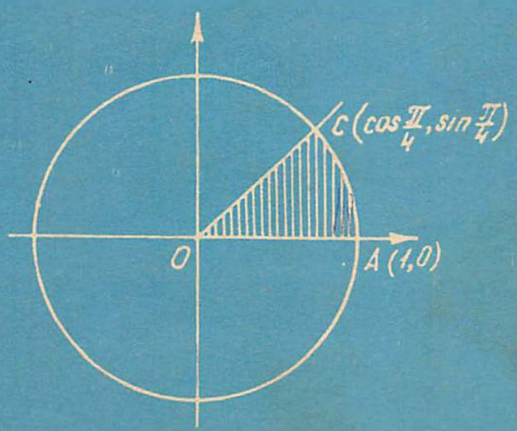
INSPECTORATUL ŞCOLAR
CASA PERSONALULUI DIDACTIC
MUNICIPIUL BUCUREŞTI

X

matematică

geometrie și trigonometrie



1985

INSPECTORATUL SCOLAR
CASA PERSONALULUI DIDACTIC
MUNICIPIUL BUCUREȘTI

GEOMETRIE
ȘI
TRIGONOMETRIE
CLASA a X-a

Soluții în rezolvarea problemelor și exercițiilor din manual, ediția 1984

1985

● Rezolvările de probleme aparţin colectivului de profesori:

Capitolul I - GHEORGHE ŞTEFĂNESCU, Liceul de Filologie-Istorie n

Capitolul II - ADRIANA ELENA BÂLDEA, Liceul de Matematică-Fizic
"Mihai Viteazul"

Capitolul III - DOINA MELINTE,
VASILE SEBU, Liceul Industrial "George Coşbuc"

Capitolul IV - FLORIN POPA,
SORIN RĂDULESCU,
TIBERIU SÎRBU, Liceul Industrial "Electronica"

Capitolul V - DOINA BĂLU,
GHEORGHE IVAN,
CORNEL ŞTÊFAN, Liceul Industrial "Electroaparataj"

Capitolul VI - CONSTANTIN DIACONU,
MARIANA PASARIU,
EMILIAN STĂTESCU, Liceul Industrial "Al. Sahia"
MIHAI BALUNA,
CARMEN HAŞEGANU MARIN,
DANIELA STOICA, Liceul de Ştiinţe ale Naturii
"C.A. Rosetii"

Capitolul VII - ANGELA RONDELLI,
CRISTIAN PÎRVUCICĂ, Liceul Economic şi de Drept
Administrativ nr. 3

Probleme recapitulative - GRIGORE BĂNESCU,
EUGENIA ROŞCA, Liceul Industrial "Mecanică Fină"

● Controlul ştiinţific a fost realizat de colectivul de profesori:

FLORIN CORNEA,
CONSTANTIN MĂRCULESCU, Liceul de Matematică-Fiz
"Mihai Viteazul"

EUGENIA ROŞCA, Liceul Industrial "Mecanică Fină"
ANGELA RONDELLI, Liceul Economic şi de Drept
Administrativ nr.3
SORIN RĂDULESCU,
TIBERIU SÎRBU, Liceul Industrial "Electronica"
CORNEL ŞTEFAN, Liceul Industrial "Electroaparataj"

● Coordonator - prof. FLORIN DIAC, Inspectoratul Şcolar al
Municipiului Bucureşti

CUVINT INAINTE

Ridicarea eficienţei procesului de învăţare a matematicii, cum dealtfel a tuturor disciplinelor şcolare, constituie astăzi o preocupare majoră nu numai în pedagogia predării-învăţării ci şi a tuturor factorilor de proiectare, control şi îndrumare a învăţământului şi a cadrelor didactice în procesulnemijlocit al pregătirii pentru fiecare lecţie şi al predării.

Iniţiativa Inspectoratului Scolar şi a Casei Personalului Didactic din Municipiul Bucureşti de a edita acest ghid îndrumător cu soluţii şi rezolvări ale problemelor din manualul de geometrie şi trigonometrie pentru clasa aX-a, ediţia 1984, se înscrie pe linia preocupărilor permanente ale acestora pentru ridicarea calităţii şi eficienţei procesului de predare-învăţare. Experienţa la catedră, confruntarea cu cerinţele manualului la care ne referim, începînd cu anul 1982 de cînd se predă după acesta, ne-a îndemnat să venim în întîmpinarea profesorilor şi a elevilor cu soluţii şi chiar cu rezolvarea integrală a problemelor şi a exerciţiilor conţinute în manual. Aceasta însă cu gîndul sincer că soluţiile şi rezolvările pe care autorii acestui îndrumar le-au dat exerciţiilor şi problemelor din manual, vor stimula atitudinea creatoare atît a elevilor cît şi a profesorilor de matematică pentru găsirea şi a altor căi şi metode de rezolvare, care să întregească procesul de înţelegere şi învăţare a noţiunilor de geometrie şi trigonometrie din programa clasei a X-a.

Sîntem convinşi că, distinşii noştri colegi vor folosi acest îndrumar manifestînd un plus de exigenţă şi responsabilitate în rîndul elevilor, astfel încît, consultarea acestei lucrări să nu le diminueze efortul de gîndire şi de exerciţiu şi, mai ales, să nu ducă la comoditate.

Prof. FLORIN DIAC

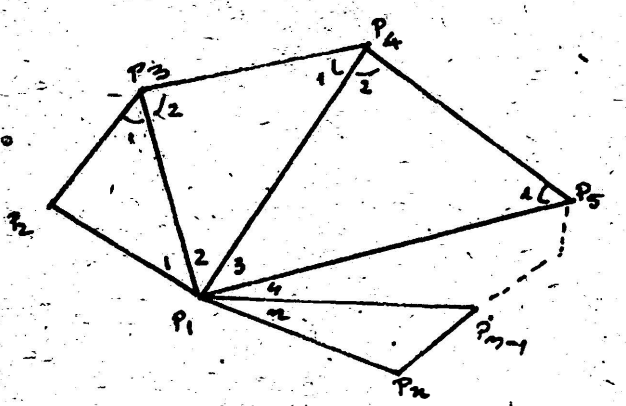
CAPITOLUL I

SUPRAFEŢE POLIGONALE. ARII

§ 1. Suprafeţe poligonale

Pag.5

1. Să se arate că suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu n vîrfuri este $S_n = (n-2)\cdot 180$.



Soluţie:

$S_n = m(\hat{P}_1) + m(\hat{P}_2) + m(\hat{P}_3) + \dots + m(\hat{P}_n)$

$S_n = m(\hat{P}_1^1 + \hat{P}_1^2 + \dots + \hat{P}_1^{n-1}) + m(\hat{P}_2) + m(\hat{P}_3^1 + \hat{P}_3^2) +$

$+ m(\hat{P}_4^1 + \hat{P}_4^2) + \dots + m(\hat{P}_{n-1}) + m(\hat{P}_n)$

Asociem covenabili şi obţinem

$S_n = [m(\hat{P}_1^1) + m(\hat{P}_2) + m(\hat{P}_3^1)] +$

$+ [m(\hat{P}_1^2) + m(\hat{P}_3^2) + m(\hat{P}_4^1)] +$

$+ [m(\hat{P}_1^3) + m(\hat{P}_4^2) + m(\hat{P}_5^1)] + \dots$

$\dots + [m(\hat{P}_1^{n-2}) + m(\hat{P}_{n-1}^2) + m(\hat{P}_n)]$

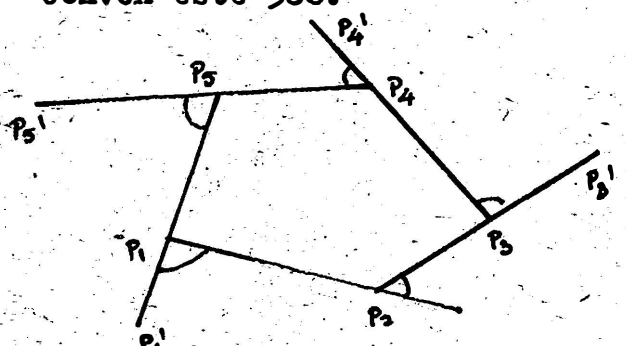
Utilizînd teorema: orice suprafaţă poligonală convexă cu n laturi ($n > 3$) se descompune în $(n-2)$ suprafeţe triunghiulare, obţinem:

$S_n = (n-2)\cdot 180$.

2. Cîte laturi are un poligon regulat, dacă măsura unui unghi al său este 135. Soluţie: $S_n = 135 \cdot n$ dar $S_n = (n-2)180^\circ$. Egalînd

$135n = (n-2)180 \Rightarrow 45n = 360 \Rightarrow n = 8$.

3. Daca $L = P_1P_2 \dots P_n$ este un poligon convex şi P_i' un punct pe semidreapta opusă lui $/P_iP_{i-1}$, atunci $\widehat{P_i'P_iP_{i+1}}$ se numeşte unghi exterior. Să se arate că suma măsurilor unghiurilor exterioare ale unui poligon convex este 360.



Soluţie. In $P_1, P_2 \dots P_n$ considerăm unghiurile cu laturile în prelungire. Sînt n unghiuri a căror măsură este 180. Din suma acestor unghiuri scădem măsurile unghiurilor interioare poligonului

$n \cdot 180 - (n-2)360 = 360$

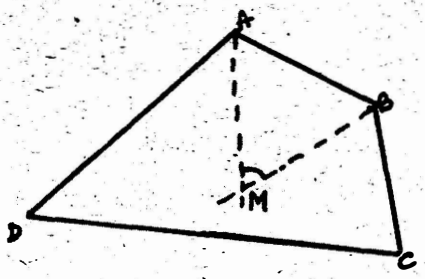
4. Măsura unui unghi al unui poligon regulat este de 4 ori mai mare decît măsura unui unghi exterioar. Cîte laturi are poligonul?

Soluţie: $4 \cdot \frac{360}{n} = \frac{(n-2)180}{n}$ $\quad 4 \cdot 360 = n \cdot 180 - 360 \quad \Rightarrow n = 10$

5. Cîte laturi are un poligon convex, dacă toate unghiurile sale exterioare sînt obtuze?

Soluţie: suma măsurilor unghiurilor exterioare ale unui poligon convex este 360, rezultă că poligonul are toate unghiurile exterioare obtuze dacă numărul laturilor este 3.

6. Să se arate că într-un patrulater convex, bisectoarele a două unghiuri consecutive formează un unghi a cărui măsură este egală cu semisuma măsurilor celorlalte unghiuri.



Soluție: bisectoarele unghiurilor A și B se intersectează în M.

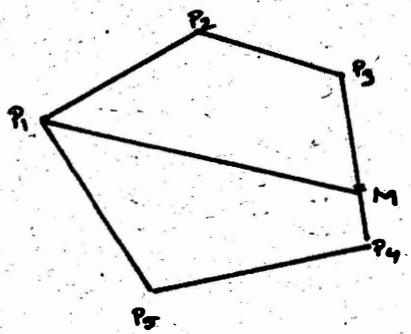
$$m(\widehat{AMB}) = 180 - \frac{1}{2}m(\hat{A}) - \frac{1}{2}m(\hat{B}) =$$

$$= \frac{360 - m(\hat{A}) - m(\hat{B})}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) - m(\hat{A}) - m(\hat{B})]$$

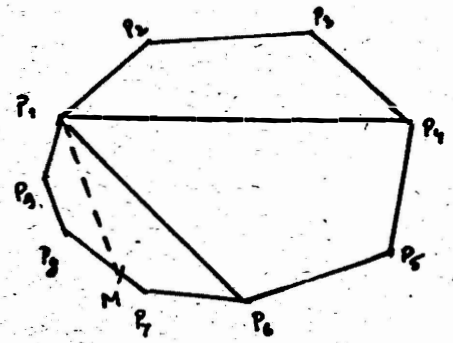
$$= \frac{1}{2}[m(\hat{C}) + m(\hat{D})].$$

7. Arătați că o suprafață pentagonală convexă poate fi descompusă în două suprafețe patrulatere.



Soluție:
Fie $(P_1 P_2 P_3 P_4 P_5)$ o suprafață pentagonală convexă.
Alegem $M \in (P_3P_4)$. Unim P_1 cu M.
Atunci $(P_1 P_2 P_3 M)$ și $(P_1 M P_4 P_5)$ sînt suprafețe patrulatere. Deci suprafața pentagonală convexă poate fi desoompusă în două suprafețe patrulatere.

8. Care este numărul minim de suprafețe patrulatere în care se descompune o suprafață poligonală cu 9, 10, 11 vîrfuri.



Soluție: suprafața poligonală $(P_1P_2 \ldots P_9)$ se descompune în suprafețele patrulatere $(P_1P_2P_3P_4)$ și $(P_1P_4P_5P_6)$ și în suprafața pentagonală $(P_1P_6P_7P_8P_9)$ care (conform ex 7) se descompune în două suprafețe patrulatere.
Deci numărul minim de suprafețe patrulatere este 4.

Suprafețele $(P_1 \ldots\ldots P_{10})$ se descompun în suprafețele patrulatere $(P_1P_2P_3P_4)$, $(P_1P_4P_5P_6)$, $(P_1P_6P_7P_8)$ și $(P_1P_8P_9P_{10})$ deci în 4 suprafețe patrulatere.

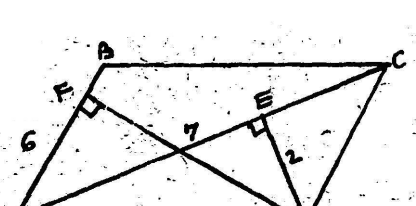
Suprafața poligonală $(P_1 \ldots\ldots P_{11})$ se descompune în $(P_1P_2P_3P_4)$, $(P_1P_4P_5P_6)$, $(P_1P_8P_9P_{10}P_{11})$, care se descompune (conform ex 7) în două suprafețe patrulatere. Deci sînt 5 suprafețe patrulatere.

./.

Pag.14

§ 3. Aria suprafețelor poligonale

1. Paralelogramul ABCD are $\|AB\|=6$ $\|AC\|=7$ și $d(D,AC)=2$. Să se afle $d(D,AB)$



Soluție: $d(D,AB)=\|DF\|$. $(DF\perp AB)$.

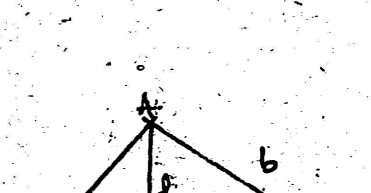
$$\mathcal{A}[ABCD]=2\mathcal{A}[ADC]=2\frac{\|AC\|\|DE\|}{2}=14$$

$$\mathcal{A}[ABCD]=\|AB\|\cdot\|DF\|$$

$\|AB\|\cdot\|DF\|=14$ dar $\|AB\|=6$ deci

$\|DF\|=\frac{7}{3}$ $\Rightarrow$ $d(D,AB)=\frac{7}{3}$

2. Dintre triunghiurile ABC cu $\|BC\|=a$ și $\|CA\|=b$, a și b fiind numere date, să se afle un triunghi de ~~arie~~ arie maximă.

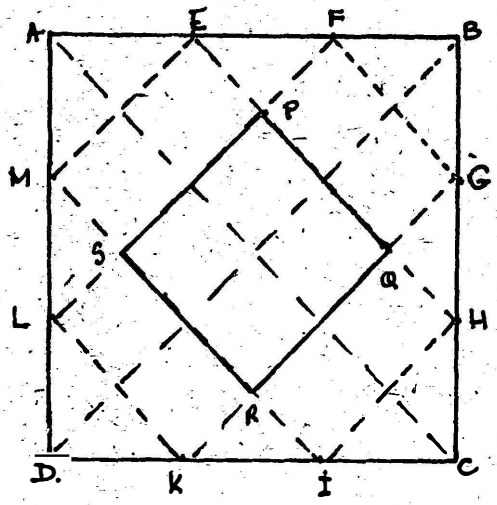


Soluție: $\mathcal{A}[ABC]=\frac{1}{2}ah$

dar $h<b$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}ah<\frac{1}{2}ab$.

$\frac{1}{2}ab$ = aria triunghiului dreptunghic de catete a și b. Deci triunghiul de arie maximă cu două laturi date este triunghiul dreptunghic cu catetele de lungime a și b.

3. Se consideră un pătrat ABCD și punctele E,F,G,H,I,K,L,M care împart fiecare latură în trei segmente componente. Să se arate că PQRS este un pătrat și că aria lui este egală cu $\frac{2}{9}\mathcal{A}[ABCD]$.



Construim diagonalele pătratului și utilizăm reciproca teoremei lui Thales.

$\left.\begin{array}{l}LF\parallel BD\\ GK\parallel BD\end{array}\right\}\Rightarrow LF\parallel GK$

Analog rezultă $HE\parallel IM$.

Deci patrulaterul PQRS este paralelogram.

$\left.\begin{array}{l}PQ\parallel AC\\ PS\parallel BD\\ AC\perp BD\end{array}\right\}\Rightarrow m(\hat{SPQ})=90^\circ\Rightarrow$ PQRS dreptunghi

DAR $\|PQ\|=\|FG\|=\frac{1}{3}\|AC\|=\frac{1}{3}\|BD\|=$

$=\|ME\|=\|PS\|\Rightarrow$ PQRS - pătrat.

$$\mathcal{A}[PQRS]=\|PQ\|^2=\left[\frac{1}{3}\|AC\|\right]^2=\frac{1}{9}\|AC\|^2=\frac{1}{9}\left[\sqrt{2}\|AB\|\right]^2=\frac{2}{9}\|AB\|^2=$$

./.

$$=\frac{2}{9}\mathcal{A}[ABCD].$$

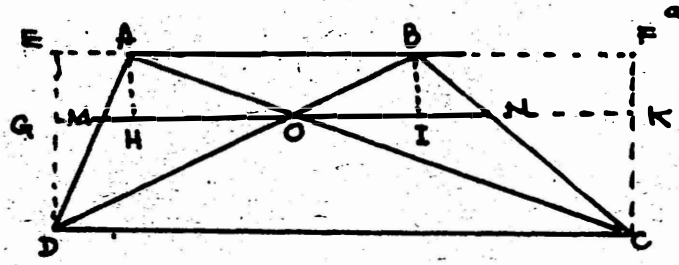
Pag.15

4. Diagonalele trapezului ABCD (AB || DC) se taie în O.

a) Să se arate că triunghiurile AOD și BOC au aceeași arie.

b) Paralela prin O la AB taie AD și BC în M și N.

Folosind prop. a) să se arate că $|MO| \equiv |ON|$



a) Soluție: $\mathcal{T}[AOD] = \mathcal{T}[ADD] - \mathcal{T}[AOB] =$

$= \frac{1}{2} \|AB\| \cdot \|DE\| - \mathcal{T}[AOB]$

$\mathcal{T}[BOC] = \mathcal{T}[ABC] - \mathcal{T}[AOB] =$

$= \frac{1}{2} \|AB\| \cdot \|CF\| - \mathcal{T}[AOB].$

dar $\|CF\| = \|DF\|$

$\mathcal{T}[ABC] = \mathcal{T}[ABD] \Rightarrow$

$\mathcal{T}[ABC] - \mathcal{T}[AOB] = \mathcal{T}[ABD] - \mathcal{T}[AOB]$

deci $\mathcal{T}[BOC] = \mathcal{T}[AOD].$

b) $\mathcal{T}[AOD] = \mathcal{T}[AMO] + \mathcal{T}[DMO] = \frac{\|MO\| \|AH\|}{2} + \frac{\|MO\| \cdot \|DG\|}{2} = \frac{1}{2} \|MO\| \left(\|AH\| + \|DG\| \right) =$

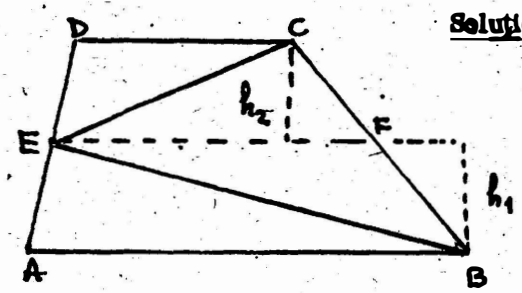
$= \frac{1}{2} \|MO\| \cdot \|DE\|$

Analog $\mathcal{T}[BOC] = \mathcal{T}[BON] + \mathcal{T}[CON] = \frac{1}{2} \|BI\| \|ON\| + \frac{1}{2} \|CK\| \cdot \|ON\| = \frac{1}{2} \|NO\| \left(\|BI\| + \|CK\| \right) =$

$= \frac{1}{2} \|ON\| \cdot \|DE\|$ Dar $\mathcal{T}[AOD] = \mathcal{T}[BOC]$ (conf a) $\Rightarrow \frac{1}{2} \|MO\| \cdot \|DE\| = \frac{1}{2} \|NO\| \cdot \|DE\| \Rightarrow$

$\|MO\| = \|ON\| \Rightarrow |MO| \equiv |ON|$

5. E fiind mijlocul laturii neparalele [AD] a trapezului ABCD, să se arate că $\mathcal{T}[ABCD] = 2\mathcal{T}[BCE]$



Soluție: Fie $F \in BC$ a.î. $\|CF\| = \|FB\|$

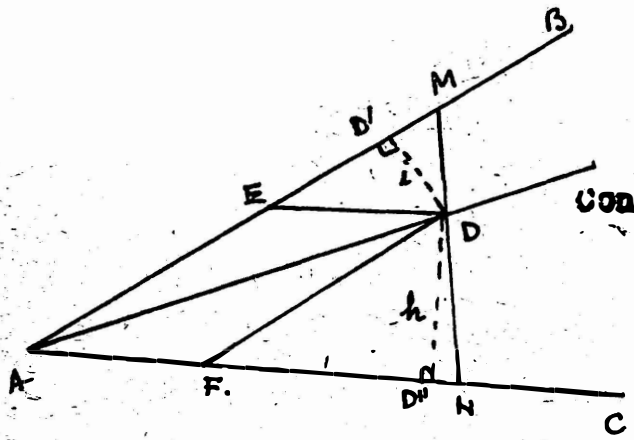
$\mathcal{T}[BCE] = \mathcal{T}[BEF] + \mathcal{T}[CEF] =$

$= \frac{1}{2} \|EF\| \cdot h_1 + \frac{1}{2} \|EF\| \cdot h_2 =$

$= \frac{1}{2} \|EF\| (h_1 + h_2) = \frac{1}{2} \|EF\| \cdot h =$

$= \frac{1}{2} \frac{\|AB\| + \|CD\|}{2} h = \frac{1}{2} \mathcal{T}[ABCD].$

6. Se dau: un unghi BAC și un punct D în interiorul lui. O dreaptă prin D taie laturile unghiului în M și N. Să se determine dreapta MN astfel încît aria triunghiului AMN să fie minimă.



Soluție:

Fie $[MN]$ o dreaptă variabilă prin D și $DE \parallel AC$; $F \in AB$

Conform axiomei lui Pasch, $E \in [AM]$; $F \in [AN]$

$$\mathcal{A}[AMN] = \mathcal{A}[AEDF] + \mathcal{A}[EMD] + \mathcal{A}[FDN]$$

$$\frac{ED \parallel AN \Rightarrow \frac{\|EM\|}{\|AM\|} = \frac{\|ED\|}{\|AN\|} \Rightarrow \frac{\|EM\|}{\|AE\|} = \frac{\|ED\|}{\|FN\|} \Rightarrow}{}$$

$$\text{c } \frac{\|EM\| \cdot \|DD'\|}{\|AE\| \cdot \|DD'\|} = \frac{\|ED\| \cdot \|DD''\|}{\|FN\| \cdot \|DD''\|} \Rightarrow \frac{2\mathcal{A}[EDM]}{\mathcal{A}[AEDF]} = \frac{\mathcal{A}[AEDF]}{2\mathcal{A}[DFN]}$$

$$\mathcal{A}[EDM] \cdot \mathcal{A}[FDN] = \frac{1}{4} \mathcal{A}^2[AEDF] = \text{constant}$$

Suma $\mathcal{A}[EDM] + \mathcal{A}[FDN]$ este minimă dacă $\mathcal{A}[EDM] = \mathcal{A}[FDN] \Rightarrow$

$$\mathcal{A}[EDM] = \mathcal{A}[FDN] = \frac{1}{2}\mathcal{A}[AEDF] \Rightarrow \frac{\|EM\| \cdot \|DD'\|}{2} = \frac{1}{2}\|AE\| \cdot \|DD'\| \Rightarrow$$

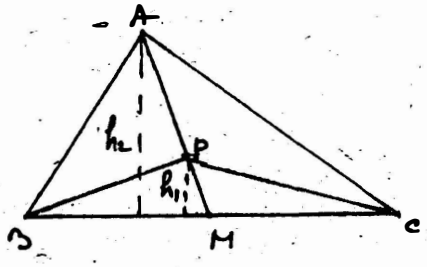
$$\|EM\| = \|AE\|$$

Deci E este la mijlocul lui AM de unde și construcția.

Ducem $DE \parallel AC$ și alegem $M \in AB$ astfel încît $\|ME\| = \|AE\|$ și $MD \cap AE = \{N\}$

7. Să se construiască un punct P în interiorul triunghiului ABC astfel încît triunghiurile PAB, PBC, PCA să aibă arii egale.

Soluție: Fie M mijlocul laturii BC.



$$\mathcal{A}[MAB] = \mathcal{A}[MAC]$$

$$\mathcal{A}[MPB] = \mathcal{A}[MPC]$$

$$\mathcal{A}[PAB] = \mathcal{A}[MAB] - \mathcal{A}[MPB] =$$

$$= \mathcal{A}[MAC] - \mathcal{A}[MPC] = \mathcal{A}[PCA]$$

$$\mathcal{A}[PBC] = 2\mathcal{A}[MPB]$$

$$\mathcal{A}[PAB] = 2\mathcal{A}[PAB] \Rightarrow$$

$$\mathcal{A}[PBC] = \mathcal{A}[PAB]$$

Deci $\mathcal{A}[PBM] = \frac{1}{3}\mathcal{A}[ABM]$

$$\mathcal{A}[PBM] = \frac{\|BM\| \cdot h_1}{2}$$

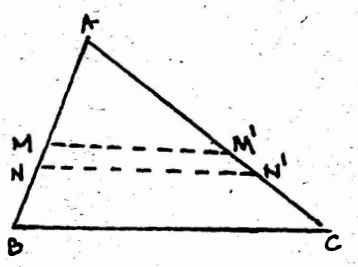
$$\mathcal{A}[ABM] = \frac{\|BM\| \cdot h_2}{2}$$

deci $\dfrac{\frac{\|BM\| h_1}{2}}{\frac{\|BM\| h_2}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\|PM\|}{\|AM\|} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ P este pe mediană

la $\frac{1}{3}$ de lungă și $\frac{2}{3}$ de mijl $\Rightarrow$

P este centrul de greutate al triunghiului.

8 Să se descompună o suprafaţă triunghiulară în trei suprafeţe de aceeaşi arie, prin paralele la o latură a triunghiului.



Soluţie: Construim $MM' \| BC$, $NN' \| BC$

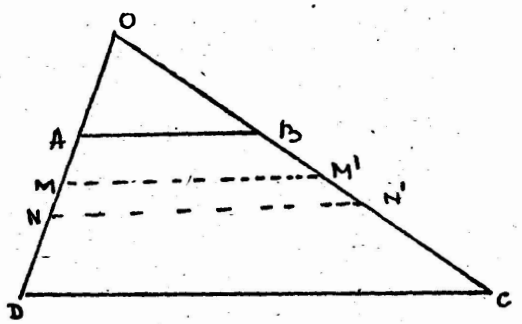
$\Delta ABC \sim \Delta AMM' \sim \Delta ANN'$

$$\frac{\mathcal{A}[AMM']}{\mathcal{A}[ABC]} = \frac{1}{3} = \left(\frac{\|AM\|}{\|AB\|}\right)^2 \Rightarrow \frac{\|AM\|}{\|AB\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\mathcal{A}[ANN']}{\mathcal{A}[ABC]} = \frac{2}{3} = \left(\frac{\|AN\|}{\|AB\|}\right)^2 \Rightarrow \frac{\|AN\|}{\|AB\|} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow \|AM\| = \frac{\sqrt{3}}{3}\|AB\| \qquad \|AN\| = \frac{\sqrt{6}}{3}\|AB\|.$$

9. Rezolvaţi problema analoagă pentru un trapez.



Soluţie: $AB \| DC$ $\quad MM' \| DC$

$AD \cap BC = \{O\}$ $\quad NN' \| DC$

$\|OA\| = a \quad \|OB\| = b$

$$\frac{\mathcal{A}[OMM']}{\mathcal{A}[OCD]} = \left(\frac{\|OM\|}{\|OD\|}\right)^2 = \frac{\|OM\|^2}{b^2} \quad (1)$$

Dar $\mathcal{A}[OMM'] = \mathcal{A}[OAB] + \frac{1}{3}\mathcal{A}[ABCD]$

Notăm $\mathcal{A}[OAB] = S$ şi $\mathcal{A}[ABCD] = 3S'$

Deci $\frac{\mathcal{A}[OMM']}{\mathcal{A}[OCD]} = \frac{S+S'}{S+3S'}$ (2) Din (1) şi (2) $\Rightarrow \frac{\|OM\|^2}{b^2} = \frac{S+S'}{S+3S'} \Rightarrow$

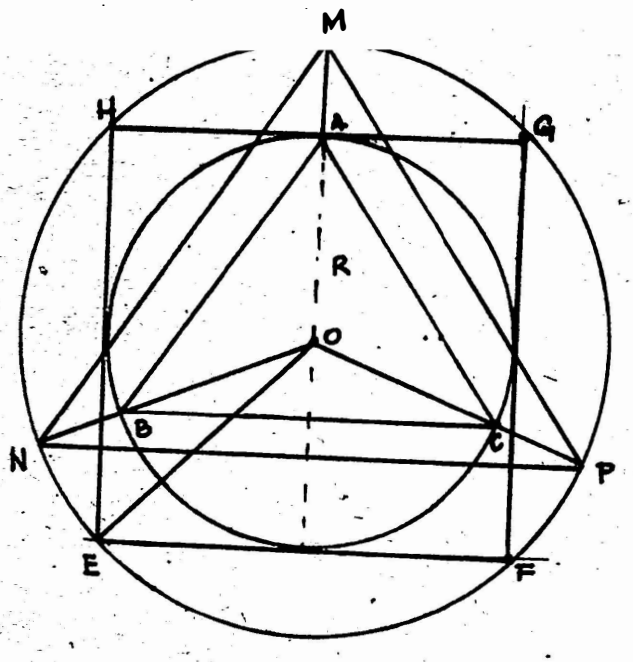
$\|OM\|^2 = b^2 \frac{S+S'}{S+3S'}$ dar $\frac{S}{S+3S'} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow S = \frac{3a^2S'}{b^2-a^2}$ înlocuind

obţinem $\|OM\|^2 = \frac{1}{3}(2a^2+b^2)$.

Analog $\frac{\mathcal{A}[ONN']}{\mathcal{A}[OCD]} = \left(\frac{\|ON\|}{\|OD\|}\right)^2 = \frac{S+2S'}{S+3S'} \Rightarrow \|ON\|^2 = b^2 \frac{S+2S'}{S+3S'}$

$\Rightarrow \|ON\|^2 = \frac{1}{3}(a^2+2b^2)$.

10. Prelungim razele duse la vîrfurile unui triunghi echilateral, înscris într-un cerc $\mathcal{C}(O,R)$, pînă la intersecția cu cercul care trece prin vîrfurile unui pătrat circumscris cercului $\mathcal{C}(O,R)$. Să se arate că punctele astfel obținute sînt vîrfurile unui triunghi de aceeași arie cu hexagonul înscris în $\mathcal{C}(O,R)$.



Soluție: $\|AO\| = R \quad \|EF\| = 2R$

$\|OE\| = R\sqrt{2}$

$\|MN\| = \|EC\|\sqrt{3}$

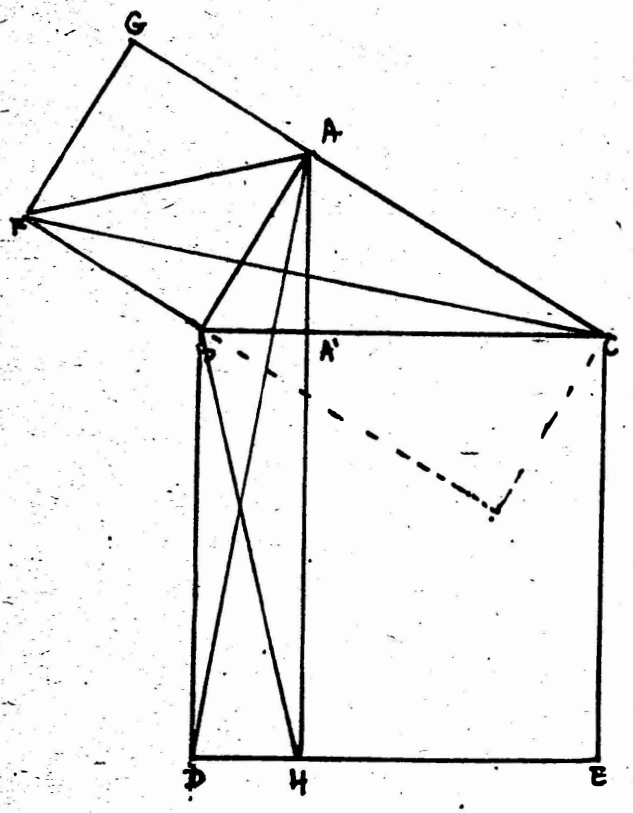
$\|MN\| = R\sqrt{2}\sqrt{3} = R\sqrt{6}$

$\mathcal{A}[MNP] = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2 6\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

$\mathcal{A}_6 = 3\frac{l_6^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\mathcal{A}[MNP] = \mathcal{A}_6.$

11 Să se demonstreze teorema catetei cu ajutorul ariilor.



Soluție: Construim pătratele BCDE și ABFG

$\Delta ABD \equiv \Delta BCF$ (LUL)

$\mathcal{A}[ABD] = \mathcal{A}[BDH] =$

$= \frac{1}{2}\mathcal{A}[BDHA'] = \frac{1}{2}\|BC\|\|BA'\|$

Dar $\mathcal{A}[BCF] = \mathcal{A}[ABF] = \frac{1}{2}\mathcal{A}[ABFG] =$

$= \frac{1}{2}\|AB\|^2$

Deci $\frac{1}{2}\|BC\|\cdot\|BA'\| = \frac{1}{2}\|AB\|^2 \Rightarrow$

$\|AB\|^2 = \|BC\|\cdot\|BA'\|.$

§ 4. Suprafeţe măsurabile. Aria discului

Pag.18

1. Construiţi un cerc concentric cu cercul $\mathcal{C}(O,R)$ astfel încît să împartă discul $[\mathcal{C}(O,R)]$ în două părţi de arii egale.

Soluţie: Notăm cu x raza cercului căutat şi care trebuie să verifice ecuaţia: $\pi x^2 = \frac{1}{2}\pi R^2 \Rightarrow x^2 = \frac{R^2}{2} \Rightarrow x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

(2) Suprafeţele haşurate pe figura (I.36) (lunulele lui Hipocrat) sînt determinate de semicercurile descrise pe laturile triunghiului dreptunghic ABC. Arătaţi că suma ariilor lor este egală cu aria triunghiului ABC.

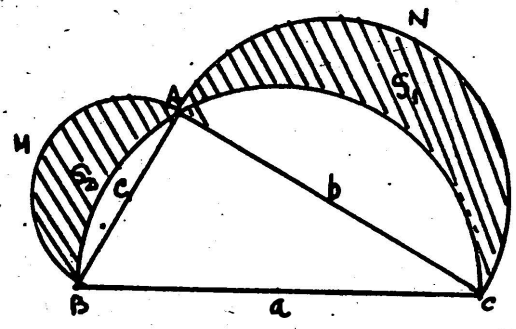


Fig I.36.

Soluţie: Observăm că aria suprafeţelor haşurate se obţine făcînd suma ariei triunghiului ABC cu aria semicercurilor descrise pe catete din care scădem aria semicercului descris pe ipotenuză.

Deci: $S_1 + S_2 = \frac{bc}{2} + \frac{\pi b^2}{4} + \frac{\pi c^2}{4} - \frac{\pi a^2}{4} =$

$= \frac{bc}{2} + \frac{\pi}{4}(b^2+c^2-a^2) = \frac{bc}{2} = \mathcal{T}[ABC]$

Deci $S_1 + S_2 = \mathcal{T}[ABC]$.

(3) Din punctul C, situat pe semicercul de diametru $[AB]$, se coboară perpendiculara CD, $D \in AB$ (fig. I37). Aria suprafeţei haşurate, limitată de semicercuri (secera lui Arhimede), este egală cu aria discului de diametru $[CD]$.

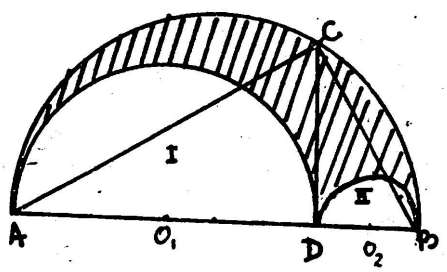


Fig I.37

Soluţie. Notăm S_h - aria suprafeţei haşurate.

Observăm că S_h este egală cu aria semicercului mare scăzută suma semicercurilor I şi II.

$\|AO_1\| = \frac{\|AD\|}{2} = \frac{\|AO\| + \|OD\|}{2} \Rightarrow \|AO_1\| = \frac{R+d}{2}$

$\|DO_2\| = \frac{\|DB\|}{2} = \frac{\|OB\| - \|OD\|}{2} \Rightarrow \|DO_2\| = \frac{R-d}{2}$

$S_h = \frac{\pi R^2}{2} - \left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{R+d}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{R-d}{2}\right)^2\right]$

deci $S_h = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi}{8}\left[(R+d)^2 - (R-d)^2\right] = \frac{4\pi R^2 + (2\pi R^2 + 2\pi d^2) - 2\pi R^2 - 2\pi d^2}{8} =$

$= \frac{\pi}{4}(R^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}(R-d)(R+d) = \frac{\pi}{4}\|BD\| \cdot \|AD\| = \frac{\pi}{4}\|CD\|^2$

4. Se consideră un triunghi echilateral ABC cu $\|AB\| = 2a$ (fig I.38) Aria suprafeței haşurate, determinate de cercurile $\mathcal{C}(A,a)$ $\mathcal{C}(B,a)$ $\mathcal{C}(C,a)$ şi $\mathcal{C}(A,3a)$ este egală cu aria sectorului de cerc, determinat de arcul mic $\overset{\frown}{EF}$ al cercului $\mathcal{C}(C,a)$

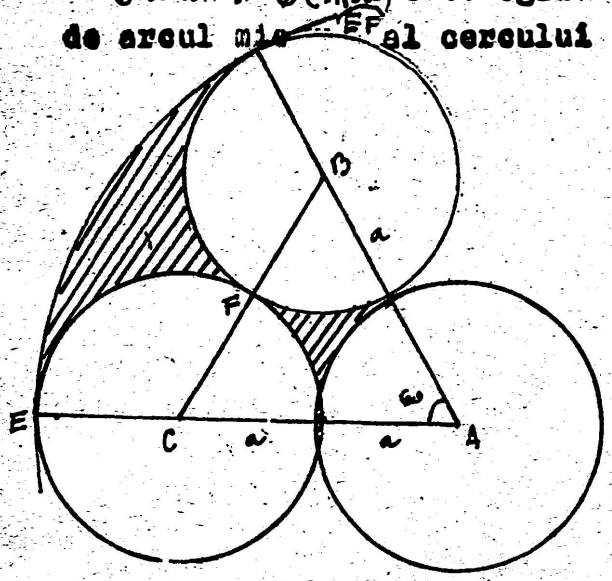


Fig I.38.

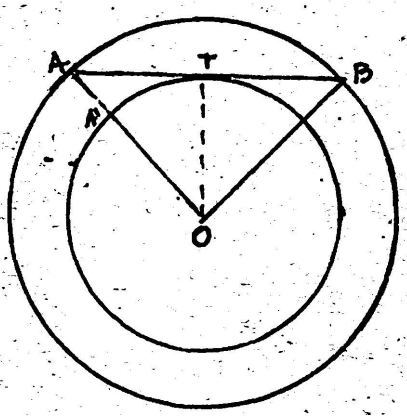
Soluţie: $S_h = \frac{1}{6}\mathcal{V}[\mathcal{C}(A,3a)] - \frac{1}{2}\mathcal{V}[\mathcal{C}(B,a)] - \frac{1}{2}\mathcal{V}[\mathcal{C}(C,a)] - \frac{1}{6}\mathcal{V}[\mathcal{C}(A,a)]$.

$S_h = \frac{1}{6}\,9a^2\pi - \frac{1}{2}\pi a^2 - \frac{1}{2}\pi a^2 - \frac{1}{6}\pi a^2 =$

$= \frac{9a^2\pi}{6} - \pi a^2 - \frac{\pi a^2}{6} = \frac{8\pi a^2}{6} - \pi a^2 = \frac{\pi a^2}{3} =$

= aria sectorului de cerc determinat de arcul mic $\overset{\frown}{EF}$

5. Să se arate că aria "coroanei circulare" cuprinse între cercurile $\mathcal{C}(O,r_1)$ $\mathcal{C}(O,r_2)$ $r_1 < r_2$ este egală cu aria unui disc care are ca diametru o coardă a cercului $\mathcal{C}(O,r_2)$ tangentă cercului $\mathcal{C}(O,r_1)$.

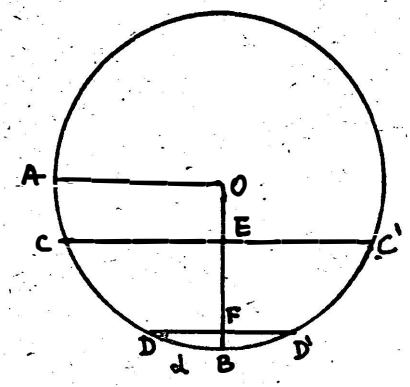


Soluţie: $\|OA\| = r_2$ $\|OA'\| = r_1 = \|OT\|$

$A_{cc} = \pi(r_2^2 - r_1^2) = \pi(\|AO\|^2 - \|OT\|^2) =$

$= \pi \cdot \|AT\|^2 =$ aria discului de diametru $\|AB\|$ deci de rază $\|AT\|$.

6. Fie $[OA]$, $[OB]$ două raze perpendiculare ale unui cerc de centru O. Pe arcul mic $\overset{\frown}{AB}$ se iau punctele C și D astfel încît $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{BD}$ și fie E,F proiecțiile lui C,D pe OB. Să se arate că aria suprafeței mărginite de segmentele $[DF]$, $[FE]$, $[EC]$ și de arcul $\overset{\frown}{CD}$ este egală cu aria sectorului determinat de arcul $\overset{\frown}{CD}$ al cercului $\mathcal{C}(O, \|OA\|)$



Soluție: $OA \perp OB$ $\quad \overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{BD}$

$$\mu(\overset{\frown}{AC}) = \mu(\overset{\frown}{DB}) = \alpha$$

$$\mathcal{A}[EFCD] = \frac{1}{2}\left[\mathcal{A}[CBC'] - \mathcal{A}[DBD']\right] =$$

$$= \frac{R^2}{4}\left[\pi - 2\alpha - \sin(\pi - 2\alpha)\right] - \frac{R^2}{4}\left[2\alpha - \sin 2\alpha\right] =$$

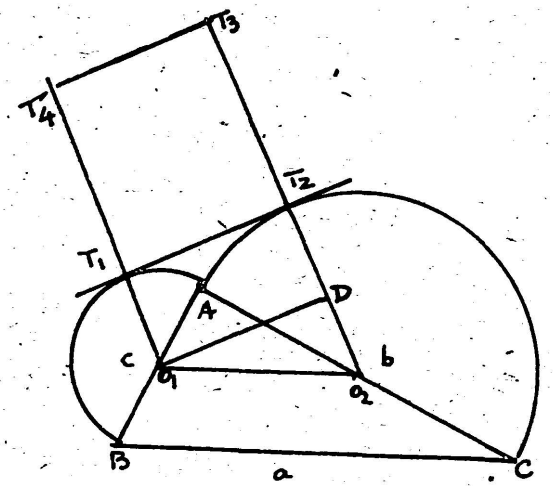
$$= \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \frac{R^2}{2}\,\mu(\overset{\frown}{CD}) =$$

= aria sect. det. de arc $\overset{\frown}{CD}$ al cercului $\mathcal{C}(O,R)$

Pag.19

Exerciții recapitulative

4. Aria pătratului construit pe tangenta comună a cercurilor, care au ca diametre catetele unui triunghi este egală cu aria triunghiului:



Soluție: $\|O_1O_2\| = \frac{a}{2}$ $\quad (|O_1O_2| - \text{linie mijlocie a triunghiului } ABC)$.

$\|T_1O_1\| = \frac{c}{2}$ $\quad (|T_1O_1| \equiv |O_1A| - \text{raze în } \mathcal{C}(O_1, R_1))$

$\|T_2O_2\| = \frac{b}{2}$ $\quad (|T_2O_2| \equiv |O_2A| - \text{raze în } \mathcal{C}(O_2, R_2))$

$\mathcal{A}[T_1T_2T_3T_4] = \|T_1T_2\|^2$

Construim $CD \parallel T_1T_2$ și $|CD| \equiv |T_1T_2|$

$$\|DO_2\| = \|T_2O_2\| - \|T_1O_1\| = \frac{b}{2} - \frac{c}{2} = \frac{b-c}{2}$$

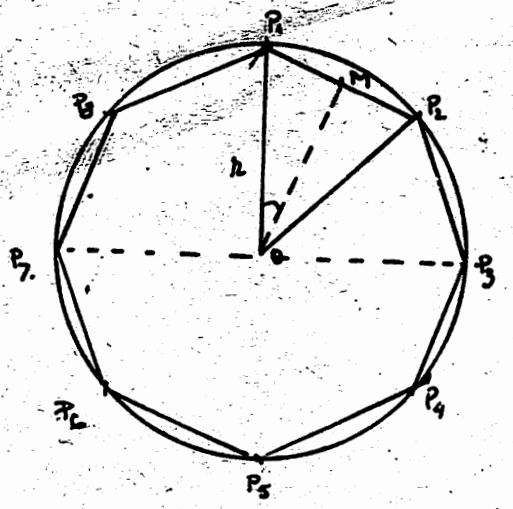
În $\triangle O_1DO_2$ $\quad \|CD\|^2 = \|O_1O_2\|^2 - \|DO_2\|^2 =$

$$= \frac{a^2}{4} - \frac{(b-c)^2}{4} = \frac{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}{4} =$$

$$= \frac{a^2 - (b^2+c^2) - 2bc}{4} = \frac{a^2 - a^2 + 2bc}{4} = \frac{bc}{2} = \mathcal{A}[ABC].$$

Dar $\|CD\| = \|T_1T_2\| \Rightarrow \|T_1T_2\|^2 = \mathcal{A}[ABC] \Rightarrow \mathcal{A}[T_1T_2T_3T_4] = \mathcal{A}[ABC]$.

