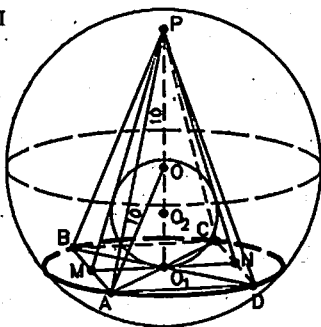
$$PO_1 = x, \quad OO_1 = PO_1 - PO = x - 10$$

3) $\triangle AOO_1$ — прямоугольный

$$AO^2 = O_1A^2 + O_1O^2 \text{ — по теореме Пифагора}$$

$$O_1A^2 = AO^2 - O_1O^2 =$$

$$= 10^2 - (x - 10)^2 = 20x - x^2$$



- 4) Площадь основания правильной четырехугольной пирамиды:

$$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot O_1 A^2 \cdot 4 = 40x - 2x^2$$

- 5) Объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (40x - 2x^2) \cdot x$$

- 6) Вписанный шар.

Центр вписанного шара — точка O_2 — одинаково удалена от боковых граней пирамиды и от основания пирамиды.

В сечении пирамиды $\triangle MPN$ точка O_2 — центр вписанной окружности — является точкой пересечения биссектрис $\triangle MPN$. Введем обозначения:

$\angle O_1 N O_2 = \alpha$, $\angle O_2 N F = \alpha$, $\angle O_1 N F = 2\alpha$

- 7) Уравнение:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{O_1 P}{O_1 N} = \frac{2x}{MN}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{O_1 O_2}{O_1 N} = \frac{8}{MN}$$

Получаем уравнение:

$$\frac{2x}{MN} = \frac{2 \cdot \frac{8}{MN}}{1 - \frac{64}{MN^2}}$$

$$x = \frac{8MN^2}{MN^2 - 64}$$

$$x(MN^2 - 64) = 8 \cdot MN^2$$

MN равно стороне квадрата $ABCD$ и

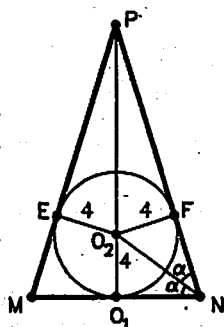
$$MN^2 = S_{\text{осн.}} = 40x - 2x^2$$

$$x(40x - 2x^2 - 64) = (40x - 2x^2) \cdot 8,$$

Сокращаем на $x \neq 0$

$$40x - 2x^2 - 64 = (40 - 2x) \cdot 8$$

$$2x^2 - 56x + 384 = 0$$



$$x^2 - 28x + 192 = 0$$

$$x_1 = 12, x_2 = 16$$

8) Объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (40x - 2x^2) \cdot x$$

$$x_1 = 12$$

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot (40 \cdot 12 - 2 \cdot 12^2) \cdot 12 = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot (40 - 24) = 288 \text{ (куб. ед.)}$$

$$x_2 = 16$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot (40 \cdot 16 - 2 \cdot 16^2) \cdot 16 = \frac{1}{3} \cdot 16^2 \cdot (40 - 32) = 682\frac{2}{3} \text{ (куб. ед.)}$$

Ответ: 288 куб. ед.; $682\frac{2}{3}$ куб. ед.

Задача 48. «Конус и шар». В равносторонний конус с радиусом основания R вписаны два шара: первый касается основания конуса, второй шар имеет касание с шаром, и, наконец, оба шара касаются конической поверхности. Найдите объемы вписанных шаров.