(2.) Să se afle aria octogonului regulat înscris într-un cerc de rază r.



Construim: $OM \perp P_1P_2 \Rightarrow m(\widehat{P_1OM}) = \frac{\pi}{8}$

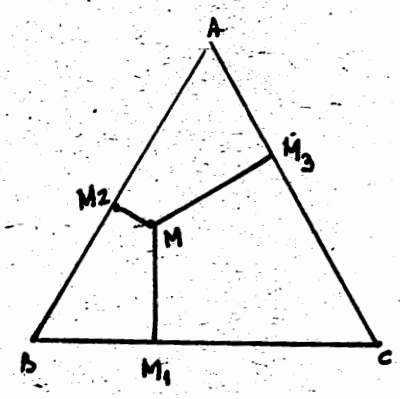
$\text{În } \triangle OMP_1 \quad \|P_1M\| = r\sin\frac{\pi}{8} \quad \|OM\| = r\cos\frac{\pi}{8}$

$$\mathcal{A}[OP_1P_2] = \frac{\|P_1P_2\|\|OM\|}{2} = \frac{2r\sin\frac{\pi}{8}r\cos\frac{\pi}{8}}{2} =$$

$$= \frac{r^2\sin\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{r^2\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{r^2\sqrt{2}}{4}$$

$$\mathcal{A}[P_1P_2\ldots P_8] = 8\,\mathcal{A}[OP_1P_2] = 8\cdot\frac{r^2\sqrt{2}}{4} = 2r^2\sqrt{2}$$

(3.) Să se arate folosind arii, că suma distanţelor unui punct variabil, situat în interiorul triunghiului echilateral ABC, la laturile lui este constantă.



Fie $M \in \text{Int } ABC$ şi $M_1M_2M_3$ picioarele perpendicularelor duse din M pe laturile triunghiului iar $\|AB\| = \|BC\| = \|CA\| = a$

$$\mathcal{A}[ABC] = \mathcal{A}[AMB] + \mathcal{A}[BMC] + \mathcal{A}[CMA] =$$

$$= \frac{a\|MM_2\|}{2} + \frac{a\|MM_1\|}{2} = \frac{a\|MM_3\|}{2} =$$

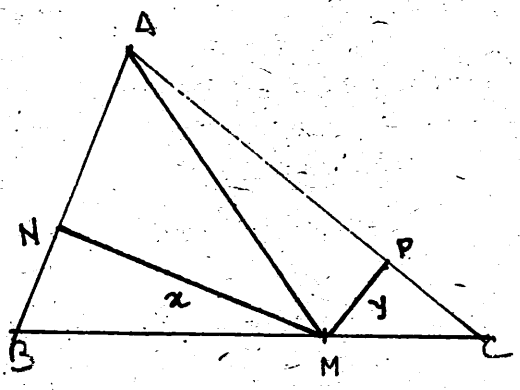
$$= \frac{a}{2}\left(\|MM_2\| + \|MM_1\| + \|MM_3\|\right) \Rightarrow$$

$$\|MM_1\| + \|MM_2\| + \|MM_3\| = \frac{2\mathcal{A}[ABC]}{a}$$

$$\text{dar } \mathcal{A}[ABC] = \frac{h\,a}{2} \Rightarrow \frac{2\mathcal{A}[ABC]}{a} = h_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|MM_1\| + \|MM_2\| + \|MM_3\| = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

④ Se consideră un triunghi dat ABC şi un punct variabil
Să se arate că distanţele x=d (M,AB) şi y=d(M,AC) constă o relaţie de forma kx + ly = 1, unde k şi l sînt constante



Soluţie: Fie $MN \perp AB$; $MP \perp AC$

$$\sigma[ABC] = \sigma[AMB] + \sigma[AMC] =$$

$$= \frac{x \cdot \|AB\|}{2} + \frac{y \|AC\|}{2}$$

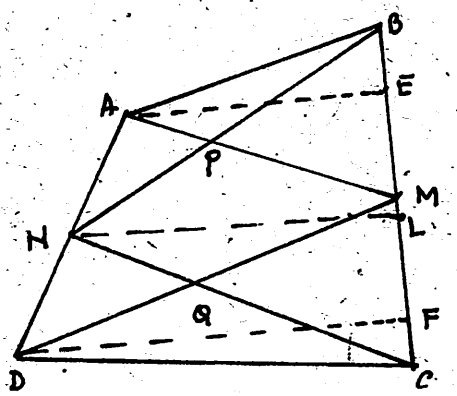
$$\sigma[ABC] = \frac{\|AB\| x}{2} + \frac{\|AC\| y}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{\|AB\|}{2\sigma[ABC]} x + \frac{\|AC\|}{2\sigma[ABC]} y = 1. \quad (1)$$

Notînd $k = \frac{\|AB\|}{2\sigma[ABC]}$ şi $l = \frac{\|AC\|}{2\sigma[ABC]}$ relaţia (1) devine

$$kx + ly = 1.$$

⑤ Fie M şi N mijloacele laturilor [BC] şi [AD] ale patrulaterului convex ABCD şi $\{P\} = AM \cap BN$, $\{Q\} = CN \cap MD$. Să se arate că aria patrulaterului MQNP este egală cu suma ariilor triunghiurilor ABP şi CDQ.



Soluţia: Construim $AE \perp BC$ $NL \perp BC$ $DF \perp BC$

In trapezul AEFD, NL este linie mijlocie

deci $\|NL\| = \frac{\|AE\| + \|DF\|}{2}$

Calculăm $\sigma[BNC] = \frac{\|BC\| \cdot \|NL\|}{2} =$

$$= \frac{\|BC\|}{2} \frac{\|AE\| + \|DF\|}{2} = \|BM\| \frac{\|AE\| + \|DF\|}{2} =$$

$$= \frac{\|BM\| \cdot \|AE\|}{2} + \frac{\|BM\| \|DF\|}{2} =$$

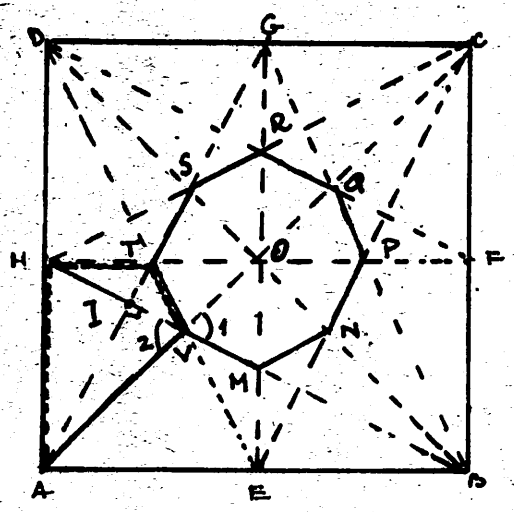
$$= \sigma[ABM] + \sigma[CMD] \Rightarrow$$

$$\sigma[BNC] = \sigma[ABM] + \sigma[CMD].$$

$$\sigma[MNPQ] + \sigma[MQC] + \sigma[BMP] = \sigma[ABP] + \sigma[BMP] + \sigma[CDQ] + \sigma[MQC].$$

deci $\sigma[MQNP] = \sigma[ABP] + \sigma[CDQ]$

6. Într-un pătrat de latură $|AB|$ se unește mijlocul fiecărei laturi cu extremitățile laturii opuse. Să se afle aria octogonului interior convex care se formează în acest fel.



Demonstrăm că patrulaterul AHTV este un patrulater cu diagonalele perpendiculare și apoi calculăm aria lui

Știm că $m(\widehat{AOB}) = 90$ (diagonalele pătratului sînt perpendiculare).

$\Delta ACG \equiv \Delta BDH$ (LLL) $\Rightarrow \widehat{CAC} \equiv \widehat{HBD}$ de unde $m(\widehat{HBD}) + m(\hat{V}_1) = 90 \Rightarrow m(\widehat{CAC}) + m(\hat{V}_2) = 90$ fiindcă $\hat{V}_1 \equiv \hat{V}_2$ ca opuse la vîrf.

Deci în ΔAIV am demonstrat că $m(\hat{V}_2) + m(\hat{V}_1) = 90 \Rightarrow AI \perp HV$ deci patrulaterul AHTV are diagonalele perpendiculare.

Calculăm aria acestuia

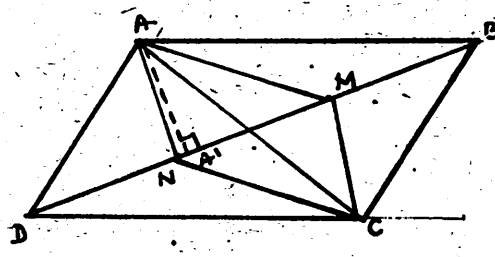
$\|AH\| = \frac{1}{2}$ $\quad \|BH\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\quad \|HT\| = \frac{1}{4}$ $\quad \|AT\|^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$ $\quad \|AT\| = \frac{\sqrt{5}}{4}$

În ΔABD, $|HB|$ și $|DE|$ sînt mediane, $HB \cap DE = \{V\} \Rightarrow \|HV\| = \frac{1}{3}\|BH\| =$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{6}$. $\quad \mathcal{A}[AHTV] = \frac{\|AT\| \cdot \|HV\|}{2} = \frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{48}$.

Deci $\mathcal{A}[MNPQRSTV] = \mathcal{A}[ABCD] - 8\,\mathcal{A}[AHTV] = 1 - 8\cdot\frac{5}{48} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$.

7. Diagonala [BD] a paralelogramului ABCD se împarte prin punctele M,N în trei segmente congruente. Să se arate că AMCN este un paralelogram şi să se calculeze raportul dintre $\mathcal{T}[AMCN] \text{ şi } \mathcal{T}[ABCD]$.



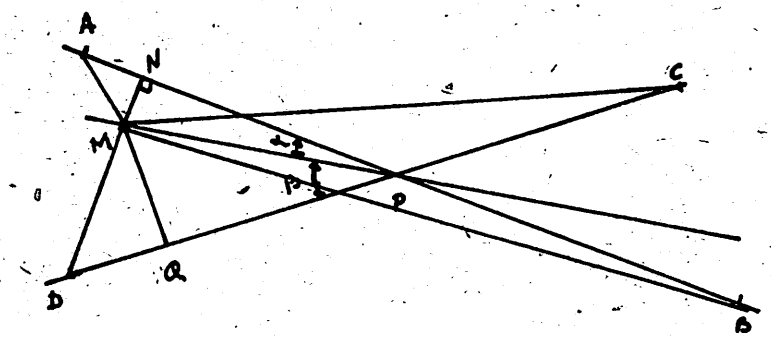
— AMCN este paralelogram fiindcă diagonalele sale se înjumătăţesc

$$\frac{\mathcal{T}[AMCN]}{\mathcal{T}[ABCD]} = \frac{2\,\mathcal{T}[AMN]}{2\,\mathcal{T}[ABD]} = \frac{1}{3}$$

triunghiurile au aceeaşi înălţime AA' şi bazele lor AM şi BD sînt în raportul $\frac{1}{3}$

8. Se dau punctele A,B,C,D astfel încît $AB \cap CD = \{P\}$.
Să se afle locul geometric al punctelor M astfel că

$$\mathcal{T}[ABM] = \mathcal{T}[CDM].$$



Soluţie: Fie $MN \perp AB$ $MQ \perp CD$

$m(\widehat{NPM}) = \alpha$ $\widehat{MPQ} = \beta$ şi

$\alpha + \beta = \gamma$ = constant.

$\mathcal{T}[ABM] = \mathcal{T}[CDM] \Rightarrow$

$$\frac{\|AB\| \cdot d(M,AB)}{2} = \frac{\|CD\|\, d(M,CD)}{2} \Rightarrow$$

$$\|MN\|\,\|AB\| = \|MQ\|\,\|CD\| \Rightarrow$$

$$\frac{\|MN\|}{\|MQ\|} = \frac{\|CD\|}{\|AB\|} = k \Rightarrow k = \frac{\|MN\|}{\|MQ\|} = \frac{\|PM\| \sin\alpha}{\|MP\| \sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \Rightarrow$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = k \Rightarrow \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{k-1}{k+1} \Rightarrow \frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{k-1}{k+1} \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{k-1}{k+1} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{k-1}{k+1}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \text{ dar } \operatorname{tg}\gamma/2 = \text{ct constantă} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha - \beta$ = constant şi cum $\alpha + \beta$ = constant $\Rightarrow \alpha$ = constant. Deci M ste un punct care aparţine unei dreptedane trece prin P şi face cu AB unghiul α.

Reciproc - Fie $M' \in d$, $M'N' \parallel AB$ $M'a' \perp CD$

Avem $\frac{\|M'N'\|}{\|M'a'\|} = \frac{\|PM'\| \sin\varphi}{\|PM'\| \sin\varphi} = k$; $k = \frac{\|CD\|}{\|AB\|} \Rightarrow \|AB\| \cdot \|M'N'\| = \|CD\| \|M'a'\|$

$\Rightarrow \mathcal{A}[ABM'] = \mathcal{A}[CDM']$.

deci $M' \in d$

Deci locul geometric este o dreaptă .

Am considerat cazul cu ME Int $APD \cup$ Int BPC și am arătat că locul geometric este o dreaptă. Analog dacă considerăm ME Int $APC \cup$ Int BPD, găsim locul geometric ca fiind tot o dreaptă. In concluzie, locul geometric este format din două drepte ce trec prin punctul P.

CAPITOLUL II

APLICAȚIILE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIE

§ 1. Coordonate polare în plan

Pag. 22

1. Să se determine coordonatele polare ale punctelor

a) $M(6,-8)$; b) $N(-3,-4)$; c) $P(0,-5)$; d) $Q(1,\sqrt{3})$;

e) $R(-2,1)$; f) $S(-3,0)$

a) M se află în cadranul IV

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{36+64}=10$; $\operatorname{tg}t=\frac{y}{x}=\frac{-4}{3}$ $\Big\}$ $M\left(10, 2\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$

b) N se află în cadranul III

$r=\sqrt{9+16}=5$; $\operatorname{tg}t=\frac{4}{3}$ $\Big\}$ $N\left(5,\pi+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$

c) P aparține semiaxei negative a ordonatelor $P\left(5,\frac{3\pi}{2}\right)$

$r=5$

d) Q se află în cadranul I

$r=\sqrt{1+3}=2$ $\operatorname{tg}t=\sqrt{3}$ $\Big\}$ $Q\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$

e) R se află în cadranul II

$r=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$ $\operatorname{tg}t=-\frac{1}{2}$ $\Big\}$ $R\left(\sqrt{5},\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$

f) S se află pe semiaxa negativă a absciselor

$r=3$ $S(3,\pi)$

2. Să se determine coordonatele corteziene ale punctului de coordonatele polare:

a) $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$

b) $\left(5, 2\pi-\arcsin\frac{5}{13}\right)$

c) $\left(7,\frac{4\pi}{3}\right)$

d) $(5,\pi)$

a) $x=2\cos\frac{\pi}{3}=1$; $y=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$; $A=(1,\sqrt{3})$

b) $x=5\cos\left(2\pi-\arcsin\frac{5}{13}\right)=5\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)=5\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)}=5\sqrt{1-\frac{25}{169}}=5\cdot\frac{12}{13}=\frac{60}{13}$

$y=5\sin\left(2\pi-\arcsin\frac{5}{13}\right)=-5\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)=-\frac{25}{13}$; $B\left(\frac{60}{13},-\frac{25}{13}\right)$.

c) $x=7\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{7}{2}$; $y=7\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{7\sqrt{3}}{2}$; $C\left(-\frac{7}{2},-\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$

d) $x=5\cos\pi=-5$; $y=5\sin\pi=0$; $D(-5,0)$

3. Să se determine coordonatele polare ale punctelor situate pe dreapta de ecuație $3x-4y=0$, care au distanța la originea axelor de coordonate egală cu 2.

Soluție 1. $\begin{cases}3x-4y=0\\ x^2+y^2=2^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{4y}{3}\\ \frac{16y^2}{9}+y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\frac{8}{5}\\ y=\pm\frac{6}{5}\end{cases}$

A_1 se află în cadranul I:

$r=2$, $\operatorname{tg}t_1=\frac{3}{4}$; $A_1\left(2,\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$

A2 se afla în cadranul II:

$r=2,\ \operatorname{tg} t_2=\frac{3}{4}\ ;\quad A_2\left(2, \pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$

Soluţia 2:

$r=2,\ y=\frac{3}{4}x \Rightarrow \operatorname{tg} t=\frac{3}{4}$

Pe dreapta d de ecuaţie $3x-4y=0$ sînt două puncte (dreapta trece prin origine), unul în cadranul I, A_1, şi altul în cadranul III, A_2, a căror distanţă la origine este 2.

$A_1\left(2, \operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$

$A_2\left(2, \pi+\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$

§ 2. Teorema sinusului şi teorema cosinusului

Pag. 26

1. Să se arate ca în orice triunghi ABC avem:

a) $b\cos C + c\cos B = a$

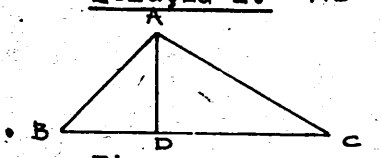
b) $b\cos B + c\cos C = a\cos(b-c)$

a) Soluţia 1: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \Rightarrow a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C$

$b\cos C + c\cos B = 2R\sin B\cos C + 2R\sin C\cos B = 2R(\sin B\cos C+\sin C\cos B)=$

$= 2R\sin(B+C) = 2R\sin(\pi-A) = 2R\sin A = a$

Soluţia 2: $AD\perp BC,\ D\in(BC),\ \|BD\|+\|DC\|=a$



$\triangle ABD:\ \|BD\| = c\cos B$

$\triangle ADC:\ \|DC\| = b\cos C$

$a = \|BD\|+\|DC\| = c\cos B + b\cos C$

Fie acum: $B\in(DC) \Rightarrow a = \|DC\|-\|DB\| = b\cos C - c\cos(\pi-B) = b\cos C + c\cos B$

$C\in(BD) \Rightarrow a = \|BD\|-\|CD\| = c\cos B - b\cos(\pi-C) = c\cos B + b\cos C$

b) Soluţia 1:

$b\cos B + c\cos C = 2R\sin B\cos B + 2R\sin C\cos C = R(\sin 2B+\sin 2C) = 2R\sin(B+C)\cdot$

$\cdot\cos(B-C) = 2R\sin(\pi-A)\cos(B-C) = a\cos(B-C)$

a

Soluţia 2:

$a\cos(B-C) = 2R\sin A\cos(B-C) = R[\sin(A+B-C)+\sin(A-B+C)] =$

$= R[\sin(\pi-2C)+\sin(\pi-2B)] = R(\sin 2C+\sin 2B) = 2R\sin C\cos C + 2R\sin B\cos B =$

$= c\cos C + b\cos B$

2: Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

a) $b\cos C - c\cos B = \frac{b^2-c^2}{a}$

b) $2(bc\cos A + ac\cos b + ab\cos c) = a^2+b^2+c^2$

a) Soluţia 1:

$b\cos C - c\cos B = b\,\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - c\,\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{a^2+b^2-c^2-a^2-c^2+b^2}{2a} =$

$= \frac{2(b^2-c^2)}{2a} = \frac{b^2-c^2}{a}$

Soluția 2. $\frac{b^2-c^2}{a} = \frac{4R^2\sin^2 B - 4R^2\sin^2 C}{2R\sin A} = \frac{2R(\sin B-\sin C)(\sin B+\sin C)}{\sin A}$

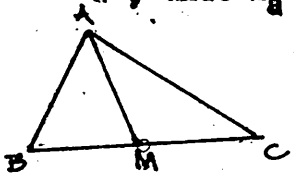
$= \frac{2R\cdot 2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cdot 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\sin(B+C)} = \frac{2R\sin(B+C)\sin(B-C)}{\sin(B+C)}$

$= 2R\sin B\cos C - 2R\sin C\cos B = b\cos C - c\cos B$

b) $2(bc\cos A + ac\cos B + ab\cos C) = 2bc\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + 2ac\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + 2ab\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$= a^2+b^2+c^2$

3. Folosind teorema cosinusului să se arate că $4m_a^2 = 2(b^2+c^2) - a^2$, unde m_a este lungimea corespunzătoare laturii de lungime a



$|BM| = |MC| = \frac{a}{2}$

$\Delta ABD: m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - 2c\frac{a}{2}\cos B$

$\Delta ADC: m_a^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} - 2b\frac{a}{2}\cos C$

$2m_a^2 = b^2+c^2+\frac{a^2}{2} - a(c\cos B + b\cos C)$

$4m_a^2 = 2(b^2+c^2) + a^2 - 2a\cdot 2R(\sin C\cos B + \sin B\cos C) = 2(b^2+c^2)+a^2-2a\,2R\sin(B+C) =$

$= 2(b^2+c^2)+a^2-2a\cdot 2R\sin(\pi-A) = 2(b^2+c^2)+a^2-2a\cdot 2R\sin A = 2(b^2+c^2)+a^2-2a^2 =$

$= 2(b^2+c^2)-a^2$

$4m_a^2 = 2(b^2+c^2)-a^2$

4. Să se arate că triunghiul ABC în care $\frac{a+c}{b} = \operatorname{ctg}\frac{B}{2}$ este dreptunghic

$\frac{a+c}{b} = \operatorname{ctg}\frac{B}{2}$; $\frac{a+c}{b} = \frac{2R\sin A + 2R\sin C}{2R\sin B} = \frac{2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} =$

$= \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2})\cos\frac{A-C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} = \frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}} = \frac{\cos\frac{A-C}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$

Relația dată devine: $\frac{\cos\frac{A-C}{2}}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$; $\cos\frac{A-C}{2} = \cos\frac{B}{2}$

$A-C = B \Rightarrow \left.\begin{matrix} A-B-C=0 \\ A+B+C=\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = \frac{\pi}{2}$

$A-C = -B \Rightarrow \left.\begin{matrix} A+B-C=0 \\ A+B+C=\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow A+B = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$

5. Să se arate că, dacă în triunghiul ABC avem ctg A + ctg B = 2 ctg C, atunci $a^2+b^2 = 2c^2$

$\cos A\sin^{-1}A + \cos B\sin^{-1}B = 2\cos C\sin^{-1}C$

$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{2R}{a} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\frac{2R}{b} = 2\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\cdot\frac{2R}{c}$

$b^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2 = 2a^2+2b^2-2c^2 \mid :2$

$a^2+b^2 = 2c^2$

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

§ 3. Rezolvarea triunghiurilor

Pag. 29

1. Să se determine toate elementele triunghiului ABC, știind că:

a) $a=14,\ c=13,\ B=\arccos\frac{5}{13}$

b) $b=15,\ A=\arccos\frac{63}{65},\ C=\arccos\frac{3}{5}$;

c) $a=15,\ b=4,\ c=13$;

d) $a=5,\ c=6,\ C=\arccos\frac{4}{5}$;

e) $a=\sqrt{2},\ b=2,\ A=\frac{\pi}{6}$

f) $a=5,\ b=7,\ A=\arccos\frac{2\sqrt{10}}{7}$

g) $a=1,\ b=2,\ A=\frac{\pi}{3}$

a) $\cos B=\frac{5}{13}$; $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\Rightarrow\frac{5}{13}=\frac{196+169-b^2}{2\cdot14\cdot13}$; $b^2=365-140\Rightarrow b=15$

$\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13}$

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{14}{\sin A}=\frac{15}{\frac{12}{13}}\Rightarrow\sin A=\frac{56}{65}$; $\frac{15}{\frac{12}{13}}=\frac{13}{\sin C}\Rightarrow$

$\sin C=\frac{4}{5}$; - sau $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{225+169-196}{2\cdot15\cdot13}=\frac{33}{65}$

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{3}{5}$; $A=\arccos\frac{33}{65}$, $C=\arccos\frac{3}{5}$ sau $A=\arcsin\frac{56}{65}$, $C=\arcsin\frac{4}{5}$

b) $b=15;\ \cos A=\frac{63}{65};\ \cos C=\frac{3}{5}$; $\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{63}{65}\right)^2}=\frac{16}{65}$; $\sin C=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

$\cos B=\cos[\pi-(A+C)]=-\cos(A+C)=-\cos A\cos C+\sin A\sin C=-\frac{5}{13}$

$B=\pi-\arccos\frac{5}{13}$; $\sin B=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13}$

$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}\Rightarrow a=\frac{b\sin A}{\sin B}=4$

Analog: $c=\frac{b\sin C}{\sin B}=13$

c) $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{5}{13}\Rightarrow A=\pi-\arccos\frac{5}{13}$

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{63}{65}\Rightarrow B=\arccos\frac{63}{65}$

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{3}{5}\Rightarrow C=\arccos\frac{3}{5}$

d) $a=5,\ c=6,\ \cos C=\frac{4}{5}\Rightarrow\sin C=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$, $\sin A=\frac{a\sin C}{c}=\frac{1}{2}\Rightarrow A=\frac{\pi}{6}$

$B=\pi-(A+C)=\pi-\frac{\pi}{6}-\arccos\frac{4}{5}=\frac{5\pi}{6}-\arccos\frac{4}{5}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{4}{5}=\frac{\pi}{3}+\arcsin\frac{4}{5}$

$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\sin C\cos A=\frac{1}{10}(4+3\sqrt{3})$

$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{5\cdot\frac{1}{10}(4+3\sqrt{3})}{\frac{1}{2}}=4+3\sqrt{3}$

e) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow B_1=\frac{\pi}{4}$, $B_2=\frac{3\pi}{4}$

$B_1=\frac{\pi}{4}\Rightarrow A+B_1=\frac{5\pi}{12}\Rightarrow C_1=\frac{7\pi}{12}\Rightarrow C_1^2=a^2+b^2-2ab\cos C_1=2(2+\sqrt{3});\ C_1=1+\sqrt{3}$

$B_2=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow A+B_2=\frac{11\pi}{12}\Rightarrow C_2=\frac{\pi}{12}\Rightarrow C_2^2=a^2+b^2-2ab\cos C_2=4-2\sqrt{3}$; $C_2=\sqrt{3}-1$

f) $a=5,\ b=7,\ \cos A=\frac{2\sqrt{10}}{7} \Rightarrow \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{3}{7}$

$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{3}{5} \Rightarrow B_1=\arcsin\frac{3}{5} \Rightarrow \cos B_1=\frac{4}{5}$

$B_2=\pi-\arcsin\frac{3}{5}$

$\cos C_1=\cos[\pi-(A+B_1)]=-\cos(A+B_1)=\frac{9-8\sqrt{10}}{35} \Rightarrow C_1=\pi-\arccos\frac{8\sqrt{10}-9}{35}$

$\sin C_1=\sin(A+B_1)=\frac{c}{35}(2+\sqrt{10}) \Rightarrow c_1=\frac{b\sin C_1}{\sin B_1}=2(2+\sqrt{10})$

$\cos C_2=-\cos(A+B_2)=\frac{9+8\sqrt{10}}{35} \Rightarrow C_2=\arccos\frac{9+8\sqrt{10}}{35}$

$\sin C_2=\sin(A+B_2)=\frac{c}{35}(\sqrt{10}-2) \Rightarrow C_2=\frac{b\sin C_2}{\sin B_2}=2(\sqrt{10}-2).$

g) $b=2,\ a=1,\ A=\frac{\pi}{3}$

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\sqrt{3}$

imposibil $\sqrt{3}\notin[-1,1]$

2) Să se determine elementele necunoscute ale triunghiului ABC fiind date:

a) A, B si p

b) $a+b=m$; A, B

c) a, A si $b-c=d$

a) $C=\pi-(A+B)$ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$; $\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=$

$=\sin(A+B)$

$\frac{a}{\sin A}=\frac{2p}{\sin A+\sin B+\sin(A+B)}$

$a=\frac{2p\sin A}{\sin A+\sin B+\sin(A+B)}$

$b=\frac{2p\sin B}{\sin A+\sin B+\sin(A+B)}$

$c=\frac{2p\sin(A+B)}{\sin A+\sin B+\sin(A+B)}$

b) $C=\pi-(A+B)$

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{a+b}{\sin A+\sin B}=\frac{m}{\sin A+\sin B}$

$a=\frac{m\sin A}{\sin A+\sin B}$; $b=\frac{m\sin B}{\sin A+\sin B}$

$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A} \Rightarrow c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{m\sin A}{\sin A+\sin B}\cdot\frac{1}{\sin A}\cdot\sin(A+B)$

$c=\frac{m\sin(A+B)}{\sin A+\sin B}$

c) <u>Solutia 1.</u> $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-2bc+2bc-2bc\cos A=$

$=(b-c)^2+2bc(1-\cos A)$

$a^2=d^2+2bc(1-\cos A) \Rightarrow bc=\frac{a^2-d^2}{2(1-\cos A)}$

$b-c=d$

$bc=\frac{a^2-d^2}{2(1-\cos A)}$

din rezolvarea acestui sistem scot soluţiile pentru b şi c, apoi aplicînd teorema sinusurilor scot B şi C.

Soluţia 2.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b-c}{\sin B-\sin C}=\frac{d}{\sin B-\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{d}{2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B+C}{2}}\Rightarrow\begin{cases}B-C=2\arcsin\left(\frac{d}{a}\cos\frac{A}{2}\right)\\ B+C=\pi-a\end{cases}$$

După ce se scot din sistemul de mai sus B şi C, se aplică teorema sinusurilor şi se află b şi c.

3. Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{a-b}{a+b}\quad\text{(teorema tangentelor)}$$

Soluţia 1.

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2R\sin A-2R\sin B}{2R\sin A+2R\sin B}=\frac{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}=$$

$$=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi-C}{2}=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

Soluţia 2.

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi-(A+B)}{2}=\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}\operatorname{ctg}\frac{A+B}{2}=$$

$$=\frac{\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\left[\sin\frac{A-B+A+B}{2}+\sin\frac{A-B-A-B}{2}\right]}{\frac{1}{2}\left[\sin\frac{A+B+A-B}{2}+\sin\frac{A+B-A+B}{2}\right]}$$

$$\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{\frac{a}{2R}-\frac{b}{2R}}{\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}}=\frac{a-b}{a+b}$$

4. În triunghiul ABC se dă $m(\hat{A})=60$ şi $\frac{b}{c}=2+\sqrt{3}$

Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}$ şi unghiurile B şi C

$$\left.\begin{aligned}\frac{b+c}{c}&=3+\sqrt{3}=\sqrt{3}(1+\sqrt{3})\\ \frac{b-c}{c}&=1+\sqrt{3}\end{aligned}\right\}\frac{b-c}{b+c}=\frac{c(1+\sqrt{3})}{c\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

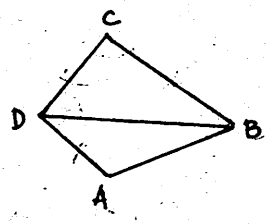
$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{b-c}{b+c}\Rightarrow\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=1\Rightarrow\begin{cases}B-C=\frac{\pi}{2}\\ B+C=\frac{2\pi}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}B=\frac{7\pi}{12}\\ C=\frac{\pi}{12}\end{cases}$$

5. Intr-un patrulater convex ABCD se dau: $AD = 7(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, $CD = 13$, $BC = 15$, $C = \arccos\frac{33}{65}$, $D = \frac{\pi}{4} + \arccos\frac{5}{13}$

Se cer celelalte unghiuri ale patrulaterului și AB



$AD = 7\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$

$\Delta BCD: DB^2 = BC^2 + DC^2 - 2BC \cdot CD \cos C = 225 + 169 - 2 \cdot 15 \cdot 13 \cdot \frac{33}{65} = 196$

$BD = 14$

$\cos \widehat{CDB} = \frac{CD^2 + DB^2 - BC^2}{2CD \cdot DB} = \frac{5}{13}$

$\Rightarrow \mu(\widehat{CDB}) = \arccos\frac{5}{3} \Rightarrow \mu(\widehat{ADB}) = \frac{\pi}{4}$

$\Delta ABD: AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BC \cos ADB = 196(\sqrt{3}-1)^2$

$AB = 14(\sqrt{3}-1)$

$\frac{DB}{\sin A} = \frac{AB}{\sin(\widehat{ADB})} \Rightarrow \sin A = \frac{DB \sin(\widehat{ADB})}{AB} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} \Rightarrow A = \frac{7\pi}{12}$

$\frac{AD}{\sin(\widehat{ABD})} = \frac{AB}{\sin(\widehat{ADB})} \Rightarrow \sin(\widehat{ABD}) = \frac{AD \sin(\widehat{ADB})}{AB} = \frac{1}{2}$

$\mu(\widehat{ABD}) = \frac{\pi}{6}$

$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{33}{65}\right)^2} = \frac{56}{65}$

$\frac{CD}{\sin(\widehat{CBD})} = \frac{BD}{\sin C} \Rightarrow \sin(\widehat{CBD}) = \frac{CD \sin C}{BD} = \frac{4}{5}$

$\hat{B} = \frac{\pi}{6} + \arcsin\frac{4}{5}$

§ 4. Formule pentru aria triunghiului

Pag. 30-31

1. Să se calculeze aria triunghiului ABC atunci cînd:

a) $a = 17$, $B = \arcsin\frac{24}{25}$, $C = \arcsin\frac{12}{13}$

b) $b = 2$, $m(\hat{A}) = 135°$, $m(\hat{C}) = 30°$

c) $a = 7$, $b = 5$, $c = 6$

d) $m(\hat{A}) = 18°$, $b = 4$, $c = 6$

a) $\sin B = \frac{24}{25}$, $\sin C = \frac{12}{13}$; $\cos B = \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25}$

$\cos C = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$

$\sin A = \sin(B+C) = \frac{204}{25 \cdot 13}$

$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = 204$

$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$

$S = \frac{b^2 \sin C \sin A}{2 \sin B}$

$S = \frac{c^2 \sin B \sin A}{2 \sin C}$

b) $A+C = 165^\circ \Rightarrow B = 15^\circ \Rightarrow \sin B = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$

$$S = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$$

c) $p = 9 \Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3} = 6\sqrt{6}$

d) $m(\hat{A}) = 18 \Rightarrow A = \frac{\pi}{10} \Rightarrow \sin\frac{2\pi}{10} = \cos\frac{3\pi}{10}$ $\left(\frac{2\pi}{10} + \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2}\right)$

$\sin 2A = \cos 3A \Leftrightarrow 2 \sin A \cos A = \cos A(4\cos^2 A - 3) \Leftrightarrow$

$4\sin^2 A + 2\sin A - 1 = 0 \Rightarrow \sin A = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$, dar $A \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$$S = \frac{bc \sin A}{2} = 3(\sqrt{5}-1).$$

(2) Cîte triunghiuri distincte sub aspect metric există astfel ca: $a = 15$, $c = 13$, $S = 24$?

$S = \frac{ac \sin B}{2} \Rightarrow 24 = \frac{15 \cdot 13 \sin B}{2} \Rightarrow \sin B = \frac{16}{65}$

$B_1 = \arcsin\frac{16}{65}$ sau $B_2 = \pi - \arcsin\frac{16}{65}$

$\cos B_1 = \frac{63}{65}$ dar $\cos B_1 = \frac{a^2+c^2-b_1^2}{2ac} \Rightarrow b_1 = 4$

$\cos B_2 = -\frac{63}{65} \Rightarrow b_2 = 2\sqrt{193}$

Exista două triunghiuri distincte sub aspect metric care satisfac condițiile date.

3. Să se afle aria triunghiului ABC dacă:

$a = \sqrt{6}$, $m(\hat{A}) = 60^\circ$, $b+c = 3+\sqrt{3}$

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b+c}{2\sin\frac{B+c}{2}\cos\frac{B-c}{2}}$

$2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{\cos\frac{B-c}{2}} \Rightarrow \cos\frac{B-c}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

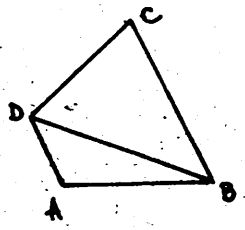
$\cos(B-c) = 2\cos^2\frac{B-c}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\left.\begin{array}{l} B-c = \frac{\pi}{6} \\ B+c = \frac{2\pi}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B = \frac{5\pi}{12} \\ C = \frac{\pi}{4} \end{array}$

$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{2}.$$

4. Să se afle aria patrulaterului din exercițiul 5 § 3.



$AD = 7\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$ $BC = 15$ $BD = 14$ $DC = 13$ $\mu(\widehat{ADB}) = \frac{\pi}{4}$

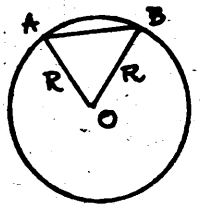
$\mathcal{A}[ABCD] = \mathcal{A}[ABD] + \mathcal{A}[BCD]$

$\mathcal{A}[ABD] = \frac{AD \cdot BD \sin(\widehat{ADB})}{2} = 49(\sqrt{3}-1)$

$\mathcal{A}[BCD] = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 84$

$\mathcal{A}[ABCD] = 49\sqrt{3} - 49 + 84 = 49\sqrt{3} + 35 = 7(7\sqrt{3}+5)$

5. Dacă S este aria poligonului regulat cu n laturi, să se calculeze: S_3, S_4, S_6, S_8, S_{12} și S_{20} în funcție de R, raza cercului circumscris poligonului.



$\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{n}$

$\mathcal{A}[AOB] = \frac{R^2 \sin(\widehat{AOB})}{2} = \frac{R^2 \sin\frac{2\pi}{n}}{2}$

$S_n = \frac{n R^2 \sin\frac{2\pi}{n}}{2}$

$n = 3 \Rightarrow S_3 = \frac{3R^2 \sin\frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$

$n = 4 \Rightarrow S_4 = \frac{4R^2 \sin\frac{2\pi}{4}}{2} = 2R^2$

$n = 6 \Rightarrow S_6 = \frac{6R^2 \sin\frac{2\pi}{6}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

$n = 8 \Rightarrow S_8 = \frac{8R^2 \sin\frac{2\pi}{8}}{2} = 2R^2\sqrt{2}$

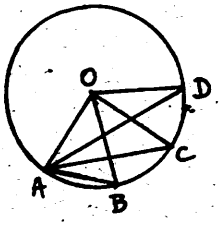
$n = 12 \Rightarrow S_{12} = \frac{12R^2 \sin\frac{2\pi}{12}}{2} = 3R^2$

$n = 20 \Rightarrow S_{20} = \frac{20R^2 \sin\frac{2\pi}{20}}{2} = 10R^2 \sin\frac{\pi}{10} = \frac{5R^2(\sqrt{5}-1)}{2}$

($\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ calculat la ex. 1 punctul d)

6. Să se calculeze aria poligonului regulat ABCDE.....M, înscris în cercul de raza R, știind că:

$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$



$\Delta AOB: \frac{AB}{\sin(\widehat{AOB})} = \frac{OA}{\sin(\widehat{OAB})}$ (1)

Fie $\mu(\widehat{AOB}) = 2\alpha$

$\sin(\widehat{OAB}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$

$(1) \Rightarrow \frac{AB}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha} \Rightarrow AB = \frac{R\sin 2\alpha}{\cos\alpha}$

$AB = 2R\sin\alpha$

$\Delta AOC: \frac{AC}{\sin(\widehat{AOC})} = \frac{OA}{\sin(\widehat{OAC})}$; $\widehat{AOC} = 2(\widehat{AOB}) = 2\cdot 2\alpha = 4\alpha$; $\widehat{OAC} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{AOC}}{2} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$

$\frac{AC}{\sin 4\alpha} = \frac{R}{\cos 2\alpha} \Rightarrow AC = \frac{R\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha} = 2R\sin 2\alpha$

$\Delta: AOD: \frac{AD}{\sin(\widehat{AOD})} = \frac{OA}{\sin(\widehat{OAD})}$; $\widehat{AOD} = 3(\widehat{AOB}) = 3\cdot 2\alpha = 6\alpha$; $\widehat{OAB} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{AOD}}{2} = \frac{\pi}{2} - 3\alpha$

$\frac{AD}{\sin 6\alpha} = \frac{R}{\cos 3\alpha}$; $AD = \frac{R\sin 6\alpha}{\cos 3\alpha} = 2R\sin 3\alpha$

$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} \Rightarrow \frac{1}{2R\sin\alpha} = \frac{1}{2R\sin 2\alpha} + \frac{1}{2R\sin 3\alpha}$

$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 3\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\sin 3\alpha}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{3-4\sin^2\alpha-1}{\sin 3\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{2(1-2\sin^2\alpha)}{\sin 3\alpha}$

$\frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha} \Leftrightarrow \sin 3\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha$

$\sin 3\alpha = \sin 4\alpha \Leftrightarrow \sin 3\alpha - \sin 4\alpha = 0$

$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha}{2} = 0 \quad \cos\frac{7\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \frac{7\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{7} \Rightarrow \widehat{AOB} = \frac{2\pi}{7} \Rightarrow n = 7$

$S_n = \frac{nR^2\sin\alpha}{2} \qquad S = \frac{7R^2\sin\frac{2\pi}{7}}{2}$

§5. Raza cercului circumscris și raza cercului înscris în triunghi

Pag. 32-33

1. Să se arate că în orice triunghi avem:

a) $r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$

b) $S = p(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$

c) $p = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

d) $p-a = 4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

e) $m_a^2 = R^2(\sin^2 A - 4\cos A\sin B\sin C)$

f) $h_a = 2R\sin B\sin C$.

a) $(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = (p-a)\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)^2}} =$

$= \frac{S}{p} = \frac{rp}{p} = r$

b) $p(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = p(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{p^2(p-a)^2\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} =$

$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = S$

Soluția 1.

c) $4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 4R\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} =$

$= 4R\sqrt{\frac{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2b^2c^2}} = \frac{4Rp}{abc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{p}{S}\cdot S = p.$

Soluția 2.

$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{2R\sin A + 2R\sin B + 2R\sin C}{2} = R\left[2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin C\right] =$

$= R\left[2\sin\frac{\pi-C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right] = 2R\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{\pi-C}{2}\right] =$

$= 2R\cos\frac{C}{2}\,2\cos\frac{A-B+\pi-C}{4}\cos\frac{A-B-\pi+C}{4} = 4R\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}$

Soluția 1.

d) $4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 4R\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} =$

$= 4R\frac{p-a}{abc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{p-a}{S}\cdot S = p-a$

Soluția 2.

$p-a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2} = R\left[\sin B + \sin C - \sin A\right] =$

$= R\left[2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} - \sin A\right] = R\left[2\sin\frac{\pi-A}{2}\cos\frac{B-C}{2} - 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\right]$

$= 2R\cos\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{\pi-A}{2}\right] = 2R\cos\frac{A}{2}\,2\sin\frac{B-C+\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-A-B+C}{2}$

$= 4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Soluția 1.

e) $R^2(\sin^2 A + 4\cos A\sin B\sin C) = R^2\left(\frac{a^2}{4R^2} - 4\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}\right) =$

$= \frac{R^2}{4R^2}(a^2+2b^2+2c^2-2a^2) = \frac{1}{4}\left[2(b^2+c^2)-a^2\right] = m_a^2$

Soluția 2.

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} = \frac{2(4R^2\sin^2 B + 4R^2\sin^2 C) - 4R^2\sin^2 A}{4} =$$

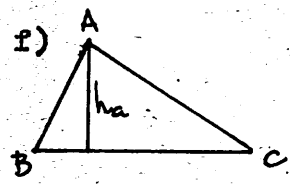
$$= R^2\left[2\left(\frac{1-\cos 2B}{2} + \frac{1-\cos 2C}{2}\right) - \sin^2 A\right] = R^2\left[2\sin^2 A - 2\cos(B+C)\cos(B-C)\right] =$$

$$= R^2\left[2\sin^2 A + 2\cos^2 A - \sin 2A - 2\cos(\pi-C)\cos(B-C)\right] = R^2\left[\sin^2 A + 2\cos A(\cos A + \cos(B-C)\right] =$$

$$= R^2\left[\sin^2 A + 2\cos A \cdot 2\cos\frac{A+B-C}{2}\cos\frac{A-B+C}{2}\right] =$$

$$= R^2\left[\sin^2 A + 4\cos A\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)\right] = R^2\left[\sin^2 A + 4\cos A\sin B\sin C\right]$$

f)



Soluția 1. $\sin B = \frac{h_a}{c}$ (în ΔABD)

$h_a = c\sin B = 2R\sin C\sin B$

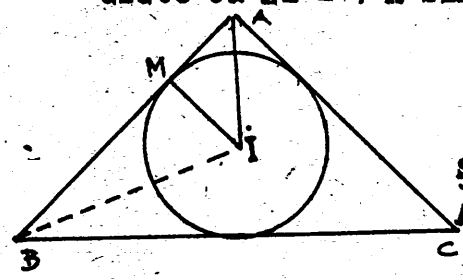
Soluția 2. Aplicația 3 din manual pag. 32:

$S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$

$\frac{a\,h_a}{2} = 2R^2\sin A\sin B\sin C$

$h_a = \frac{2}{a}\cdot a\,R\sin B\sin C = 2R\sin B\sin C$

2. Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, să se arate că $AI = 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$



$\widehat{MAI} = \frac{A}{2}$

$IM \perp AB$

Soluția 1.

Aplicația 2 din manual pag. 32:

$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

ΔMAI: $AI = \frac{r}{\sin\widehat{MAI}} = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} =$

$= 4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

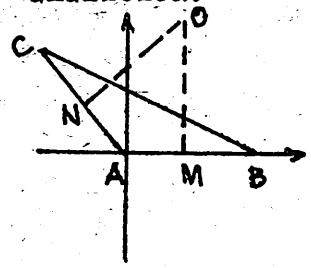
Soluția 2.

ΔABI: $\frac{BI}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{AI}{\sin\frac{B}{2}} = \frac{AB}{\sin(\widehat{AIB})}$

$AI = \frac{AB\sin\frac{B}{2}}{\sin\widehat{AIB}} = \frac{c\sin\frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)} = \frac{2R\sin C\sin\frac{B}{2}}{\sin\left(\pi-\frac{A+B}{2}\right)} =$

$= \frac{2R\sin\frac{B}{2}\,2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = 4R^2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

3. Să se demonstreze teorema 1 din acest paragraf utilizînd metoda analitică:



Fie un sistem de coordonate cu originea în vîrful A al triunghiului ABC, axa absciselor dreapta AB şi axa ordonatelor perpendiculara în A pe AB

$\|AB\| = c$; $\|AC\| = b$ $\quad A(0,0)$

$\|BC\| = a$; $\quad B(b,0)$

$C(b\cos A, b\sin A)$

Fie d_1 medfatoarea segmentului (AB) şi d_2 mediatoarea lui AC)

$d_1 \cap d_2 = \{O\}$ $\quad OA = R$ $\quad M\left(\frac{c}{2}, 0\right)$

$d_1 \cap AB = M$ $\quad \Rightarrow \quad N\left(\frac{b\cos A}{2}, \frac{b\sin A}{2}\right)$

$d_2 \cap AC = M$

Ecuaţia dreptei OM este $X = \frac{c}{2}$

$$ON \perp AC \Rightarrow m_{ON} = -\frac{1}{m_{AC}} = -\operatorname{ctg} A$$

Ecuaţia dreptei OM este:

$$y - \frac{b\sin A}{2} = -\frac{\cos A}{\sin A}\left(x - \frac{b\cos A}{2}\right)$$

Rezolvînd sistemul:

$$\begin{cases} x = \frac{c}{2} \\ 2y\sin A - b\sin^2 A = -2x\cos A + b\cos^2 A \end{cases}$$

obţinem coordonatele punctului O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC

$$O\left(\frac{c}{2}, \frac{b - c\cos A}{2\sin A}\right)$$

$$\|OA\| = R = \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{(b^2 - c\cos A)^2}{4\sin^2 A}} = \sqrt{\frac{c^2\sin^2 A + b^2 + c^2\cos^2 A - 2bc\cos A}{4\sin^2 A}} =$$

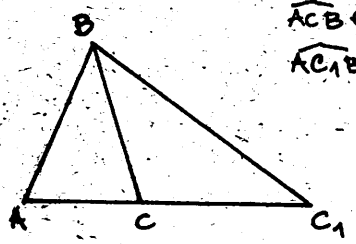
$$= \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}{4\sin^2 A}} = \frac{a}{2\sin A} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

§ 6. Aplicaţii practice

Pag. 34

1. O persoană care se află pe malul unui rîu vede un arbore de pe malul opus sub un unghi de 60°, iar cînd se depărtează cu 20m de la mal, vede arborele sub un unghi de 15°. Să se calculeze înălţimea arborelui şi lăţimea rîului.