Решение:

1) Объем шара:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

2) Радиус первого шара r_1

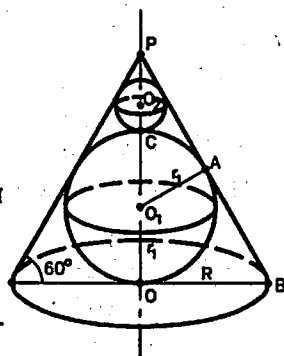
$\triangle PO_1A \sim \triangle POB$ по двум углам

$$\angle APO_1 = 30^\circ$$

$$\frac{r_1}{R} = \frac{PO_1}{PB} \text{ или}$$

$$\frac{r_1}{R} = \frac{PO - r_1}{2R}; r_1 = \frac{PO}{3}$$

Аналогично: $r_2 = \frac{PC}{3}$, r_2 — радиус второго шара.



3) Высота конуса.

$\triangle POB$ — прямоугольный

$$h = OP = OB \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = R\sqrt{3}$$

4) Радиусы шаров:

$$r_1 = \frac{PO}{3} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

$$PC = PO - OC = R\sqrt{3} - \frac{2}{3}R\sqrt{3} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$

$$r_2 = \frac{PC}{3} = \frac{R\sqrt{3}}{9}$$

5) Объемы шаров:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{4\pi}{81}R^3$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{R\sqrt{3}}{9}\right)^3 = \frac{4\pi}{729}R^3$$

Ответ: $\frac{4\pi}{81}R^3$ куб. ед.; $\frac{4\pi}{729}R^3$ куб. ед.

Задача 49. «Шар и пирамида». Правильная пирамида высотой h и боковым ребром l вписана в шар диаметром, равным d . Докажите, что ребро пирамиды есть среднее геометрическое между диаметром шара d и высотой пирамиды h .

Решение:

1) Среднее геометрическое:

$$c = \sqrt{ab}, c > 0, a > 0, b > 0$$

Число c есть среднее геометрическое, или среднее пропорциональное между a и b .

2) Правильная пирамида $SABCD$ вписана в шар радиуса r .

$$SA = SB = SC = SD = l, OS = OD = r, SO_1 = h$$

3) $\triangle SO_1D$ — прямоугольный, т.к. $SO_1 \perp ABCD$

$$SD^2 = SO_1^2 + O_1D^2 \text{ — по теореме Пифагора}$$

$$l^2 = h^2 + O_1D^2$$

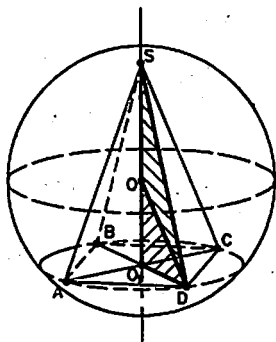
$$O_1D^2 = l^2 - h^2$$

4) $\triangle OO_1D$ — прямоугольный

$$OD^2 = OO_1^2 + O_1D^2$$

$$r^2 = (h - r)^2 + O_1D^2$$

$$O_1D^2 = r^2 - (h - r)^2 = r^2 - h^2 + 2hr - r^2 = 2hr - h^2 = dh - h^2$$



5) Из последних равенств для O_1D^2 получаем:

$$l^2 - h^2 = dh - h^2$$

$$l = \sqrt{dh},$$

что и требовалось доказать.

Ответ: доказано, что $l = \sqrt{dh}$.

Задача 50. «Шар и конус». Образующая конуса в 7 раз больше радиуса основания конуса. В конус вписан шар. Найдите отношение площадей полной поверхности конуса и описанного шара.

Решение:

1) Образующая конуса и радиус основания.

Пусть $O_1A = r$, тогда $AP = 7r$

2) Площадь поверхности конуса:

$S_{\text{осн.}} = \pi r^2$ — площадь основания конуса

$S_{\text{бок.}} = \pi r l = \pi r \cdot 7r = 7\pi r^2$ — площадь боковой поверхности конуса

$S_{\text{полн.}} = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}} = \pi r^2 + 7\pi r^2 = 8\pi r^2$ — площадь полной поверхности конуса

3) Площадь поверхности шара:

$S_{\text{шара}} = 4\pi x^2$, где

x — радиус шара

4) Вычисления:

$\alpha = \angle OAO_1 = \angle BAO$, т.к. OA — биссектриса

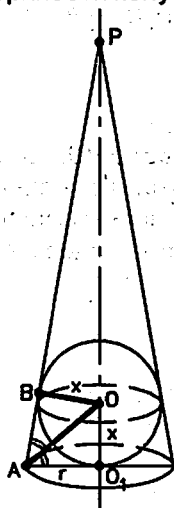
$$\cos 2\alpha = \frac{r}{l} = \frac{r}{7r} = \frac{1}{7}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{r} \text{ из } \triangle OAO_1$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

5) Уравнение:

$$\frac{1}{7} = \frac{1 - \frac{x^2}{r^2}}{1 + \frac{x^2}{r^2}} \Rightarrow \frac{1}{7} = \frac{r^2 - x^2}{r^2 + x^2}$$



$$7r^2 - 7x^2 = r^2 + x^2$$

$$8x^2 = 6r^2$$

$$x^2 = \frac{3}{4}r^2$$

умножим на 4π

$$4\pi x^2 = 3\pi r^2 - \text{площадь поверхности шара}$$

- 6) Отношение площадей полной поверхности конуса и шара:

$$\frac{S_{\text{конуса}}}{S_{\text{шара}}} = \frac{8\pi r^2}{3\pi r^2} = \frac{8}{3}$$

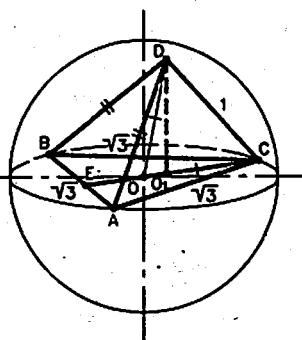
Ответ: $\frac{8}{3}$.

Задача 51. «Шар и пирамида». Около пирамиды $DABC$ описан шар. Центр шара совпадает с центром треугольника $\triangle ABC$, который является основанием пирамиды. Найдите объемы пирамиды и шара, если $AB = BC = AC = \sqrt{3}$ дм, $DA = DB$ и $DC = 1$ дм.

Решение:

- 1) Основание пирамиды $DABC$.
 Центр шара точка $O \in ABC$, следовательно, основание $\triangle ABC$ вписан в большой круг шара. Радиус описанной большой окружности около $\triangle ABC$:

$$R = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1 \text{ (дм)}$$



- 2) Высота пирамиды.

Основание высоты, точка O_1 , равноудалена от точки A и от точки B . Это означает, что точка O_1 лежит на серединном перпендикуляре CE . DO_1 — высота в треугольнике $\triangle COD$, причем $CO = DO = CD = 1$, значит

$$DO_1 = OD \cdot \sin 60^\circ = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3) Объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{(\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8} \text{ (дм}^3\text{)}$$

4) Объем шара:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 = \frac{4\pi}{3} \approx 4,19 \text{ (дм}^3\text{)}$$

Ответ: $\frac{3}{8} \text{ дм}^3$; $4,19 \text{ дм}^3$.

Оглавление

Арифметика

I.	Признаки делимости	3
II.	Деление с остатком	6
III.	Нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного	8
IV.	Приведение обыкновенных дробей к наименьшему общему знаменателю	11
V.	Сравнение, сложение, вычитание, умножение и деление обыкновенных дробей	12
VI.	Сложение, вычитание, умножение и деление десятичных дробей	17
VII.	Совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями	21
VIII.	Сравнение, сложение, вычитание, умножение, деление положительных и отрицательных чисел	26
IX.	Проценты	30
X.	Пропорции, основное свойство пропорции. Масштаб. Прямо пропорциональные и обратно пропорциональные величины	35
XI.	Среднее арифметическое	39
XII.	Текстовые задачи	41