Soluţie: Fie [AB] arborele şi [AC] lăţimea rîului



$\widehat{ACB} \in 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} \in 30^\circ \Rightarrow AC = \frac{BC}{2}$

$\widehat{AC_1B} \in 15^\circ \Rightarrow \widehat{CBC_1} \in 45^\circ$

În triunghiul BCC_1 se aplică teorema sinusurilor

$$\frac{CC_1}{\sin \widehat{BCC_1}} = \frac{BC}{\sin \widehat{BC_1C}} \quad \frac{20}{\sin 45^\circ} = \frac{BC}{\sin 15^\circ} \Rightarrow BC = 20\frac{\sin 15^\circ}{\sin 45^\circ} = 10(\sqrt{3}-1)$$

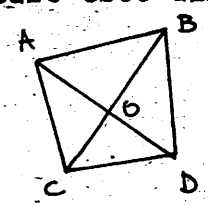
$$AC = \frac{BC}{2} = 5(\sqrt{3}-1) \simeq 3{,}65$$

$$AB = BC \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) \simeq 6{,}35$$

2. Ne aflăm pe malul unui rîu, care nu poate fi traversat şi vrem să măsurăm distanţa dintre doi copaci A şi B situaţi pe celălalt mal. In acest scop să măsoară distanţa de 30 m dintre două puncte C şi D situate pe malul nostru şi următoarele patru unghiuri:

$m(\widehat{ACD}) = 120^\circ$, $m(\widehat{BCD}) = 60^\circ$, $m(\widehat{BDC}) = 105^\circ$ $m(\widehat{ADC}) = 30^\circ$

Care este distanţa de la A la B?



$CD = 30$

$m(\widehat{ACD}) = 120^\circ \Rightarrow m(\widehat{CAD}) = 30^\circ \Rightarrow \Delta ACD$ isoscel

$\Rightarrow m(\widehat{ADC}) = 30^\circ$ $\qquad CD \equiv AC \equiv 30^\circ$

$m(\widehat{BCD}) = 60^\circ \Rightarrow m(\widehat{ACB}) = 60^\circ \Rightarrow$

CO bisectoare, ΔACD isoscel $\Rightarrow CO \perp AD$

$m(\widehat{CAO}) = 30^\circ \Rightarrow CO = \frac{AC}{2} = 15$

ΔACO: $AO = \sqrt{AC^2 - CO^2} = 15\sqrt{3}$

$m(\widehat{BDC}) = 105^\circ$, $m(\widehat{ADC}) = 30^\circ \Rightarrow m(\widehat{ADB}) = 75^\circ$

$$\Delta AOB: AB = \frac{AO}{\cos 75^\circ} = \frac{15\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)} = 15\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)$$

Exerciţii recapitulative

Pag. 34

1. Folosind teorema sinusurilor, să se arate că într-un triunghi unei laturi mai mari i se opune un unghi mai mare.

Fie $a>b$ şi. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin A>\sin B \Rightarrow$

$\sin A-\sin B>0 \Rightarrow 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}>0$

$\frac{A+B}{2}\in(0,\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin\frac{A-B}{2}>0 \Rightarrow \frac{A-B}{2}>0 \Rightarrow A>B$

2. Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

a) $\frac{a\cos A-b\cos B}{a\cos B-b\cos A}+\cos C=0$, $a\neq b$

b) $\frac{\sin(A-B)\sin C}{1+\cos(A-B)\cos C}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

c) $(a+c)\cos\frac{B}{4}+b\cos\left(A+\frac{3B}{4}\right)=2c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}$

a) $\frac{a\cos A-b\cos B}{a\cos B-b\cos A}+\cos C=\frac{2R\sin A\cos A-2R\sin B\cos B}{2R\sin A\cos B-2R\sin B\cos A}+\cos C=$

$\frac{\sin 2A-\sin 2B}{2\sin(A-B)}+\cos C=\frac{\sin(A-B)\cos(A+B)}{\sin(A-B)}+\cos C$

$=\cos(\pi-C)+\cos C=-\cos C+\cos C=0$

b) **Soluţia 1.**

$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{4R^2\sin^2A-4R^2\sin^2B}{4R^2\sin^2A+4R^2\sin^2B}=\frac{\sin^2A-\sin^2B}{\sin^2A+\sin^2B}=\frac{\frac{1-\cos 2A}{2}-\frac{1-\cos 2B}{2}}{\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}}=$

$=\frac{\cos 2B-\cos 2A}{2-\cos 2A-\cos 2B}=\frac{2\sin(A-B)\sin(A+B)}{2-2\cos(A+B)\cos(A-B)}=\frac{\sin(A-B)\sin C}{1+\cos(A-B)\cos C}$

Soluţia 2.

$\frac{\sin(A-B)\sin C}{1+\cos(A-B)\cos C}=\frac{\frac{1}{2}[\cos(A-B-C)-\cos(A-B+C)]}{1+\frac{1}{2}[\cos(A-B+C)+\cos(A-B-C)]}=\frac{\frac{1}{2}[-\cos 2A+\cos 2B]}{1+\frac{1}{2}[-\cos 2A-\cos 2B]}=$

$=\frac{\frac{1}{2}[2\sin^2A-1+1-2\sin^2B]}{1-\frac{1}{2}[1-2\sin^2A+1-2\sin^2B]}=\frac{\sin^2A-\sin^2B}{\sin^2A+\sin^2B}=\frac{\frac{a^2}{4R^2}-\frac{b^2}{4R^2}}{\frac{a^2}{4R^2}+\frac{b^2}{4R^2}}$

c) **Soluţia 1.**

$(a+c)\cos\frac{B}{4}+b\cos\left(A+\frac{3B}{4}\right)=2R(\sin A+\sin C)\cos\frac{B}{4}+2R\sin B\cos\left(A+\frac{3B}{4}\right)$

$=2R\left[\sin A\cos\frac{B}{4}+\sin C\cos\frac{B}{4}+\sin B\cos\left(A+\frac{3B}{4}\right)\right]=2R\left[\frac{1}{2}\sin\left(A+\frac{B}{4}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(A-\frac{B}{4}\right)+\right.$

$\left.+\sin C\cos\frac{B}{4}+\frac{1}{2}\sin\left(A+B+\frac{3B}{4}\right)+\sin\left(B-A-\frac{3B}{4}\right)\right]=R\left[\sin\left(A+\frac{B}{4}\right)+\sin\left(A+\frac{B}{4}\right)+\right.$

$\left.+2\sin C\cos\frac{B}{4}+\sin\left(A+B+\frac{3B}{4}\right)-\sin\left(A-\frac{B}{4}\right)\right]=R\left[2\sin\left(\frac{A+B}{4}+A+B+\frac{3B}{4}\right)/2\cdot\right.$

$\cos\frac{A+B+\frac{3B}{4}-A-\frac{B}{4}}{2}+2\sin C\cos\frac{B}{4}=2c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{B}{4}$

Soluția 2.

Inmulțind egalitatea ce trebuie demonstrată cu $2\sin\frac{B}{4}$ obținem:

$(a+c)\sin\frac{B}{2}+2b\sin\frac{B}{2}\cos\left(A+\frac{3B}{4}\right)=c\sin B$

atunci: $(a+c)\sin\frac{B}{2}+2b\sin\frac{B}{4}\cos\left(A+\frac{3B}{4}\right)=2R(\sin A+\sin C)\sin\frac{B}{2}+$

$+2R\sin B\left[\sin(A+B)-\sin\left(A-\frac{B}{2}\right)\right]=4R\sin\frac{A+c}{2}\cos\frac{A-c}{2}\sin\frac{B}{2}+2R\sin B\left[\sin C-\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)\right]=$

$=2R\sin B\left(\cos\frac{A-c}{2}+\sin C-\sin\frac{\pi+A-c}{2}\right)=2R\sin C\sin B=c\sin B$

3. In triunghiul ABC, $m(\hat{A})=45°$, $AB=a$, $AC=\frac{2\sqrt{2}a}{3}$

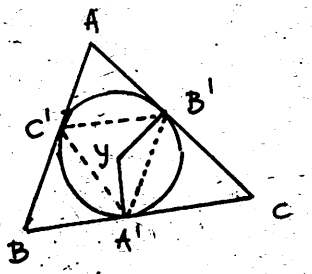
Să se arate că $tg\,B=2$

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos 45°=\frac{5a^2}{9}\Rightarrow BC=\frac{a\sqrt{5}}{3}$

$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}\Rightarrow\sin B=\frac{AC\sin A}{BC}=\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow tg\,B=2$

$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC}{2AB\cdot BC}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

4. Fie A^1, B^1, C^1 punctele de tangentă ale cercului înscris unui triunghi ABC cu laturile acestuia. Să se arate că $\frac{\sigma[A'B'C']}{\sigma[ABC]}=\frac{r}{2R}$



Patrulaterul $A^1\,I\,B^1\,C$ inscriptibil

$IA'\perp BC;\ IB'\perp AC\Rightarrow\widehat{A'IB'}+\hat{C}=\pi$

$\sigma[A'B'C']=\frac{r^2}{2}\left[\sin A+\sin B+\sin C\right]=\frac{r^2}{2}\left[\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}\right]$

$=\frac{r^2}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2R}=\frac{r^2p}{2R}=\frac{r}{2R}\sigma[ABC]$

5. Să se arate că în orice triunghi ABC $\sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}$

Soluția 1.

$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b^2+c^2-2bc)}{4bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}\le\frac{a^2}{4bc}$

$\Rightarrow\sin\frac{A}{2}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}$

Soluţia 2. Se ştie că media geometrică a două numere este $\leq$ decît media lor aritmetică:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}=\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{\sqrt{bc}}\leq\frac{p-b+p-c}{2\sqrt{bc}}=\frac{a}{2\sqrt{bc}}$$

$$\sin\frac{A}{2}\leq\frac{a}{2\sqrt{bc}}$$

6. Să se rezolve triunghiul ABC, cunoscîndu-i elementele A, B şi aria $S=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}$

$C=\pi-(A+B)$

$c=\sqrt{\frac{2S\sin C}{\sin A\sin B}}$

$a=\sqrt{\frac{2S\sin A}{\sin B\sin C}}$

$b=\sqrt{\frac{2S\sin B}{\sin A\sin C}}$.

7. Să se rezolve triunghiul ABC cunoscînd a = 13

$A=\arccos\frac{4}{5}$ şi mediana corespunzătoare laturii a,

$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{1513}$

$\cos A=\frac{4}{5}$ $\quad m_a^2=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$ $\quad \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\Big\}\Rightarrow$ $b^2+c^2=841$, $2bc=840$

$b+c=\pm 41$

$bc=420 \Rightarrow b=20, c=21$ sau $b=21, c=20$.

Aplicînd teorema cosinusului obţinem:

$B_1=\arccos\frac{16}{65}$, $C_1=\arccos\frac{105}{533}$ sau

$B_2=\arccos\frac{105}{533}$, $C_2=\arccos\frac{16}{35}$

8. Să se calculeze unghiurile triunghiului ABC știind că $B-C=\frac{2\pi}{3}$ $R=8r$ unde R și r sînt respectiv razele cercului circumscris și înscris triunghiului.

$$\frac{r}{R}=\frac{1}{8};\ \frac{r}{R}=\frac{\frac{S}{p}}{\frac{abc}{4S}}=\frac{4S^2}{pabc}=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{8}\Rightarrow 2\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{A}{2}\left(\frac{1}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{8}\Rightarrow \sin\frac{A}{2}=\frac{1}{4}$$

$$A=2\arcsin\frac{1}{4}$$

$$\frac{B+C}{2}=\frac{\pi-A}{2}\Rightarrow\cos\frac{B+C}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow \begin{cases} B+C=2\arcsin\frac{1}{4} \\ B-C=\frac{2\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow$$

$$B=\frac{\pi}{3}+\arcsin\frac{1}{4}$$

$$C=\arcsin\frac{1}{4}-\frac{\pi}{3}$$

CAPITOLUL III

APLICAŢIILE TRIGONOMETRIEI ÎN ALGEBRĂ

§ 1. Forma trigonometrică a unui număr complex

Pag. 39

1. Să se determine mulţimea punctelor din plan ale căror afixe z satisfac:

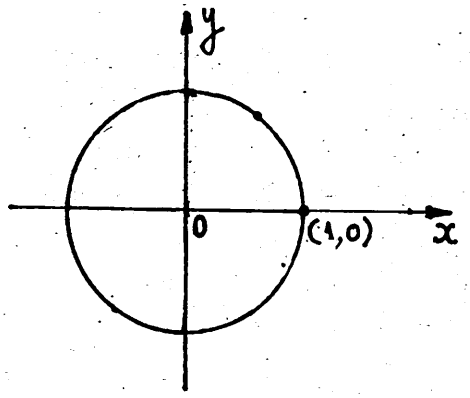
a) $|z| = 1$

b) $\pi < \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$; $z \neq 0$

c) $\arg z > \frac{4\pi}{3}$; $z \neq 0$

d) $|z+i| \leq 2$

Soluţii:



a. $|z| = 1$

$z = x + iy$; $x, y \in R$ =>

$|x+iy| = 1$. <=>

<=> $\sqrt{x^2+y^2} = 1$ <=> $x^2+y^2 = 1$

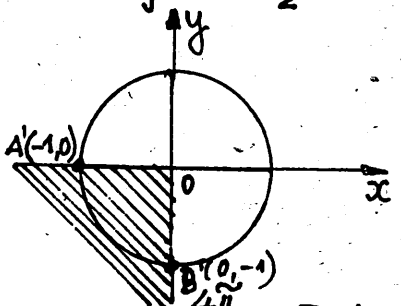
Aceasta reprezintă ecuaţia cercului cu centrul în origine şi de rază R = 1

Deci mulţimea cerută este:

$\{M(x,y) / x^2+y^2 = 1\}$

adică cercul cu centrul în origine şi de rază 1.

b) $\pi < \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$



Considerăm cercul trigonometric, adică cercul cu centrul în origine şi de rază R = 1.

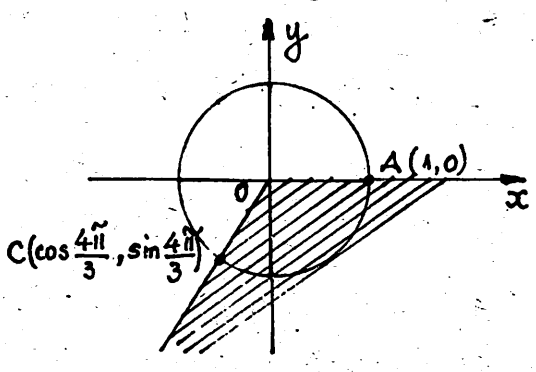
Mulţimea căutată este:

$\{M(x,y) / x \leq 0 \text{ şi } y < 0\}$

care este egală cu mulţimea:

int. $\widehat{A'OB'} \cup |OB'$

c) $\arg z > \frac{4\pi}{3}$, $z \neq 0$



Cum $\arg z \in [0, 2\pi)$

rezultă că trebuie să determinăm mulţimea punctelor din plan ale căror afixe z satisfac inegalitatea:

$\frac{4\pi}{3} < \arg z < 2\pi$

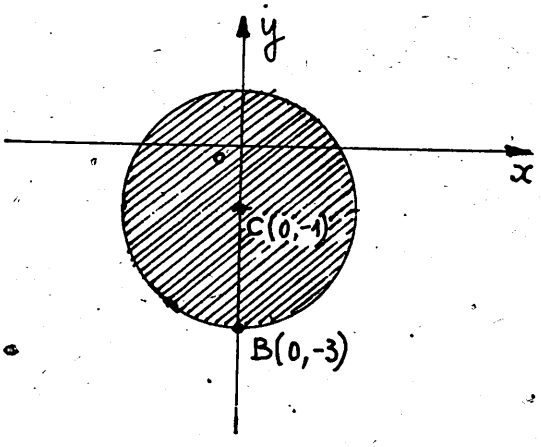
Mulţimea căutată este

Int. $\widehat{AOC}$ care este egală cu

$\{M(x,y) / -\frac{1}{2} < x < 1 \text{ şi } x\sqrt{3} < y < 0\}$

Ecuaţia dreptei OC fiind $y = x\sqrt{3}$

d) $|z + i| \leq 2$



$|z + i| \leq 2$
$z = x + iy;\ x, y \in R \Big| \Rightarrow$
$\Rightarrow |x + i(y+1)| \leq 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \leq 2$

Dacă raţionalizăm relaţia şi considerăm numai semnul egal, obţinem:
$x^2 + (y+1)^2 = 4$ care reprezintă ecuaţia cercului cu centrul în punctul $C(0,-1)$ şi de rază $R = 2$.
Reamintim că ecuaţia cercului cu centrul în punctul $C(a,b)$ şi de rază $R = 2$ este: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

Relaţia $\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \leq 2$ reprezintă distanţa de la punctul $M(x,y)$ din plan pînă la centrul cercului $C(0,-1)$. Cum $\|MC\| \leq 2$ mulţimea căutată este determinată de interiorul cercului inclusiv punctele de pe cerc, adică mulţimea $\{M(x,y) / x^2 + (y+1)^2 \leq 4\}$

2. Să se afle forma trigonometrică a următoarelor numere complexe:
$z_1 = 5$; $z_2 = \sqrt{3} + i$; $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$; $z_4 = -i$; $z_5 = -2$;
$z_6 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$; $z_7 = 3 - 2i$; $z_8 = 1 + i\,tg\,a$, unde
$a \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$

Soluţie:

$z_1 = 5$

$x = 5,\ y = 0 \Big| \Rightarrow r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{25} = 5$

$tg\,t^* = \frac{y}{x} = \frac{0}{5} = 0 \Rightarrow \arg z = t^* = 0$

$z_1 = r(\cos t^* + i \sin t^*) = 5(\cos 0 + i \sin 0)$

$z_2 = \sqrt{3} + i$

$x = \sqrt{3},\ y = 1 \Big| \Rightarrow r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3+1} = 2$

$tg\,t^* = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \arg z = t^* = \frac{\pi}{6}$

$z_2 = r(\cos t^* + i \sin t^*) = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6})$

$z_3 = -1 + i\sqrt{3}$

$x = -1,\ y = \sqrt{3} \Big| \Rightarrow r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$tg\,t^* = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$

Deoarece $x < 0$ şi $y > 0$ rezultă că $t^* \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

Deci $\arg z = t^* = \frac{2\pi}{3}$

$z_3 = r(\cos t^* + i \sin t^*) = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3})$

$z_4 = -i$

$x = 0,\ y = -1 \Big| \Rightarrow r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1} = 1$

$\cos t^* = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$
$\sin t^* = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1$ $\Rightarrow \arg z = t^* = \frac{3\pi}{2}$

$z_4 = r(\cos t^* + i \sin t^*) = \cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2}$

$z_5 = -2$

$x=-2,\ y=0 \Rightarrow r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4}=2$

$tg\,t^*=\frac{y}{x}=\frac{0}{-2}=0$

Deoarece $x<0$ și $y=0$ rezultă că $\arg z=t^*=\pi$

$z_5=r(\cos t^*+i\sin t^*)=2(\cos\pi+i\sin\pi)$

$z_6=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

$x=-\sqrt{2},\ y=-\sqrt{2} \Rightarrow r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2+2}=2$

$tg\,t^*=\frac{y}{x}=\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=1$

Deoarece $x<0$ și $y<0$ rezultă că $t^*\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$

Deci $\arg z=t^*=\frac{5\pi}{4}$

$z_6=r(\cos t^*+i\sin t^*)=2(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$

$z_7=3-2i$

$x=3,\ y=-2 \Rightarrow r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

$tg\,t^*=\frac{y}{x}=-\frac{2}{3}$

Deoarece $x>0$ și $y<0$ rezultă că $\arg z\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$

$\arg z=2\pi-\operatorname{arc}tg\frac{2}{3}$

Deci $t^*=2\pi-\operatorname{arc}tg\frac{2}{3}$

$z_7=\sqrt{13}\left[\cos(2\pi-\operatorname{arc}tg\frac{2}{3})+i\sin(2\pi-\operatorname{arc}tg\frac{2}{3})\right]$

$z_8=1+tg\,a$ unde $a\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi)$

$x=1,\ y=tg\,a \Rightarrow r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+tg^2a}=\sqrt{\sec^2a}=|\sec a|=\frac{1}{|\cos a|}$

$tg\,t^*=\frac{y}{x}=\frac{tg\,a}{1}=tg\,a$ *

Pentru $a\in[0,\frac{\pi}{2})$, $|\cos a|=\cos a$ Deci $r=|z|=\frac{1}{\cos a}$ și $\arg z=t^*=a$

Deci $z_8=r(\cos t^*+i\sin t^*)=\frac{1}{\cos a}(\cos a+i\sin a)$

Pentru $a\in(\frac{\pi}{2},\pi)$, $|\cos a|=-\cos a$. Deci $r=|z|=-\frac{1}{\cos a}$

$x>0$ și $y=tg\,a<0$ rezultă că $\arg z\in(\frac{3\pi}{2},2\pi)$

$\frac{\pi}{2}<a<\pi$ este echivalentă cu $\frac{\pi}{2}+\pi<a+\pi<2\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow t^*=\arg z=\pi+a$

Deci $z_8=r(\cos t^*+i\sin t^*)=\frac{-1}{\cos a}\left[\cos(a+\pi)+i\sin(a+\pi)\right]$

3. Să se determine modulele și argumentele numerelor:

$z_1=\cos a-i\sin a$; $z_2=\sin a+i\cos a$;

$z_3=\sin a+i(1+\cos a)$; $z_4=\cos a+\sin a+i(\sin a-\cos a)$. $a\in\mathbb{R}$

Soluție:

$z_1=\cos a-i\sin a$

$x=\cos a,\ y=-\sin a \Rightarrow r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\cos^2a+\sin^2a}=1$

$tg\,t^*=\frac{y}{x}=\frac{-\sin a}{\cos a}=-tg\,a=tg(-a)$, $(a\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z})$

$\operatorname{Arg}z=\{t^*+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$

$\operatorname{Arg}z=\{-a+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$

$z_2=\sin a+i\cos a$

$x=\sin a,\ y=\cos a \Rightarrow r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\sin^2a+\cos^2a}=1$

$tg\,t^*=\frac{y}{x}=\frac{\cos a}{\sin a}=\cdot ctg\,a=tg(\frac{\pi}{2}-a)$, $(a\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z})\Rightarrow$

$\operatorname{Arg}z=\{\frac{\pi}{2}-a+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$

$z_3=\sin a+i(1+\cos a)$

$x=\sin a,\ y=1+\cos a \Rightarrow r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\sin^2a+(1+\cos a)^2}=$

$= \sqrt{\sin^2 a + 1 + 2\cos a + \cos^2 a} = \sqrt{2 + 2\cos a} = \sqrt{2(1+\cos a)} =$

$= \sqrt{4\cos^2 \frac{a}{2}} = 2\left|\cos \frac{a}{2}\right|$

Deci $r = |z| = 2\left|\cos \frac{a}{2}\right|$

$tg\, t^* = \frac{y}{x} = \frac{1+\cos a}{\sin a} = \frac{2\cos^2 \frac{a}{2}}{2\sin \frac{a}{2}\cos \frac{a}{2}} = \frac{\cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}}$

$tg\, t^* = ctg \frac{a}{2}$

Deci $tg\, t^* = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}\right) \Rightarrow t^* = \frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}$ $\quad (a \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$

Deci $Arg\, z = \left\{\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$z_4 = \cos a + \sin a + i(\sin a - \cos a)$

$x = \cos a + \sin a$
$y = \sin a - \cos a$ $\Big| \Rightarrow r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(\cos a + \sin a)^2 + (\sin a - \cos a)^2} =$

$= \sqrt{2(\cos^2 a + \sin^2 a)} = \sqrt{2}$

Deci $r = |z| = \sqrt{2}$

$tg\, t^* = \frac{y}{x} = \frac{\sin a - \cos a}{\cos a + \sin a} = \frac{\sin a - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}{\sin a + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)} =$

$= \frac{2\sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)\cos \frac{\pi}{4}}{2\sin \frac{\pi}{4}\cos\left(a - \frac{\pi}{4}\right)} = tg\left(a - \frac{\pi}{4}\right),\ \left(a \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$

$\Rightarrow t^* = a - \frac{\pi}{4}$

$Arg\, z = \left\{a - \frac{\pi}{4} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

§ 2. Operaţii cu numere complexe scrise sub formă trigonometrică

Pag. 43

1. Să se calculeze produsul :
$(2\sqrt{3} + 2i)(-1+i)(-1 - i\sqrt{3})$ sub formă trigonometrică.

Soluţie:

Fie $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$

$x_1 = 2\sqrt{3}$
$y_1 = 2$ $\Big| \Rightarrow r = |z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{12+4} = 4$

$tg\, t_1^* = \frac{y_1}{x_1} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow t_1^* = \frac{\pi}{6}$ deoarece $x > 0$ şi $y > 0$

Deci $z_1 = r_1(\cos t_1^* + i \sin t_1^*) \Rightarrow z_1 = 4\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

Fie $z_2 = -1 + i$

$x_2 = -1$
$y_2 = 1$ $\Big| \Rightarrow r_2 = |z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$tg\, t_2^* = \frac{y_2}{x_2} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow t_2^* = \frac{3\pi}{4}$ deoarece $x < 0$ şi $y > 0$

Deci $z_2 = r_2(\cos t_2^* + i \sin t_2^*) \Rightarrow z_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$

$z_3 = -1 - i\sqrt{3}$

$x_3 = -1$
$y_3 = -\sqrt{3}$ $\Big| \Rightarrow r_3 = |z_3| = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$tg\, t_3^* = \frac{y_3}{x_3} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \Rightarrow t_3^* = \frac{4\pi}{3}$ deoarece $x < 0$ şi $y < 0$

Deci

$z_3 = r_3(\cos t_3^* + i \sin t_3^*)$

$z_3 = 2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$

Pentru calculul produsului z_1, z_2, z_3 avem:

$|z_1 \cdot z_2 \cdot z_3| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = 8\sqrt{2}$

$\arg(z_1 \cdot z_2 \cdot z_3) = \arg z_1 + \arg z_2 + \arg z_3 - 2k\pi = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} - 2k\pi =$

$= \frac{2\pi + 9\pi + 16\pi}{12} - 2k\pi = \frac{27\pi}{12} - 2k\pi = 2\pi + \frac{3\pi}{12} - 2k\pi = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$

Deci $\arg.(z_1 \cdot z_2 \cdot z_3) = \frac{\pi}{4}$

Atunci produsul:

$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

2. Să se determine modulele și argumentele reduse ale următoarelor numere complexe:

a) $(2 + i\sqrt{12})^6$ b) $(-1 + i)^6$ c) $\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{16}$

d) $\left(\frac{4}{i\sqrt{3} - 1}\right)^{12}$ e) $\frac{(\sqrt{3} - i)^{16}}{(1+i)^9} + \frac{(\sqrt{3} + i)^{16}}{(1-i)^9}$ f) $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Soluție:

a) $\underbrace{(2 + i\sqrt{12})^6}_{z_1 = 2 + i\sqrt{12}} = z^6$

$x = 2$, $y = \sqrt{12}$ $\Rightarrow r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$

$\operatorname{tg} t^* = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Deoarece $x > 0$ și $y > 0$, $t^* = \frac{\pi}{3}$ și $\arg z = t^* = \frac{\pi}{3}$

$|z^6| = |z|^6 = 4^6 = 256$

$\arg z^6 = 6 \arg z - 2k\pi = 6\frac{\pi}{3} - 2k\pi = 2\pi - 2k\pi$ $\quad k = 1$

$= 2\pi - 2\pi = 0$ Deci $\arg z^6 = 0$

b) $\underbrace{(-1 + i)^6}_{z = -1 + i} = z^6$

$x = -1$, $y = 1$ $\Rightarrow r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\operatorname{tg} t^* = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = -1$

Deoarece $x < 0$ și $y > 0$ rezultă că $t^* \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

Deci $\arg. z = t^* = \frac{3\pi}{4}$

$|z^6| = |z|^6 = (\sqrt{2})^6 = 8$

$\arg z^6 = 6 \arg z - 2k\pi = \frac{18\pi}{4} - 2k\pi = \frac{9\pi}{2} - 2k\pi = \frac{9\pi}{2} - 4\pi = \frac{\pi}{2}$ $\quad k = 2$

Adică $\arg. z^6 = \frac{\pi}{2}$

c) $\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{16} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{16}$

$z_1 = 1 - i\sqrt{3}$

$x_1 = 1$, $y_1 = -\sqrt{3}$ $\Rightarrow r = |z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$\operatorname{tg} t_1^* = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$

Deoarece $x_1 > 0$ și $y_1 < 0$ rezultă că $t_1^* \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

Deci $\arg. z_1 = t_1^* = \frac{5\pi}{3}$

$z_2 = 1 + i$

$x_2 = 1$, $y_2 = 1$ $\Rightarrow r_2 = |z_2| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\operatorname{tg} t_2^* = \frac{y_2}{x_2} = \frac{1}{1} = 1$

Deoarece $x^2>0$ si $y_2>0$ rezultă că $t^*_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Deci $\arg z_2 = t^*_2 = \frac{\pi}{4}$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\left|\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{16}\right| = \left(\left|\frac{z_1}{z_2}\right|\right)^{16} = 2^8$$

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi, \quad k\in\{0,1\}$$

$$= \frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \underset{k=0}{=} \frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{17\pi}{12}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{16} = 16\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) - 2k\pi = 16\cdot\frac{17\pi}{12} - 2k\pi = 4\cdot\frac{17\pi}{3} - 2k\pi =$$

$$= \frac{68\pi}{3} - 2k\pi = \frac{68\pi}{3} - 22\pi = \frac{68\pi - 66\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

In concluzie: $\left|\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{16}\right| = 2^8$ și $\arg\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{16} = \frac{2\pi}{3}$

d) $\left(\frac{4}{\sqrt{3}i-1}\right)^{12} = \left[\frac{4(\sqrt{3}i+1)}{-4}\right]^{12} = (1+i\sqrt{3})^{12}$

$z = 1+i\sqrt{3}$

$x_1 = 1$, $y = \sqrt{3}$ $\Rightarrow r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = 2$

Deci $|z|^{12} = |z|^{12} = 2^{12}$

$tg\, t^* = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

Deoarece $x>0$ și $y>0$, rezultă că $t^* \in (0, \frac{\pi}{2})$

Deci $\arg z = t^* = \frac{\pi}{3}$

$\arg z^{12} = 12\arg z - 2k\pi = 12\cdot\frac{\pi}{3} - 2k\pi = 4\pi - 2k\pi \underset{k=2}{=} 4\pi - 4\pi = 0$

In concluzie $|(1+i\sqrt{3})^{12}| = 2^{12}$ și $\arg(1+i\sqrt{3})^{12} = 0$

e) $\frac{(\sqrt{3}-i)^{16}}{(1+i)^9} + \frac{(\sqrt{3}+i)^{16}}{(1-i)^9} = \frac{z_1^{16}}{z_2^9} + \frac{z_3^{16}}{z_4^9}$

$z_1 = \sqrt{3}-1$

$x_1 = \sqrt{3}$, $y_1 = -1$ $\Rightarrow r_1 = |z_1| = \sqrt{x_1^2+y_1^2} = \sqrt{3+1} = 2$

Atunci $|z_1|^{16} = |z_1|^{16} = 2^{16}$

$tg\, t^*_1 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Deoarece $x_1>0$ și $y_1<0$, rezultă că $t^*_1 \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

Deci $\arg z_1 = t^*_1 = \frac{11\pi}{6}$

$\arg z_1^{16} = 16\arg z_1 - 2k\pi = 16\cdot\frac{11\pi}{6} - 2k\pi = 8\cdot\frac{11\pi}{3} - 2k\pi =$

$$= \frac{88\pi}{3} - 2k\pi \underset{k=14}{=} \frac{88\pi}{3} - 28\pi = \frac{88\pi - 84\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Deci $\arg z_1^{16} = \frac{4\pi}{3}$

$z_2 = 1+i$

$x_2 = 1$, $y_2 = 1$ $\Rightarrow r = |z_2| = \sqrt{x_2^2+y_2^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Atunci $|z_2^9| = |z_2|^9 = (\sqrt{2})^9 = 2^4 \cdot \sqrt{2}$

$tg\, t^* = \frac{y_2}{x_2} = \frac{1}{1} = 1$ Deoarece $x_2 > 0$ și $y_2 > 0$ rezultă că $t^* \in (0, \frac{\pi}{2})$ Deci $\arg z_2 = t_2^* = \frac{\pi}{4}$

$\arg z_2^9 = 9 \arg z_2 - 2k\pi = \frac{9\pi}{4} - 2k\pi = \frac{9\pi}{4} - 2\pi = \frac{9\pi - 8\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

Deci $\underline{\arg z_2^9 = \frac{\pi}{4}}$

$z_3 = \sqrt{3} + 1$, $x_3 = \sqrt{3}$, $y_3 = 1$ $\Rightarrow r_3 = |z_3| = \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = \sqrt{3+1} = 2$

Atunci $|z_3^{16}| = |z_3|^{16} = 2^{16}$

$tg\, t_3^* = \frac{y_3}{x_3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, Deoarece $x_3 > 0$ și $y_3 > 0$, rezultă că $t_3^* \in (0, \frac{\pi}{2})$ Deci $t_3^* = \frac{\pi}{6}$

Atunci $\arg z_3^{16} = 16 \arg z_3 - 2k\pi = 16 \cdot \frac{\pi}{6} - 2k\pi = \frac{8\pi}{3} - 2k\pi \underset{k=1}{=}$

$= \frac{8\pi}{3} - 2\pi = \frac{8\pi - 6\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ Deci $\underline{\arg z_3^{16} = \frac{2\pi}{3}}$

$z_4 = 1 - i$, $x_4 = 1$, $y_4 = -1$ $\Rightarrow r_4 = |z_4| = \sqrt{x_4^2 + y_4^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Atunci $|z_4^9| = |z_4|^9 = (\sqrt{2})^9 = \underline{2^4 \cdot \sqrt{2}}$

$tg\, t_4^* = \frac{y_4}{x_4} = -\frac{1}{1} = -1$ Deoarece $x_4 > 0$ și $y_4 < 0$ rezultă că $t_4^* \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

Deci $\arg z_4 = t_4^* = \frac{7\pi}{4}$. Atunci $\arg z_4^9 = 9 \arg z_4 - 2k\pi =$

$= 9 \cdot \frac{7\pi}{4} - 2k\pi = \frac{63\pi}{4} - \underset{k=7}{2k\pi} = \frac{63\pi}{4} - 14\pi = \frac{63\pi - 56\pi}{4} =$

$= \frac{7\pi}{4}$

Deci $\arg z_4^9 = \frac{7\pi}{4}$

Revenind la exercițiul sub forma sa inițială avem:

$\frac{|z_1|^{16}}{|z_2|^9} = \frac{2^{16}}{2^4\sqrt{2}} = \frac{2^{12}}{\sqrt{2}} = 2^{11} \cdot \sqrt{2}$

$\arg \frac{z_1^{16}}{z_2^9} = \arg z_1^{16} - \arg z_2^9 + 2k\pi$, $k \in \{0, 1\}$

$= \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \underset{k=0}{2k\pi} = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{16\pi - 3\pi}{12} = \frac{13\pi}{12}$

Deci $\arg \frac{z_1^{16}}{z_2^9} = \frac{13\pi}{12}$

Dacă notăm cu $z' = \frac{z_1^{16}}{z_2^9}$, atunci forma trigonometrică a sa este:

$z' = 2^{11}\sqrt{2}\left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12}\right)$.

$\frac{|z_3|^{16}}{|z_4|^9} = \frac{2^{16}}{2^4\sqrt{2}} = 2^{11} \cdot \sqrt{2}$

$\arg \frac{z_3^{16}}{z_4^9} = \arg z_3^{16} - \arg z_4^9 + 2k\pi$, $k \in \{0, 1\}$

$= \frac{2\pi}{3} - \frac{7\pi}{4} + \underset{k=1}{2k\pi} = \frac{2\pi}{3} - \frac{7\pi}{4} + 2\pi = \frac{8\pi - 21\pi + 24\pi}{12} = \frac{11\pi}{12}$

Dacă notăm $z'' = \frac{z_3^{16}}{z_4^9}$, atunci forma trigonometrică este:

$z'' = 2^{11}\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$

Expresia inițială este:

$$z' + z'' = 2^{11}\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right) + 2^{11}\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) =$$
$$= 2^{11}\sqrt{2}\left[\left(\cos\frac{13\pi}{12} + \cos\frac{11\pi}{12}\right) + i\left(\sin\frac{13\pi}{12} + \sin\frac{11\pi}{12}\right)\right] =$$
$$= 2^{11}\sqrt{2}\left[2\cos\pi\cdot\cos\frac{\pi}{12} + 2i\sin\pi\cdot\cos\frac{\pi}{12}\right] =$$
$$= 2^{12}\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{12}\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$$

In concluzie

$$|z' + z''| = 2^{12}\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{12} \text{ și } \arg(z' + z'') = \pi$$

f) $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^9$.

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right| \Rightarrow r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

Deci $|z^9| = |z|^9 = 1^9 = 1$

$\operatorname{tg} t^* = \frac{y}{x}$, $-\sqrt{3}$

$t^* \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

Deoarece $x > 0$ și $y < 0$ rezultă că

Deci $\arg z = t^* = \frac{5\pi}{3}$

$$\arg z^9 = 9\arg z - 2k\pi = 9\cdot\frac{5\pi}{3} - 2k\pi = 15\pi - 2k\pi \underset{k=7}{=} 15\pi - 14\pi = \pi$$

Deci <u>arg. $z^9 = \pi$</u>

3. Să se calculeze:

a) $(-1 + i\sqrt{3})^{60}$ b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12}$ c) $(1 - \cos a + i\sin a)^n$, $a \in R, n \in N^*$

<u>Soluție:</u>

a) <u>$(-1 + i\sqrt{3})^{60} = z^{60}$</u>

$z = -1 + i\sqrt{3}$

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 \\ y = \sqrt{3} \end{array}\right| \Rightarrow r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$$

Deci $|z^{60}| = |z|^{60} = 2^{60}$

$\operatorname{tg} t^* = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$

Deoarece $x < 0$ și $y > 0$ rezultă că $t^* \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

Deci arg. $z = t^* = \frac{2\pi}{3}$ atunci $\arg z^{60} = 60\arg z - 2k\pi =$

$$= 60\cdot\frac{2\pi}{3} - 2k\pi = 40\pi - 2k\pi \underset{k=20}{=} 40\pi - 40\pi = 0$$

Deci arg. $z^{60} = 0$

Rezultă că $z^{60} = 2^{60}(\cos 0 + i \sin 0) = 2^{60}$

b) $\dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{12} = z^{12}}{z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\left.\begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right| \Rightarrow r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} = 1$

$|z^{12}| = |z|^{12} = 1^{12} = 1$ Deoarece $x > 0$ și $y > 0 \Rightarrow t^* \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$tg\, t^* = \frac{y}{x} = 1$

Deci arg. $z = t^* = \frac{\pi}{4}$, Atunci arg. $z^{12} = 12 \arg z - 2k\pi =$

$= 12 \cdot \frac{\pi}{4} - 2k\pi = 3\pi - 2\pi = \pi$ Deci arg. $z^{12} = \pi$

Rezultă că $z^{12} = \cos\pi + i \sin\pi = -1$

Deci $z^{12} = -1$

c) $z^n = (1 - \cos a + i \sin a)^n$, $a \in R$, $n \in N^*$

Rezultă că $\left.\begin{array}{l} x = 1 - \cos a \\ y = \sin a \end{array}\right| \Rightarrow r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1-\cos a)^2 + \sin^2 a} =$

$= \sqrt{1 - 2\cos a + \cos^2 a + \sin^2 a} = \sqrt{2 - 2\cos a} = \sqrt{4\sin^2\frac{a}{2}} = 2\left|\sin\frac{a}{2}\right|$

Deci $r = |z| = 2\left|\sin\frac{a}{2}\right|$

$$tg\, t^* = \frac{y}{x} = \frac{\sin a}{1-\cos a} = \frac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{2\sin^2\frac{a}{2}} = ctg\,\frac{a}{2}$$

$$tg\, t^* = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}\right), \quad (a \neq 2k\pi, k \in Z)$$

Rezultă că arg. $z = t^* = \frac{\pi - a}{2}$

$$z = 2\left|\sin\frac{a}{2}\right|\left(\cos\frac{\pi-a}{2} + i\sin\frac{\pi-a}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^n = 2^n\left|\sin\frac{a}{2}\right|^n\left[\cos\frac{n(\pi-a)}{2} + i\sin\frac{n(\pi-a)}{2}\right]$$

4. Știind că $z + \frac{1}{z} = 2\cos a$, $a \in R$ să se calculeze:

$z^n + \frac{1}{z^n}$

Soluție:

$z + \frac{1}{z} = 2\cos a$; $z^2 - 2z\cos a + 1 = 0$

Rezultă că $z_{1,2} = \cos a \pm i \sin a$

$$z_1 = \cos a + i\sin a\,; \quad \frac{1}{z_1} = \frac{1}{\cos a + i\sin a} = \cos a - i\sin a =$$

$$= \cos(-a) + i\sin(-a)$$

$z_2 = \cos a - i \sin a = \cos(-a) + i \sin(-a)$

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{\cos(-a)+i\sin(-a)} = \cos(-a) - i\sin(-a) = \cos a + i \sin a$$

Deci $z_1 = \frac{1}{z_2}$ și $z_2 = \frac{1}{z_1}$

Deci $z_1^n + \frac{1}{z_1^n} = z_2^n + \frac{1}{z_2^n} = \cos na + i \sin na +$
$+ \cos n(-a) + i \sin n(-a) = 2\cos na$

5) Să se demonstreze că formula lui Moivre este adevărată și în cazul cînd n este un număr întreg negativ.

Soluție:

Dacă $n < 0 \Rightarrow -n > 0$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \frac{1}{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{-n}} = \frac{1}{\cos(-n)\alpha + i\sin(-n\alpha)} =$$
$$= \cos(-n\alpha) - i\sin(-n\alpha) = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

Deci $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$

6) Să se demonstreze:

$$\frac{1+i\,tg\,t}{1-i\,tg\,t} = \frac{1+i\,tgnt}{1-i\,tgnt}, \quad t \in R \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} \text{ și } n \in N^*$$

Soluție:

$$\left(\frac{1+i\,tg\,t}{1-i\,tg\,t}\right)^n = \left(\frac{1+i\frac{\sin t}{\cos t}}{1-i\frac{\sin t}{\cos t}}\right)^n = \frac{(\cos t + i\sin t)^n}{(\cos t - i\sin t)^n} =$$

$$= \frac{(\cos t + i\sin t)^n}{[\cos(-t)+i\sin(-t)]^n} = \frac{\cos nt + i\sin nt}{\cos(-nt)+i\sin(-nt)} = \frac{\cos nt + i\sin nt}{\cos nt - i\sin nt} =$$

$$= \frac{1+i\,tgnt}{1-i\,tgnt}$$

Deci $\left(\frac{1+i\,tg\,t}{1-i\,tg\,t}\right)^n = \frac{1+i\,tgnt}{1-i\,tgnt}$

§ 3. Rădăcina de ordinul n dintr-un număr complex

Pag. 46

1. Să se calculeze rădăcinile de ordinul n ale lui z în următoarele cazuri:

a) $n=2$, $z=i$; b) $n=6$, $z=-i$; c) $n=4$, $z=\sqrt{3}+i$;

d) $n=3$, $z=\frac{1+i}{1-i}$;

Soluţie:

a) $n=2$, $z=i$

$$z_k=\sqrt{i}=\sqrt{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$z_k=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\quad,\ k\in\{0,1\}$$

$$z_k=\cos\frac{(4k+1)\pi}{4}+i\sin\frac{(4k+1)\pi}{4}\quad,\ k\in\{0,1\}$$

Pentru $k=0 \Rightarrow z_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\sin\frac{\sqrt{2}}{2}$

Pentru $k=1 \Rightarrow z_1=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $n=6$, $z=-i$

$$z_k=\sqrt[6]{-i}=\sqrt[6]{\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}}$$

$$z_k=\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{6}\quad,\ k\in\{0,1,2,3,4,5\}$$

$$z_k=\cos\frac{(4k+3)\pi}{12}+i\sin\frac{(4k+3)\pi}{12}\quad,\ k\in\{0,1,2,3,4,5\}$$

Pentru $k=0$, $z_0=\cos\frac{3\pi}{12}+i\sin\frac{3\pi}{12}$

Pentru $k=1$, $z_1=\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}$

Pentru $k=2$, $z_2=\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}$

Pentru $k=3$, $z_3=\cos\frac{15\pi}{12}+i\sin\frac{15\pi}{12}$

Pentru $k=4$, $z_4=\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}$

Pentru $k=5$, $z_5=\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}$

c) $n=4$, $z=\sqrt{3}+i$,

$z=\sqrt{3}+i$

$x=\sqrt{3}$, $y=1$ $\Rightarrow r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3+1}=2$

$tg\, t^*=\frac{y}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Deoarece $x>0$ si $y>0$ rezultă că $t^*\in(0,\frac{\pi}{2})$.

Deci $t^*=\frac{\pi}{6}$

Forma trigonometrică a lui z este:

$$z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow z_k=\sqrt[4]{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$z_k=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{4}\right)$$

$$z_k=\sqrt[4]{2}\left[\cos\frac{(12k+1)\pi}{4}+i\sin\frac{(12k+1)\pi}{4}\right],\ k\in\{0,1,2,3\}$$

d) $n=3$, $z=\frac{1+i}{1-i}$

$$z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{2}=\frac{1+2i-1}{2}=\frac{2i}{2}=i$$

$$z_k=\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$z_k=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3},\ k\in\{0,1,2\}$$

$$z_k=\cos\frac{(4k+1)\pi}{6}+i\sin\frac{(4k+1)\pi}{6},\ k\in\{0,1,2\}$$

Pentru $k=0$, $z_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

Pentru $k=1$, $z_1=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

Pentru $k=2$, $z_2=\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$

2. Să se determine rădăcinile de ordinul 3,4 şi 8 ale unităţii:

Soluţie:

$$\varepsilon_k=\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$$

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3},\ k\in\{0,1,2\}$$

Pentru $k=0$, $\varepsilon_0=\cos 0+i\sin 0=1$

Pentru $k = 1$, $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Pentru $k = 2$, $\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\varepsilon_k = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos\frac{2k\pi}{4} + i \sin\frac{2k\pi}{4}$$

$$\varepsilon_k = \cos\frac{k\pi}{2} + i \sin\frac{k\pi}{2} \quad , \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\varepsilon_k = \sqrt[8]{1} = \sqrt[8]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos\frac{2k\pi}{8} + i \sin\frac{2k\pi}{8}$$

$$\varepsilon_k = \cos\frac{k\pi}{4} + i \sin\frac{k\pi}{4} \quad , \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

3. Să se demonstreze că rădăcinile de ordinul n ale unității sînt egale cu puterile unei rădăcini particulare ε_1 (O astfel de rădăcină se numește rădăcină primitivă de ordinul n al unității).

Soluție:

$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i \sin 0}$$

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n} \quad , \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

$k = 0$, $\varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0$

$k = 1$, $\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$

$k = 2$, $\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i \sin\frac{4\pi}{n}$

$k = 3$, $\varepsilon_3 = \cos\frac{6\pi}{n} + i \sin\frac{6\pi}{n}$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$k = n-1$, $\varepsilon_{n-1} = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin\frac{2(n-1)\pi}{n}$

$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2$; $\varepsilon_1^3 = \varepsilon_3$; ..... ; $\varepsilon_1^{n-1} = \varepsilon_{n-1}$ iar

$\varepsilon_1^n = \cos\frac{2n\pi}{n} + i \sin\frac{2n\pi}{n} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = \cos 0 + i \sin 0 = \varepsilon_0$

Deci $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_{n-1}\} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_1^2, \varepsilon_1^3 \ldots\ldots \varepsilon_1^n\}$

4. $\varepsilon_0 = 1$, ε_1, ε_2 fiind rădăcinile de ordinul trei ale unității, să se arate că :

$$\varepsilon_2 = \overline{\varepsilon_1}\ ,\ \varepsilon_1^2 = (\varepsilon_1)^{-1} = \varepsilon_2 \text{ și } \varepsilon_2^2 = (\varepsilon_2)^{-1} = \varepsilon_1$$

Soluție:

Rădăcinile de ordinul trei ale unității sînt: $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$, $k \in \{0,1,2\}$

$$\varepsilon_0 = \cos 0 + i \sin 0$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$\overline{\varepsilon_1} = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \varepsilon_2$$

Deci $\overline{\varepsilon_1} = \varepsilon_2$

$$(\varepsilon_1)^{-1} = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{-1} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= \cos\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} =$$

$$= \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2 = \varepsilon_1^2 \quad \text{Deci } \varepsilon_1^2 = (\varepsilon_1)^{-1}$$

$$(\varepsilon_1)^{-1} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \varepsilon_2 \quad \text{Deci } (\varepsilon_1)^{-1} = \varepsilon_2$$

In concluzie rezultă că: $\varepsilon_1^2 = (\varepsilon_1)^{-1} = \varepsilon_2$

$$(\varepsilon_2)^{-1} = \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{-1} = \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$= \cos\left(2\pi - \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \varepsilon_1$$

Deci $(\varepsilon_2)^{-1} = \varepsilon_1$

$$(\varepsilon_2)^2 = \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^2 = \cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3} = \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) +$$

$$+ i\sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \varepsilon_1. \quad \text{Deci } (\varepsilon_2)^2 = \varepsilon_1$$

In concluzie rezultă că: $(\varepsilon_2)^2 = (\varepsilon_2)^{-1} = \varepsilon_1$

5. Știind că numărul complex z verifică ecuația $z^4 = z$, să se arate că numerele $-z$, iz și $-iz$ verifică aceeași ecuație.
Aplicație: Să se calculeze $(1-2i)^4$ și să se deducă rădăcinile de ordinul patru ale numărului $-7+24i$

Soluție:

$(-z)^4 = z^4 = z$ Deci $(-z)^4 = z$

$(iz)^4 = i^4 \cdot z^4 = z^4 = z$ Deci $(iz)^4 = z$

$(-iz)^4 = (-i)^4 \cdot z^4 = z^4 = z$ Deci $(-iz)^4 = z$

Aplicație: $(1-2i)^4 = [(1-2i)^2]^2 = (1-4i-4)^2 = (-3-4i)^2 = (3+4i)^2 =$

$= 9 + 24i - 16 = -7 + 24i$

Deci $(1-2i)^4 = -7+24i$

Rezultă că dacă $z = 1-2i$ verifică ecuația $z^4 = z$ unde $z = -7+24i$

Deci rădăcimile de ordinul patru ale numărului $-7+24i$ sînt:

$z = 1-2i$; $-z = -1+2i$

$iz = i(1-2i) = i - 2i^2 = 2+i$

$-iz = -i(1-2i) = -i + 2i^2 = -2-i$

6.* Să se arate că dacă numerele naturale m și n sînt prime între ele, atunci ecuațiile $z^m - 1 = 0$ și $z^n - 1 = 0$ au o singură rădăcină comună:

Soluție:

Rădăcinile ecuației $z^m - 1 = 0$, sînt:

$$z'_k = \cos\frac{2k_1\pi}{m} + i\sin\frac{2k_1\pi}{m}, \quad k_1 \in \{0,1,2,\dots,m-1\}$$

Rădăcinile ecuației $z^n - 1 = 0$, sînt:

$$z''_k = \cos\frac{2k_2\pi}{n} + i\sin\frac{2k_2\pi}{n}, \quad k_2 \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$$

Rădăcinile comune celor două ecuații corespund valorilor k_1 și k_2, care satisfac egalitatea $\frac{2k_1\pi}{m} = \frac{2k_2\pi}{n}$

Adică $\frac{k_1}{m} = \frac{k_2}{n}$ Deci $nk_1 = mk_2$

Deoarece m şi n sînt prime între ele, rezultă că m divide pe K_1

Cum $K_1 \in \{0,1,2,\ldots,m-1\}$ rezultă că m divide numai pe 0.

Deci $K_1 = 0$

Analog se arată că şi $K_2 = 0$

Deci cele două ecuaţii au o singură rădăcină comună care se obţine pentru $K_1 = 0$ şi $K_2 = 0$

Adică : $z' = \cos 0 + i \sin 0 = 1$;

$z'' = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

§4. Ecuaţii binome

Pag. 48

1. Să se rezolve următoarele ecuaţii binome:

a) $z^3 - 27 = 0$; b) $z^4 + 625 = 0$; c) $z^3 + i = 0$;

d) $(2-3i)z^6 + 1 + 5i = 0$

Soluţie:

a) $z^3 - 27 = 0$

Rezolvarea se poate face direct

$$z^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow (z-3)(z^2+3z+9) = 0$$

$z - 3 = 0 \Rightarrow z_1 = 3$ sau

$$z^2 + 3z + 9 = 0 \Rightarrow z_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2} = \frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}$$

Deci $z_1 = 3$, $z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}$ şi $z_3 = -\frac{3}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}$

Folosind forma trigonometrică a unui număr complex, rezultă că:

$$z^3 = 27, \quad z_K = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{27(\cos 0 + i \sin 0)}$$

Deci $z_K = 3\left(\cos \frac{2K\pi}{3} + i \sin \frac{2K\pi}{3}\right)$ unde $K \in \{0, 1, 2\}$

$K = 0$, $z_0 = 3(\cos 0 + i \sin 0) = 3$

$K = 1$, $z_1 = 3\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2}$

$K = 2$, $z_2 = 3\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2}$

b) $z^4 + 625 = 0$

Rezolvarea se poate face direct

$$z^4 + 625 = 0 \Leftrightarrow z^4 + 50z^2 + 625 - 50z^2 = 0 \Leftrightarrow (z^2+25)^2 - (5z\sqrt{2})^2 =$$

$$= 0 \Leftrightarrow (z^2 - 5z\sqrt{2} + 25)(z^2 + 5z\sqrt{2} + 25) = 0$$

$$z^2 - 5z\sqrt{2} + 25 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = \frac{5\sqrt{2} \pm \sqrt{-50}}{2} = \frac{5\sqrt{2} \pm 5i\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2} \pm \frac{5i\sqrt{2}}{2}$$

$$z^2 + 5z\sqrt{2} + 25 = 0 \Leftrightarrow z_{3,4} = \frac{-5\sqrt{2}}{2} \pm \frac{5i\sqrt{2}}{2}$$

Folosind forma trigonometrică a unui număr complex rezultă că:

$z^4 = -625$ Deci $z_k = \sqrt[4]{-625}$;

$z_k = \sqrt[4]{625(\cos\pi + i\sin\pi)}$ Adică $z_k = 5\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$,

unde $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$k = 0$, $z_0 = 5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5i\sqrt{2}}{2}$

$k = 1$, $z_1 = 5\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-5\sqrt{2}}{2} + \frac{5i\sqrt{2}}{2}$

$k = 2$, $z_2 = 5\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-5\sqrt{2}}{2} - \frac{5i\sqrt{2}}{2}$

$k = 3$, $z_3 = 5\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5i\sqrt{2}}{2}$

c) $z^3 + i = 0$

$z^3 = -i$, $z_k = \sqrt[3]{-i} = \cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}$

$z_k = \cos\frac{(4k+3)\pi}{6} + i\sin\frac{(4k+3)\pi}{6}$, $k \in \{0, 1, 2\}$

$k = 0$, $z_0 = \cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

$k = 1$, $z_1 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

$k = 2$, $z_2 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

d) $(2-3i)z^6 + 1 + 5i = 0$ Ecuaţia se mai poate scrie

$$z^6 = \frac{-1-5i}{2-3i} = \frac{1+5i}{-2+3i} = \frac{(1+5i)(-2-3i)}{13} = \frac{-2-10i-3i+15}{13} = 1 - i$$

Deci $z^6 = 1 - i$

Cum $x=1$ și $y=-1 \Rightarrow |1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$tg\, t^* = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1$ Deoarece $x>0$ și $y<0$ rezultă că $t^* \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ deci $t^* = \frac{7\pi}{4}$

Deci $arg(1-i) = \frac{7\pi}{4}$ și $1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$$z_k = \sqrt[6]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}, \quad k \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

Deci $z_k = \sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{6} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{6}\right)$

$$z_k = \sqrt[12]{2}\left[\cos\frac{(8k+7)\pi}{24} + i\sin\frac{(8k+7)\pi}{24}\right]$$

$$k \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

2. Să se rezolve ecuațiile:

a) $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$, b) $z^8 - 2z^4 + 2 = 0$,

c) $z^4 + 6(1+i)z^2 + 5 + 6i = 0$ d) $z^6 - 7iz^3 + 8 = 0$

Soluție:

a) $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$

$z^6 - 9z^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow z^6 - z^3 - 8z^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow z^3(z^3-1) - 8(z^3-1) = 0$

$\Leftrightarrow (z^3-1)(z^3-8) = 0$

$z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0$ care are rădăcinile $z_1 = 1$,

$$z_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$z^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2+2z+4) = 0$, care are rădăcinile

$z_4 = 2$ și $z_{5,6} = -1 \pm i\sqrt{3}$

b) $z^8 - 2z^4 + 2 = 0$ Notăm $z^4 = y$ și ecuația devine: $y^2 - 2y + 2 = 0$ și $y_{1,2} = 1 \pm i$ Revenind la necunoscuta z, avem:

$z^4 = 1+i$; $z_k = \sqrt[4]{1+i} = \sqrt[4]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

$$z_k = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$$

$$z_k = \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{(8k+1)\pi}{16} + i\sin\frac{(8k+1)\pi}{16}\right], \quad k \in \{0,1,2,3\}$$

$z^4 = 1-i$, $z_k = \sqrt[4]{1-i} = \sqrt[4]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}$

$$z_k = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$$

$$z_k = \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{(8k+7)\pi}{16} + i\sin\frac{(8k+7)\pi}{16}\right], \quad k \in \{0,1,2,3\}$$

c) $z^4+6(1+i)z^2+5+6i=0$ Notăm $z^2=y$

şi obţinem: $y^2+6(1+i)y+5+6i=0$ Calculăm descriminantul acestei ecuaţii: $\Delta=b_1^2-ac=9(1+i)^2-5-6i=9(1+2i-1)-5-6i$

$$\Delta=18i-5-6i=-5+12i=(2+3i)^2$$

Deci $y_{1,2}=-3(1+i)\pm(2+3i)$,

$y_1=-1$ şi $y_2=-5-6i$

Revenim la necunoscuta z şi obţinem :

$z^2=-1$ are rădăcinile $z_{1,2}=\pm i$

$z^2=-5-6i$ Notăm $z'=-5-6i$ Rezultă că $x=-5$ şi $y=-6$

$r=|z|=\sqrt{25+36}=\sqrt{61}$

$tg\,t^*=\frac{y}{x}=\frac{6}{5}$ Deoarece $x<0$ şi $y<0$ rezultă că $t^*\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$ Deci $t^*=arc\,tg\frac{6}{5}+\pi$ şi

$z'=\sqrt{61}(\cos t^*+i\sin t^*)$

$z_k=\sqrt{\sqrt{61}(\cos t^*+i\sin t^*)}$

$z_k=\sqrt[4]{61}\left(\cos\frac{t^*+2k\pi}{2}+i\sin\frac{t^*+2k\pi}{2}\right)$, $k\in\{0,1\}$

3. Să se rezolve ecuaţia $\bar{z}=z^{n-1}$, $n>1$, $n\in N$

unde $\bar{z}$ este conjugatul lui z.

Soluţie:

Ţinînd seama că:

$|z|=|\bar{z}|$ şi $|z^{n-1}|=|z|^{n-1}$, avem:

$|z|=|z|^{n-1}\Leftrightarrow|z|(1-|z|^{n-2})=0$

De aici rezultă că $|z|=0$ s-au $|z|=1$

Dacă $|z|=0$ ecuaţia este banală.

Dacă $|z|=1$, înmulţim ambii membrii cu z şi obţinem ecuaţia:

$z\cdot\bar{z}=z^n$ Dar $z\cdot\bar{z}=|z|^2=1$

Deci ecuaţia devine $z^n=1$, ale cărei soluţii sînt:

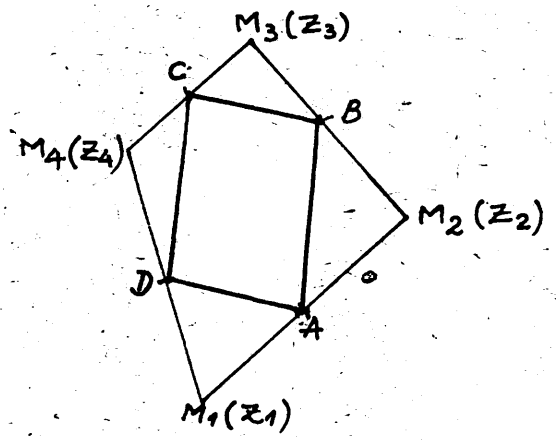
$z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$

§ 5. Aplicaţiile numerelor complexe în geometrie

Pag. 50

1. Să se arate că mijloacele laturilor unui patrulater oarecare sînt vîrfurile unui paralelogram.

Soluţie:



Conform problemei 1/48

$$z_A = \frac{z_1+z_2}{2}\ ;\ z_B = \frac{z_2+z_3}{2}$$

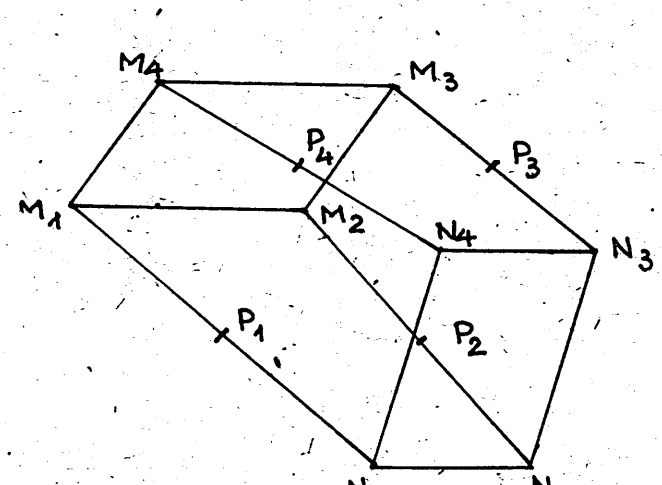
$$z_C = \frac{z_3+z_4}{2}\ ;\ z_D = \frac{z_4+z_1}{2}$$

$$\Rightarrow z_A + z_C = z_B + z_D$$

şi conform problemei rezolvate 2/49 $\Rightarrow$ A B C D paralelogram.

2. Fie $M_1\ M_2\ M_3\ M_4$ şi $N_1\ N_2\ N_3\ N_4$ două paralelograme şi P_i mijloacele segmentelor $[M_i\ N_i]$, $i \in \{1,2,3,4\}$. Să se arate că $P_1\ P_2\ P_3\ P_4$ este un paralelogram sau un paralelogram degenerat.

Soluţie:



Fie z_i afixul punctului M_i, $i \in \{1,2,3,4\}$ şi z'_i afixul punctului N_i unde $i \in \{1,2,3,4\}$

Afixul punctului P_i este z_{P_i}

Trebuie arătat că:

$z_{P_1} + z_{P_3} = z_{P_2} + z_{P_4}$ unde $z_{P_i} = \frac{z_i + z'_i}{2}$

$$z_{P_1} + z_{P_3} = \frac{z_1+z'_1}{2} + \frac{z_3+z'_3}{2} = \frac{1}{2}\left(z_1 + z'_1 + z_3 + z'_3\right) \quad (1)$$

$$z_{P_2} + z_{P_4} = \frac{z_2+z'_2}{2} + \frac{z_4+z'_4}{2} = \frac{1}{2}\left(z_2 + z'_2 + z_4 + z'_4\right)$$

$M_1\ M_2\ M_3\ M_4$ paralelorgram $\Rightarrow$ comform problemei rezolvate 2/49

$$z_1 + z_3 = z_2 + z_4 \quad (2)$$

$N_1 N_2 N_3 N_4$ paralelorgram $\Rightarrow z'_1 + z'_3 = z'_2 + z'_4$

Din (1) şi (2) obţinem $z_{P_1} + z_{P_3} = z_{P_2} + z_{P_4}$ Deci $P_1\ P_2\ P_3\ P_4$ este un paralelogram sau un paralelogram degenerat.

3. Fie funcţia $f : C \longrightarrow C$, $f(z) = az+b$ $(a, b \in C; a \neq 0)$

Dacă M_1 şi M_2 sînt de afixe z_1 şi z_2 iar M_1' şi M_2' de afixe $f(z_1)$ şi $f(z_2)$ să se arate că:

(3) $\|M_1' M_2'\| = |a| \cdot \|M_1 M_2\|$

Avem: (4) $\|M_1' M_2'\| = \|M_1 M_2\|$ dacă şi numai dacă $|a| = 1$

(Egalitatea (3) defineşte asemănarea, iar egalitatea (4) defineşte izometria).

Soluţie:

$$\|M_1' M_2'\| = |f(z_2) - f(z_1)| = |a z_2 + b - a z_1 - b| = |a z_2 - a z_1|$$
$$= |a| \cdot |z_2 - z_1| = |a| \cdot \|M_1 M_2\|$$

S-a folosit corolarul din pag. 49.

4. Arătaţi că funcţia $z \longrightarrow \bar{z}$, $z \in C$ defineşte o izometrie.

Soluţie:

$f(z) = \bar{z}$. Folosim exerciţiul 3. Dacă M_1 şi M_2 sînt de afixe z_1 şi respectiv z_2 iar M_1' şi M_2' sînt de afixe $f(z_1)$ şi $f(z_2)$ trebuie să arătăm că:

$\|M_1' M_2'\| = \|M_1 M_2\|$

Intra-devăr $\|M_1' M_2'\| = |f(z_2) - f(z_1)| = |\bar{z}_2 - \bar{z}_1| =$
$= |\overline{z_2 - z_1}| = |z_2 - z_1| = \|M_1 M_2\|$

5. Fie M_1 şi M_2 de afixe $z_1, z_2 \neq 0$ şi $z_2 = \alpha \cdot z_1$.

Să se arate că semidreptele $|OM_1$ şi $|OM_2$ coincid (respectiv sînt opuse) dacă şi numai dacă $\alpha > 0$ (respectiv $\alpha < 0$)

Soluţie:

① $z_2 = \alpha \cdot z_1 \Rightarrow \arg z_2 = \arg(\alpha \cdot z_1) + 2k\pi = \arg\alpha + \arg z_1 + 2k\pi$ $(k = 0$ sau $k = 1)$

a) $|OM_1 = |OM_2 \Leftrightarrow \arg z_1 = \arg z_2$

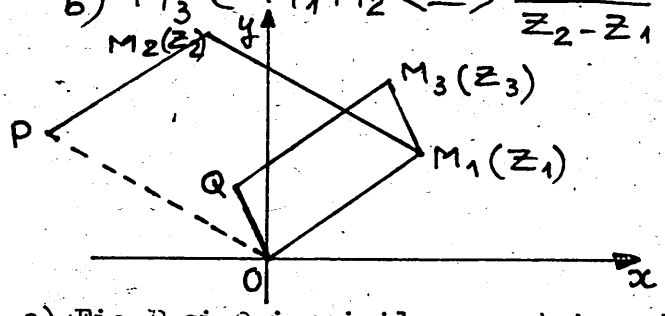
Din această egalitate şi din relaţia ① $\Rightarrow \arg \alpha = 0 \Rightarrow \alpha > 0$

b) $|OM$, opus lui $|OM_2 \Rightarrow \arg z_2 = \arg z_1 \pm \pi$, egalitatea care împreună cu relaţia ① conduce la $\arg \alpha = \pi \Rightarrow \alpha < 0$

6. Se consideră punctele M_1, M_2, M_3 de afixe z_1, z_2, z_3 $M_1 \neq M_2$ Să se arate că :

a) $M_3 \in (M_1M_2 \Leftrightarrow \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} > 0$

b) $M_3 \in M_1M_2 \Leftrightarrow \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \in R$



a) Fie P şi Q imaginile geometrice ale lui $z_2 - z_1$ şi respectiv $z_3 - z_1$ în conformitate cu observaţia de la pag.49 de la problema rezolvată 2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow M_3 \in (M_1M_2 \Leftrightarrow (OQ$ şi $(OP$ coincid $\overset{\text{conf.ex5}}{\Longleftrightarrow}$ raportul $\frac{z_Q}{z_P} > 0$, adică $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} > 0$

b) $M_3 \in M_1M_2 \Leftrightarrow (OQ$ şi $(OP$ coincid sau sînt opuse $\overset{\text{conf.ex.5}}{\Longleftrightarrow}$ $\frac{z_Q}{z_P} \in R$, adică $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} \in R$.

7. Demonstraţi teorema lui Pompeiu. Dacă punctul M din planul triunghiului echilateral $M_1M_2M_3$ nu aparţine cercului circumscris triunghiului $M_1M_2M_3$ atunci există un triunghi avînd lungimile laturilor $\|MM_1\|$, $\|MM_2\|$, $\|MM_3\|$

<u>Soluţia 1</u> folosind numere complexe.

Presupunem că M_1, M_2, M_3 sînt de afixe $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ unde $\varepsilon^3 = 1$. Fie Z afixul punctului M. Dacă $M \notin$ cercului circumscris triunghiului $M_1M_2M_3$ înseamnă că $|z| \neq 1$

Folosim egalitatea $(z-1)(\varepsilon^2-\varepsilon)+(z-\varepsilon)(1-\varepsilon^2) = (z-\varepsilon^2)(1-\varepsilon)$. Valabilă pentru $(\forall) z \in \mathbb{C}$

Luînd modulele celor doi membrii ai egalităţii şi avînd în vedere că:

$|\varepsilon^2-\varepsilon| = |1-\varepsilon^2| = |1-\varepsilon| = \sqrt{3}$ obţinem aplicînd proprietăţile modulului:

a) $|z-1|+|z-\varepsilon| \geq |z-\varepsilon^2|$

b) $|z-1|-|z-\varepsilon| \leq |z-\varepsilon^2|$

c) $|z-\varepsilon|-|z-1| \leq |z-\varepsilon^2|$

O egalitate avînd loc numai dacă imaginile lui $(z-1)(\varepsilon^2-\varepsilon)$ și $(z-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)$ sînt coliniare cu O. In acest caz vom avea conform exercițiului 4,

$$(z-1)(\varepsilon^2-\varepsilon) = \alpha(z-\varepsilon)(1-\varepsilon^2) \quad , \alpha \in R$$

Tinînd cont că $\varepsilon^3 = 1$ și $\varepsilon^2 = \bar{\varepsilon} \Rightarrow$

$$\Rightarrow z(\bar{\varepsilon}-\varepsilon-\alpha \pm \alpha\cdot\bar{\varepsilon}) = \bar{\varepsilon}-\varepsilon-\alpha\varepsilon+\alpha$$ deci $-z$ ar fi cîtul a două numere complexe conjugate ceea ce contrazice ipoteza că $|z| \neq 1$

Soluția 2 - geometrică

Folosim inegalitatea lui Ptolomeu pentru patrulaterul oarecare $MM_1M_2M_3$:

$$\|MM_1\|\cdot\|M_2M_3\| + \|MM_2\|\cdot\|M_3M_1\| \geq \|MM_3\|\cdot\|M_1M_2\| \quad (1)$$

(Egalitatea are loc dacă $M \in$ cercului circumscris triunghiului $M_1M_2M_3$)

Triunghiul $M_1M_2M_3$ fiind echilateral

$$\|M_1M_2\| = \|M_3M_1\| = \|M_2M_3\|$$

Tinînd cont de acest fapt rezultă împărțind relația (1) prin $\|M_1M_2\|$

$$\|MM_1\| + \|MM_2\| \geq \|MM_3\|$$

Deci lungimile $\|MM_1\|$, $\|MM_2\|$, $\|MM_3\|$ satisfac inegalitatea triunghiului, deci există un triunghi avînd lungimile laturilor $\|MM_1\|$, $\|MM_2\|$, $\|MM_3\|$

Exerciții recapitulative.

1. Să se reprezinte mulțimile punctelor din plan ale căror afixe satisfac relațiile:

a) $|z| \geq 1$

b) $1 < |z-1| < 2$; c) $|z-i| < 1$ d) $0 < \arg z < \frac{5\pi}{6}$

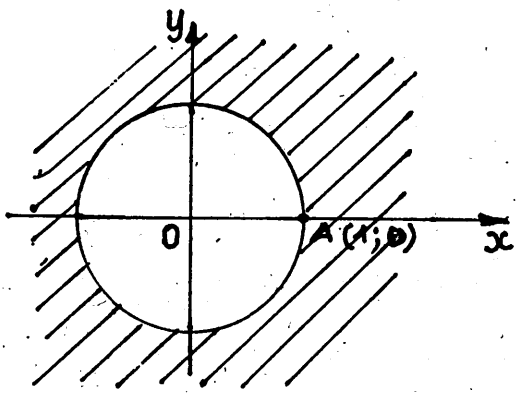
e) $|z-z_1|=|z-z_2|$, unde z_1 și z_2 sînt afixele a două puncte fixe din plan.

Soluție:

a) Dacă $z=x+iy$ inegalitatea din enunț este echivalentă cu relația $\sqrt{x^2+y^2}\geq 1$ deci mulțimea cerută este:

$$M=\{(x,y)\in R^2 / x^2+y^2\geq 1\}$$

Adică mulțimea punctelor planului mai puțin mulțimea punctelor care formează și $Int\,[C(0,1)]$

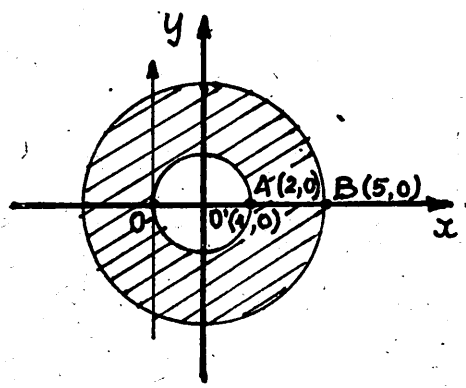


b) Dacă $z=x+iy$ inegalitatea din enunț este echivalentă cu relațiile:

$$1<\sqrt{(x-1)^2+y^2}<2 \text{ adică } 1<(x-1)^2+y^2<4$$

Dacă efectuăm o translație de axe $X=x-1$ și $Y=y$ deci translatăm axa oy la dreapta cu o cantitate egală cu o unitate, obținem mulțimea punctelor căutată sub forma:

$$M=\{(X,Y)\in R^2 / 1<x^2+y^2<4\}$$



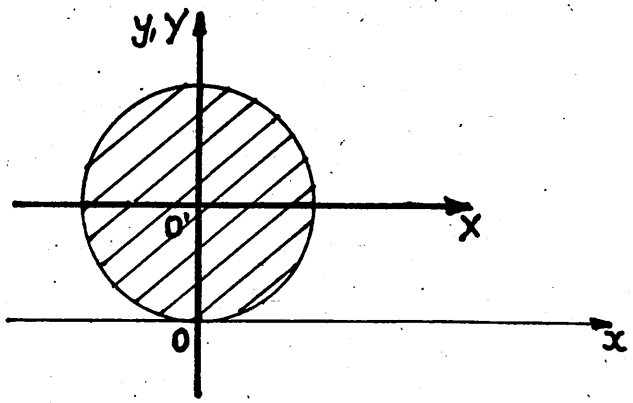
c) Făcînd un raţionament analog celui de la punctul b) şi efectuînd o translaţie de axe de ecuaţii $X = x$ şi $Y = y - 1$, inegalitatea din enunţ se mai scrie:

$$\sqrt{x^2+y^2} < 1, \text{ adică } X^2+Y^2 < 1$$

iar mulţimea căutată se poate scrie sub forma:

$$M' = \{(X,Y) \in R^2 / X^2+Y^2 < 1\}$$

adică soluţia va fi interiorul discului $[C(O', 1)]$ unde $O'(0,1)$ în sistemul netranslatat.

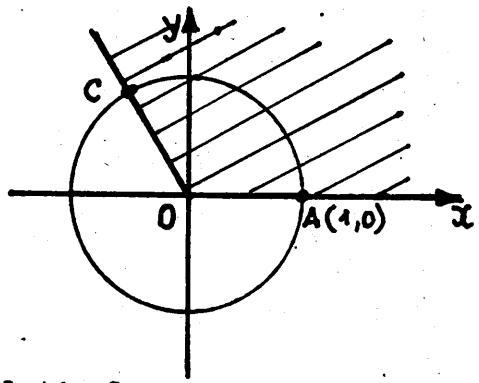


d) Mulţimea căutată este mulţimea punctelor din interiorul unghiului format din semidreptele:

$$\{(x,y) \in R^2 / y = 0 \ , \ x > 0\} \text{ şi}$$

$$\{(x,y) \in R^2 / y = -\frac{\sqrt{3}}{3} x \ , \ x < 0\}$$

adică interiorul $\widehat{AOC}$ unde $C\left(\cos\frac{5\pi}{6}, \sin\frac{5\pi}{6}\right)$



<u>Soluţia 1</u>

e) Relaţia din enunţ este echivalentă cu egalitatea

$$\| MM_1 \| = \| MM_2 \|$$

unde M are afixul Z.

Deci se cere mulţimea punctelor egal depărtate de două puncte fixe M_1 şi M_2 . Această mulţime urmează mediatoarea segmentului $|M_1 M_2|$ Soluţia 2:

Dacă scriem egalitatea din enunţ sub forma:

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

Şi ridicînd la pătrat obţinem după efectuarea calculelor:

$$2x(x_2-x_1)+2y(y_2-y_1)+x^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2=0$$

(ecuaţia unei drepte)

Analitic se mai poate demonstra că ea este mediatoarea segmentului $|M_1 M_2|$

2.Să se efectueze calculele:

a) $E_1=\dfrac{\sqrt{3}+i}{(\sqrt{3}-i)^5}$

b) $E_2=1+3(\cos t+i\sin t)+3(\cos t+i\sin t)^2+(\cos t+i\sin t)^3$

Soluţie:

a) $E_1=\dfrac{\sqrt{3}+i}{(\sqrt{3}-i)^5}=\dfrac{(\sqrt{3}+i)^6}{[(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)]^5}=\dfrac{(\sqrt{3}+i)^6}{4^5}=$

$$=\frac{2^6(\cos 6\cdot\frac{\pi}{6}+i\sin 6\cdot\frac{\pi}{6})}{2^{10}}=\frac{\cos\pi+i\sin\pi}{16}=-\frac{1}{16}$$

b) Observăm că E_2 este dezvoltarea binomului:

$$[1+(\cos t+i\sin t)]^3$$

Vom scrie deci numărul $z=1+\cos t+i\sin t$ sub formă trigonometrică şi-l vom ridica la cub.

Avem deci: $r=\sqrt{(1+\cos t)^2+\sin^2 t}=\sqrt{2(1+\cos t)}=\sqrt{4\cos^2\frac{t}{2}}$

$$r=2\left|\cos\frac{t}{2}\right|$$

Dacă $t\neq\pi \Rightarrow tg\,t^*=\dfrac{\sin t}{1+\cos t}=\dfrac{2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}}=tg\,\frac{t}{2}$

Deci $t^*=\dfrac{t}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Atunci $z=2\cos\dfrac{t}{2}\left(\cos\dfrac{t}{2}+i\sin\dfrac{t}{2}\right)$ iar

$$E_2=8\cos^3\frac{t}{2}\left(\cos\frac{3t}{2}+i\sin\frac{3t}{2}\right)$$

3) Fie expresia $E(z)=z^4-z^3+z^2+1-i$; Să se calculeze:

$$E(1+i)$$

Se scrie $(1+i)$ sub formă trigonometrică, se ridică la puterile respective şi apoi se înlocuieşte în $E(z)$

Avem deci: $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$(1+i)^4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4$

$(1+i)^3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2+2i$

$(1+i)^2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$

Inlocuind aceste rezultate în $E(z)$ se obţine:

$$E(z) = -4+2-2i+2i+1-i = -1-i$$

4. Să se afle poziţia celui de al treilea vîrf al triunghiului echilateral, afixele a două vîrfuri fiind:

$$z_1 = 1$$
$$z_2 = 2+i$$

Soluţie:

Fie MM_1M_2 triunghiul echilateral ale cărui afixe sînt z, z_1 respectiv z_2. Triunghiul fiind echilateral $\|MM_1\| = \|M_1M_2\| = \|M_2M\|$ conform corolarului de la pag.49, acest şir de egalităţi se scrie:

$|z-1| = |2+i-1| = |z-2-i| = \sqrt{2}$ De aici deducem:

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2=2\\(x-2)^2+(y-1)^2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x+1+y^2=2\\x^2-4x+4+y^2-2y+1=2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-2x=1\\x^2+y^2-4x-2y=-3\end{cases} \mid(-1) \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-2x=1\\-x^2-y^2+4x+2y=3\end{cases} (*)$$

Adunăm cele două ecuaţii şi obţinem ecuaţia $2x+2y=4$

sau $x+y=2$ Inlocuim pe $y = 2-x$

din această ecuaţie în prima ecuaţie din (*) rezultă că:

$2x^2-6x+3=0$ cu rădăcinile $x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ şi $x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$

Obţinem deci soluţiile corespunzătoare pentru y

$$y_1 = 2-x_1 = 2-\frac{3-\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$
$$y_2 = 2-x_2 = 2-\frac{3+\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

Deci M poate avea două poziţii:

$M'=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2},\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ de afix $z'=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$M''=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2},\ \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ de afix $z''=\frac{3+\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

5. Fie z_1, z_2, z_3 trei numere complexe, nenule, distincte două cîte două şi de module egale. Să se demonstreze că, dacă $z_1+z_2z_3$; $z_2+z_3z_1$ şi $z_3+z_1z_2$ sînt numere reale, atunci $z_1z_2z_3=1$

Soluţie:

Notînd $z_k=r\cdot(\cos t_k+i\sin t_k)$, $k=1,2,3$

$$z_1+z_2z_3=r\cdot\cos t_1+r^2\cos(t_2+t_3)+i\left[r\cdot\sin t_1+r^2\sin(t_2+t_3)\right]$$

Dacă $z_1+z_2z_3$ este un număr real înseamnă că partea imaginară a acestui număr este egală cu zero, adică:

$r\cdot\left[\sin t_1+r\sin(t_2+t_3)\right]=0$ cum $r\neq 0$, obţinem:

$\sin t_1+r\cdot\sin(t_2+t_3)=0$ ①

Notînd $t_1+t_2+t_3=t$, relaţia ① se mai scrie:

$\sin t_1+r\sin(t-t_1)=0 \Leftrightarrow \sin t_1+r\cdot\sin t\cdot\cos t_1-r\cdot\sin t_1\cdot\cos t=0 \Leftrightarrow (1-r\cdot\cos t)\cdot\sin t_1-r\cdot\sin t\cdot\cos t_1=0$

Inlocuind t_1 cu t_2 şi apoi t_3 obţinem două relaţii analoage:

$$(1-r\cdot\cos t)\cdot\sin t_2-r\cdot\sin t\cdot\cos t_2=0$$
$$(1-r\cdot\cos t)\cdot\sin t_3-r\cdot\sin t\cdot\cos t_3=0$$

Aceste relaţii pot exista simultan numai dacă

② $\rightarrow 1-r\cdot\cos t=0$ şi $r\cdot\sin t=0$, deci $\sin t=0$, $\cos t=1$, $r=1$

$$z_1z_2z_3=r^3\left[\cos(t_1+t_2+t_3)+i\sin(t_1+t_2+t_3)\right]=$$
$$=r^3(\cos t+i\sin t).$$

Ţinînd seama de rezultatele ② rezultă

$$z_1z_2z_3=1$$

6. Notînd cu G mulţimea rădăcinilor de ordinul n ale unităţii,

$G=\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots\ldots\varepsilon_{n-1}\}$ să se demonstreze că:

a) $\varepsilon_i\cdot\varepsilon_j\in G$, $(\forall)\ i,j\in\{0,1,\ldots\ldots n-1\}$

b) $\varepsilon_i^{-1}\in G$ $(\forall)\ j\in\{0,1,\ldots\ldots\ldots n-1\}$

Soluţia 1:

Fie $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $k \in \{0,1,\dots n-1\}$

Rădăcinile de ordinul n ale unităţii

a) $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = \left(\cos\frac{2i\pi}{n} + i\sin\frac{2i\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2j\pi}{n} + i\sin\frac{2j\pi}{n}\right) =$

$= \cos\frac{2\pi}{n}(i+j) + i\cdot\sin\frac{2\pi}{n}(i+j)$ (1)

Dacă $(i+j) \in \{0,1,2,\dots n-1\}$ evident $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \in G$

Dacă $(i+j)$ este un număr natural mai mare sau egal cu n are loc relaţia:

$i+j = q\cdot n + r$ unde r este număr natural $< n$

Inlocuind relaţia (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = \cos\frac{2\pi}{n}(q\cdot n + r) + i\sin\frac{2\pi}{n}(q\cdot n + r)$

şi ţinînd cont de periodicitatea funcţiilor sin şi cos obţinem:

$\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = \cos\frac{2\pi r}{n} + i\sin\frac{2\pi r}{n}$, $r \in \{0,1\dots n-1\}$

deci: $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \in G$

Soluţia 2:

$\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \in G \Rightarrow (\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j)^n = 1$. Deci trebuie verificată ultima egalitate:

Intradevăr,

$$(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j)^n = \left(\cos\frac{2\pi(i+j)}{n} + i\sin\frac{2\pi(i+j)}{n}\right)^n =$$

$$= \cos 2\pi(i+j) + i\sin 2\pi(i+j) = 1$$

deci $(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j)^n \in G$.

b) $\varepsilon_i^{-1} = \cos\left(-\frac{2\pi i}{n}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi i}{n}\right)$ $i \in \{0,1,2\dots n-1\}$

$\left(\varepsilon_i^{-1}\right)^n = \cos(-2\pi i) + i\sin(-2\pi i) = 1$

Am verificat deci că $(\varepsilon_i)^{-1} \in G\ (\forall)\ i \in \{0,1,\dots,n-1\}$

7. Să se determine numerele complexe de modul unu care satisfac relaţia:

$$\left|\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}\right| = 1$$

Soluția:

$$\left|\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}\right|=1 \Rightarrow \left|\frac{z^2+\bar{z}^2}{z\bar{z}}\right|=1 \Rightarrow |z^2+\bar{z}^2|=1, \quad z\bar{z}=|z|^2=1$$

($|z|=1$ dată în ip.)

Fie $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$ cu $|z|=1$ atunci $|x^2-y^2+2ixy+x^2-y^2-2ixy|=1 \Rightarrow$

$$|2(x^2-y^2)|=1 \Rightarrow 2|x^2-y^2|=1 \Rightarrow \begin{cases} 2(x^2-y^2)=1 & \text{dacă } x^2\geq y^2 \\ 2(y^2-x^2)=1 & \text{dacă } x^2<y^2 \end{cases}$$

$x,y\in\mathbb{R}$

Atunci rezultă:

I $\begin{cases} 2x^2-2y^2=1 \\ x^2+y^2=1 \\ x^2\geq y^2 \end{cases}$ II $\begin{cases} -2x^2+2y^2=1 \\ x^2+y^2=1 \\ x^2<y^2 \end{cases}$

$\Rightarrow 4x^2=3 \Rightarrow x^2=\frac{3}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y^2=\frac{1}{4} \Rightarrow y=\pm\frac{1}{2}$

obs. că $x^2\geq y^2$ adică $\frac{3}{4}>\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2} \\ z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2} \\ z_3=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2} \\ z_4=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2} \end{cases}$$

II din sistemul:

$$\begin{cases} -2x^2+2y^2=1 \\ x^2+y^2=1 \\ x^2<y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 4y^2=3 \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2} \\ \text{obs. că } x^2<y^2 \\ \frac{1}{4}<\frac{3}{4} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} z_1'=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2'=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_3'=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_4'=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

verificare (pt. z_3) $|z_3|=1$

$$\left|\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}+\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right|=\left|\frac{3-1-2i\sqrt{3}+3-1+2i\sqrt{3}}{3+1}\right|=1.$$

a.m.d. se verifică toate soluțiile

Deci există 8 soluții care verifică relația din enunț.

Acestea fiind: $z_1, z_2, z_3, z_4, z_1', z_2', z_3'$ și z_4'

8. Fie ecuaţia:

$$az^2+bz+c=0 \quad \text{cu } a,b,c \in \mathbb{C} \text{ şi}$$

$$\arg a+\arg b=2\arg b \text{ şi } |a|+|c|=|b|$$

Să se arate că ecuaţia dată are cel puţin o rădăcină de modul unitar.

Soluţia 1 - prin calcularea efectivă a rădăcinilor.

Ţinînd cont de ipoteză discriminantul este un pătrat perfect:

$$b^2-4ac=a^2\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}\right)=a^2\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2-\frac{4c}{a}\right]=$$

$$=a^2\left\{\frac{b^2}{a^2}-4\frac{|c|}{|a|}\left[\cos(\arg c-\arg a)+i\right]\right\}=$$

$$=a^2\left\{\frac{b^2}{a^2}-4\frac{|c|}{|a|}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^2\cdot\frac{|a|^2}{|b|^2}\right\}=$$

$$=a^2\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2-\frac{4|c||a|}{|b^2|}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]=$$

$$=a^2\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2-4\left(\frac{b}{a}\right)^2\cdot\frac{|a|}{|b|}+4\left(\frac{b}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{|a|}{|b|}\right)^2\right]=a^2\left(\frac{b}{a}-2\frac{b}{a}\cdot\frac{|a|}{|b|}\right)^2$$

Deci rădăcinile ecuaţiei $az^2+bz+c=0$, vor fi:

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm a\left(\frac{b}{a}-2\frac{b}{a}\cdot\frac{|a|}{|b|}\right)}{2a}$$

$$z_1=-\frac{b}{a}\cdot\frac{|a|}{|b|} \text{ cu } |z_1|=\left|-\frac{b}{a}\right|\cdot\frac{|a|}{|b|}=\frac{|b|}{|a|}\cdot\frac{|a|}{|b|}=1 \text{ şi}$$

$$z_2=-\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\cdot\frac{|a|}{|b|}$$

Soluţia 2 - prin factorizarea polinomului.

In condiţiile (1) $\Rightarrow |a| + |c| = |b|$

$$(2) \Rightarrow \arg a + \arg c = 2 \arg b.$$

avem:

$$az^2+bz+c = |a| \cdot \frac{a}{|a|} \cdot z^2 + |b| \cdot \frac{b}{|b|} \cdot z + |c| \cdot \frac{c}{|c|} \quad (1)$$

$$= |a| \left(\frac{a}{|a|} \cdot z^2 + \frac{b}{|b|} \cdot z\right) + |c| \left(\frac{b}{|b|} \cdot z + \frac{c}{|c|}\right) =$$

$$= |a| \cdot \frac{b}{|b|} \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{|b|}{|a|} \cdot z + 1\right) + |c| \cdot \frac{c}{|c|} \left(\frac{b}{c} \cdot \frac{|c|}{|b|} \cdot z + 1\right) \quad (2)$$

$$= \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{|b|}{|a|} \cdot z + 1\right)\left(|a| \cdot \frac{b}{|b|} \cdot z + c\right)$$

In consecinţă zerourile polinomului vor fi :

$$z_1 = -\frac{b}{a} \cdot \frac{|a|}{|b|} \text{ cu } |z_1| = 1 \text{ şi}$$

$$z_2 = -\frac{c \cdot |b|}{|a| \cdot b} = \frac{c \cdot |b|}{b \cdot |a|}$$

Soluţia 3 - folosind forma trigonometrică.

Fie $u = \cos t + i \sin t$ un număr complex arbitrar de modul 1

Atunci:

$$a \cdot u^2 + b \cdot u + c = |a| \left[\cos(2t + \arg a) + i \sin(2t + \arg a)\right] +$$
$$+ |b| \left[\cos(t + \arg b) + i \sin(t + \arg b)\right] +$$
$$+ |c| \left[\cos(\arg c) + i \sin(\arg c)\right] \quad (1)$$

$$(1) \left\{|a| \left[\cos(2t + \arg a) + \cos(t + \arg b)\right] + |c| \left[\cos(t + \arg b) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \cos(\arg c)\right]\right\} + i \left\{|a| \left[\sin(2t + \arg a) + \sin(t + \arg b)\right] + \right.$$
$$\left. + |c| \left[\sin(t + \arg b) + \sin(\arg c)\right]\right\}$$

Transformînd sumele de cosinus şi sinus în produse şi ţinînd seama de (2) apare în final ca factor comun termenul:

$$\cos \frac{1}{2}(t + \arg a - \arg b)$$

Deci pentru u corespunzător valorii $t = \arg b - \arg a + \pi$, adică pentru $u = \cos(\arg b - \arg a + \pi) + i \sin(\arg b - \arg a + \pi) =$

$$= -\frac{b}{a} \cdot \frac{|a|}{|b|}$$

polinomul se anulează.