Алгебра и начала анализа

I.	Выражения с переменными. Тождества. Тождественные преобразования выражения. Одночлены. Многочлены.....	77
II.	Сумма и разность многочленов. Произведение одночлена и многочлена. Произведение многочленов	85
III.	Формулы сокращенного умножения	90
IV.	Разложение многочлена на множители	94
V.	Степень с целым показателем и ее свойства. Степень с рациональным показателем и ее свойства	97
VI.	Определение арифметического корня. Свойства арифметических корней. Корень нечетной степени из отрицательного числа.....	102
VII.	Алгебраические выражения. Тождественные преобразования алгебраических выражений	110
VIII.	Линейные уравнения. Системы линейных уравнений	116
IX.	Квадратные уравнения. Уравнения, сводящиеся к квадратным уравнениям. Дробные уравнения. Разложение квадратного трехчлена на множители. Система уравнений второй степени.....	131
X.	Задачи на составление уравнений и систем уравнений	153
	1. Задачи на движение.....	153
	2. Задачи на совместную работу.....	162
	3. Задачи на проценты.....	169
	4. Задачи на смеси и сплавы.....	172
	5. Задачи с геометрическим содержанием.....	175
	6. Другие задачи.....	179

XI.	Линейные неравенства с одной переменной. Дробно-линейные неравенства. Системы линейных неравенств с одной переменной.....	182
XII.	Понятие функции. Линейная функция и ее график. Квадратичная функция и ее график. Функция обратная пропорциональность и ее график	192
XIII.	Квадратные неравенства. Системы неравенств второй степени	205
XIV.	Неравенства и системы неравенств с двумя переменными	212
XV.	Иррациональные уравнения и неравенства	218
XVI.	Уравнения и неравенства с модулем.....	223
XVII.	Арифметическая и геометрическая прогрессии.....	228
XVIII.	Производная и ее применения.....	239
XIX.	Основные свойства функций. Исследование функций.....	252
XX.	Задачи на нахождение наименьшего и наибольшего значения функции	265
XXI.	Решение неравенств методом интервалов	270
XXII.	Показательная функция. Решение показательных уравнений и неравенств	276
XXIII.	Логарифмы. Логарифмическая функция. Логарифмические уравнения и неравенства	284
XXIV.	Первообразная. Интеграл. Вычисление площадей плоских фигур	293

Тригонометрия

I.	Тригонометрические функции и их свойства	303
II.	Четность. Нечетность. Периодичность тригонометрических функций. Построение графиков тригонометрических функций	310
III.	Обратные тригонометрические функции	318
IV.	Тригонометрические уравнения	320
V.	Решение тригонометрических неравенств	327
VI.	Решение прямоугольных треугольников	333
VII.	Решение косоугольных треугольников	339

Планиметрия

I.	Треугольники. Равенство треугольников	351
II.	Параллельные прямые	365
III.	Четырехугольники	373
IV.	Подобие фигур	391
V.	Окружность	398
VI.	Площади фигур	414

Стереометрия

I.	Аксиомы стереометрии	426
II.	Встреча с сечением. Развитие пространственного воображения	429
III.	Параллельность прямых и плоскостей	435
IV.	Перпендикулярность прямых и плоскостей	453

V.	Декартовы координаты и векторы в пространстве	475
VI.	Многогранники.....	511
VII.	Тела вращения	545
VIII.	Объемы многогранников	573
IX.	Объемы и поверхности тел вращения.....	593

**Книжные магазины изд-ва «Филол. о-во «СЛОВО»»
(в Москве):**

Ватутина ул., 13, к.1 (м. Кунцевская), т. 444-40-10
Доватора ул., 6/6, к. 8, стр. 3 (м. Спортивная), т. 248-39-24
Ленинский пр-т, 148 (м. Юго-Западная), т. 433-66-66
2-я Пугачевская, 10, к. 1 (м. Преображенская площадь)
Тихвинская ул., 17, стр.1 (м. Савеловская), т. 978-08-85
Шипиловский пр-д, 39, к. 1 (м. Орехово), т. 343-44-37
Чертановская ул., 45а, к.1 (м.Чертановская)