9. Fie z_1, z_2, z_3 trei numere complexe nenule, astfel ca: $|z_1| = |z_2| = |z_3|$

a) Să se demonstreze că există numerele complexe α și β astfel ca : $z_2 = \alpha \cdot z_1$, $z_3 = \beta \cdot z_1$, și $|\alpha| = |\beta| = 1$

b) Să se rezolve ecuația $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = 0$ în raport cu una dintre necunoscute.

c) Folosind eventual rezultatele de la punctele a și b să se demonstreze că dacă:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3,$$ atunci avem $z_1 = z_2 = z_3$ sau numerele z_1, z_2 și z_3 sînt afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral.

Soluție:

a) Din relația $z_2 = \alpha \cdot z_1 \Rightarrow \alpha = \frac{z_2}{z_1} \in C$ și $|\alpha| = \frac{|z_2|}{|z_1|} = 1$

iar din $z_3 = \beta \cdot z_1 \Rightarrow \beta = \frac{z_3}{z_1} \in C$ și $|\beta| = \frac{|z_3|}{|z_1|} = 1$

b) Exprimăm pe α în funcție de β . Pentru aceasta scriem ecuația dată ca ecuație de gradul doi în α .

$\alpha^2 - \alpha(\beta+1) + \beta^2 - \beta + 1 = 0$ cu soluțiile:

$$\alpha_{1;2} = \frac{(\beta+1) \pm \sqrt{(\beta+1)^2 - 4\beta^2 + 4\beta - 4}}{2} = \frac{(\beta+1) \pm \sqrt{-3\beta^2 + 6\beta - 3}}{2}$$

$$= \frac{(\beta+1) \pm i\sqrt{3}(\beta-1)}{2}$$

c) Dacă unul din numere este nul, atunci toate sînt nule și problema este rezolvată.

Presupunem că toate numerele sînt nenule.

Inlocuind $z_2 = \alpha \cdot z_1$ și $z_3 = \beta \cdot z_1$ în relația dată obținem $z_1^2 + \alpha^2 \cdot z_1^2 + \beta^2 \cdot z_1^2 = \alpha \cdot z_1^2 + \alpha \cdot \beta \cdot z_1^2 + \beta \cdot z_1^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z_1^2(1 + \alpha^2 + \beta^2) = z_1^2(\alpha + \alpha\beta + \beta)$$

Cum $z_1 \neq 0$ putem simplifica ultima egalitate cu z_1^2 și rezultă:

$\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 = 0$, deci α şi β verifică relaţia de la punctul b.

Dacă $\beta = 1$ rezultă din relaţia de la punctul b, $\alpha = 1$, deci $z_1 = z_2 = z_3$

Dacă $\beta \neq 1$ obţinem din rezolvarea ecuaţiei de la punctul b

$$\alpha = \frac{(\beta+1) \pm i\sqrt{3}(\beta-1)}{2} \Leftrightarrow 2\alpha = (\beta+1) \pm i\sqrt{3}\beta \mp i\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha - 2 = \beta + 1 \pm i\sqrt{3}\beta \mp i\sqrt{3} - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha-1) = \beta(1 \pm i\sqrt{3}) - (1 \pm i\sqrt{3}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha-1) = (1 \pm i\sqrt{3})(\beta-1) .$$

Dar cum $\beta \neq 1$ putem împărţi prin $2(\beta-1)$ ultima relaţie şi obţinem:

$$\frac{\alpha-1}{\beta-1} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

Considerînd modulele ambilor membri rezultă:

$$\left|\frac{\alpha-1}{\beta-1}\right| = \left|\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right| \Leftrightarrow \frac{|\alpha-1|}{|\beta-1|} = 1 \Leftrightarrow |\alpha-1| = |\beta-1| \quad (2)$$

Calculăm acum lungimile $\|M_1M_2\|$, $\|M_1M_3\|$ şi $\|M_2M_3\|$

$$\left.\begin{aligned} \|M_1M_2\| &= |z_2 - z_1| = |\alpha z_1 - z_1| = |z_1||\alpha-1| = |\alpha-1| \\ \|M_1M_3\| &= |z_3 - z_1| = |\beta \cdot z_1 - z_1| = |z_1||\beta-1| = |\beta-1| \\ \|M_2M_3\| &= |z_3 - z_2| = |\beta \cdot z_1 - \alpha \cdot z_1| = |z_1||\beta-\alpha| = |\beta-\alpha| \end{aligned}\right| \quad (3)$$

Demonstrăm relaţia (2)

Am coincidenţă $|z_1| = 1$, fără a restrînge generalitatea

$$|\alpha-1| = |\beta-1| \Longrightarrow \|M_1M_2\| = \|M_1M_3\|$$

Aplicînd o proprietate convenabilă a rapoartelor egale relaţiei (1) obţinem:

$$\frac{\alpha-\beta}{\beta-1} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

Considerînd modulele ambilor membri ai egalităţii (4) rezultă:

$$\frac{|\alpha-\beta|}{|\beta-1|} = 1 \Leftrightarrow |\alpha-\beta| = |\beta-1|$$

De unde deducem că $\|M_1M_2\| = \|M_2M_3\| = \|M_1M_3\|$

Deci triunghiul $M_1M_2M_3$ este echilateral.

CAPITOLUL IV
INCIDENȚA, ORDONAREA ȘI PARALELISMUL ÎN SPAȚIU

§ 1. Axiomele geometriei în spațiu

Pag.53

1. Să se arate că dacă o dreaptă d nu este conținută într-un plan α atunci intersecția $\alpha \cap d$ este fie mulțimea vidă, fie este formată dintr-un singur punct.

Soluție:

$d \not\subset \alpha \Rightarrow \alpha \cap d = \phi$ sau $\alpha \cap d = \{M\}$

Dem:
Reducere la absurd: Presupunem: $d \cap \alpha \supseteq \{A;B\} \Rightarrow$
$\Rightarrow AB \subset \alpha$ deci $d \subset \alpha$ (ABSURD)
(T_2)

2. Să se arate că oricare ar fi planul α există cel puțin un punct nesituat în planul α .

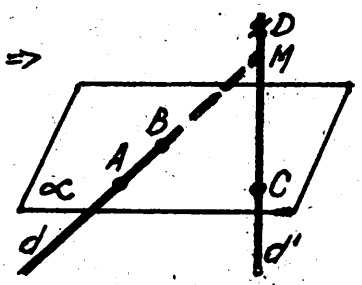
Soluție:

$\forall \alpha \Rightarrow \exists A \notin \alpha, A \in S$
Dem:
Reducere la absurd: *există* α *plan astfel încît* toate punctele din spațiul(S) sînt în α (contrazice axioma 3c)

3. Există două drepte fără punct comun.

Soluție:

$\exists d; d'$ *cu proprietatea* $d \cap d' = \phi$
Fie A;B;C $\in \alpha$ (necoliniare) și $D \notin \alpha$ (axioma 3c)
Dem: *nu există* $d; d; d \cap d = \phi$,
Reducere la absurd: Presupunem: $AB \cap DC = \{M\} \Rightarrow$
(
$\Rightarrow M \in \alpha$ (deoarece $M \in AB \subset \alpha$)
$\left.\begin{matrix} C \in \alpha \\ M \in \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow MC \subset \alpha$
Dar $\left.\begin{matrix} D \in MC \\ MC \in \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow D \in \alpha$ (Absurd)
Deci $AB \cap BC = \phi \Rightarrow d \cap d' = \phi$



4. Să se arate că fiind dată o dreaptă oarecare d, există cel puțin

două plane care conţin dreapta d.

Soluţie:

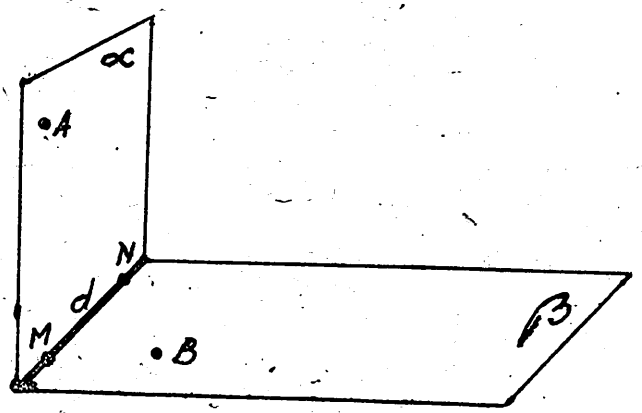
Fie dreapta d => există $A \notin d$ (am putea arăta aceasta luînd două puncte $M, N \in d$ → conform axiomei I_3 şi apoi A necoliniar cu M şi N → → conform axiomei I_3)

$(d; A) = \alpha$ - conform teoremei T_3

Există $B \notin \alpha$ (conform axiomei 3c) în care se spune că există 4 puncte necoplanare; din cele 4 considerăm trei în planul α → → conform cu axioma 3b

$(B; d) = \beta$

Cele două plane α şi β sînt diferite, dar au o dreaptă comună: d



5. Se consideră dreptele d, d', d'' astfel ca, luate două cîte două, să se intersecteze. Să se arate că atunci cele trei drepte au un punct comun, sau sînt aşezate în acelaşi plan.

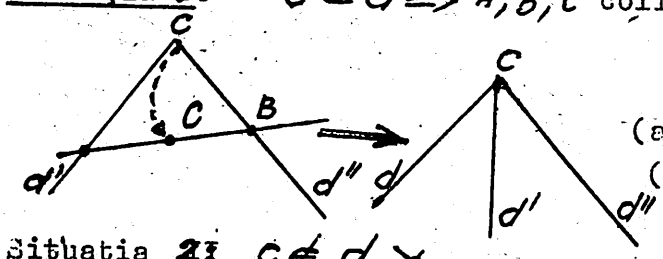
Soluţie:

(Presupunem cele trei drepte distincte, două cîte două)

$d \cap d' = \{A\}$
$d \cap d'' = \{B\}$
$d' \cap d'' = \{C\}$
$\Rightarrow d; d'; d''$ coplanare SAU $d \cap d' \cap d'' = \{M\}$ (unde $M = A = B = C$)

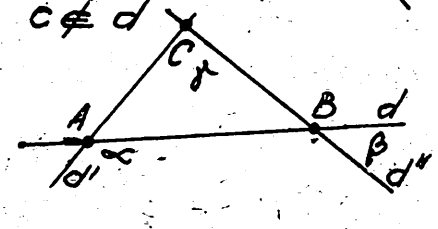
DEM: $d \cap d' = \{A\} \Rightarrow (d; d') = \alpha$
$d \cap d'' = \{B\} \Rightarrow (d; d'') = \beta$
$d' \cap d'' = \{C\} \Rightarrow (d'; d'') = \gamma$

Situaţia 1: $C \in d \Rightarrow A; B; C$ coliniare $(\in d)$



$A = B = C\ (= M)$
(altfel ar trebui ca $d = d' = d''$)
(conform axiomei 4)

Situaţia 2: $C \notin d$



A; B; C necoliniare ⇒ A; B; C determină un singur plan ⇒
$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma$

6. Fie A,B,C trei puncte necoliniare şi D un punct nesituat în planul(ABC).Să se arate:a)punctele D,A,B nu sînt coliniare şi nici D,B,C;D,C,A;b)intersecţia planelor(DAB),(DBC),(DCA) este formată dintr-un singur punct.

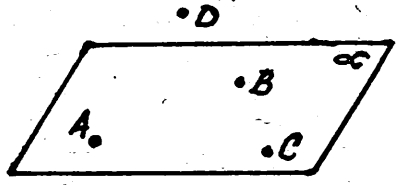
Soluţie:

Se dau: $\begin{cases} A;B;C \text{ necoliniare} : (A;B;C) = \alpha \\ D \notin (ABC) = \alpha \end{cases}$

Să se demonstreze: a) $\begin{cases} DAB \text{ necoliniare} \\ DBC \text{ necoliniare} \\ DCA \text{ necoliniare} \end{cases}$

b) $(DAB) \cap (DBC) \cap (DCA)$ =un singur punct

a)



Reducere la absurd:D,A,B = coliniare

Avem $A;B \in \alpha \Rightarrow AB \subset \alpha$ (T_2)

$\left.\begin{matrix} D \in AB \text{(coliniar cu A,B)} \\ AB \subset \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow D \in \alpha$ absurd (contrazice ipoteza)

Deci D,A,B necoliniare.Analog pentru celelalte triplete de puncte

b)Reducere la absurd:Presupunem $(DAB) \cap (BDC) \cap (ADC) = d$, fie $E \in d; E \neq D$

Avem:

$(DAB) \cap (DBC) = DB$ axioma 6

$(DAB) \cap (DAC) = DA$ axioma 6

$(DCA) \cap (DCB) = DC$ axioma 6

Cum $E \in (DAB) \cap (BDC) \Rightarrow E \in BD$

Cum $E \in (DAB) \cap (DAC) \Rightarrow E \in DA \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} D,B,E \text{ coliniare} \\ D,A,E \text{ coliniare} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ D,A,B coliniare . Absurd(contradicţie cu a)

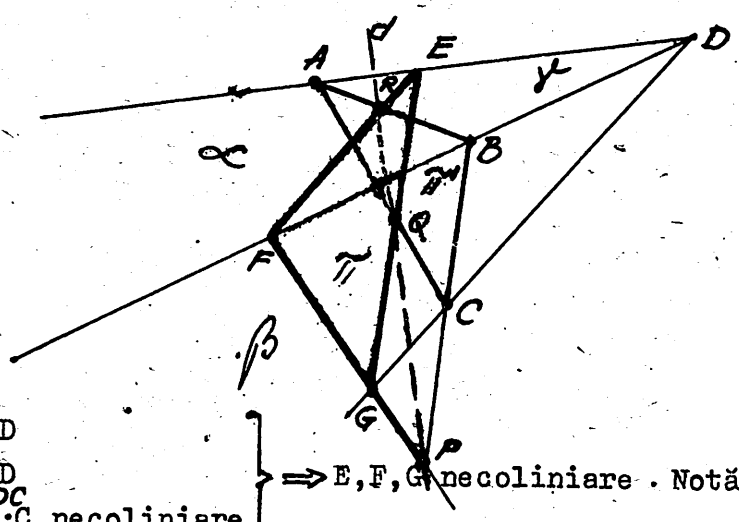
Deci : $(DAB) \cap (DBC) \cap (DCA)$ = unic

7. Folosind notaţiile exerciţiului 6,se iau punctele E,F,G, distincte de A,B,C,D astfel ca $E \in AD$, $F \in BD$, $G \in CD$;fie $BC \cap FG = \{P\}$ $GE \cap CA = \{Q\}$; $EF \cap AB = \{R\}$.Să se arate că punctele P,Q,R sînt coliniare(teorema lui Desargues).

Soluţie:

Ipoteză: $\begin{cases} A,B,C \text{ necoliniare} \\ D \notin (A,B,C) \\ E \in AD;\ F \in BD;\ G \in CD \end{cases}$ $\begin{matrix} BC \cap FG = \{P\} \\ GE \cap CA = \{Q\} \\ EF \cap AB = \{R\} \end{matrix}$

Să se demonstreze că P;Q;R; sînt coliniare(Teorema Desargue)



$E \in AD$
$F \in BD$
$G \in DC$
A;B;C necoliniare
$\Rightarrow$ E,F,G necoliniare . Notăm : $(EFG) = \tilde{\pi}$, $(ABC) = \pi'$

$P \in BC \Rightarrow P \in \pi'$; $P \in FG \subset \tilde{\pi} \Rightarrow P \in \tilde{\pi}$. Deci $P \in \tilde{\pi} \cap \pi' = d$
Analog ss arată că $R \in \tilde{\pi} \cap \pi' = d$; $Q \in \tilde{\pi} \cap \pi' = d$. Deci: P;R;Q coliniare.

Pag.54

8. Se consideră dreptele d şi d' nesituate în acelaşi plan şi punctele distincte A,B,C$\in$d şi D,E$\in$d'. Câte plane diferite putem duce astfel încît fiecare să conţină trei puncte necoliniare dintre punctele date. Generalizare.

Soluţie:

Planele care îndeplinesc condiţiile din exerciţiu sînt (Ad'), (Bd'), (Cd'), (Dd) şi (Ed). Planele sînt diferite deoarece în caz contrar ar rezulta că dreptele d şi d' sînt coplanare.

Generalizare: dacă pe dreapta d avem n puncte distincte, iar pe d' m puncte atunci putem duce m+n plane diferite.

Pag.55

9. Arătaţi că există o infinitate de plane care conţin o dreaptă dată d.

Soluţie:

Din ex.3 ştim că există dreapta d' astfel încît d şi d' să nu fie conţinute în acelaşi plan. Considerăm $M \in d'$ şi planele (dM) care conţin dreapta d. Deci există o infinitate de plane, care conţin dreapta d.

§ 2. Construcţii în spaţiu

pag.56

1. Se dau planele α şi β şi $A,B \in \alpha$ .Să se construiască un punct $M \in \alpha$ egal depărtat de A şi B,care să aparţină şi planului β

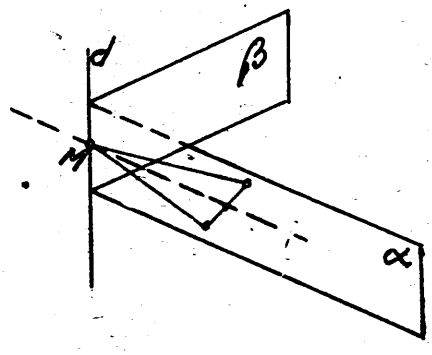
Soluţie:

Ipoteză $\begin{cases} \alpha \,;\, \beta \\ A,B \in \alpha \end{cases}$

C:Să se construiască $M \in \alpha$ cu proprietatea $\begin{cases} |MA| \equiv |MB| \\ M \in \beta \end{cases}$

Presupunem problema rezolvată: $M \in \alpha \cap \beta$

$|MA| \equiv |MB| \Rightarrow M \in$ mediatoarei lui AB.



Rezultă construcţia:Se construieşte în planul α mediatoarea segmentului AB .Punctul de intersecţie al mediatoarei cu dreapta d de intersecţie a celor două plane este punctul M căutat.

2. Să se determine intersecţia a trei plane distincte

Soluţie:

Dacă $\alpha \cap \beta = \phi \Rightarrow$ intersecţia cerută $= \phi$

Dacă $\alpha \cap \beta = d \Rightarrow$ intersecţia cerută $= d \cap \gamma \Rightarrow$ punct / ϕ / dreapta d

Deci trei plane se pot intersecta într-un punct,după o dreaptă, sau deloc(paralele).

3. Se dau:planul α , dreptele d_1, d_2 şi punctele A,B $\notin \alpha \cup d_1 \cup d_2$
Să se afle un punct $M \in \alpha$ astfel ce dreptele MA,MB să se intersecteze respectiv pe d_1 şi d_2 .

Soluţie:

Ipoteză $\begin{cases} \alpha \,;\, d_1 \,;\, d_2 \\ A \,;\, B \notin \alpha \cup d_1 \cup d_2 \end{cases}$

C: Se cere $M \in \alpha$ cu proprietatea : $\begin{cases} M \in \alpha \\ MA \cap d_1 \neq \phi \\ MB \cap d_2 \neq \phi \end{cases}$

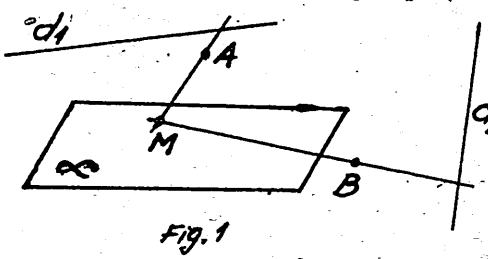


Fig.1

Situaţia 1:d_1, d_2 coplanare $\Rightarrow$

$\Rightarrow (d_1 d_2) = \beta$ şi $\beta \cap \alpha = d \Rightarrow$

$\Rightarrow$ o infinitate de soluţii;orice punct de pe dreapta d este un

punct M cerut fig.2

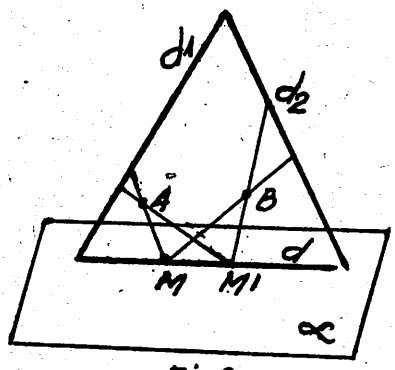


Fig.2

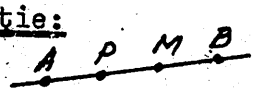
Situaţia 2.: d_1 şi d_2 necoplanare → *vezi prima figură.*
$(A, d_1) = \alpha_1$
$(B, d_2) = \alpha_2$ $\quad \alpha_1 \cap \alpha_2 \cap \alpha = M$
Putem avea: $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Rightarrow$ nici o soluţie
$\alpha_1 \cap \alpha_2$ şi $d \cap \alpha = M$
(o singură soluţie)
$\alpha_1 \cap d_2 = d$ şi $d \subset \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow$ o infinitate de soluţii → toate punctele dreptei d.

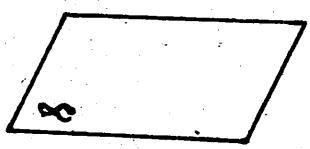
§ 3. Semispaţiu

Pag.58

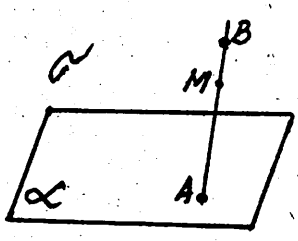
1. Dacă punctele A şi B aparţin semispaţiului deschis $\mathcal{O}$, atunci $[AB] \subset \mathcal{O}$. Proprietatea este valabilă şi pentru un semispaţiu închis?

Soluţie:





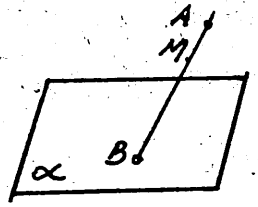
Se observă că dacă $A \in \mathcal{O}$ şi $B \in \mathcal{O}$ avem $[AB] \cap \alpha = \phi$. Fie $\mathcal{O} = |\alpha A = |\alpha B$ *Fie* $M \in |AB|$ şi trebuie arătat că $M \in \mathcal{O}$.
Presupunem contrariul că $M \notin \mathcal{O}$. Deci există P astfel încît $[AM] \cap \alpha = \{P\}$ de unde rezultă $P \in [AM]$ ceea ce implică în continuare că $P \in [AB]$. Deci $[AB] \cap \alpha \neq \phi$ fals. $P \in \alpha$, deci $M \in \mathcal{O}$. Proprietatea se păstrează şi în cazul semispaţiului închis. Faţă de cazul anterior mai poate apărea cazul în care unul din punctele A şi B aparţin lui α sau cînd amîndouă aparţin lui α.



Dacă $A \in \alpha$ şi $B \in \mathcal{O}$ avem $|AB| \cap \alpha = \phi$ şi se arată ca mai sus că $|AB| \subset \mathcal{O}$, $A \in \alpha$, de unde rezultă $[AB] \subset \alpha \cup \mathcal{O}$.
Dacă $A, B \in \alpha$ rezultă $AB \subset \alpha$ ceea ce implică faptul că şi $[AB] \subset \alpha$, deci $[AB] \subset \alpha \cup \mathcal{O}$.

2. Dacă punctul A nu este situat în planul α şi $B \in \alpha$, atunci $|BA \subset |\alpha A$.

Soluţie:



Fie $M \in |BA$ implică $B \notin [MA]$ de unde rezultă că $[MA] \cap \alpha = \phi$. Deci $M \in |\alpha A$ şi deci $|BA \subset |\alpha A$.

3. Să se arate că intersecţia unei drepte d cu un semispaţiu este fie dreapta d, fie o semidreaptă, fie mulţimea vidă.

Soluţie:

Fie α un plan şi σ_1, σ_2 cele două semispaţii pe care le determină. Considerăm semispaţiul σ_1. Avem următoarele cazuri:

I. $d \cap \alpha = \phi$ In cadrul acestui caz există următoarele situaţii

1) $d \cap \sigma_1 = \phi$

2) $d \cap \sigma_1 \neq \phi$

Fie $A \in d \cap \sigma_1$ implică $A \in \sigma_1$ şi $A \in d$

Fie $M \in d$ astfel încît $[AM] \subset d$ şi $d \cap \alpha = \phi$

rezută de aici că $[AM] \cap \alpha = \phi$ şi $A \in \sigma_1$

de unde rezultă în continuare că $M \in \sigma_1$, deci $d \subset \sigma_1$ şi

de aici avem că $d \cap \sigma_1 = d$.

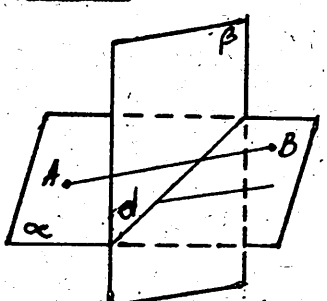
II. $d \cap \alpha \neq \phi$ implică $d \cap \alpha = \{P\}$ deci P determină pe d două semidrepte $|PA$ şi $|PB$ unde $P \in |AB|$ şi $P \in \alpha$ de unde rezultă $|AB| \cap \alpha \neq \phi$ deci A şi B sînt în semispaţii diferite.

Presupunem $A \in \sigma_1$, $P \in \alpha$ şi conform problemei(2) avem $|PA \subset |\alpha A$.

Rezultă atunci că $|PA \subset \sigma_1$ şi deci $\sigma_1 \cap d = |PA$.

4. Arătaţi că dacă un plan α şi frontiera unui semispaţiu σ sînt plane secante, atunci intersecţia $\sigma \cap \alpha$ este un semiplan.

Soluţie:



Fie σ un semispaţiu deschis, β frontiera sa şi fie $d = \alpha \cap \beta$. Alegem punctele A şi $B \in \alpha - d$ deoparte şi de alta a dreptei d. Rezultă că $[AB] \cap d \neq \phi$ şi $d \subset \beta$. Deci $[AB] \cap \beta \neq \phi$.

A,B sînt de o parte şi de alta a lui β, adică $A \in \sigma$ sau $B \in \sigma$

Presupunem că $A \in \sigma$ şi $B \notin \sigma$. Vom demonstra că $\alpha \cap \sigma \subseteq |dA$

Fie $M \in \alpha \cap d$ implică $M \in \alpha$, $M \in \sigma$ şi $A \in \sigma$, $B \in \sigma$

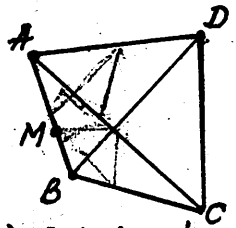
Deci $[MB] \cap \beta \neq \phi$ unde $M \in \alpha$, $B \in \alpha$.

Rezultă că $[MB] \cap d \neq \phi$ deci M şi B sînt de o parte şi de alta

a dreptei d de unde deducem că M este de aceiaşi parte a dreptei d cu A. Rezultă de aici că $M \in |dA$.
Avem $M \in |dA$ implică $[MA] \cap d = \phi$,
$\alpha \cap \beta = d$
$[MA] \subset \alpha$
şi implică mai departe că $[MA] \cap \beta = \phi$. Deci $M \in |\beta A$ şi atunci avem că $M \in \mathcal{C}$, $M \in \alpha$ de unde $M \in \alpha \cap \mathcal{C}$. Deci $dA \equiv \alpha \cap \mathcal{C}$. Rezultă $|dA = \alpha \cap \mathcal{C}$.

5. Intersecţia unui plan α cu un semispaţiu este fie planul α fie un semiplan, fie mulţimea vidă.
Soluţie:
Fie $\mathcal{C}$ semispaţiul considerat şi β frontiera sa. Sînt posibile mai multe cazuri:
1) $\alpha \cap \beta = \phi$ în acelaşi caz se poate ca:
a) $\alpha \cap \mathcal{C} = \phi$
b) $\alpha \cap \mathcal{C} \neq \phi$ implică existenţa lui $A \in \alpha \cap \mathcal{C}$,
deci $A \in \alpha$ şi $A \in \mathcal{C}$.
Fie $M \in \alpha$ implică $[MA] \subset \alpha$
$\alpha \cap \beta = \phi$, de aici rezultă $[MA] \cap \beta = \phi$,
deci $M \in \mathcal{C}$ şi deci $A \in \mathcal{C}$.
$\alpha \subseteq \mathcal{C}$. Rezultă $\alpha \cap \mathcal{C} = \alpha$.
2) $\alpha \cap \beta \neq \phi$ implică $\alpha \cap \beta = d$ deci $\alpha \cap \mathcal{C}$ este un semiplan conform problemei anterioare 4.

6. Fie A,B,C,D patru puncte necoplanare şi α un plan care nu trece prin nici unul din punctele date, dar trece printr-un punct al segmentului $|AB|$. Dintre segmentele $|AB|$, $|AC|$, $|AD|$, $|BC|$, $|BD|$, $|CD|$, cîte pot fi intersectate de planul α ?
Soluţie:

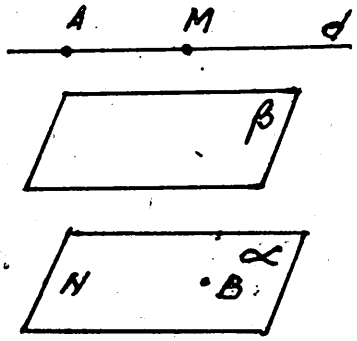


Intersecţia a două plane este o dreaptă iar dreapta taie doar două laturi ale unui triunghi $(ABC) \cap \alpha = d$. Dreapta există fiindcă planele au acelaşi punct M comun. Sînt posibile mai multe cazuri:
1) d taie $|\underline{AB}|$ şi $|\underline{BC}|$.
d' taie $|AB|$ şi $|\underline{AD}|$, α taie pe $|AD|$ are deci un punct comun cu (ADC) şi fie $(ADC) \cap \alpha = d''$. d'' taie $|AD|$ şi nu taie $|AC|$ deci d" taie $|\underline{DC}|$. α taie $|DC|$ şi $|BC|$ deci α nu taie $|BD|$.

In acest caz α taie 4 din cele 6 segmente (cele subliniate).
2) d taie $|\underline{AB}|$ şi $|AC|$, nu taie $|BD|$; d' taie $|AB|$ şi $|AD|$, nu taie $|BD|$; d" taie $|AD|$ şi $|AC|$ nu taie $|DC|$, deci nu intersectează planul $[BDC]$. In acest caz α intersectează numai 3 din cele 6 segmente.
3) d taie $|\underline{AB}|$ şi $|\underline{BC}|$, nu taie $|AC|$, d' taie $|AB|$ şi $|BD|$, nu taie $|DC|$; α intersectează $|BD|$ şi $|BC|$, deci nu taie $|DC|$.
In Δ BCD avem α nu intersectează planul triunghiului $[ADC]$..
In acest caz α intersectează numai trei segmente.
4) d taie $|\underline{AB}|$ şi $|AC|$, nu taie $|BC|$; d' taie $|AB|$ şi $|\underline{BD}|$ nu taie $|AD|$; d" taie $|AC|$ şi $|\underline{DC}|$.
In triunghiul BDC, α nu taie $|BC|$, Deci α intersectează 4 sau 3 segmente.

7. Fie d o dreaptă şi α, β două plane astfel $\hat{i}nc\hat{a}t\ d \cap \beta = \phi$ şi $\alpha \cap \beta = \phi$. Să se arate că dacă $A \in d$ şi $B \in \alpha$, atunci $d \subset |\beta A$ şi $\alpha \subset |\beta B$.

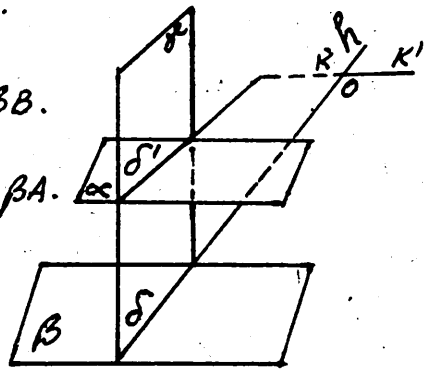
Soluţie:



$d \cap \beta = \phi$
Fie $M \in d$ şi $A \in d$ rezultă că $[AM] \subset d$ şi $d \cap \beta = \phi$ ceea ce implică $[AM] \cap \beta = \phi$. Deci $M \in |\beta A$ şi deci $d \subset |\beta A$.
Fie $N \in \alpha$ şi $B \in \alpha$ rezultă că $[NB] \subset \alpha$ şi $\alpha \cap \beta = \phi$ ceea ce implică $[NB] \cap \beta = \phi$ şi deci $N \in |\beta B$. Deci $\alpha \subset |\beta B$

8. Fie $|\alpha A$ şi $|\beta B$ două semispaţii astfel $\hat{i}nc\hat{a}t\ \alpha \neq \beta$ şi $|\alpha A \subseteq |\beta B$ sau $|\alpha A \cap |\beta B = \phi$. Să se arate că $\alpha \cap \beta = \phi$.

Soluţie:
1) Presupunem întîi că $\alpha \neq \beta$ şi $|\alpha A \subseteq |\beta B$.
Cum $A \in |\alpha A$ şi $|\alpha A \subset |\beta B$ rezultă $A \in |\beta B$ ceea ce implică $|\beta B = |\beta A$.
Atunci ipoteza se mai poate scrie $\alpha \neq \beta$ şi $|\alpha A \subset |\beta A$.
Să arătăm că $\alpha \cap \beta = \phi$. Prin reducere la absurd presupunem că $\alpha \cap \beta \neq \phi$, deci există $d = \alpha \cap \beta$ şi fie $O \in d$.
Deci $O \in \alpha$ şi $O \in \beta$. Ducem prin A şi O un plan γ astfel



încît $d \in \gamma$, deci cele trei plane α, β şi γ să nu treacă prin această dreaptă. Intrucît γ are punctul O comun şi cu α şi cu β, va intersecta aceste plane $\gamma \cap \alpha = d'$, $\gamma \cap \beta = \delta$ de unde rezultă că $d \cap \delta' = \{O\}$ care este punct comun celor trei plane. Dreptele d şi δ' determină patru unghiuri în planul γ avînd O ca vîrf comun. Punctul A aparţine interiorului unuia dintre ele, fie $A \in int.\hat{k}k$. Considerăm $C \in int.\hat{k}k'$. Atunci C este de aceiaşi parte cu A faţă de δ' deci C este de aceiaşi parte cu A faţă de α. Rezultă atunci că $C \in C\alpha A$. Dar C este de partea opusă lui A faţă de δ, deci C este de partea opusă lui A faţă de β, deci $C \notin |\beta A$. Deci $|\alpha \not\subset |\beta A$ fals - contrazice ipoteza, deci $\alpha \cap \beta = \phi$.

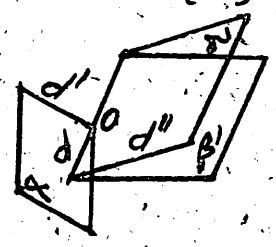
Pag.59

9. Să se arate că intersecţia unui unghi diedru cu un plan α poate fi: un unghi, reuniunea a două drepte, o dreaptă, mulţimea vidă sau un semiplan închis, şi nu poate fi nici o mulţime de alt tip.

Solutie:

Fie $\hat{\beta'\gamma'}$ unghi diedru şi β, γ planele suport ale feţelor lui. Fie $d = \beta \cap \gamma$. După poziţia unei drepte faţă de un plan se pot disdinge următoarele situaţii:

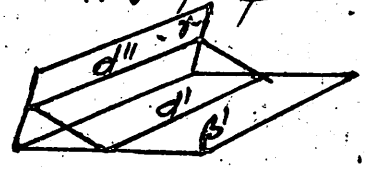
1) $d \cap \alpha = \{O\}$



$d \cap \alpha = \{O\}$ implică $O \in d$ şi $O \in \alpha$ ceea ce implică mai departe că $O \in \gamma'$ şi $O \in \beta'$ deci $\beta' \cap \alpha = d'$ şi $\gamma' \cap \alpha = d''$ unde d' şi d'' sînt semidrepte cu originea O, deci $\alpha \cap \hat{\beta'\gamma'} = \hat{d'd''}$, deci un unghi.

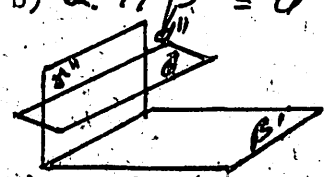
2) $d \cap \alpha = \phi$, deosebim următoarele situaţii:

a) $\alpha \cap \beta' \neq \phi$
$\alpha \cap \gamma' \neq \phi$



şi deci $\alpha \cap \beta' = d'$
şi deci $\alpha \cap \gamma' = d''$ de unde rezultă d' ∦ d''
Intr-adevăr, dacă am presupune că $d' \parallel d'' \neq \phi$ ar însemna că există $O \in d' \cap d''$ şi deci $O \in d'$ şi $O \in d''$ ceea ce implică $O \in \beta'$, $O \in \gamma'$, $O \in \alpha$, de unde rezultă că $O \in d$ deci $O \in d \cap \alpha$ fals - contrazice ipoteza.

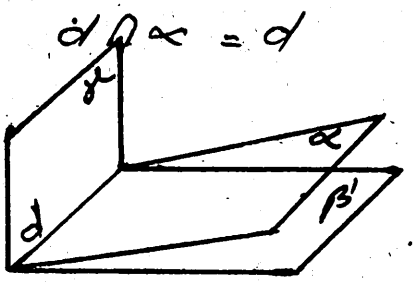
b) $\alpha \cap \beta' = d'$ şi $\alpha \cap \gamma' = \phi$ sau $\alpha \cap \beta' = \phi$ şi $\gamma' \cap \alpha = d''$



In acest caz $\alpha \cap \hat{\beta'\gamma'} = d''$ o dreaptă

c) $\alpha \cap \beta' = \phi$
$\alpha \cap \gamma' = \phi$

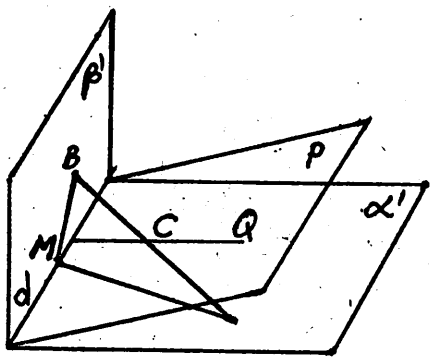
atunci $\alpha \cap \beta'\gamma' = \phi$.



$d \cap \alpha = d$ dar $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$
$\alpha \cap \beta' \gamma = d$ deci intersecţia este o dreaptă.

1o. Fie d muchia unui unghi diedru propriu: $\alpha' \beta'$, $A \in \alpha' - d$, $B \in \beta' - d$ şi $P \in int.\alpha'\beta'$. Să se arate că: 1) $(Pd) \cap int.\alpha'\beta' = |dP$ 2) Dacă $M \in d$ $int \widehat{AMB} = int \widehat{\alpha'\beta'} \cap (ABM)$.

Soluţie:



Deosebim următoarele cazuri:
1) $int.\widehat{\alpha'\beta'} = |\alpha B \cap |\beta B$.
$P \in int.\alpha'\beta'$ deci $P \in |\alpha B \cap |\beta A$
$\alpha \cap (Pd) = d$
şi conform problemei 4) avem $(Pd) \cap (\alpha\beta)$ este un semiplan, $P \in |\alpha B$.
Deci $(Pd) \cap |\alpha B = |dP$ (*)
$(Pd) \cap \beta = d$ deci $(Pd) \cap |\beta A$ este semiplan şi $P \in |\beta A$ de unde rezultă că $(Pd) \cap |\beta A = |dP$ (**). Din (*) şi (**) rezultă că $(PD) \cap |\alpha\beta \cap |\beta A = |dP$, deci $(Pd) \cap int.\widehat{\alpha'\beta'} = |dP$.

2) $(ABM) \cap \alpha = AM$ deci sînt plane secante şi conform problemei 4) avem $(AMB) \cap |\beta A = |MB, A$.
$(AMB) \cap int.\widehat{\alpha'\beta'} = (AMB) \cap |\alpha B \cap |\beta A =$
$= [(AMB) \cap |\alpha\beta] \cap [(AMB) \cap \beta A] = |MB, A \cap |MA, B =$
$= int.\widehat{AMB}$.

11. Se consideră notaţiile exerciţiului 10. Să se arate: 1) punctele A şi B sînt deo parte şi de alta a planului (Pd); 2) Segmentul (AB) şi semiplanul |dP au un punct comun.

Soluţie:
$M \in d$ implică $M \in (dP)$ şi $M \in (ABM)$ unde rezultă că $(AMB) \cap (dP) = d'$ şi $M \in d'$.
Cum $d' \subset (dP)$
şi $d' \cap d = M$ $\Rightarrow$ rezultă că $|dP \cap d' = |MQ$
unde $Q \in |dP$, din care în continuare că $|MQ \subset |dP \subset int\widehat{\alpha\beta}$

şi $|MQ \subset d' \subset (AMB)$ deci $|MQ \subset int.(\hat{\alpha'\beta'}) \cap (ABM)$.
De aici avem mai departe că $|MQ \subset int.\hat{AMB}$, deci

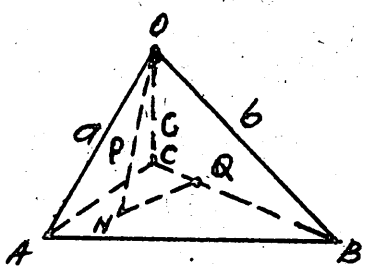
$$|MQ \cap |AB| = |MQ \subset |dP$$

$$\cap |AB| = \{R\} \text{ şi cum } |dP \subset (dP) \text{ avem } (dP) \cap |AB| = \{R\}$$

deci punctele A şi B sînt de o parte şi de alta a lui (d P)

12. Dacă $\hat{abc}$ este un unghi triedru, $P \in Int.abc$ şi A,B,C sînt puncte pe muchiile a,b,c diferite de 0, atunci semidreapta $|OP$ şi Int. $\hat{ABC}$ au un punct comun,

Soluţie:



Fie semiplanele $\alpha' = |OA, B$
$\beta' = |OA, C$ şi $\gamma' = |OA, P$
P fiind interior triedrului este interiorul diedrului format din oricare semiplane ce trec. prin punctul O al triedrului, deci $P \in Int \alpha'\beta'$ unde $B \in \alpha'$ şi $C \in \gamma'$. De aici, conform problemei 11 rezultă că $|BC| \cap \gamma' = \{Q\}$. Deci $P \in |OA, P$ şi $Q \in |OA, P = \gamma'$ implică faptul că P şi Q se află în acelaşi semiplan determinat de OA deci P şi Q sînt de aceiaşi parte a lui OA(1)
Cum $P \in Int.abc$ înseamnă că $P \in |OAC, A$ deci P şi A sînt de aceiaşi parte a lui $(OBC) \cap \gamma'$ deci P şi A sînt de aceiaşi parte a lui OQ(2)
Din (1) şi (2) rezultă că $P \in Int.\hat{AOQ}$ şi conform teoremei transversale $|AQ| \cap |OP = \{R\}$ ceea ce implică faptul că $R \in |AQ|$, $AQ \subset Int.ABC$ deci $R \in Int.ABC$ şi atunci rezultă că $|OP \cap Int.ABC = \{R\}$.

§ 4. Mulţimi convexe

Pag.59

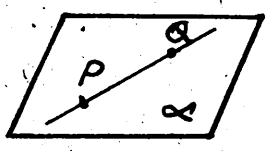
1. Să se arate că orice intersecţie de mulţimi convexe este o mulţime convexă.

Soluţie:

Fie M şi M' două mulţimi convexe. Luăm două puncte P şi Q, $P \neq Q$ astfel încît $P, Q \in M \cap M'$, unde $M \cap M'$ este intersecţia celor două mulţimi convexe. Deosebim cazurile:
1) $P \in M$ şi $Q \in M$ atunci, deoarece M convexă, rezultă $|PQ| \subset M$ (1)
2) $P \in M'$ şi $Q \in M'$ atunci, deoarece M' convexă rezultă $|PQ| \subset M'$ (2)
Din (1) şi (2) rezultă că $|PQ| \subset M \cap M'$, deci intersecţia celor două mulţimi este şi ea convexă.

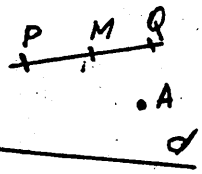
2. Să se arate că următoarele mulţimi sînt convexe: planele, semiplanele, orice semispaţiu deschis sau închis şi interiorul unui unghi diedru.

Soluţie:



a) Planele. Fie planul α şi două puncte P şi Q $P \neq Q$, astfel încît $PQ \in \alpha$. Ţinînd cont că dreapta este o mulţime convexă avem $|PQ| \subset PQ$, dar $PQ \subset \alpha$, deci $|PQ| \subset \alpha$, de unde rezultă că planul este o mulţime convexă.

b) Semiplanele. Fie semiplanul $S = |dA$ şi două puncte P şi Q, $P \neq Q$, astfel încît $P, Q \in S$ şi deci $|PQ| \cap d = \phi$. Luăm punctul $M \in |PQ|$, de unde rezultă că $|PM| \subset |PQ|$ şi ţinînd cont că relaţia de mai sus, $|PM| \cap d = \phi$



Deci P şi M sînt în acelaşi semiplan, ceea ce implică $M \in S$. De aici rezultă că $|PQ| \subset S$ şi deci S este o mulţime convexă.

Fie semiplanul $S' = [dA$. Deosebim trei cazuri:

1) $P, Q \in |dA$ caz tratat anterior.

2) $P \in d, Q \notin d$, ceea ce implică $|PQ| \subset |dQ$ de unde rezultă $|PQ| \subset |dA$. Dar $|dA \subset [dA$ de unde $|PQ| \subset [dA$ şi deci [d A este o mulţime convexă.

3) $P, Q \in d$, de unde rezultă că $|PQ| \subset d$. Dar $d \subset S'$ şi deci $|PQ| \subset S'$

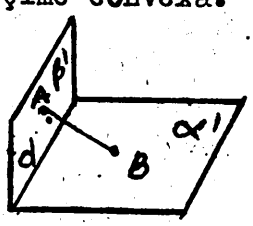
c) Semispaţiile: Fie semispaţiul $\sigma = |\alpha A$ şi două puncte P şi Q, $P \neq Q$ astfel încît $PQ \in \sigma$ de unde rezultă $|PQ| \cap \alpha = \phi$. Luăm un punct $M \in |PQ|$, deci $|PM| \subset |PQ|$, ceea ce implică $|PM| \cap \alpha = \phi$ de unde rezultă că M se află în acelaşi semiplan cu P şi deci $M \in \sigma$. Atunci vom avea $|PQ| \subset \sigma$, deci σ este o mulţime convexă. Fie semispaţiul $\sigma' = [\alpha A$.

Deosebim trei cazuri:

1) $P, Q \in |\alpha A$, caz tratat anterior

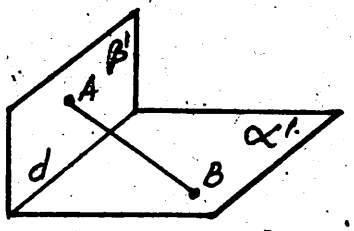
2) $P \in \alpha, Q \notin \alpha$, ceea ce implică $PQ \in \sigma'$ şi deci $[PQ] \subset \sigma'$, conform problemei 1, pag.58 de aici rezultă că $|PQ| \subset \sigma'$, deci σ' este mulţime convexă.

d)



Interiorul unui unghi diedru. $Int \hat{\alpha'\beta'} = |\alpha A \cap |\beta B$ şi deoarece oricare semispaţiu este mulţime convexă, conform problemei 1 pag.59..

3. Poate fi un unghi diedru o mulţime convexă ?



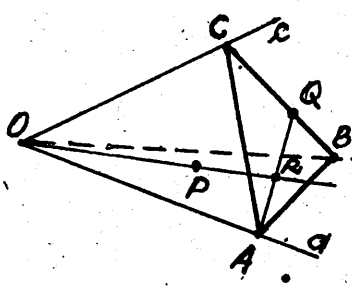
Soluţie:

In general, nu poate fi mulţime convexă, deoarece dacă luăm ca în desenul problemei 2 pag. 59 - punctul $A \in \beta'$ şi $B \in \alpha'$, conform aceleiaţi probleme, avem că oricare ar fi punctul $P \in int\, \alpha'\hat{}\beta'$, $|dP \cap |AB| \neq \phi$, de unde rezultă că există un punct $M \in |AB|$ astfel încît $M \in int\, \alpha'\hat{}\beta'$, $M \in \alpha'$, $M \in \beta'$, ceea ce implică $|AB| \not\subset \alpha'\hat{}\beta'$.

Dar în cazul unghiului nul, cînd unghiul diedru se transformă în semiplan închis sau cînd unghiul este plat, cînd se transformă în plan, unghiul diedru este mulţime convexă, cf. problemei 2/59.

4. Care dintre următoarele mulţimi sînt convexe: a) un unghi triedru b) interiorul său c) reuniunea feţelor sale d) reuniunea interiorului cu toate feţele ?

Soluţie:



a) Nu, unghiul triedru nu este o mulţime convexă deoarece conform problemei 12 pag. 59 dacă luăm $A \in a$ şi $Q \in int\, \hat{bc}$, determinat astfel: $P \in int.\, \hat{abc}$, există un punct R astfel încît $|OP \cap int.\, \Delta ABO = \{R\}, Q \in BC, R \in |AQ|$ şi deci $R \notin \hat{abc}$, vom avea $A, Q \in \hat{abc}$ însă $|AQ| \not\subset \hat{abc}$.

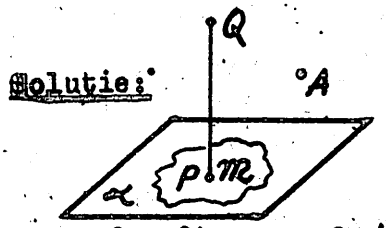
b) Luăm planele $\alpha = (OBC)$, $\beta = (OAC)$ şi $\gamma = (OBC)$. Atunci semispaţiile $|\alpha A$, $|\beta B$ şi $|\gamma$ sînt mulţimi convexe şi deci şi $int.\, \hat{abc}$, ca intersecţie de mulţimi convexe, va fi o mulţime convexă.

c) Această mulţime este identică cu cea de la punctul a), prin urmare nu este convexă.

d) Reuniunea interiorului cu toate feţele este de fapt $[\alpha A \cap [\beta B \cap [\gamma C$, deci o intersecţie de mulţimi convexe, ceea ce implică faptul că şi ea este mulţime convexă.

5. Fie σ un semispaţiu deschis limitat de planul α şi m o mulţime convexă inclusă în planul α. Să se arate că mulţimea $m \cup \sigma$ este convexă.

Soluţie:



Fie semispaţiul $\mathcal{S} = |\alpha A$ şi $m \subset \alpha$. Luăm două puncte P şi Q, $P \neq Q$, astfel încît $P, Q \in m \cup \mathcal{S}$. Deosebim cazurile:

1) $P, Q \in \mathcal{S}$, de unde $|PQ| \subset \mathcal{S}$. Dar $\mathcal{S} \subset \mathcal{S} \cup m$, de unde rezultă $|PQ| \subset \mathcal{S} \cup m$.

2) $P \in m$, $Q \in \mathcal{S}$ de unde, conform problemei 1 pag.59, $|PQ| \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{S} \cup m$. Deci $|PQ| \subset \mathcal{S} \cup m$.

3) $P, Q \in m$, deci $|PQ| \subset m$. Dar $m \subset \mathcal{S} \cup m$ şi deci $|PQ| \subset \mathcal{S} \cup m$. Din toate cele trei cazuri rezultă că $\mathcal{S} \cap m$ este convexă.

Pag.60

6. Să se arate că intersecţia $S(O,r)$ cu un plan ce trece prin O, este un cerc.

Soluţie:

Avem $S(O,r) = \{M \in S / \|OM\| = r\}$. Deci putem scrie că

$S(O,r) = \{M \in S / M \in S(O,r)$ şi $M \in \alpha$ şi $\|OM\| = r\} =$

$= \{M \in \alpha / \|OM\| = r\} = C(O,r)$

7. Demonstraţi că $Int.S(O,r)$ este o mulţime convexă.

Soluţie:

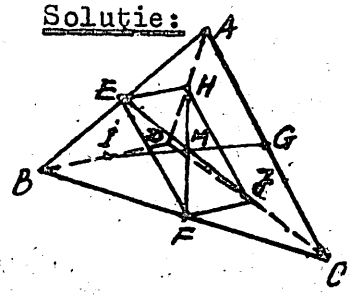


Fie sfera $S(O,r)$ şi două puncte P,Q, $P \neq Q$ astfel încît $P, Q \in Int.S(O,r)$. Deci $\|OP\| < r$, $\|OQ\| < r$. In planul (OPQ) luăm un punct $M \in |PQ|$. Aplicînd una din problemele 3 şi 5 pag.42, manual cls.a-IX-a, obţinem: $\|OM\| < \|OP\| < r$ sau $\|OM\| < \|OQ\| < r$. In ambele cazuri rezultă că $\|OM\| < r$. Deci $M \in S(O,r)$, oricare ar fi punctul $M \in |PQ|$ ceea ce implică $|PQ| \subset S(O,r)$ de unde rezultă că $Int.S(O,r)$ este o mulţime convexă.

Pag.61

8. Să se arate că unind mijloacele muchiilor opuse ale unui tetraedru se obţin drepte concurente.

Soluţie:



Fie tetraedrul [ABCD] şi fie punctele : E mijlocul lui |AB|, F mijlocul lui |BC|, G mijlocul lui |AC|, H mijlocul lui |AD|, I mijlocul lui |BM| şi J mijlocul lui |CD|. In triunghiul ABC avem |EF| linie mijlocie şi deci $\|EF\| = \frac{\|AC\|}{2}$, $EF \| AC$ (1)

In triunghiul DAC avem |HJ| linie mijlocie şi deci :

$$\|HJ\| = \frac{\|AC\|}{2}, \quad HJ \| AC \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că $\|EF\| = \|HJ\|$ şi $EF \| HJ$ de unde EFJH paralelogram, deci EJ şi FH se intersectează în mijlocul lor M.

In triunghiul ABD avem |IH| linie mijlocie şi deci:

$$\|IH\| = \frac{\|AB\|}{2}, \quad IH \| AB \qquad (3)$$

In triunghiul ABC avem |GF| linie mijlocie şi deci:

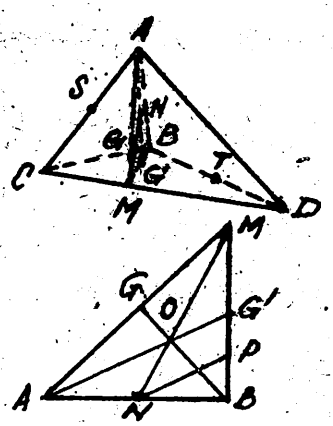
$$\|GF\| = \frac{\|AB\|}{2}, \quad GF \| AB \qquad (4)$$

Din relaţiile trei şi patru rezultă că : $\|IH\| = \|GF\|$ şi $IH \| GF$ de unde IHGF paralelogram, deci |IG| trece prin mijlocul M al lui HF.

Prin urmare cele trei drepte IG, HF, EJ sînt concurente în M.

9. Să se arate că dreptele care unesc vîrfurile unui tetraedru cu centrele de greutate ale feţelor opuse sînt concurente în acelaşi punct ca şi cele trei drepte de la exerciţiul 8.

Solutie:



Fie tetraedrul ABCD şi M mijlocul muchiei |CD|. Centrul de greutate G al feţei ACD se află pe |AM| la o treime de |CD|, iar centrul de greutate G' al feţei BCD se află pe |BM|, la o treime de |CD|. In triunghiul AEB, fie mijlocul lui |AB|, deci MN este mediană în acest triunghi, iar în problema 8 a fost unul dintre cele trei segmente concurente. Fie O mijlocul lui MN. Notăm :

$$AO \cap MB = \{G'\} \text{ şi } BO \cap MA = \{G\}$$

Vom afla raportul dintre $\|MG'\|$ şi $\|MB\|$. Pentru aceasta ducem $NP \| AG'$. In triunghiul ABG' avem $|AN| \equiv |NB|$ şi deci |NP| linie mijlocie, de unde $|BP| \equiv |PG'|$ (1).

In triunghiul MNP avem $OG' \| NP$ şi $|MO| \equiv |ON|$ şi deci |OG'| este linie mijlocie, de unde $|MG'| \equiv |G'P|$ (2)

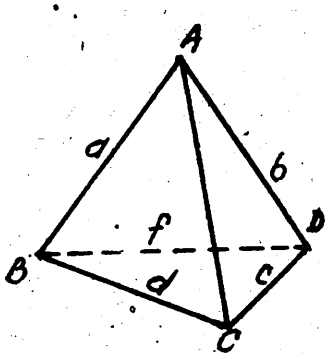
Din (1) şi (2) rezultă că $|MG'| \equiv |G'P| \equiv |BP|$, deci $\frac{\|MG'\|}{\|MB\|} = \frac{1}{3}$ şi G' este tocmai centrul de greutate al feţei BCD, întru-cît este situat pe mediana |MB|, la o treime de M. Analog se arată şi că G este centrul de greutate al feţei ACD. Deci s-a arătat că BG şi AG' trec prin punctul O al problemei precedente.

Luînd feţele ACD şi ACB şi notînd cu G'' centrul de greutate al

feţei ACB, se arată la fel că BC şi DG" trec prin mijlocul segmentului $|ST|$ unde $|AS| \equiv |SC|$ şi $|BT| \equiv |TD|$, deci prin punctul O.

10. Fie ABCD un tetraedru. Se consideră unghiurile triedre care au ca muchie AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC. Să se arate că intersecţia interioarelor acestor patru unghiuri triedre coincide cu interiorul tetraedrului ABCD.

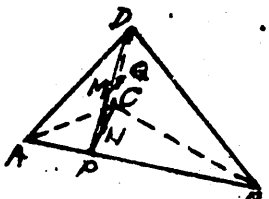
Soluţie:



Notăm planele $(ABC) = \alpha$, $(ADC) = \beta$, $(ABD) = \gamma$, $(BDC) = \delta$
Fie M intersecţia interioarelor celor patru unghiuri triedre. Arătăm că:
1) $M \in Int\,[ABCD]$, luăm un punct $P \in M$, deci $P \in Int\,\hat{abc} \cap Int.\,\hat{afd} \cap Int.\,\hat{dec} \cap Int.\,\hat{bfc}$, de unde $P \in |\alpha D \cap \gamma C| \cap |\beta B$ şi $P \in |\delta A \cap |\gamma C \cap |\beta B$, deci $P \in |\alpha D$, $P \in \beta B$, $P \in |\gamma C$ şi $P \in |OA$, ceea ce implică $P \in |\alpha D \cap \beta B \cap \gamma C \cap |\delta A$ deci $P \in Int.\,[ABCD]$ şi $M' \subset Int.\,[ABCD]$
2) Urmărind raţionamentul invers, rezultă că $Int.\,[ABCD] \subset M$ şi deci $M' = Int.\,[ABCD]$

11. Să se arate că oricare ar fi punctul M in interiorul tetraedrului [ABCD], există $P \in (AB)$ şi $Q \in (CD)$ astfel încît $M \in (PQ)$.

Soluţie:



Dacă $M \in Int.\,[ABCD]$, atunci, conform definiţiei, există un punct N, $N \in Int.\,ABC$ astfel încît $M \in |DN|$, $N \in Int.\,ABC$ şi conform temei de la pag.60 există un punct: $P \in (AB)$, astfel încît $N \in |CP|$ $(ADB) \cap (DCP) = DP$
Din $N \in |CP|$ şi $M \in |DN|$ rezultă, conform aceleiaşi teme (pag.60) că $M \in Int\,DPC$ şi conform aceleiaşi teme, există un punct $Q \in |DC|$ astfel încît $M \in |PQ|$. Deci există un punct $P \in |PQ|$ şi un altul $Q \in |DC|$ astfel încît $M \in |PQ|$.

12. **Interiorul tetraedrului [ABCD] coincide cu reuniunea segmentelor (PQ) cu $P \in (AB)$ şi $Q \in (CD)$, iar tetraiedrul [ABCD] este egal cu reuniunea segmentelor închise [PQ] cînd $P \in [AB]$ şi $Q \in [CD]$**

Soluţie:

Fie $\mathcal{M}$ reuniunea segmentelor deschise $|PQ|$. Trebuie să arătăm că $Int.[ABCD] = \mathcal{M}$ prin dublă incluziune:

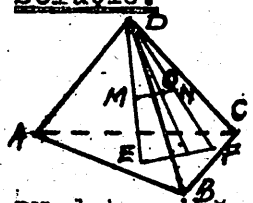
1) Fie $M \in Int.[ABCD]$ de unde, conform problemei 11, avem că există un punct $P \in |AB|$ şi un altul $Q \in |CD|$ astfel încît $M \in |PQ|$ şi deci $M \in \mathcal{M}$, ceea ce implică $Int.[ABCD] \subset \mathcal{M}$.

2) Fie $M \in \mathcal{M}$, de unde rezultă că există un punct $P \in |AB|$ şi altul $Q \in |CD|$ astfel încît $M \in |PQ|$. Punctele D,C şi P determină planul(PDC) şi $(PDC) \cap (ACB) = PC$, iar $(PDC) \cap (ADB) = PD$ întrucît există $Q \in |CD|$ astfel încît $M \in |PQ|$ şi conform teme i de la pag.60 $M \in [PDC]$, iar conform aceleiaşi teme există un punct $N \in |PC|$ astfel încît $M \in |DN|$. Dacă $N \in |PC|$ şi $P \in |AB|$, avem conform teme i că $N \in Int[ACB]$ astfel încît $M \in |DN|$, de unde rezultă că $M \in Int[ABCD]$ şi $\mathcal{M} \subset Int[ABCD]$.

Lucrînd cu segmente închise se obţine că există $N \in [ACB]$ astfel încît $M \in [DR]$ obţinîndu-se tetraedrul [ABCD].

13. **Demonstraţi că un tetraedru este o mulţime convexă.**

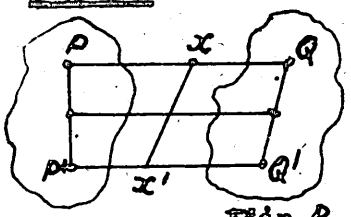
Soluţie:



Fie tetraedrul [ABCD] şi punctul $M \in [ABCD]$, deci există un punct $E \in [ABC]$ astfel încît $M \in [DE]$. Fie $N \in [ABCD]$ deci există un alt punct $F \in [ABC]$, astfel încît $N \in [DF]$. Dreptele concurente DM şi DN determină planul DMN. Suprafaţa triunghiului DEF este o mulţime convexă şi deci, deoarece $M \in [DEF]$ şi $N \in [DEF]$, $|MN| \subset [DEF]$. Fie $O \in |MN|$ şi deci $O \in [DEF]$. Vom avea că există un punct $H \in [DE]$ astfel încît $O \in [DH]$. Dar $[EF] \subset [ABC]$ deoarece $E \in [ABC]$ şi $F \in [ABC]$ iar suprafaţa triunghiului este convexă. Deci există $H \in [ABC]$ astfel încît $O \in [DH]$ de unde rezultă că $O \in [ABCD]$, oricare ar fi $O \in |MN|$, deci $|MN| \subset [ABCD]$ şi tetraedrul este o mulţime convexă.

14. Fie $\mathcal{M}_1$ şi $\mathcal{M}_2$ mulţimi convexe. Să se arate că reunind segmentele [PQ], pentru care $P \in \mathcal{M}_1$ şi $Q \in \mathcal{M}_2$ se obţine o mulţime convexă.

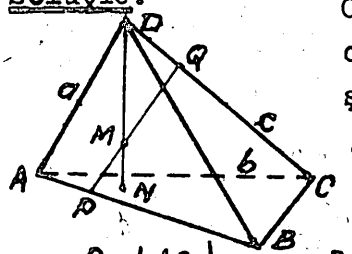
Soluţie:



Fie $\mathcal{M}$ reuniunea segmentelor PQ cu $P \in \mathcal{M}_1$ şi $Q \in \mathcal{M}_2$. Fie $x, x' \in \mathcal{M}$, deci există un punct P aparţinînd lui $\mathcal{M}$ şi Q aparţinînd lui $\mathcal{M}_2$ astfel încît $x \in [PQ]$ şi mai există un alt punct $P' \in \mathcal{M}_1$ şi $Q \in \mathcal{M}_2$ astfel încît $x' \in [P'Q']$. Din $P, P' \in \mathcal{M}_1$ rezultă că $[PP'] \in \mathcal{M}_1$, care este mulţimea convexă, iar din $Q, Q' \in \mathcal{M}_2$, rezultă că $[QQ'] \in \mathcal{M}_2$ care este tot mulţime convexă. Reuniunea tuturor segmentelor $[MN]$ cu $M \in [PP']$ şi $N \in [QQ']$ este tetraedrul $[PP'QQ'] \subset \mathcal{M}$, întrucît $M \in \mathcal{M}_1$ şi $N \in \mathcal{M}_2$. Conform problemei 13 tetraedrul $[PP'QQ']$ este o mulţime convexă, deci din $x, x' \in [PP'Q'Q]$ rezultă că $|xx'| \subset [PP'Q'Q] \subset \mathcal{M}$. Deci din $x, x' \in \mathcal{M}$ rezultă că $|xx'| \subset \mathcal{M}$, deci mulţimea $\mathcal{M}$ este convexă.

15. Să se arate că interiorul unui tetraedru coincide cu intersecţia semispaţiilor deschise determinate de planele feţelor şi vîrful opus respectiv. Caracterizaţi tetraedrul cu o intersecţie de semispaţii.

Soluţie:



Conform problemei 12, interiorul tetraedrului coincide cu reuniunea segmentelor $|PQ|$, $P \in |AB|$ şi $Q \in |CD|$. Să arătăm că:

$Int.[ABCD] = |(ABC), D \cap |(ABD), C \cap |(ADC), B \cap |(DBC), A$.

1) Fie $M \in Int.[ABCD]$ de unde rezultă că există $P \in |AB|$ şi $Q \in |DC|$ astfel încît $M \in |PQ|$.

Din $P \in |AB|$ avem $B \notin |AP|$ şi deci $|AP| \cap (BDC) = \phi$ unde rezultă că $P \in |(BDC)$ şi din $Q \in (BDC)$ conform problemei 1 pag.58 rezultă că $|PQ| \subset |(BDC), A$.

Avem $M \in |PQ|$ implică $M \in |(BDC), A$ (*). Din $P \in |AB|$ rezultă $A \notin |PB|$ adică $|PB| \cap (ADC) = \phi$. Deci $P \in |(ADC), B$ şi $Q \in (ADC)$ implică $|PQ| \subset |(ADC), B$. Rezultă $M \in |(ADC), B$ (**)

Analog $M \in |(ABD), C$ (***) şi

$M \in |(ABC), D$ (****)

Din relaţiile (*), (**), (***), (****) rezultă $M \in |(BDC), A \cap |(ADC), B \cap |(ABD), C \cap |(ABC), D = P$ deci $Int\,[ABCD] \subseteq P$

Reciproc. Fie $M \in P$

Deci $M \in Int.\,\hat{abc}$ şi cf. problemei 12/52 $|DM| \cap Int\,ABC = \{N\}$. Dacă presupunem $N \in |DM|$ rezultă $|DM| \cap (ABC) \neq \phi$ adică M şi D sînt în semispaţii diferite faţă de (ABC) ceea ce este echivalent

cu $M \in |ABC), D$ absurd.
Deci $M \in |DN|$ şi $(\exists)\ N \in Int(ABC)$ astfel încît $M \in Int\,[ABCD]$ şi am demonstrat $P \subseteq Int.\,[ABCD]$ în cazul tetraedrului [ABCD] raţionăm analog.

§ 5. Paralelism în spaţiu

Pag.63

1. Fie d,d' două drepte paralele. Dacă dreapta d este paralelă cu un plan α să se arate că $d' \parallel \alpha$ sau $d' \subset \alpha$

Soluţie:

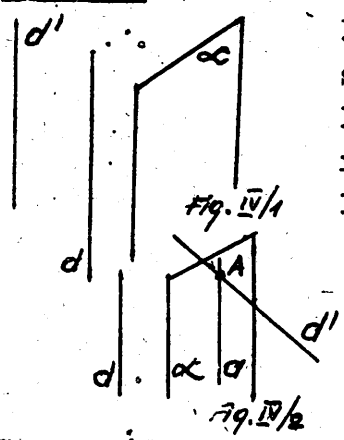


Fig. IV/1

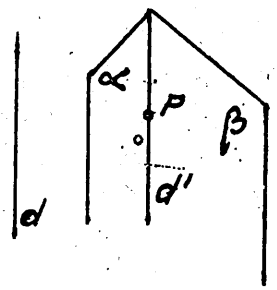
Fig. IV/2

Presupun $d' \cap \alpha = A$ (fig.2) deci $A \in \alpha$, stim că prin A se poate duce o singură paralelă la d. Fie $a \parallel d, a \in \alpha$ dar şi $d' \parallel d$ rezultă $d' \equiv a$ adică $d' \subset \alpha$
In caz contrar:

$$d' \cap \alpha = \phi \Rightarrow d' \parallel \alpha \quad (Fig.1)$$

2. Se consideră o dreaptă d, paralelă cu planele α şi β care se intersectează după dreapta d'. Arătaţi că $d' \parallel d$.

Soluţie:



Avem $d \parallel \alpha$, $d \parallel \beta$ şi $\alpha \cap \beta = d'$
Fie $P \in d'$; prin P duc $a \parallel d$ din $P \in d \Rightarrow P \in \alpha$ şi $P \in \beta$ deci $a \subset \alpha$ şi $a \subset \beta$ adică $a \subset \alpha \cap \beta$, adică $a \equiv d'$ deoarece printr-un punct P nu se poate duce la d decît o paralelă (Postulatul lui Euclid)

3. Printr-o dreaptă dată d duceţi un plan paralel cu o altă dreaptă d'. Discutaţi numărul soluţiilor.

Soluţie:

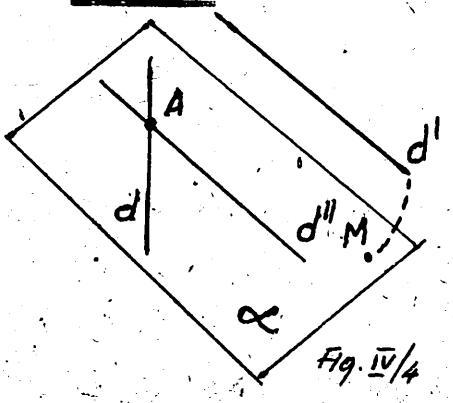
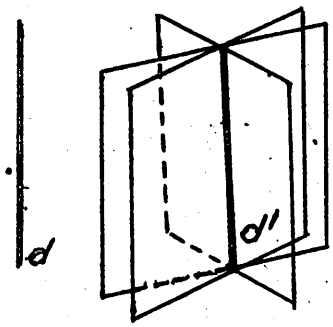


Fig. IV/4

Consider $A \in d$, prin A ducem $d'' \parallel d'$, dreptele d şi d'' sînt concurente; notez $\alpha = (d, d'')$ fig.IV/4 α este soluţia problemei.
Presupun că $d' \not\parallel \alpha$ rezultă $d' \cap \alpha = M$
Prin M se poate duce în α o singură paralelă la $d'' \subset \alpha$, deci $d' \subset \alpha$ contradicţie.



Discuţie:

2. Dacă $d \parallel d'$ (fig.) avem o infinitate de plane în afară (d,d')
3. Dacă $d \nparallel d'$ şi d şi d' coplanare problema nu are soluţie.

4. Să se determine reuniunea dreptelor care intersectează o dreaptă dată d şi sînt paralele cu o altă dreaptă dată d' (d nu este paralelă cu d').

Soluţie:

Fie A,B,C distincte pe dreapta d.
Fie a,b,c drepte ce trec respectiv prin A,B,C paralelă cu d'.

$a \parallel d', b \parallel d' \Rightarrow a \parallel b$ (teorema 1)

$b \parallel d', c \parallel d' \Rightarrow b \parallel c$ (teorema 1)

Deci $a \parallel b \parallel c$.

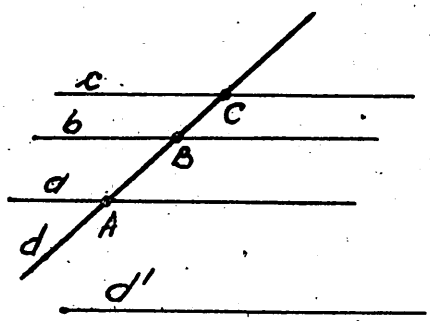


Fig. IV/5.

Notez $(a, b) = \alpha$ şi $(b, c) = \beta$

Planele α şi β nu pot fi diferite deoarece $\alpha \cap \beta = a \cup b$, unde d şi b sînt drepte concurente; deci $\alpha = \beta$, deci $a \cup b \cup c = \alpha = \beta$

Reuniunea tuturor paralelelor la d' prin d este un plan. (Fig. IV/6.)

Obs. Dacă d şi d' sînt coplanare, mulţimea paralelelor este un plan în afară de dreapta d'

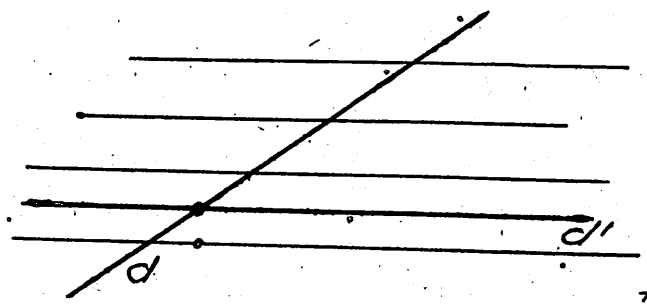


Fig. IV/6

5. Să se construiască o dreapta care întîlneşte două drepte date şi este paralelă cu o a treia dreaptă dată.

Discuţie:

Soluţie:

Notez cele trei drepte d, d' şi δ.

Duc prin d un plan $\alpha \parallel \delta$, d' intersectează planul α în punctul M (dacă nu este paralelă cu α). Paralela dusă prin M la δ constituie soluţia problemei. Discuţie.

1) Dacă $d' \nparallel \alpha$ soluţia e unică
2) Dacă $d' \parallel \alpha$ nu avem soluţie
3) Dacă $d' \subset \alpha$ avem o infinitate de soluţii.

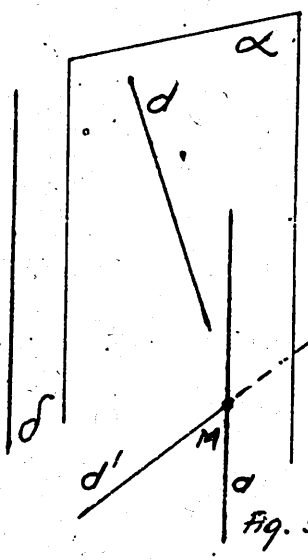


Fig. 5a

Altă soluţie:

Duc prin d planul $\alpha \parallel \delta$ şi prin d' planul $\beta \parallel \delta$

1) Dacă $\alpha \nparallel \beta$ nu avem soluţie
2) Dacă $\alpha \nparallel \beta$ distincte, atunci $a = \alpha \cap \beta$ constituie soluţia.
3) Dacă $\alpha \equiv \beta$ atunci avem o infinitate de soluţii. Fig. 5a

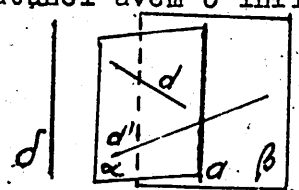
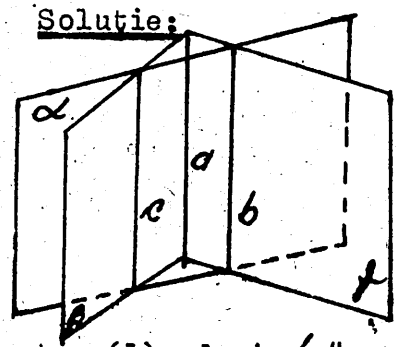


Fig. 5b

6. Daca un plan α intersectează planele secante β şi γ după două drepte paralele, atunci α este paralel cu dreapta $\alpha \cap \beta$.

Soluţie:



Notez $a = \beta \cap \gamma$, $b = \alpha \cap \gamma$ şi $c = \alpha \cap \beta$; avem $b \parallel c$ din propietarea 1, rezultă

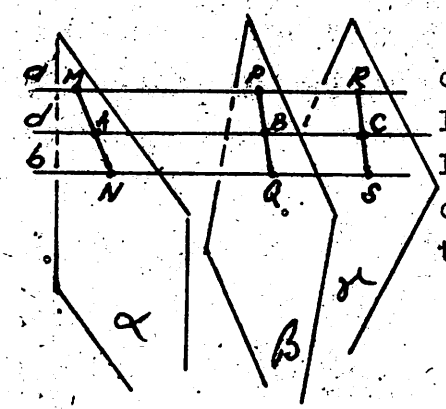
$c \parallel b \subset \gamma \Rightarrow c \parallel \gamma$ (1)

şi $b \parallel c \subset \beta \Rightarrow b \parallel \beta$ (2)

Presupun ca $a \cap b = P$, $P \in a \Rightarrow P \in \beta$ şi $P \in \gamma$ dar din $P \in \gamma$ şi $P \in c$ rezultă că C are punct comun cu planul γ contradicţie cu relaţia (1), deci $b \parallel a$. Analog putem demonstra $c \parallel a$.

7. Un plan variabil taie două drepte paralele în punctele M şi N. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului [MN].

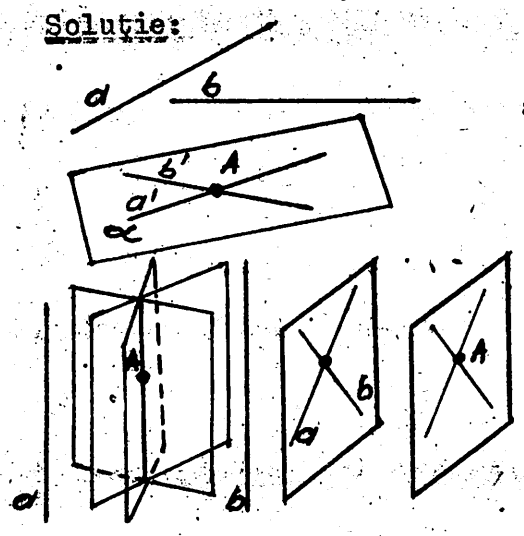
Soluţie: Fie α, β, γ trei poziţii diferite ale planului variabil. Notom M, N; P, Q şi R, S punctul de intersecţie al acestor plane cu dreptele paralele a şi b. Cele şase puncte sînt



coplanare(a,b).FieAmijlocul lui[MN] şi B mijlocul lui[PQ].In trapezul MNQP,AB linie mijlocie.Analog în trapezul MNSR,deci A,B,C sînt coliniare.Deci locul geometric este o dreaptă echidistantă de a şi b coplanare cu a şi b.

8. Se dau două drepte.Duceţi printr-un punct dat un plan paralel cu ambele drepte.Discuţie.

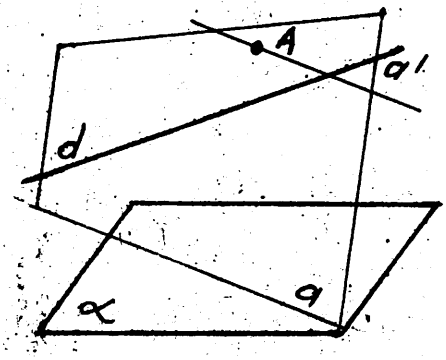
Soluţie:



Fie dreptele a şi b şi punctulA
Prin A ducem $a' \parallel a$ şi $b' \parallel b$,dreptele a' şi b' sînt concurente şi determină planul α .Discuţie:
1)dacă a,b drepte strîmbe soluţia e unică .
2)dacă $a \parallel b$ problema are o infinitate de soluţii,întreg spaţiu în afara planelor (a,A) şi (b,A)
3)dacă a şi b sînt coplanare avem un singur plan paralel cu (a,b).

9. Să se construiască o dreaptă care trece printr-un punct dat,este paralelă cu un plan dat şi intersectează o dreaptă dată.Discuţie.

Soluţie:



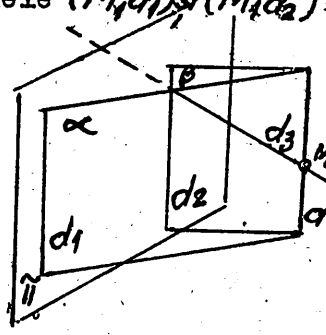
Fie A punctul,d dreapta şi α planul $A \notin d$, $A \notin \alpha$, $d \notin \alpha$. A şi d determină planul(A,d).Notez $(A,d) \cap \alpha = a$, a şi d sînt coplanare;paralela prin A la a' notată a' în planul (Ad) este soluţia problemei.Discuţie:
1) $d \nparallel \alpha$ soluţie unică
2) $d \parallel \alpha$ şi planul $(A,d) \parallel \alpha$ avem o infinitate de soluţii-toate dreptele din (A,d) concurente cu d
3) $d \parallel \alpha$ şi $(A,d) \nparallel \alpha$ nu are soluţie .

10. Se dau dreptele d_1, d_2, d_3,astfel ca $d_1 \parallel d_2 \nparallel d_3$ şi $d_3 \notin (d_1 d_2)$ Se ia pe d_3 un punct variabil M.Să se arate că dreapta de intersecţie a planelor $(d_1 M)$ şi $(d_2 M)$ descrie un

un plan, cînd M variază pe d_3.

Soluție: $d_1 \parallel d_2 \Rightarrow (d_1, d_2) = \tilde{\pi}$, $M \in d_3$

Planele (M, d_1) și (M, d_2) se intersectează după o dreaptă a. Avem



$a \parallel d_1$ și $a \parallel d_2$ de unde rezultă $a \parallel (d_1 d_2)$. Cînd M variază pe d_3 dreapta a va aluneca pe d_3 rămînînd tot timpul paralelă cu $\tilde{\pi}$. Deci $\{a / a = (Md_1) \cap (Md_2)\}$ este un plan care conține pe d_3.

11. Să se arate că dacă triunghiurile ABC și A'B'C', situate în plane diferite, au $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$ și $BC \parallel B'C'$, atunci dreptele AA', BB', CC' sînt concurente sau paralele.

Soluție:

Din $AB \parallel A'B'$ și $AC \parallel A'C' \Rightarrow (ABC) \parallel (A'B'C')$

notez $\alpha = (AA', BB')$, $\beta = (BB', CC')$ și $\gamma = (CC', AA')$

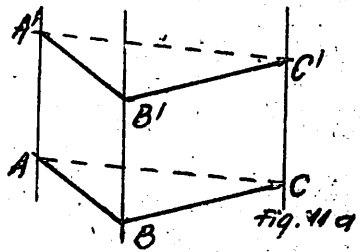


Fig. 11 a

deci $\alpha \cap \gamma = AA'$, $\alpha \cap \beta = BB'$, $\beta \cap \gamma = CC'$

Avem două situații: 1) $\alpha \cap \beta \parallel \alpha \cap \gamma$ adică $AA' \parallel BB'$;

știm că dacă α intersectează pe β și γ după două drepte paralele atunci $\alpha \parallel \beta \cap \gamma = CC'$, deci am obținut $AA' \parallel BB' \parallel CC'$ - Fig. 11 a

2) $\alpha \cap \beta \nparallel \alpha \cap \gamma$ adică $AA' \nparallel BB'$ ele sînt totuși coplanare deoarece $AB \parallel A'B'$, rezultă că $AA' \cap BB' = M$. Din $M \in AA'$ deduc $M \in \alpha$ și $M \in \gamma$ (1)

Din $M \in BB'$ deduc $M \in \alpha$ și $M \in \beta$ (2)

și deci din (1) și (2) avem $M \in \beta \cap \gamma = CC'$

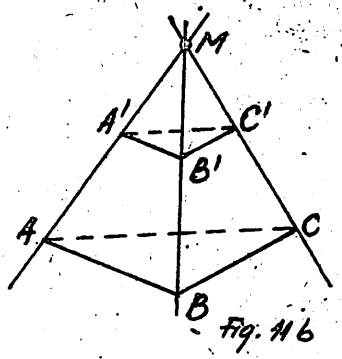


Fig. 11 b

deci AA', BB', CC', sînt concurente - Fig. 11 b

12. Să se arate că dacă două plane sînt paralele, orice dreaptă conținută în unul din ele este paralelă cu celălalt plan.

Soluție:

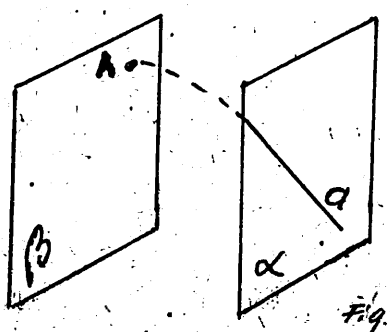


Fig. 1

Notez α, β planele $\alpha \parallel \beta$. Fie $a \subset \alpha$ o dreaptă. Presupun că $a \nparallel \beta$, deci 1) $a \subset \beta$ sau 2) $a \cap \beta = A$

1) Dacă $a \subset \beta$ ar rezulta: $a \subset \alpha$, $a \subset \beta \Rightarrow$ $\Rightarrow a = \alpha \cap \beta$ dar $\alpha \parallel \beta$ din ipoteză (contradicție).

2) Dacă $a \cap \beta = A$, avem $A \in a \subset \alpha \Rightarrow A \in \alpha$ și $A \in \beta$, deci planele α și β au un punct A comun, contradicție, deci $a \parallel \beta$

13. Dacă un plan intersectează două plane paralele, intersecţiile sînt drepte paralele. (Fig.2)

Soluţie:

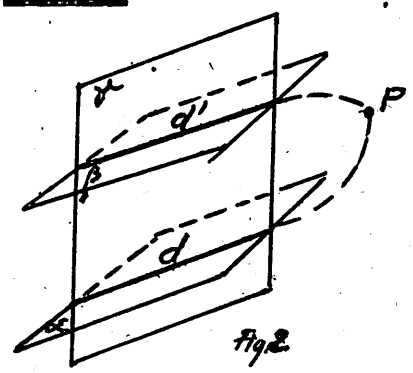


Fig.2

$\alpha \parallel \beta$, $\gamma \cap \alpha = d$, $\gamma \cap \beta = d'$

Presupun: $d \cap d' = \{P\}$

dar $P \in d = \alpha \cap \gamma \Rightarrow P \in \alpha$

$P \in d' = \beta \cap \gamma \Rightarrow P \in \beta$ $\Rightarrow P \in \alpha \cap \beta = \phi$

deci P nu există.

Pag.65

14. Arătaţi că o dreaptă, care taie unul din 2 plane paralele într-un singur punct, taie şi pe celălalt. (Fig.3)

Soluţie:

$\alpha \parallel \beta$, $d \cap \alpha = \{A\}$

Presupun d nu taie pe β, atunci $d \parallel \beta$ (sau conţinută în β) dar din $d \parallel \beta$, $\alpha \parallel \beta$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow d \parallel \alpha$ (sau $d \subset \alpha$)

ceea ce contrazice ipoteza.

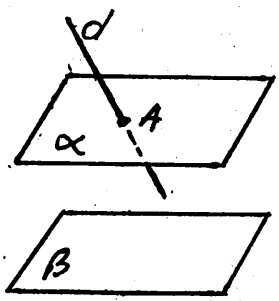


Fig. 3

15. Arătaţi că dacă două plane sînt paralele atunci un plan care intersectează pe unul din ele după o dreaptă, taie şi pe celălalt. Fig.4

Soluţie:

$\alpha \parallel \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = \phi$

$\gamma \cap \alpha = d$

Presupun că γ nu taie pe $\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \gamma \parallel \beta \\ \gamma \equiv \beta \end{cases}$ sau

dar din $\gamma \parallel \beta$ şi $\beta \parallel \alpha \Rightarrow \gamma \parallel \alpha$

imposibil, deci:

$\gamma \cap \beta = d'$.

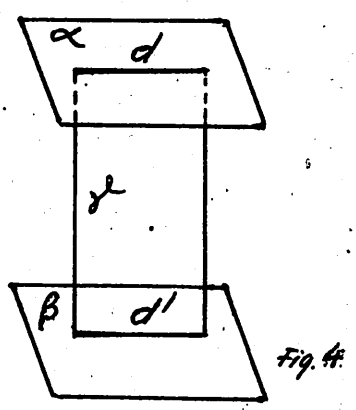
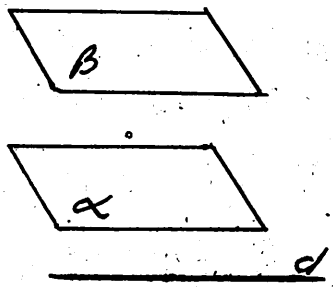


Fig.4

16. Dacă o dreaptă este paralelă cu unul din două plane paralele, atunci ea este sau paralelă cu al doilea plan sau este conţinută în acesta.

Soluţie:

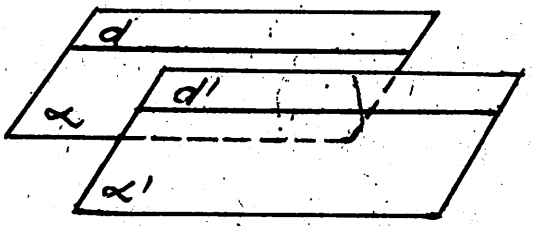
$\alpha \parallel \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = \phi$, $d \parallel \alpha$

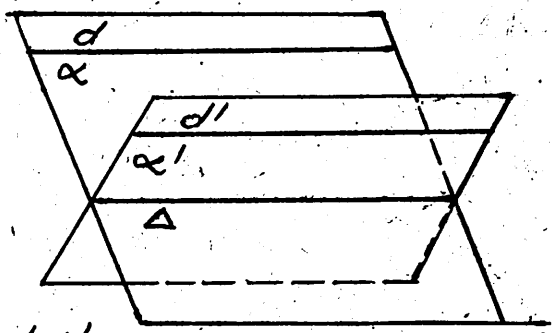


Presupun $d \cap \beta = \{A\}$ atunci conform problemei(14) rezultă că d taie şi pe α , contradicţie.
deoarece $d \parallel \alpha$.

17. Prin dreptele paralele d şi d' se duc respectiv planele α şi α' distincte de (dd'). Să se arate că $\alpha \parallel \alpha'$ sau $\alpha \cap \alpha' \parallel d$.

Soluţie:





$d \parallel d' \Rightarrow d \cap d' = \phi$, $\alpha = \alpha' \neq (\phi, d') \Rightarrow \alpha \neq \alpha'$

$d \subset \alpha$, $d' \subset \alpha' \Rightarrow$ 1) $\alpha \cap \alpha' = \phi \Leftrightarrow \alpha \parallel \alpha'$
2) $\alpha \cap \alpha' = \{P\}$

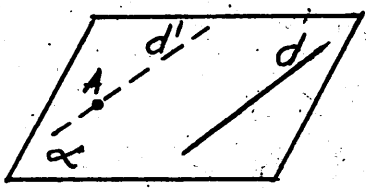
dar două plane care au punct comun au o dreaptă comună deci $\alpha \cap \alpha' = \Delta$
Din $d \parallel d'$, $d' \subset \alpha' \Rightarrow d \parallel \alpha'$, $d \in \alpha \Rightarrow \Delta \parallel d$
Dacă $\alpha \equiv \beta$ atunci $\alpha = (d, d') = \alpha'$ contrazice ipoteza.

Pag.66.

18. Se dau un plan α, un punct $A \in \alpha$ şi o dreaptă $d \subset \alpha$
a) Să se construiască o dreaptă d' astfel încît : $A \in d'$ şi $d' \in dir\, d$
b) Să se construiască o dreaptă prin A inclusă în α care să formeze cu d un unghi de măsură dată a. Cîte soluţii există ?

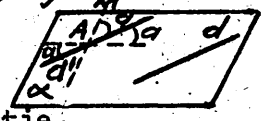
Soluţie:

a) Avem două cazuri $\begin{cases} A \in d \\ A \notin d \end{cases}$



Dacă $A \in d \Rightarrow d' = d$
Dacă $A \notin d \Rightarrow (\exists)\, d' \ni A$, $d' \subset \alpha$
a.î $d' \parallel d$ (Axioma lui Euclid) $d' \in dir\, d$

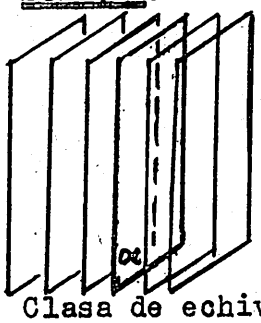
b) Duc prin A, în α , $d' \parallel d$
d' separă α în două semiplane S şi S'
în S $(\exists)$ o singură semidreaptă $|AM$ a.î $m(\widehat{d', |AM}) = a$



în S' $(\exists)$ o singură semidreaptă $|AN$ a.î $m(\widehat{d', |AN}) = a$
Avem două soluţii. Dacă $a = 0^\circ$ sau $a = 90^\circ$ avem o soluţie.

19. Arătaţi că relaţia „$\alpha \parallel \beta$ sau $\alpha = \beta$" definită pe mulţimea planelor este o relaţie de echivalenţă. Determinaţi clasele de echivalenţă.