**Интернет-магазин изд-ва «Филол. о-во «СЛОВО»»
<http://www.slovobook.ru>**

Оптовая торговля книгами «Эксмо» и товарами «Эксмо-канц»:
ООО «ТД «Эксмо». 142700, Московская обл., Ленинский р-н, г. Видное,
Белосаменное ш., д. 1, многоканальный тел. 411-50-74.
E-mail: reception@eksmo-sale.ru

Полный ассортимент книг издательства «Эксмо» для оптовых покупателей:

В Санкт-Петербурге: ООО СЗКО, пр-т Обуховской Обороны, д. 84Е.
Тел. отдела реализации (812) 365-44-80/81/82.

В Нижнем Новгороде: ООО ТД «Эксмо НН», ул. Маршала Воронова, д. 3.
Тел. (8312) 72-36-70.

В Казани: ООО «НКП Казань», ул. Фрезерная, д. 6. Тел. (8435) 70-40-45/46.

В Самаре: ООО «РДЦ-Самара», пр-т Кирова, д. 75/1, литера «Е». Тел. (846) 269-66-70.

В Екатеринбурге: ООО «РДЦ-Екатеринбург», ул. Прибалтийская, д. 24а.
Тел. (343) 378-49-45.

В Киеве: ООО ДЦ «Эксмо-Украина», ул. Луговая, д. 9. Тел./факс: (044) 537-35-52.

Во Львове: Торговое Представительство ООО ДЦ «Эксмо-Украина», ул. Бузкова, д. 2.
Тел./факс (032) 245-00-19.

Мелкооптовая торговля книгами «Эксмо» и товарами «Эксмо-канц»:
117192, Москва, Мичуринский пр-т, д. 12/1. Тел./факс: (495) 411-50-76.
127254, Москва, ул. Добролюбова, д. 2. Тел.: (495) 745-89-15, 780-58-34.

Информация по канцтоварам: www.eksmo-kanc.ru e-mail: kanc@eksmo-sale.ru

Полный ассортимент продукции издательства «Эксмо»:

В Москве в сети магазинов «Новый книжный»:

Центральный магазин — Москва, Сухаревская пл., 12. Тел. 937-85-81.

Информация о магазинах «Новый книжный» по тел. 780-58-81.

В Санкт-Петербурге в сети магазинов «Буквоед»:

«Магазин на Невском», д. 13. Тел. (812) 310-22-44.

**По вопросам размещения рекламы в книгах издательства «Эксмо»
обращаться в рекламный отдел. Тел. 411-68-74.**

Учебное издание

Якушева Г.М.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Редактор **В.В. Славкин**

Верстка **С. Васильева**

Компьютерная графика **Т. Скреденас, А. Скреденас**

Технический редактор **В. Пленкина**

Корректор **В.В. Славкин**

Гигиеническое заключение

№ 77.99.02.953.Д.008097.11.02 от 27.11.2002 г.

Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953000 — книги, брошюры

ООО «Филологическое общество "СЛОВО"»

Лицензия ЛР № 061646 от 05.12.97

121357, Москва, ул. Ватутина, 13, к. 1

e-mail: slovo@df.ru; www.slovobook.ru

ОО «Издательство «Эксмо».

127299, Москва, ул. Клары Цеткин, д. 18, корп. 5.

Тел.: 411-68-86, 956-39-21.

Интернет / Home page: www.eksmo.ru

Электронная почта (E-mail) — info@eksmo.ru

Подписано в печать 23.05.2006.

Формат 84x108 1/32. Печать офсетная. Бум. тип. Усл. печ. л. 33,6.

Доп. тираж 3000 экз. Заказ № 4602288.

Отпечатано с готовых монтажей
на ФГУИПП «Нижполиграф».

603006, Нижний Новгород, ул. Варварская, 32.