Soluţie:



Notez „$\alpha \parallel \beta$ sau $\alpha = \beta$" prin $\alpha \overset{\parallel}{=} \beta$ şi avem pe rînd

1) $\alpha \overset{\parallel}{=} \alpha$ reflexivitate

2) dacă $\alpha \overset{\parallel}{=} \beta \Leftrightarrow \beta \overset{\parallel}{=} \alpha$ simetrie.

3) Din $(\alpha \overset{\parallel}{=} \beta$ şi $\beta \overset{\parallel}{=} \gamma) \Rightarrow \alpha \overset{\parallel}{=} \gamma$ tranzitivă

deci „$\overset{\parallel}{=}$" $\longrightarrow$ este relaţie de echivalenţă.

Clasa de echivalenţă este formată din α şi toate planele paralele cu el din spaţiu.

20. Se consideră pe mulţimea tuturor dreptelor şi a planelor relaţia „$x \parallel y$ sau $x = y$", unde x şi y sînt drepte sau plane. Am definit o relaţie de echivalenţă ?

Soluţie:

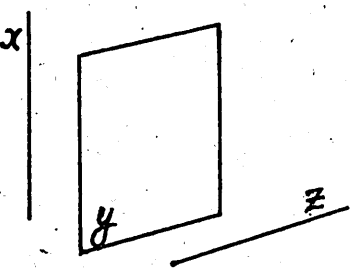
Verificăm axiomele relaţiei de echivalenţă în toate situaţiile:

1) x,y drepte - Da

2) x,y plane - Da

3) x dreaptă; y plan

pentru cazul 3)



A_1: $x \overset{\parallel}{=} x$ (v) x (dreaptă sau plan) reflexivă

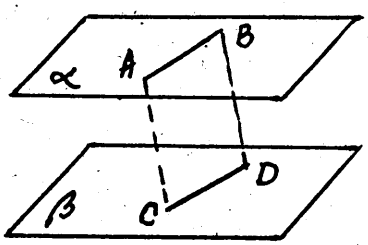
A_2: $x \overset{\parallel}{=} y \Rightarrow y \parallel x$ simetrică

A_3: x dreaptă, y plan , z dreaptă ; din $x \parallel y$ şi $y \parallel z$ $\not\Rightarrow x \parallel z$ deoarece din "două drepte d şi d' paralele cu planul α nu rezultă că dreptele sînt paralele între ele.

Pag.67

21. Arătaţi că două segmente paralele cuprinse între plane paralele, sînt congruente.

Soluţie:



Fie α, β planele paralele şi

$|AB| \subset \alpha$

$|CD| \subset \beta$ şi $|AB| \equiv |CD|$

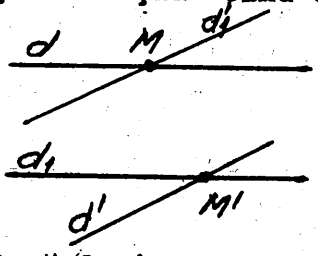
Notez $(AB, CD) = \gamma$

Avem $\gamma \cap \alpha = AB$, $\gamma \cap \beta = CD$, $\alpha \parallel \beta$

Rezultă $AB \parallel CD$ şi $AC \parallel BD$ adică ABCD paralelogram

deci laturile opuse congruente.

22. Să se arate că prin două drepte, care nu sînt conţinute în acelaşi plan, se pot duce două plane paralele în mod unic. Să se studieze şi situaţia cînd cele două drepte sînt coplanare.



Soluţie:

Fie d şi d' cele două drepte .

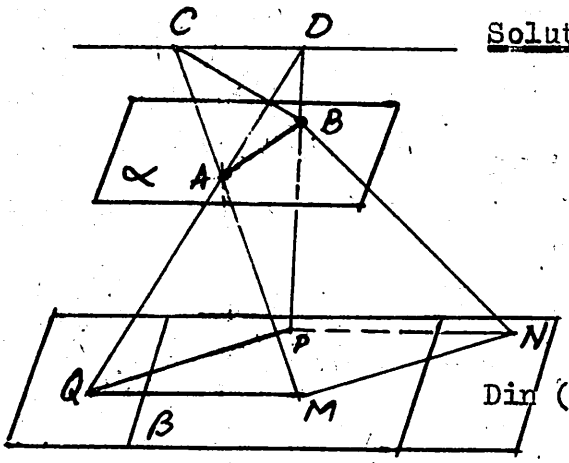
Consider $M \in d$, $M' \in d'$

Prin M duc $d_1' \parallel d'$ iar prin M' duc $d_1 \parallel d$

Avem $(d, d_1') = \alpha$, $(d, d_1) = \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta$

Dacă d şi d' sînt coplanare $\Rightarrow \alpha = \beta = (d, d')$

23. Fie α şi β două plane paralele, $A, B \in \alpha$,iar CD o dreaptă paralelă cu α şi β . Dreptele CA,CB,DB,DA taie planul β respectiv în M,N,P,Q. Să se arate că aceste puncte sînt vîrfurile unui paralelogram.



Soluţie:

$\alpha \parallel \beta$, $AB \subset \alpha \Rightarrow AB \parallel \beta \Rightarrow$

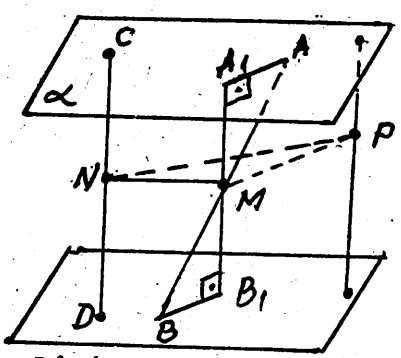
$\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel MN \\ AB \parallel PQ \end{cases} \Rightarrow MN \parallel PQ$ (1)

$\left.\begin{matrix} CD \parallel \beta \\ (CAD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \parallel MQ$

$\left.\begin{matrix} CD \parallel \beta \\ (CBD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \parallel NP$ $\Big\rangle NP \parallel MQ$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ MNPQ paralelogram .

24. Aflaţi locul geometric al mijloacelor segmentelor care au extremităţile în două plane paralele.



Soluţie: $\alpha \parallel \beta$

Fie $|AB|, |CD|, |EF|$ trei segmente cu extremităţile în planele α şi β

Fie M, N,P mijloacele lor. Duc prin M perpendiculara comună planelor α şi β

$\Delta MAA_1 \equiv \Delta MBB_1$ (I.U) deci $\|MA_1\| = \|MB_1\|$

Deci punctele M,N,P se află la egală distanţă de planele α şi β ,dar M,N,P necoliniare determină un plan. Deci locul este un plan $\parallel \alpha \parallel \beta$ şi situat la egală distanţă de ele. Deci un plan $\parallel$ echidistant de α şi β Se demonstrează că $(\forall) P \in \parallel$ este element al locului geometric.

Exerciţii recapitulative

Pag.67

1. Prin două drepte date să se ducă cîte un plan, astfel ca dreapta lor de intersecţie să fie conţinută într-un plan dat.

Soluţie:

Fie d_1 şi d_2 dreptele date şi α planul dat. Dacă $d_1 \cap \alpha = \{A\}$ şi $d_2 \cap \alpha = \{B\}$, atunci planele căutate sînt $\beta = (A d_2)$, $\gamma = (B d_1)$ pentru că $\beta \cap \gamma = AB \subset \alpha$. Dacă $d_1 \parallel \alpha$ şi $d_2 \cap \alpha = \{B\}$ atunci planele sînt $(B d_1)$ şi $(d_2 d_3)$ unde $d_3 = (B d_1) \cap \alpha$
In mod analog se tratează cazul cînd $d \cap \alpha = \{A\}$ şi $d_2 \parallel \alpha$.
Dacă $d_1 \parallel d_2$ şi $d_2 \parallel \alpha$ problema are o infinitate dacă $d_1 \parallel d_2$ iar dacă $d_1 \nparallel d_2$ problema nu are soluţie.

2. Fie a,b,c trei drepte cu un punct comun, iar P un punct nesituat pe ele. Să se arate că planele (Pa),(Pb),(Pc) conţin o dreaptă comună.

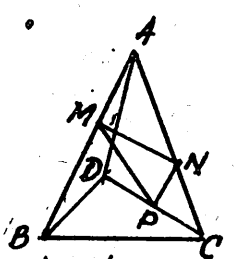
Soluţie:

Fie $\{O\} = a \cap b \cap c$ atunci $O \subset (Pa) \cap (Pb) \cap (Pc)$ şi de asemenea $P \subset (Pa) \cap (Pb) \cap (Pc)$. Deci $OP = (Pa) \cap (Pb) \cap (Pc)$.

3. Fie A,B,C,D puncte necoplanare, iar α un plan care separă punctele A şi B; A şi C; C şi D. Arătaţi că $\alpha \cap |BD| \neq \phi$ şi $\alpha \cap |AD| = \phi$.

Soluţie:

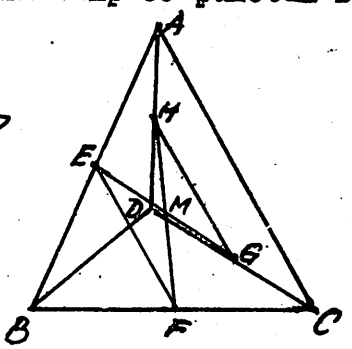
Fie $\{M\} = \alpha \cap |AB|$; $\{N\} = \alpha \cap |AC|$ şi $\{P\} = \alpha \cap |CD|$. In rezolvare vom folosi faptul că o dreaptă taie numai două laturi ale unui triunghi. Din $PN \cap |AC| \neq \phi$ şi $PN \cap |CD| \neq \phi \Rightarrow PN \cap |AD| = \phi$ şi pentru că $\alpha \cap (ADC) = PN \Rightarrow \alpha \cap |AD| = \phi$.



Din $MN \cap |AB| \neq \phi$, $MN \cap |AC| \neq \phi \Rightarrow MN \cap |BC| = \phi$ şi pentru că $\alpha \cap (ABC) = MN \Rightarrow \alpha \cap |BC| = \phi$
Din $P \in \alpha \cap (BCD) \Rightarrow$ planele α şi (BCD) au o dreaptă comună şi pentru că $\alpha \cap |BC| = \phi \Rightarrow \alpha \cap |BD| \neq \phi$.

6. Fie A,B,C,D patru puncte necoplanare şi E,F,G,H mijloacele segmentelor [AB], [BC], [CD], [DA]. Să se arate că $EF \parallel (ACD)$ şi punctele E,F

G,H sînt coplanare;b)Dacă $\{M\}=EG\cap FH$ să se afle locul geometric al punctului M,cînd A,B,C sînt puncte fixe,în timp ce punctul D descrie o dreaptă d(sau un plan dat α).



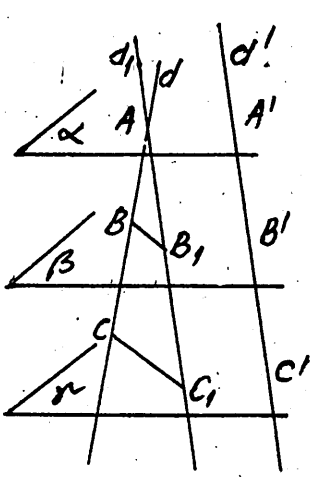
Solutie:

a) $\|\overline{EF}\|$ linie mijlocie în triunghiul ABC $\Rightarrow$ $EF\|AC\subset(ACD)$, de unde rezultă că $EF\,(ACD)$. De asemenea $HG\|AC$ (ca linie mijlocie în ACD),Deci $EF\|HG$ de unde rezultă că E,F G,H sînt coplanare.

b)Dacă C este un punct fix,iar D un punct variabil pe dreapta d, atunci din geometria plană ştim că locul geometric al punctelor G sete o dreaptă g paralelă cu d.Din faptul că punctul E e fix şi G un punct variabil pe dreapta g,rezultă că locul geometric al punctelor M(M mijlocul lui EG pentru că EFGH e paralelogram) este o dreaptă m paralelă cu g.Deci locul geometric este o dreaptă paralelă cu d.In mod analog rezultă că dacă $D\in\alpha$ atunci geometric este un plan paralel cu α (pentru că locul geometric al mijloacelor segmentelor care au o extremitate fixă iar cealaltă într-un plan este un plan paralel cu planul dat).

7. Pe dreptele d,d' se iau punctele distincte A,B,C respectiv A', B',C'.Să se arate: putem duce prin dreptele AA',BB',CC',trei plane paralele între ele dacă şi numai dacă:

$$\frac{\|AB\|}{\|A'B'\|}=\frac{\|BC\|}{\|B'C'\|}$$



Solutie:

Presupunem că am dus prin AA',BB',CC' planele paralele α; β, γ.

Ducem prin A dreapta $d_1\|d'$ şi fie B_1, C_1 intersecţiile ei cu planele β şi γ.

Dreptele concurente d şi d_1 determină un plan δ care taie planele β şi γ după dreptele paralele BB_1 şi CC_1.Deci $\frac{\|AB\|}{\|BC\|}=\frac{\|AB_1\|}{\|B_1C_1\|}$, dar $|AB_1|\equiv|A'B'|$ şi $|B_1C_1|\equiv|B'C'|$

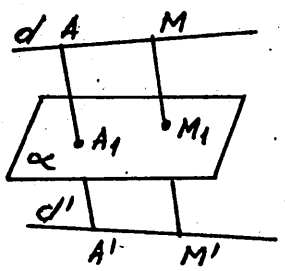
(vezi ex.21/66)de unde rezultă că $\frac{\|AB\|}{\|A'B'\|}=\frac{\|BC\|}{\|B'C'\|}$

Presupunem că $\frac{\|AB\|}{\|A'B'\|}=\frac{\|BC\|}{\|B'C'\|}$

Prin $A\in d'$ ducem dreapta $d_1\|d'$ pe care luăm punctele B_1 şi C_1 astfel ca $|AB_1|\equiv|A'B'|$ şi $|B_1C_1|\equiv|B'C'|$ Rezultă că $AA'\|B_1B'\|C_1C'$ şi $\frac{\|AB\|}{\|AB_1\|}=\frac{\|BC\|}{\|B_1C_1\|}$ de unde avem că $BB_1\|CC_1$ .Atunci

$(BB_1B')\cap(CC_1C')$ şi pentru că $AA' \parallel B_1B'$ putem duce prin AA' planul $\alpha \parallel (BB_1B')$.

8. Fie M,M' cîte un punct mobil pe dreptele necoplanare d,d'. Să se afle locul geometric al punctului P care împarte segmentul [MM'] într-un raport dat.



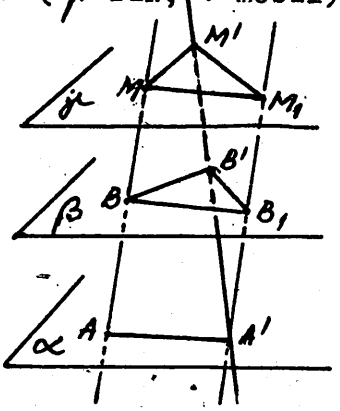
Soluţie:

Fie segmentul $|AA'|$, unde $A \in d$ şi $A' \in d'$ iar M_1 şi A_1 punctele care împart segmentele MM' respectiv AA' într-un raport dat. Din ex. precedent rezultă că punctele A_1 şi M_1 se află într-un plan α paralel cu cele două drepte d şi d'. Reciproc prin orice punct M_1 al planului α putem duce o dreaptă care să intersecteze atît dreapta d cît şi dreapta d'. Deci locul geometric este un plan paralel cu dreptele date.

10. Se dau dreptele d,d' care taie un plan dat α în punctele A şi A'. Să se construiască punctele M,M' situate respectiv pe d,d' astfel încît $MM' \parallel \alpha$ şi segmentul [MM'] să aibă o lungime dată l. Discuţie.

Soluţie:

Ducem prin A' dreapta $d_1 \parallel d$. Planele β şi γ (β fix, γ mobil) paralele cu α intersectează dreptele d, d', d_1 în B, B', B_1 respectiv M, M', M_1. Pentru că planele (dd') şi respectiv $(d'd_1)$ intersectează pe β şi γ după drepte paralele avem că $\sphericalangle MM_1M' \equiv \sphericalangle BB_1B'$



Cum $|MM_1| \equiv |AA_1|$, $\|MM'\| = l$ iar $\sphericalangle MM_1M' \equiv \sphericalangle BB_1B'$, atunci problema revine la a construi un triunghi în care se dau două laturi şi unghiul opus uneia din ele. In urma construcţiei triunghiului avem $\|M_1M'\|$ şi deci ştim $\|M_1M'\| / \|B_1B'\|$ ceea ce ne permite să aflăm poziţia punctului M_1 după care ducem M_1M paralel la B_1B $(M \in d)$ şi $M_1M' \| B_1B'$ $(M' \in d')$. Dacă $d \parallel d'$ şi $\|AA_1\| \neq l$ problema nu are soluţie, iar dacă $d \parallel d_1$ şi $\|AA_1\| = l$ problema are o infinitate de soluţii.

Pag.68

11. a) Să se afle locul geometric al vîrfului P al triunghiului MNP, dacă laturile acestuia rămîn paralele cu trei drepte fixe, vîrful M descrie o dreaptă dată d, iar vîrful N aparţine unui plan dat α.

b) Aceeaşi problemă, cu deosebirea că M descrie un plan dat β.

Soluţie:

Fie d_1, d_2, d_3, dreptele fixe, astfel încît $MN \parallel d_1$, $MP \parallel d_2$, $NP \parallel d_3$

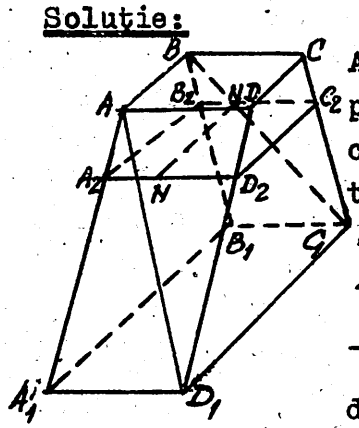
1. Dacă $d \cap \alpha = \{A\}$, atunci aplicînd faptul că locul geometric al dreptelor ce se sprijină pe o dreaptă dată şi sînt paralelă cu o dreaptă fixă, este un plan ce conţine dreapta dată, rezultă că $N \in \alpha \cap \beta$ iar $P \in (A d_3) \cap \gamma$, unde β şi γ sînt planele ce conţin pe d şi sînt paralele cu d_1 respectiv d_2. Deci locul geometric este o dreaptă ce trece prin A.

2. Dacă $d \cap \alpha = \phi$, atunci $N \in \beta \cap \alpha = \alpha \parallel d$ iar $P \in \gamma (\alpha d_3) \parallel d$. Deci locul geometric este o dreaptă paralelă cu d.

b) Dacă $\alpha \cap \beta \neq \phi$, aplicînd punctul a) şi ex.5/53 rezultă că locul geometric este un plan ce trece prin $\alpha \cap \beta$ pentru că dacă considerăm că M se mişcă pe drepte din planul β, iar $N \in \alpha$, atunci de la a) avem că locul geometric este format din drepte care au două cîte două un punct comun, fără a fi concurente în acelaşi punct, atunci ele sînt coplanare. Dacă $\alpha \cap \beta = \phi$, atunci *locul geometric este un plan paralel cu cele două plane.*

13. ABCD şi A_1, B_1, C_1, D_1, fiind două paralelograme oarecare în spaţiu se iau punctele A_2, B_2, C_2, D_2 care împart segmentele $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$, $[DD_1]$, în acelaşi raport. Să se arate că $A_2B_2C_2D_2$ este tot un paralelogram.

Soluţie:



Avem $\frac{\|A_2A_1\|}{\|A_2A\|} = \frac{\|B_2B_1\|}{\|B_2B\|} = \frac{\|C_2C_1\|}{\|C_2C\|} = \frac{\|D_2D_1\|}{\|D_2D\|} = \frac{m}{n}$ pe dreptele D, A, C, B luăm punctele M şi N astfel ca $\frac{\|D_1M\|}{\|AM\|} = \frac{\|C_1N\|}{\|BN\|} = \frac{m}{n}$. Din asemănări de triunghiuri:

$\triangle AA_1D_1 \sim \triangle AA_2M$; $\triangle AD_1D \sim \triangle MD_1D_2$, $\triangle BCC_1 \sim \triangle NC_2C_1$ şi $\triangle BB_1C_1 \sim \triangle BB_2N$, avem:

$\frac{\|D_2M\|}{\|DA\|} = \frac{m}{m+n}$; $\frac{\|A_2M\|}{\|A_2D_1\|} = \frac{m}{m+n}$; $\frac{\|C_2N\|}{\|CB\|} = \frac{m}{m+n}$; $\frac{\|B_2N\|}{\|B_1C_1\|} = \frac{m}{m+n}$

de unde rezultă că $|D_2M| \equiv |C_2N|$ şi $|A_2N| \equiv |B_2N|$.

Rezultă că D_2MNC_2 şi A_2MNB_2 sînt paralelograme şi apoi că $A_2B_2C_2D_2$ este tot un paralelogram.

CAPITOLUL V
PERPENDICULARITATE ÎN SPAȚIU

Pag. 71 **§1. Drepte perpendiculare**

1. Să se construiască o dreaptă care să treacă printr-un punct dat și să fie perpendiculară pe două drepte date.

Soluție 1: Fie d_1 și d_2 dreptele date și punctul A. Ducem prin A planele $\alpha \perp d_1$ și $\beta \perp d_2$. Cum α și β au punctul A comun înseamnă că ele se intersectează după o dreaptă. Dacă $\alpha \cap \beta = d$, atunci d este dreapta căutată. Într-adevăr:

$$A \in d,\ d \subset \alpha \text{ și } \alpha \perp d_1 \Rightarrow d \perp d_1$$
$$A \in d,\ d \subset \beta \text{ și } \beta \perp d_2 \Rightarrow d \perp d_2$$

Observații: Dacă $\alpha \neq \beta$, problema are soluția unică: dreapta $d = \alpha \cap \beta$. Dacă $\alpha = \beta$, orice dreaptă construită în α ce trece prin A este soluție.

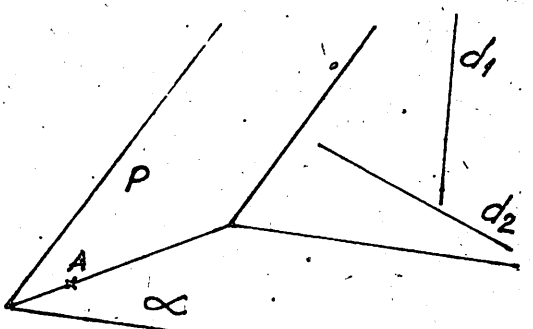
Soluția a-2-a

Fie A, d_1 și d_2 elementele date.

Ducem prin A dreptele

$$d_1' \parallel d_1 \text{ și } d_2' \parallel d_2$$

Fie $\alpha = (d_1', d_2')$.



În punctul A ridicăm o perpendiculară d pe planul α. Dreapta d este dreapta căutată deoarece $A \in d \perp \alpha$ și $d_1 \parallel d_1' \subset \alpha$ rezultă $d \perp d_1$ și $A \in d \perp \alpha$ și $d_2 \parallel d_2' \subset \alpha$ rezultă $d \perp d_2$

Observații: Dacă $d_1 \nparallel d_2$ problema are soluție unică, iar dacă $d_1 \parallel d_2$ problema are o infinitate de soluții (toate dreptele ce trec prin A situate în planul ce trece prin A perpendicular pe d_1 și d_2.

2. Să se arate că există trei drepte cu un punct comun, perpendiculare două cîte două.

Soluție:

Fie dat un plan α și $A \in \alpha$.

Ducem prin A dreptele d_1 și $d_2 \subset \alpha$ astfel ca $d_1 \perp d_2$.

Tot prin A ducem $d_3 \perp \alpha$.

Dreptele d_1, d_2, d_3 sînt dreptele cerute deoarece:
$d_1 \perp d_2$; $d_3 \perp \alpha$ și $d_1, d_2 \subset \alpha \Rightarrow d_3 \perp d_1$ și $d_3 \perp d_2$.

3. Fie a,b,c,d, patru drepte cu un punct comun, d fiind perpendiculară pe a,b,c. Să se arate că dreptele a,b,c sînt coplanare.

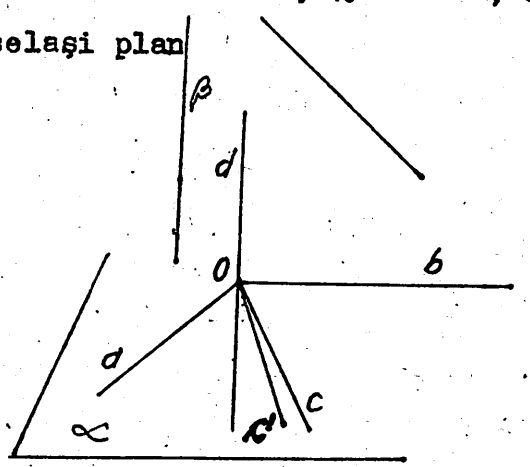
Soluție:

Fie dreptele a,b,c,d astfel ca $a \cap b \cap c \cap d = \{O\}$ și d perpendiculară pe a,b.c.

Notăm cu α planul determinant de dreptele a,b,

Să arătăm că $c \subset \alpha$.

Fie $\beta = (d, c)$ și $\alpha \cap \beta = c'$. Dreapta d fiind perpendiculară pe dreptele a și b este perpendiculară pe α, deci și pe dreapta $c' \subset \alpha$. Rezultă deci $c' = c$ (în caz contrar în planul β, în punctul O avem două perpendiculare c, c' pe dreapta d. imposibil). Deoarece $c' c \equiv \alpha$ rezultă că și $c \subset \alpha$, deci dreptele a,b,c sînt situate cu același plan



4. Arătați că nu există patru drepte cu un punct comun, perpendiculare două cîte două.

Soluție:

Fie dreapta d perpendiculară pe dreptele a,b,c, în punctul lor comun O.

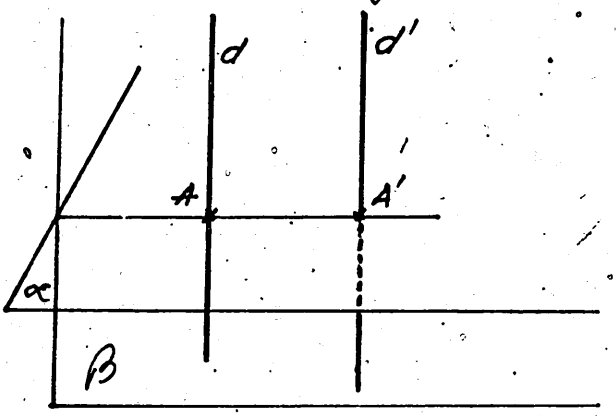
Din problema 3 rezultă că dreptele a,b,c sînt coplanare cu un punct comun și perpendiculare două cîte două. fapt care contrazice unicitatea în plan a perpendicularei pe o dreaptă printr-un punct dat.

5. Fie $d \perp \alpha$ și $d' \parallel d$. Arătați că $d' \perp \alpha$

Soluție: Dreptele d și d' fiind paralele, determină un plan. Notăm $\beta = (d, d')$, $\{A\} = d \cap \alpha$ și $\{A'\} = d' \cap \alpha$

Dacă $d' \cap \alpha = \emptyset$ atunci $d' \parallel \alpha$ cum $d \perp \alpha$, în planul β rezultă că $d' \parallel a$ unde $a = \alpha \cap \beta$ de unde rezultă $d' \perp d$ (contrazice ipoteza).

Rezultă că $d' \cap \alpha \neq \emptyset$



Deoarece $d \perp \alpha$, rezultă că d este perpendiculară pe orice dreaptă $b \subset \alpha$. Considerăm dreapta $b \neq a$, care să treacă prin A'

Cum $d \perp a$, $d \perp b$ și $d' \parallel d$ rezultă $d' \perp a$ deci, $d' \perp \alpha$.

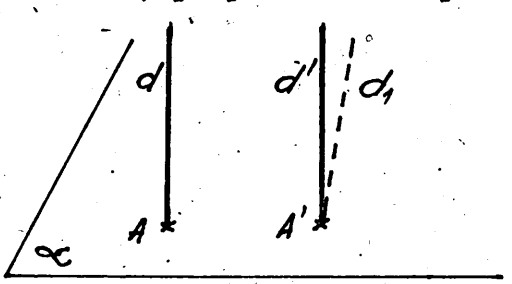
6. Să se arate că două drepte distincte, perpendiculare pe un plan sînt paralele.

Soluție:

Se dau $d \perp \alpha$, $d' \perp \alpha$

Fie $d \cap \alpha = \{A\}$ și $d' \cap \alpha = \{A'\}$

Dacă presupunem că d și d' nu sînt paralele atunci prin punctul A' putem duce paralela d_1 la d.



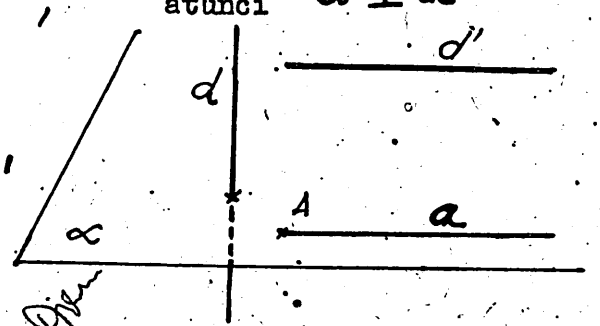
Din problema 5) rezultă că $d_1 \perp \alpha$, deci în punctul A' am putut duce două perpendiculare pe planul α lucru imposibil.

Rămîne deci că $d \parallel d'$.

7. Dacă $d \perp \alpha$ și $d' \parallel \alpha$, atunci $d' \perp d$

Soluție:

Fie $A \in \alpha$ $d' \parallel \alpha$, atunci ducem prin A dreapta $a \parallel d'$



Deoarece $d \perp \alpha$ și $a \subset \alpha$ rezultă:

$d \perp a$ Dar $a \parallel d'$ deci $d \perp d'$

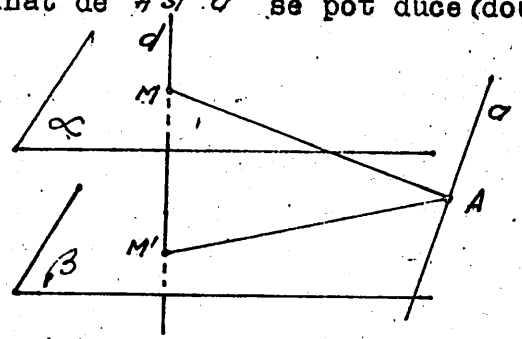
8. Arătați că două plane perpendiculare pe o dreaptă sînt paralele între ele.

Soluție: Fie $d \perp \alpha$ și $d \perp \beta$ și $d \cap \alpha = \{M\}$; $d \cap \beta = \{M'\}$

Presupunînd că $\alpha \not\parallel \beta$, rezltă că $\alpha \cap \beta = a$

Luînd $A \in a$, dreapta d este perpendiculară pe dreptele MA și $M'A$ din planele α și β, absurd deoarece ar rezulta că în planul determinat de A și d se pot duce din A două perpendiculare pe d.

Rezultă deci că $\alpha \parallel \beta$.



9. Să se arate că locul geometric al punctelor egal depărtate de două puncte distincte A și B este un plan perpendicular pe AB, care trece prin mijlocul O al segmentului $[AB]$ (numit planul mediator a lui $[AB]$).

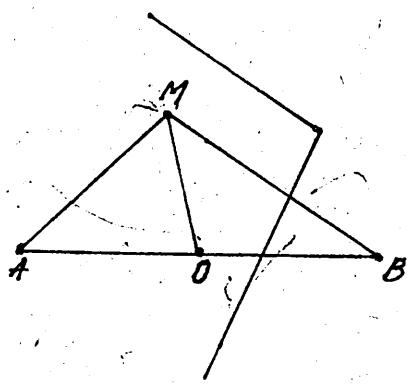
Soluție:

Fie O mijlocul segmentului $[AB]$.

Din congruența triunghiurilor

(caz L.L.L.) rezultă $MO \perp AB$

Cum locul geometric al punctelor de unde putem duce perpendiculare pe o dreaptă în același punct O este un plan perpendicular pe dreaptă în punctul respectiv (problema 3), rezultă că locul geometric al punctelor egal depărtate de două puncte distincte A și B este un plan perpendicular



pe AB, care trece prin O, notat cu α .

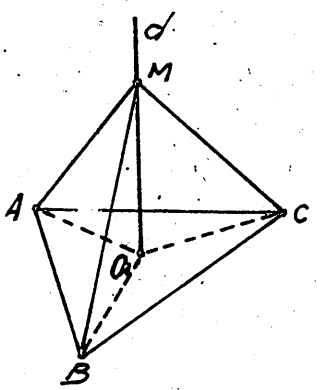
Reciproc: Dacă $M \in \alpha$, rezultă $MO \perp AB$ $\Delta MOA \equiv \Delta MOB$ (caz C.C.) de unde rezultă $|MA| \equiv |MB|$.

10. Să se afle locul geometric al punctelor egal depărtate din spaţiu, de vîrfurile unui triunghi A.B.C.

Soluţie:

Din problema precedentă am văzut că locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de capetele segmentului $[AB]$ este planul mediator α al lui $[AB]$. Analog, pentru segmentul $[BC]$ găsim planul mediator β al lui $[BC]$. Cum planele α şi β au un punct comun (centrul cercului circumscris triunghiului A,B,C,) au o dreaptă comună, $d = \alpha \cap \beta$, unde d este perpendiculara ridicată în centrul cercului circumscris triunghiului A,B,C, pe planul acestora. ($\alpha \perp AB$ şi $\beta \perp BC$ şi $d \subset \alpha$, $d \subset \beta$ rezultă $AB \perp d$ şi $BC \perp d$, adică $d \perp (ABC)$.

Intra-devăr, orice punct $M \in d$ este egal depărtat pe punctele A, B şi C. (Rezultă din congruenţa triunghiurilor MOA, MOB, MOC).



Reciproc; orice punct M egal depărtat de punctele A, B şi C este situat pe d . Fie O_1 piciorul perpendicularei duse din M pe (A,B,C,). $\Delta MO_1A \equiv \Delta MO_1B \equiv \Delta MO_1C$ caz L.C) Rezultă $|O_1A| \equiv |O_1B| \equiv |O_1C|$ adică O_1 este centrul cercului circumscris triunghiului A,B,C, adică $O_1 \equiv O$

11. Aflaţi locul geometric al punctelor egal depărtate de toate punctele unui cerc.

Soluţie:

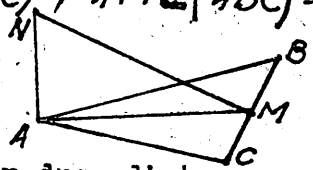
Luînd trei puncte distincte A;B,C pe cerc, am redus problema la problema precedentă. Deci locul geometric al punctelor egal depărtate de toate punctele de pe cerc, este perpendiculara ridicată în centrul cercului pe planul acestuia.

Pag. 72

12. Fie A,B,C, un triunghi isoscel ($|AB| \equiv |AC|$), M mijlocul laturii $[BC]$ şi A N perpendiculara pe (A,B,C,); arătaţi că $MN \perp BC$

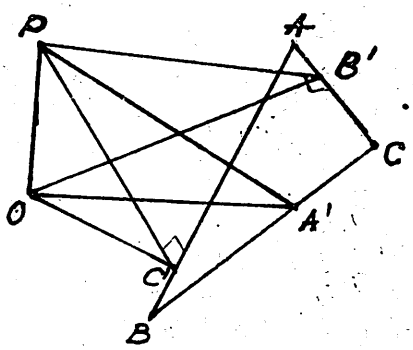
Soluţie:

ΔABC isoscel $(|AB| \equiv |AC|)$ şi M mijlocul laturii $[BC] \Rightarrow$ $\Rightarrow AM \perp BC$. $AM \perp BC$ şi $AN \perp (ABC)$, $AM \subset (ABC) \Rightarrow$ $MN \perp BC$ (teorema celor trei perpendiculare).



13. Fie A',B',C', picioarele perpendicularelor duse dintr-un punct oarecare P din spaţiu pe laturile ΔABC. Arătaţi că ducînd în planul(A,B,C) perpendicularele pe laturile ΔABC în A',B',C', se obţin trei drepte concurente. Generalizare pentru un poligon.

Soluţie:



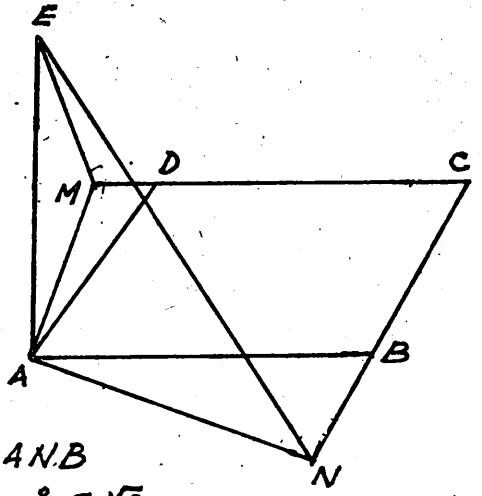
Fie $PO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$ - Deoarece $PA' \perp BC$, $BC \subset (ABC)$ conform teoremei reciproce 1) (pag.71), rezultă $OA' \perp BC$. Deci $O \in$ perpendicularei dusă în planul (A,B,C) pe BC.

Analog arătăm că $OB' \perp AC$ şi $OC' \perp AB$, adică perpendicularele duse în (A,B,C) pe laturile lui ΔABC în A', B', C' sînt concurente în punctul O.

Demonstrarea pentru poligon este identică, deoarece toate perpendicularele duse în planul (A,B,C) din piciorul perpendicularelor duse dintr-un punct oarecare P din spaţiu pe laturile poligonului, trec prin piciorul O al perpendicularei duse din P pe (ABC) $(O \in (ABC))$.

Pag. 79

14. Pe planul paralelogramului A B C D se ridică perpendiculara AE. Să se calculeze distanţele de la punctul E la dreptele BC şi CD, ştiind că $\|AB\| = 2a$, $\|MD\| = \|AE\| = a$ şi $m(\widehat{BAD}) = 60^\circ$



Soluţie:

Fie M şi N picioarele perpendicularelor duse din A pe DC şi respectiv pe BC ($M \in DC$ şi $N \in BC$)

Din teorema celor trei perpendiculare rezultă că $EM \perp DC$ şi $EN \perp BC$

Trebuie să calculăm $\|EM\|$ şi $\|EN\|$.

Din triunghiurile dreptunghice AMD şi ANB rezultă: $\|AM\| = \|AD\| \cdot \sin \widehat{MDA} = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\|AN\| = \|AB\| \sin 60^\circ = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

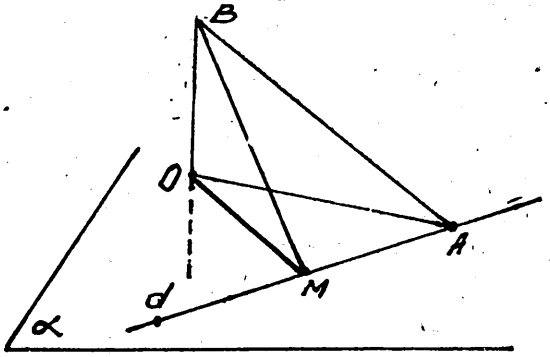
Din ΔEMA rezultă $\|EM\| = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \sqrt{\frac{7a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Din ΔEAN rezultă:

$$\|EN\| = \sqrt{a^2 + 3a^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$$

15. Se dau: planul α şi punctele $A \in \alpha, B \notin \alpha$. O dreaptă variabilă d trece prin A şi este conţinută în planul α.

Să se afle locul geometric al picioarelor perpendicularelor din B pe d.



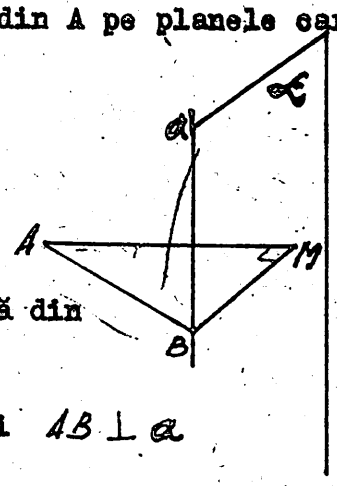
Soluţie:

Fie O piciorul perpendicularei duse din B pe α, şi $BM \perp d$

Rezultă $OM \perp d$. Cum A şi O sînt puncte fixe, iar $\widehat{OMA} \in 90^\circ$ rezultă că locul geometric al punctelor din planul α (deoarece M se

mişcă pe d şi $d \subset \alpha$ deci M rămîne în planul α) este un cerc cu diametrul $|AO|$. Reciproc, orice punct M situat pe cercul de diametrul $|AO|$ este piciorul perpendicularei duse din B pe d. Într-adevăr, deoarece M aparţine cercului de diametru $|AO|$ rezultă $O\hat{M}A \in 90$, adică $OM \perp d$ şi conform teoremei celor trei perpendiculare rezultă că $BM \perp d$.

16. Se dau: dreapta a şi punctul $A \notin a$. Se cere locul geometric al picioarelor perpendicularelor din A pe planele care trec prin a.



Soluţie:

Fie M piciorul perpendicularei dusă din A pe un plan variabil α ce trece prin a şi B piciorul perpendicularei dusă din A pe dreapta a.

$AM \perp \alpha$ şi $M \in \alpha \Rightarrow AM \perp a$. Dar şi $AB \perp a$

deci $a \perp (ABM)$

Cum A şi a sînt elemente fixe, rezultă că şi B este fix. Dar $AM \perp MB$. Deci locul geometric al punctelor variabile M de unde segmentul $|AB|$ se vede sub un unghi drept este un cerc de diametru $|AB|$, situat într-un plan perpendicular pe dreapta a. Reciproc, orice punct M de unde segmentul $|AB|$ se vede sub un unghi $\not\equiv 90^\circ$ situat în planul ce trece prin A şi perpendicular pe a este piciorul perpendicularei dusă din A pe planul (a, M).

Într-adevăr, $A\hat{M}B \in 90 \Rightarrow MA \perp MB$

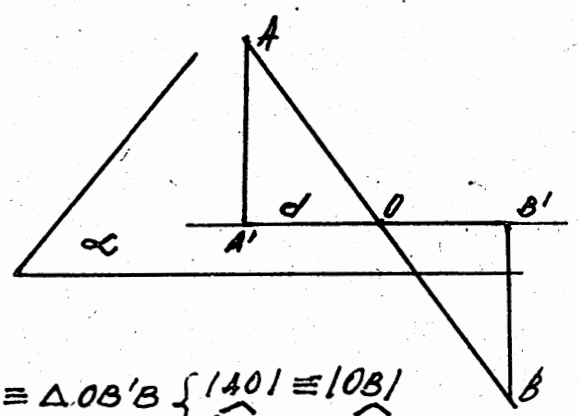
Dar şi $AB \perp a$ şi $BM \perp a$ → din faptul că $(ABM) \perp a$. rezultă deci că

$AM \perp (a, AM) = \alpha$

conform reciprocei teoremei celor trei perpendiculare.

a două a

17. Se consideră un plan α care trece prin mijlocul unui segment $[AB]$. Să se arate că punctele A şi B sînt egal depărtate de planul α.

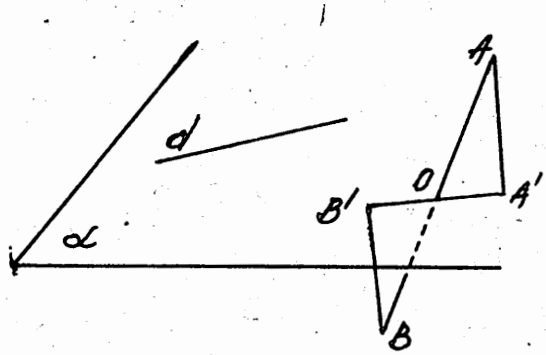


Soluţie:

Fie O mijlocul segmentului $[AB]$ şi α planul ce trece prin O, iar A' piciorul perpendicularei duse din A pe planul α. Notăm $\beta = (AA', AB)$ şi $d = \alpha \cap \beta$. Ducem $BB' \perp d$. În planul β avem: $\triangle OA'A \equiv \triangle OB'B \begin{cases} |AO| \equiv |OB| \\ \hat{AOA'} \equiv \hat{BOB'} \end{cases}$ de unde rezultă: $|AA'| \equiv |BB'|$

Dar cum $AA' \perp \alpha$ şi $BB' \parallel AA'$ rezultă $BB' \perp \alpha$ şi problema este rezolvată.

18. Determinaţi un plan care să treacă printr-o dreaptă dată, să fie echidistant de două puncte A şi B date şi să separe punctele A şi B.

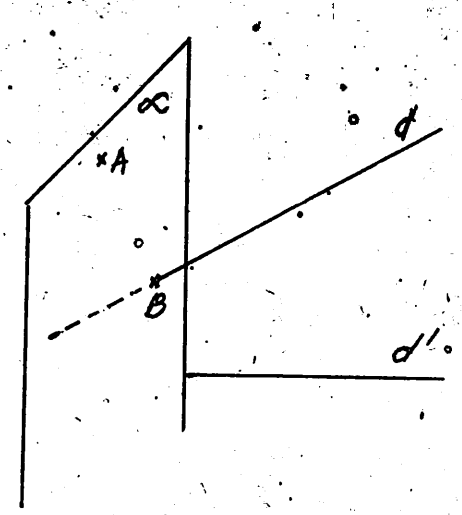


Soluţie:

Fie O mijlocul segmentului $|AB|$. Notăm $\alpha = (d, O)$. Planul α este planul căutat. Într-adevăr conţine dreapta d şi separă punctele A şi B fiind echidistant de punctele A şi B. Ducînd $AA' \perp \alpha$ şi $BB' \perp \alpha$, din congruenţa triunghiurilor OAA' şi OBB' rezultă $\|AA'\| \rightleftarrows \|BB'\|$

19. Printr-un punct dat să se ducă o dreaptă care să intersecteze o dreaptă dată şi să fie perpendiculară pe o altă dreaptă dată.

Soluţie:



Fie A, d şi d' elementele date. Construim un plan α care să treacă prin punctul A şi să fie perpendicular pe d'.Fie B punctul unde dreapta d intersectează planul α .Dreapta AB este dreapta căutată.

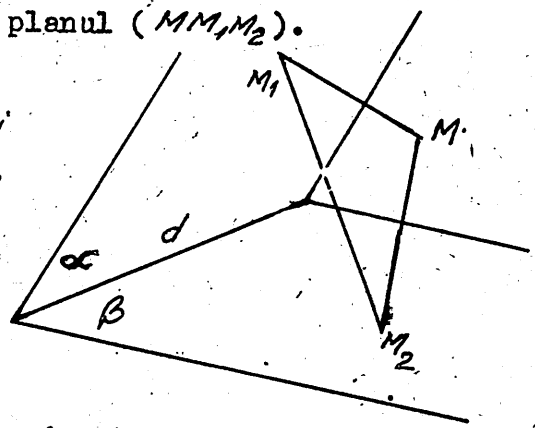
Intr-adevăr $AB \subset \alpha$, $d' \perp \alpha \Rightarrow AB \perp d'$,

AB trece prin punctul dat A şi intersectează dreapta d în punctul B.

Discuţie: Dacă $d \subset \alpha$, $A \notin d$ problema admite o infinitate de soluţii.

Dacă $d \parallel \alpha$ problema nu admite soluţii.

2o.Fie α şi β două plane distincte,a căror intersecţie este dreapta d şi fie M un punct nesituat în $\alpha \cup \beta$.Se duc dreptele MM_1 şi MM_2 ,perpendiculare respectiv pe α şi β .Să se arate că dreapta d este perpendiculară pe planul (MM_1M_2).



Soluţie:

$MM_1 \perp \alpha$ şi $d \subset \alpha \Rightarrow MM_1 \perp d$

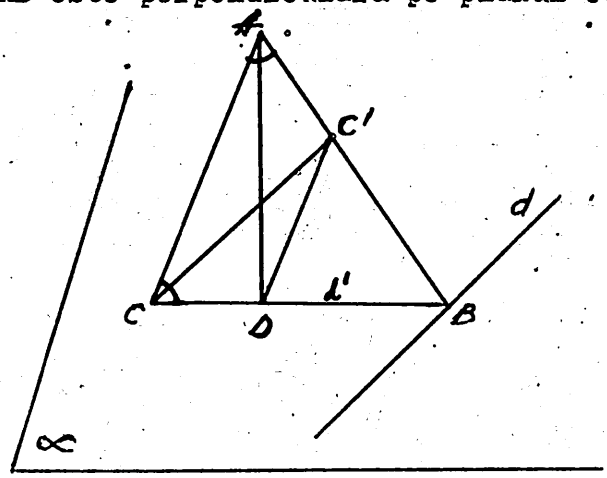
$MM_2 \perp \beta$ şi $d \subset \beta \Rightarrow MM_2 \perp d$

Rezultă că $d \perp (MM_1 ; MM_2)$

adică $d \perp (MM_1M_2)$

21.Fie α un plan, d o dreaptă în α şi A un punct exterior lui α .Din A se duce perpendiculara AB pe d($B \in d$) iar prin B perpendiculara d' pe d situată în α .Se ia pe d' punctul C astfel ca $\hat{ABC}$ să fie ascuţit şi $|BC| \equiv |AB|$. Din C se duce perpendiculara CC' pe AB($C' \in AB$) şi se ia pe $|CB|$ punctul D astfel ca $|CD| \equiv |AC'|$.

Să se arate că dreapta AD este perpendiculară pe planul α.



Soluție:

ΔBAC este isoscel și deci:

$B\hat{A}C \equiv B\hat{C}A$

$\Delta ACD \equiv \Delta CAC'$ $\begin{cases} |CD| \equiv |AC'| \\ |AC| \text{ latură comună} \end{cases}$

$A\hat{C}D \equiv C\hat{A}C'$

Rezultă că și $A\hat{D}C \equiv A\hat{C}'C$. Dar $A\hat{C}'C$ fiind unghi drept rezultă că și $A\hat{D}C$ este drept adică $AD \perp BC$.

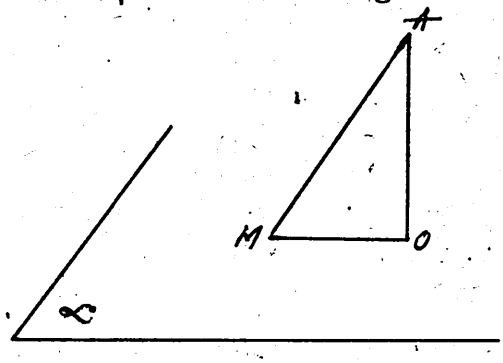
Cum $AD \perp d$ ($d \perp AB$ și $d \perp BC$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow d \perp (ABC)$ și $d \subset \alpha$ și $BC \subset \alpha$, $d \cap BC \neq \phi$

rezultă că $AD \perp \alpha$.

22. Se dau un plan α și un punct $A \notin \alpha$. Să se afle locul geometric al punctelor $M \in \alpha$ astfel ca segmentul $|AM|$ să aibă o lungime dată.

Soluție:



Fie $\ell = \|AM\|$ și d= distanța de la punctul A la planul α. Luăm $d < \ell$

Fie O proiecția ortogonală a punctului A pe planul α. Din triunghiul dreptunghiular AOM rezultă:

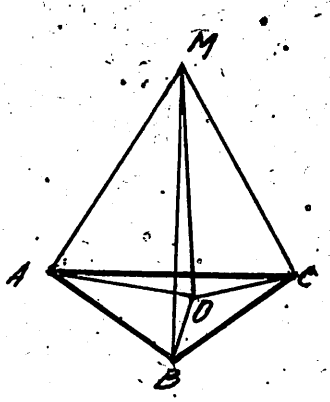
$\|OM\|^2 = \|AM\|^2 - \|AO\|^2$ adică:

$\|OM\| = \sqrt{\ell^2 - d^2}$ = constant.

Cum O este fix iar $\|OM\|$ este constant locul geometric al lui M° este un cerc situat în planul α de centru O și rază $\sqrt{\ell^2 - d^2}$.

Dacă $\ell = d$ atunci $M \equiv O$, adică locul geometric este proiecția ortogonală a lui A pe planul α, iar dacă $\ell < d$, locul geometric este mulțimea vidă.

23. Fie O punctul de intersecție al mediatoarelor unui triunghi ABC și M un punct nesituat în planul (ABC). Să se arate că $OM \perp (ABC)$ dacă și numai dacă $|AM| \equiv |BM| \equiv |CM|$.



Solutie:
Dacă $|AM| \equiv |BM| \equiv |CM|$ atunci $OM \perp (ABC)$ (rezultă din problema 10 pagina 71). Reciproc, dacă $OM \perp (ABC)$ atunci din congruenţa triunghiurilor dreptunghice MOA, MOB şi MOC rezultă: $|OA| \equiv |OB| \equiv |OC|$

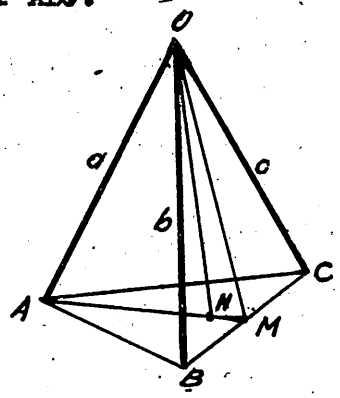
24. Fie O,A,B,C patru puncte astfel ca $OA \perp OB \perp OC \perp OA$ şi se notează $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$.

1) Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului ABC în funcţie de a,b,c.

2) Să se calculeze aria $\mathcal{A}[ABC]$ şi să se demonstreze relaţia:
$\mathcal{A}[ABC]^2 = \mathcal{A}[OAB]^2 + \mathcal{A}[OBC]^2 + \mathcal{A}[OCA]^2$

3) Să se arate că proiecţia ortogonală a punctului O pe planul (ABC) este ortocentrul H al triunghiului ABC.

4) Să se calculeze distanţa OH.



Solutie:

1. Din triunghiurile dreptunghice OAB, OBC şi OCA rezultă:
$\|AB\| = \sqrt{a^2+b^2}$; $\|BC\| = \sqrt{b^2+c^2}$;
$\|AC\| = \sqrt{a^2+c^2}$.

2. Fie $AH \cap BC = \{M\}$
$OA \perp OB$; $OA \perp OC \Rightarrow OA \perp (OBC)$
adică $OA \perp BC$
Dar $OH \perp (ABC)$ deci $BC \perp (OAH)$
adică $AH \perp BC$.
Rezultă că $OM \perp BC$. $\mathcal{A}[ABC] = \frac{\|BC\| \cdot \|AM\|}{2}$
Din ΔOBC: $\|OM\| = \frac{\|OB\| \cdot \|OC\|}{\|BC\|} = \frac{b \cdot c}{\sqrt{b^2+c^2}}$
Din ΔOAM: $\|AM\|^2 = \|OA\|^2 + \|OM\|^2 = a^2 + \frac{b^2c^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{b^2+c^2}$
Deci:
$$\mathcal{A}[ABC]^2 = \frac{(b^2+c^2) \cdot \frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{b^2+c^2}}{4} = \frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{4}$$

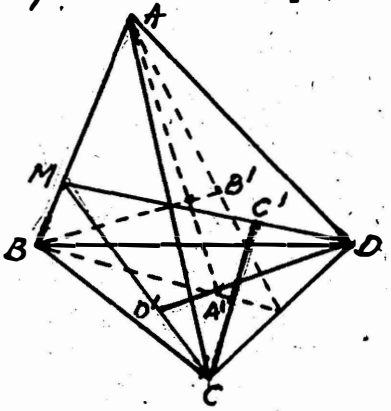
Dar $\mathcal{A}[OAB]^2 + \mathcal{A}[OBC]^2 + \mathcal{A}[OCA]^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{4} + \frac{b^2 \cdot c^2}{4} + \frac{c^2 \cdot a^2}{4}$

de unde rezultă relaţia cerută la punctul 2)

3) $OA \perp OB$ şi $OA \perp OC \Rightarrow OA \perp (OBC)$ adică $OA \perp BC$.
Dar $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$
Din $OA \perp BC$ şi $OH \perp BC$ rezultă $BC \perp (AOH)$ adică $BC \perp AH$
Deci $AH \perp BC$, adică înălţimea din A pe BC trece prin punctul H.
Analog se arată că $BH \perp AC$, deci că H este ortocentrul triunghiului A B C.
4) Din triunghiul dreptunghic A O M rezultă:

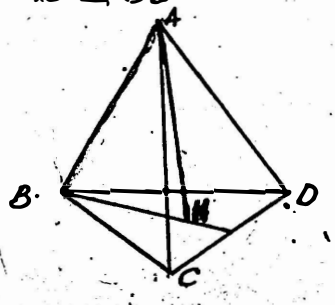
$$\|OH\| = \frac{\|OA\| \cdot \|OM\|}{\|AM\|}, \text{ adică: } \|OH = \frac{a \cdot \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}}{\frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

Pag. 74
25* Se consideră punctele necoplanare A,B,C,D, şi dreptele AA', BB', CC', DD' perpendiculare respectiv pe planele (BCD), (ACD), (ABD), (A B C). Să se arate că dacă dreptele AA' şi BB' sînt concurente, atunci dreptele CC', DD' sînt coplanare.



Soluţie:
$AA' \perp (BCD) \Rightarrow AA' \perp CD$
$BB' \perp (ACD) \Rightarrow BB' \perp CD$
Din ipoteza AA' şi BB' sînt concurente şi deci $CD \perp (AA', BB')$ adică
$CD \perp AB$.
Fie M punctul unde planul ce conţine pe CD şi este perpendicular pe AB, intersectează pe AB.
Ducem $DD' \perp MC$ şi $CC' \perp MD$. Arătăm că perpendicularele DD' şi CC', duse respectiv pe MC şi MD sînt perpendiculare pe planele(ABC) respectiv ABD.
Intr-adevăr, din $AB \perp (CMD)$ şi $DD' \subset (CMD)$ rezultă $AB \perp DD'$ şi $AB \perp CC'$. Din $DD' \perp MC$ şi $DD' \perp AB$, $MC \subset (ABC)$ şi $AB \subset (ABC)$ rezultă $DD' \perp (ABC)$ - Analog arătăm că $CC' \perp (ABD)$
Dar CC', DD' fiind situate în planul MCD sînt coplanare

26* Fie A,B,C,D, patru puncte necoplanare. Să se arate că $AB \perp CD$ şi $AC \perp BD$ implică $AD \perp BC$
Soluţie: Ducem $AH \perp (BCD)$
$AH \perp (BDC)$, $CD \subset (BCD) \Rightarrow AH \perp CD$



Deoarece $CD \perp AB$ și $CD \perp AH$ rezultă $CD \perp (ABH)$ deci $CD \perp BH$

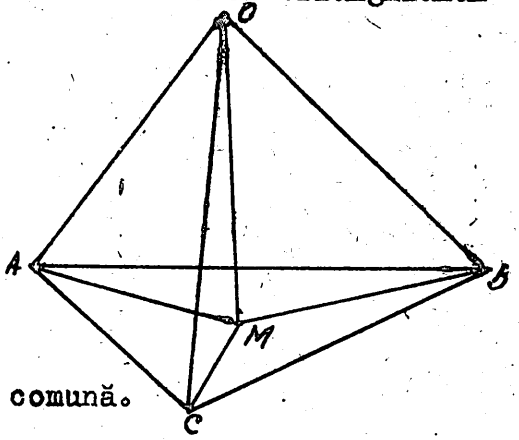
Analog arătăm că $CH \perp BD$. Rezultă că BH și DH sînt înălțimi în ΔBCD, deci H este ortocentru.

Rezultă deci $DH \perp BC$

Din $AH \perp BC$ și $DH \perp BC$ rezultă $BC \perp (AHD)$ adică $BC \perp AD$.

27°. Pe muchiile unui unghi triedru cu vîrful O se iau punctele A,B,C, astfel ca : $|OA| \equiv |OB| \equiv |OC|$.

Să se arate că piciorul perpendicularei din O pe planul (A,B,C) coincide cu punctul de intersecție al mediatoarelor triunghiului ABC.



Soluție:

Fie M piciorul perpendicularei dusă din O pe planul (ABC).

Triunghiurile dreptunghice OAM, OBM și OCM sînt congruente avînd:

$|OA| \equiv |OB| \equiv |OC|$ și $|OM|$ latură comună.

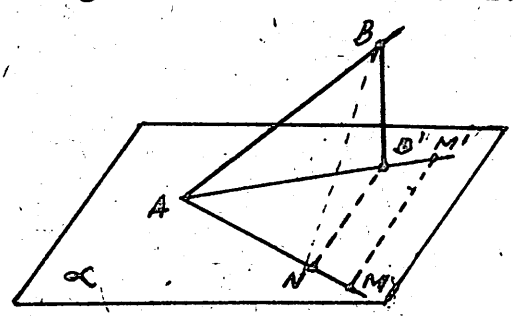
Rezultă că și $|AM| \equiv |BM| \equiv |CM|$ adică M este punctul de intersecție al mediatoarelor triunghiului ABC.

§ 2. Inegalități geometrice

Pag. 75

1. Cu notațiile figurii V - 11 avem de asemenea $\hat{MAB'} < \hat{MAB}$

Soluție:



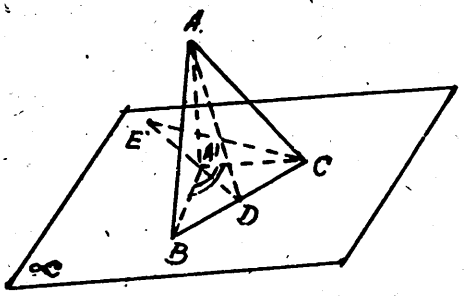
Fie $MM' \perp AB'$, $M' \in AB'$. Cum $MM' \perp BB' \Rightarrow$ că $MM' \perp (ABB')$

Aplicînd teorema 1 semidreptei $[AM$ şi planului ABB' avem :

$$\widehat{M'AM} < \widehat{BAM} \text{ sau } \widehat{MAB'} < \widehat{MAB}$$

2. Vîrful A al unui triunghi isoscel ABC ($|AB| \equiv |AC|$) se proiectează ortogonul în A' pe un plan α ce trece prin BC. Arătaţi că $\widehat{BA'C} > \widehat{BAC}$

Soluţia:



Notăm cu D mijlocul lui $[BC]$ şi $E \in |DA'$ $|DE| \equiv |DA|$.

Deoarece $AA' \perp \alpha$ şi $AD \perp BC \Rightarrow A'D \perp BC$

(T.celor trei perp.) $\Delta ADC \equiv \Delta EDC$ (DC = lat.com, $|DE| \equiv |DA|$, ambele Δ drep.) $\Rightarrow \widehat{DAC} \equiv \widehat{A'EC}$, $m(\widehat{BA'C}) = 2m(\widehat{DA'C})$ ($\Delta BA'C$ = Δ isoscel)

$$m(\widehat{DA'C}) > m(\widehat{DEC}) \text{ dar } m(\widehat{DEC}) = m(\widehat{DAC})$$
$$\Rightarrow m(\widehat{BA'C}) > m(\widehat{BAC}).$$

3) Pag. 76

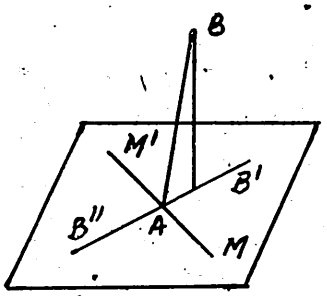
Cu notaţiile teoremei 1, fie $[AB''$ semidreapta opusă lui $[AB'$.

Să se arate că pentru orice punct $M \in \alpha - [AB$ avem $\widehat{B''AB} > \widehat{MAB}$

Soluţie:

Considerăm $M' \in \alpha$ aşa fel ca $A \in (MM')$

Conform teoremei 1 vom avea: $\widehat{B'AB} < \widehat{MAB}$ şi $\widehat{B'AB} < \widehat{M'AB}$

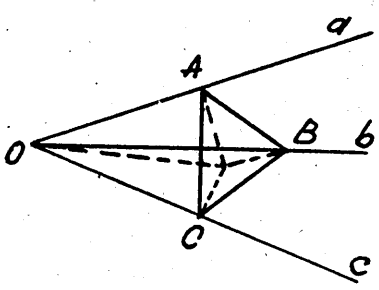


unghiurile $\widehat{MAB}$ şi $\widehat{M'AB}$.
$\widehat{B'AB}$ şi $\widehat{B''AB}$

sînt suplimentare, $\Rightarrow$

$\widehat{B''AB} > \widehat{MAB}$ $(\forall) M \in \alpha - [AB'$

4) Arătaţi că pentru orice unghi triedtru $\hat{abc}$ avem: $m(\hat{ab}) + m(\hat{bc}) + m(\hat{ca}) < 360^\circ$



Soluţie:

Fie punctele A,B,C care aparţin dreptelor a,b,c, aşa fel ca $|OA| = |OB| = |OC|$. Perpendiculara din O pe planul triunghiului ABC cade în punctul M de intersecţie al mediatoarelor.

Conform ex.2 pag.75 avem :

$$\hat{AMB} > \hat{AOB} \equiv \hat{ab}$$
$$\hat{BMC} > \hat{BOC} \equiv \hat{bc}$$
$$\hat{CMA} > \hat{COA} \equiv \hat{ca}$$

a) Dacă $M \in$ inter. $\hat{ABC} \Rightarrow$

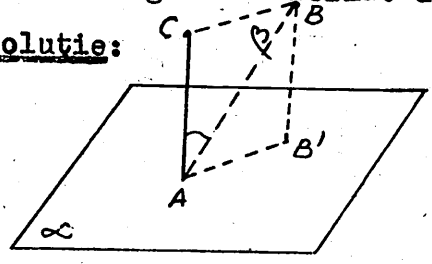
$$m(\hat{AMB}) + m(\hat{BMC}) + m(\hat{CMA}) = 360^\circ$$
$$\Rightarrow m(\hat{ab}) + m(\hat{bc}) + m(\hat{ca}) < 360^\circ$$

b) Dacă M aparţine oricăruia dintre segmentele AB, BC, CA, inegalitatea este evidentă.

c) Dacă $M \notin ABC \cup$ int. tor. Fie A în semiplanul opus faţă de BC. Rezultă $m(\hat{AMB}) + m(\hat{CMA}) = m(\hat{BAC})$, $m(\hat{AMB}) + m(\hat{BMC}) + m(\hat{CMA}) = 2m(\hat{BAC}) < 360^\circ$

5) Fie α un plan, $A \in \alpha$ iar B şi C două puncte de aceeaşi parte al lui α astfel ca $AC \perp \alpha$. Arătaţi că $\hat{CAB}$ este un complement al unghiului format de $[AB$ cu α.

Soluţie:



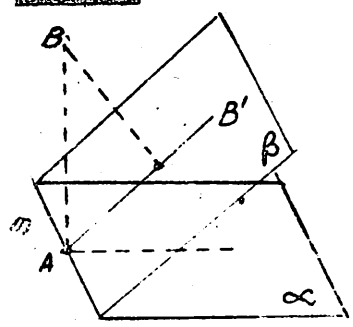
$BB' \perp \alpha$ deoarece $CA \perp \alpha \Rightarrow CA \parallel BB'$

BB' şi AC determinînd un plan β în care avem: $AB' \perp AC$ şi $B \in$ int $\hat{CAB'}$ de unde rezultă că $\hat{CAB}$ este complementul unghiului BAB', adică a unghiului format de $[AB$ cu planul α.

6) Fie $\hat{\alpha\beta}$ un unghi diedru cu muchia „m" şi $A \in m$. Să se arate că dintre toate semidreptele cu originea A şi conţinute în semiplanul

β', aceea formează unghiul cel mai mare posibil cu planul α, care este perpendiculară pe m.

Soluţie:



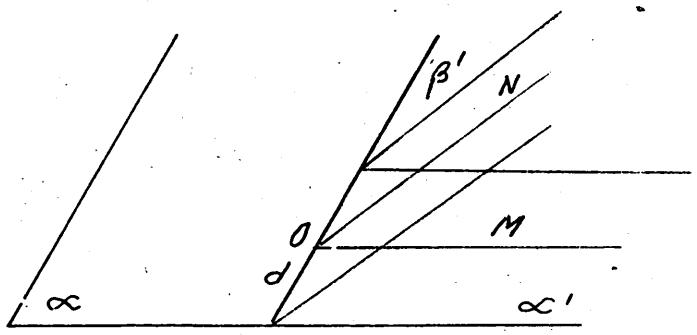
Dreapta din β care face cel mai mare unghi cu planul α este aceea care face cel mai mic unghi cu perpendiculara AB pe muchia m. Conform definiţiei, dreapta din β care face cel mai mic unghi cu AB este chiar proiecţia lui AB pe β, adică AB'. Deoarece $AB \perp m$ şi $BB' \perp m \Rightarrow$ $m \perp (ABB')$, deci $m \perp AB'$

Pag. 77

§3. Măsura unui unghi diedru

1. Fie α un plan, $\mathcal{C}$ un semispaţiu închis limitat de α, α' un semiplan conţinut în α şi a un număr real, cuprins între 0 şi 180. Să se arate că există un singur semiplan β', având frontieră comună cu α', astefl încît $\beta' \subset \mathcal{C}$ şi $m(\alpha' \beta') = a$

Soluţie:



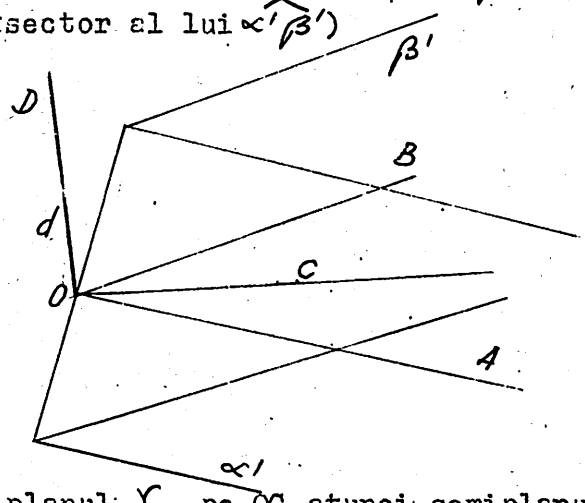
a) Fie O un punct pe frontiera d a lui α' şi β'. Ducem $OM \perp d$, $OM \subset \alpha'$ şi $ON \perp d$, $ON \subset \beta'$ unde $\beta' \subset \mathcal{C}$ şi $m(\widehat{\alpha', \beta'}) = a$.

Dacă ar mai exista un alt semiplan $\gamma \subset \mathcal{C}$, $\gamma \neq \beta'$ pentru care $m(d', \gamma) = a$, atunci considerînd $\gamma \cap (MON) = OP$ rezultă $|ON \subset int\ \widehat{MOP}$ sau $|OP \subset int.\ \widehat{MON}$. In aceste situaţii avem: $a = m(\widehat{MON}) < m(\widehat{MOP}) = a$ sau $a = m(\widehat{MOP}) < m(\widehat{MON}) = a$. Imposibil.

b) Luăm două puncte O, O' pe frontieră şi $M, M' \in \alpha'$ astfel încît $MO \perp d$, $M'O' \perp d$ (d frontiera lui α). Ducem două plane π şi π' perpendiculare pe d ce conţine OM şi O'M'. Considerăm în π şi π' punctele N respectiv N' astfel ca $ON \perp d$ şi $O'N' \perp d$ şi $m(MON) = a$ şi $m(M'O'N') = a$.

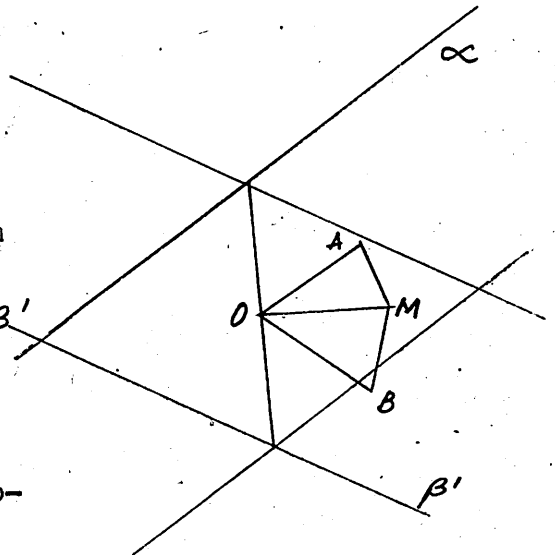
Semidreptele $|ON$ şi $|O'N'$ sînt paralele şi ele determină un semiplan β' care este unic. Măsura unghiului diedru (α', β') este tocmai numărul $a = m(\widehat{MON}) = m(\widehat{M'O'N'})$.

2.Fie $\widehat{\alpha'\beta'}$ un unghi diedru propriu.Construiţi un semiplan γ' astfel ca $m(\alpha'\gamma') = m(\gamma'\beta')$
Arătaţi că problema are două soluţii dintre care una este situată în interiorul $\widehat{\alpha'\beta'}$(numit semiplanul bisector al lui $\widehat{\alpha'\beta'}$;suportul său se numeşte planul bisector al lui $\widehat{\alpha'\beta'}$)



Soluţie:
Fie punctul $O \in d$ unde d este frontiera semiplanelor α' şi β'
Ducem prin O un plan γ perpendicular pe d.
$\gamma \cap \alpha' = [OA$ şi $\gamma \cap \beta' = [OB$
In planul γ construim bisectoarea interioară OC a unghiului AOB.Semiplanul determinat de d şi $[OC$ este cel căutat.
Dacă OD este perpendiculara în planul γ pe OC,atunci semiplanul detrminat de d şi $[OC$ constituie a doua soluţie a problemei.

3.Să se arate că locul geometric al punctelor egal depărtate de două plane secante α şi β este format din două plane perpendiculare şi anume din reuniunea planelor bisectoare ale unghiurilor diedre determinate de α şi β .



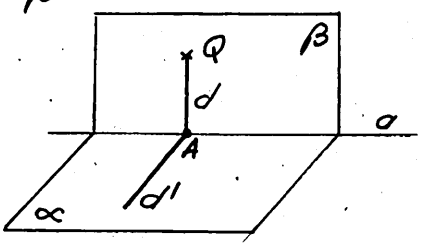
Soluţie:
Fie $d = \alpha \cap \beta$
Fie M un punct arbitrar egal depărtat de semiplanele α', β' şi definite la probleme 2.Arătăm că M se găseşte pe semiplanul bisector al semiplanelor α' şi β' ,Ducem din M perpendicularele MA şi MB pe planele α respectiv β şi fie O punctul unde planul(MA, MB) intersectează dreapta d.$(M \in int(\alpha', \beta'))$
$\Delta OAM \equiv \Delta OBM$ $\begin{cases} |AM| \equiv |BM| \\ |OM| - \text{latură comună (caz I.C)} \end{cases}$
Rezultă că $\widehat{MOA} \equiv \widehat{MOB}$ adică M se găseşte în semiplanul bisector al semiplanelor α', β'.

Reciproc,dacă M se găseşte într-un semiplan bisector al semiplanelor α', β'(definite la **problema** 2),atunci el este egal depărtat de

cele două semiplane α' şi β'.
Rezultă tot din congruenţa triunghiurilor OAM şi OBM(caz I.U.)
Analog se demonstrează cazurile $M \in int(\alpha', \beta'')$;
$M \in int(\alpha'', \beta'')$ şi $M \in int(\alpha'', \beta')$

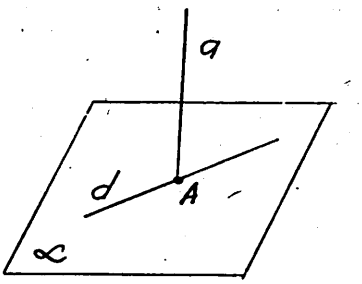
.Pag.78

4. Dacă α şi β sînt două plane perpendiculare, $Q \in \beta$ şi d perpendiculara prin Q pe α ,să se arate că $d \subset \beta$.



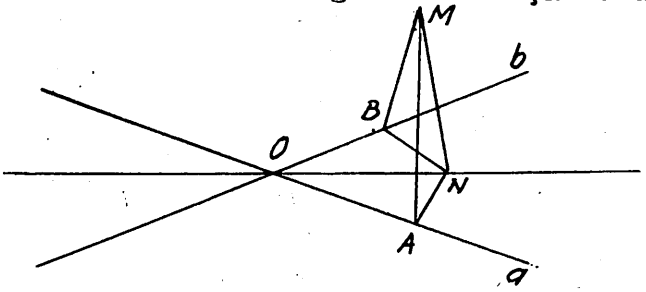
Soluţie:
$\alpha \cap \beta = a$
Fie $d \perp a$, $d \cap a = A$
$d \perp \alpha$ în planul α ducem $d' \perp a$
deoarece $\alpha \perp \beta$ rezultă că :
$d \perp d'$ $d' \subset \alpha$
Conform unicităţii perpendiculare într-un punct rezultă că $d \subset \beta$.

5.Se consideră o dreaptă d inclusă în planul α .Arătaţi că reuniunea dreptelor perpendiculare pe α ,care intersectează dreapta d, este un plan perpendicular pe α .



Soluţie:
Fie $a \perp d$, $a \perp \alpha$, $a \cap d = \{A\}$
Dreptele d şi a detrmină
un plan $\beta \perp \alpha$ din care rezultă
că toate dreptele perpendiculare
pe α sînt conţinute în planul β.

6.Să se afle locul geometric al punctelor la egală distanţă de două drepte concurente.



Soluţie:
Fie M un punct egal
depărtat de dreptele
concurente a şi b.
Fie N piciorul perpen-
dicularei dusă din M
pe planul(a,b).Ducem $NA \perp a$, $NB \perp b$.

Din teorema celor trei perpendiculare $MA \perp a$ şi $MB \perp b$.

$\triangle MBN \equiv \triangle MAN \begin{cases} |MB| \equiv |MA| \\ |MN| - \text{latură comună (caz I.C.)} \end{cases}$

Rezultă $|NB| \equiv |NA|$ adică ON este bisectoarea lui($\hat{a,b}$) cum $MN \perp (a,b)$ rezultă că(ON,MN) este plan bisector al lui(a,b). Reciproc,dacă M $\in$ planului determinat de bisectoarea ON a lui$(\hat{a,b})$ şi este perpendicular pe planul(a,b),atunci Meste egal depărtat de a şi b.

$$\Delta OBN \equiv \Delta OAN \begin{cases} |ON| - \text{comună} \\ B\hat{O}N \equiv A\hat{O}N \end{cases} \quad (i.u) \Rightarrow |BN| \equiv |AN|$$

$$\Delta MBN \equiv \Delta MAN \begin{cases} |BN| \equiv |AN| \\ |MN| - \text{comună} \end{cases} \quad (c.c) \Rightarrow |MB| \equiv |MA|$$

Cum unghiurile alăturate ale dreptelor a şi b sînt suplementare bisectoarele acestora sînt perpendiculare şi deci locul geometric este format din două plane formate de cele două bisectoare şi care sînt perpendiculare pe planul dreptelor(a,b).

7.Arătaţi că un plan α perpendicular pe două plane secante este perpendicular pe intersecţia lor.

Soluţie:

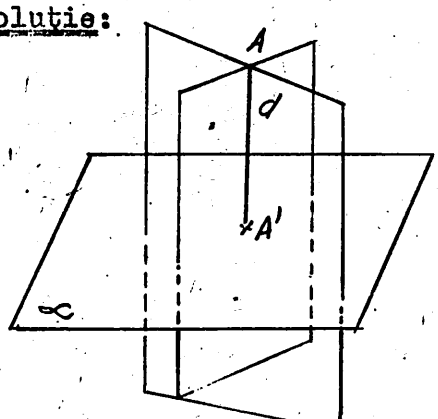
Fie $\alpha \perp \beta$ şi $\alpha \perp \gamma$, $\beta \cap \gamma = d$

Fie $\{M\} = \alpha \cap \beta \cap \gamma$ prin M ducem dreapta $d' \perp \alpha$. Conform ex.4 $\Rightarrow d' \subset \beta$ şi $d' \subset \gamma \Rightarrow d' = \beta \cap \gamma$

deci dreapta d este $d' \perp \alpha$.

8.Fie A un punct nesituat în planul α .Să se afle intersecţia tuturor planelor care conţin punctul A şi sînt perpendiculare pe planul α .

Soluţie:

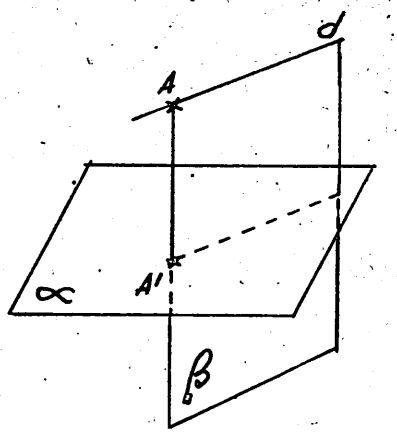


Fie β un plan ce conţine punctul A, $\beta \perp \alpha$ .Ducem o dreaptă d ce trece prin A şi este perpendiculară pe planul α .Conform exerciţiului 4 dreaptă $d \subset \beta$ .Toate planele ce trec prin A şi sînt $\perp$ pe α se intersectează după dreapta d.

9.Duceţi printr-o dreaptă dată un plan perpendicular pe un plan dat.

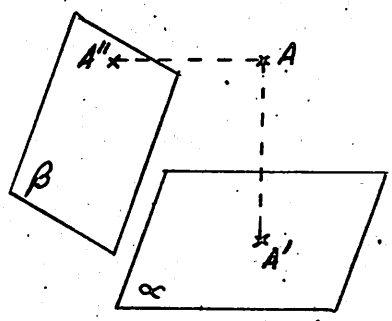
Soluţie:

Fie o dreaptă d dată şi un plan α .Considerăm $A \in d$ şi ducem $AA' \perp \alpha$ .Planul β determinat de dreptele d şi AA' va fi perpendicular pe α ,deoarece planul β conţine o dreaptă perpendiculară pe α .



10.Duceţi printr-un punct dat un plan perpendicular pe două plane date.

Soluţie:

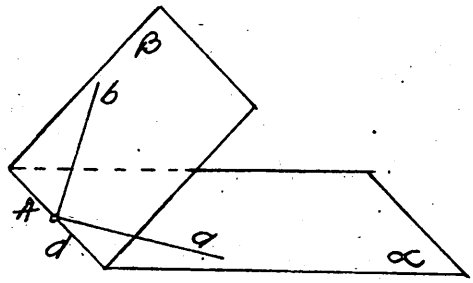


Ducem $AA' \perp \alpha$ şi $AA' \perp \beta$.
Dreptele AA' şi AA" determină planul γ , $\gamma \perp \alpha$ şi $\gamma \perp \beta$
In cazul cînd $\alpha \parallel \beta$ vom avea o infinitate de plane perpendiculare pe α şi β ,şi care să conţină punctul A.

11.Intersectaţi un unghi diedru cu un plan astfel ca unghiul de secţiune să fie drept.

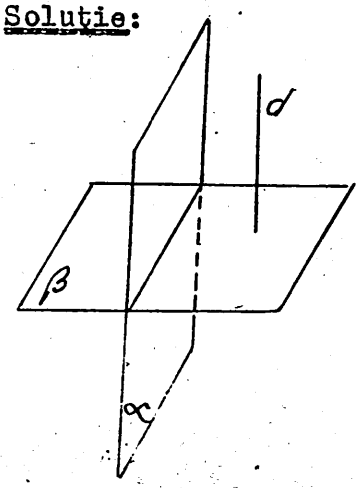
Soluţie: Fie $A \in d$

Prin A ducem o semidreaptă $a \subset \alpha$ în β ex.o semidreaptă $b \subset \beta$ astfel $a \perp b$
Planul ce conţine pe a şi b este cel căutat.



12.Arătaţi că o dreaptă d şi un plan α perpendiculare pe alt plan,sînt paralele între ele sau dreapta d este conţinută în planul α .

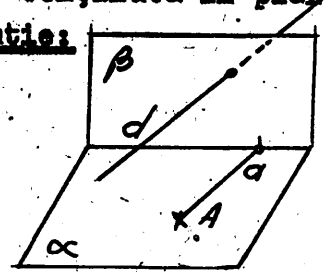
Soluţie:



$\alpha \perp \beta$
$d \perp \beta$
Dacă d nu se intersectează cu α atunci $d \parallel \alpha$ .Dacă $d \cap \alpha = M$ atunci $d \subset \alpha$ deoarece $M \in \alpha$,
$\alpha \perp \beta$ şi $d \perp \beta$

13. Fie α și β două plane perpendiculare $A \in \alpha$, iar d o dreaptă perpendiculară pe β. Să se arate că paralela prin A la d este conținută în planul α.

Soluție:

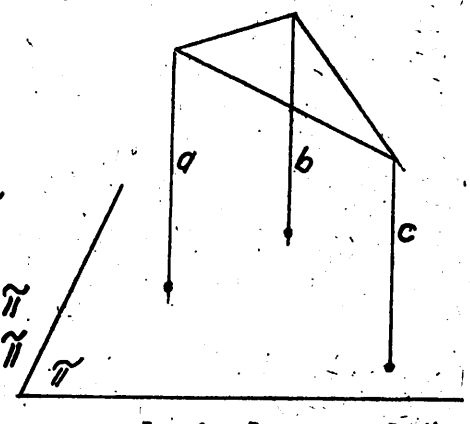


$d \perp \beta$
$A \in \alpha$ fie $a \parallel d$
din faptul că $d \perp \beta$ și
$a \parallel d \Rightarrow a \perp \beta$, dar
$A \in \alpha$, $A \in a$ și $\alpha \perp \beta$
$\Rightarrow a \subset \alpha$

14. Dacă trei plane perpendiculare pe un plan se intersectează două cîte două după dreptele a, b, c arătați că $a \parallel b \parallel c$.

Soluție:

Fie planele α, β, γ perpendiculare pe planul $\tilde{\pi}$ și
$\alpha \cap \beta = c$, $\alpha \cap \gamma = b$, $\beta \cap \gamma = a$
Deoarece $\alpha \perp \tilde{\pi}$ și $\beta \perp \tilde{\pi} \Rightarrow c = \alpha \cap \beta \perp \tilde{\pi}$
(vezi problema 7 pag.77)
Analog $\alpha \perp \tilde{\pi}$ și $\gamma \perp \tilde{\pi} \Rightarrow b = \alpha \cap \gamma \perp \tilde{\pi}$
$\beta \perp \tilde{\pi}$ și $\gamma \perp \tilde{\pi} \Rightarrow a = \beta \cap \gamma \perp \tilde{\pi}$



Cum dreptele a, b, c sînt perpendiculare pe același plan rezultă că ele sînt paralele (vezi problema 6 pag.71).

15. Dintr-un punct A se duc perpendicularele AB și AC pe planele fețelor unui unghi diedru. Să se arate: $m(\hat{BAC}) = m(\hat{\alpha', \beta'})$ sau $m(\hat{BAC}) = 180^\circ - m(\hat{\alpha', \beta'})$

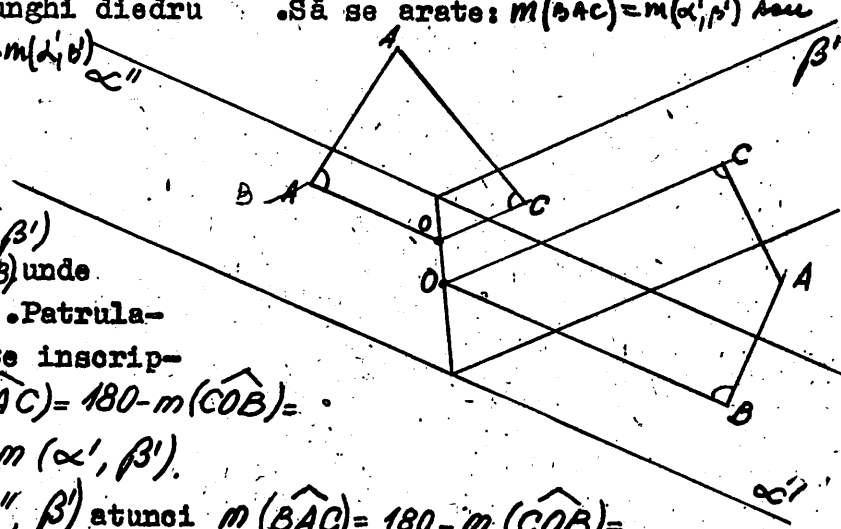
Soluție:

Fie $A \in int.(\alpha', \beta')$ și $\{O\} = d \cap (AC, AB)$ unde d este $\alpha' \cap \beta'$. Patrulaterul ACOB este inscriptibil și $m(\hat{BAC}) = 180 - m(\hat{COB}) =$

$= 180 - m(\alpha', \beta')$.

Dacă $A \in int.(\alpha'', \beta')$ atunci $m(\hat{BAC}) = 180 - m(\hat{COB}) =$

$= 180 - [180 - m(\alpha', \beta')] = m(\alpha', \beta')$.



§ 4. Proiecţii ortogonale

Pag. 79

1. Să se arate: dacă dreptele d şi d' sînt paralele, atunci $pr_\alpha d \parallel pr_\alpha d'$ sau $pr_\alpha d = pr_\alpha d'$. Ce putem spune despre planele proiectante ale lui d şi d'?

Soluţie:

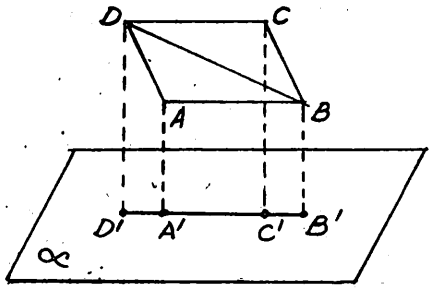
Presupunem că $pr_\alpha d \nparallel pr_\alpha d'$ atunci proiecţiile se vor întîlni într-un punct A.

Fie β şi γ planele proiectante, deoarece $\beta \perp \alpha$ şi $\gamma \perp \alpha \Rightarrow \alpha \perp \beta \cap \gamma = a$

Dreapta a conţine punctul A deoarece $A \in \beta \cap \gamma$. Fie $a \cap (dd') = \{B\} \Rightarrow BA \perp \alpha$ şi cum $\{A\} = pr_\alpha d \cap pr_\alpha d' \Rightarrow$ $\Rightarrow B \in d \cap d'$ deci contrazice faptul că $d \parallel d'$ deci $\Rightarrow$ că $pr_\alpha d \parallel pr_\alpha d'$. Dacă $(dd') \perp \alpha \Rightarrow pr_\alpha d = pr_\alpha d'$, dacă $d \perp \alpha$ şi $d' \perp \alpha' \Rightarrow$ proiecţiile vor fi două puncte.

2. Arătaţi că proiecţia unui paralelorgram pe un plan este un paralelogram sau un segment.

Soluţie:

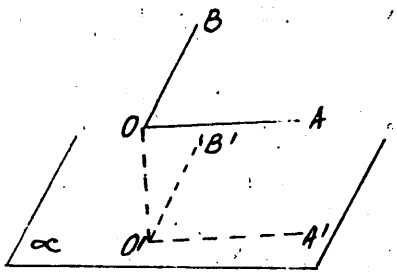


a) Dacă paralelorgramul nu este perpendicular pe planul α atunci proiecţiile laturilor pe planul α vor fi paralele două cîte două, deci proiecţia va fi un paralelogram.

b) Dacă paralelogramul ABCD este $\perp$ pe α atunci proiecţia lui pe α va fi proiecţia diagonalei mari a paralelogramului pe planul α.

3) Stiind că latura $[OA]$ a unghiului drept $\widehat{AOB}$ este paralelă cu planul α. Să se arate că proiecţia pe planul α a unghiului $\widehat{AOB}$ este un unghi drept.

Soluţie:



$\widehat{A'O'B'}$ proiecţia pe α a lui $\widehat{AOB}$

$OA \parallel O'A' \quad OO' \perp O'A'$

$\Rightarrow OO' \perp OA$ dar

ştim că $OA \perp OB \Rightarrow OA \perp (BOO')$.

din faptul că $OA \parallel O'A' \Rightarrow$ că şi

$O'A' \perp (OO'B')$

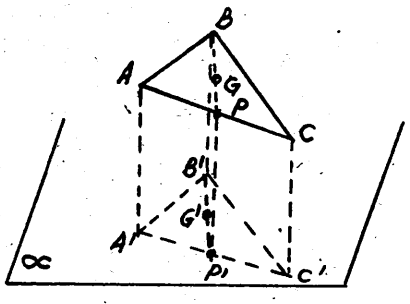
$\Rightarrow O'A' \perp O'B'$

deci $\widehat{A'O'B'} = 90°$

4) Fie $A'B'C'$ proiecţia $\triangle ABC$ pe planul α.
Arătaţi că centrul de greutate al triunghiului ABC se proiectează

în centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$. Este valabil un rezultat asemănător pentru ortocentru?.

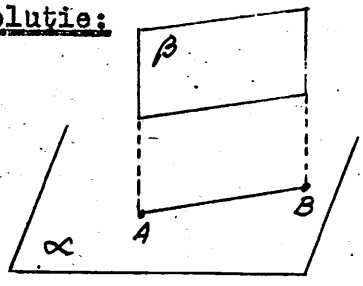
Soluţie:



Fie P mijlocul lui AC. $\|AP\| \equiv \|PC\|$
Proiecţia lui P pe $\propto$ este P'
$\|A'P'\| \equiv \|P'C'\|$.
Mediana B P se proiectează tot ca mediană, Fie $G \in |BP|$ aşa încît $\|GB\| = 2\|GP\|$ şi G' proiecţia pe $p/\propto$ a lui $G \Rightarrow \|G'B'\| = 2\|G'P'\|$
unde G şi G' sînt centrele de greutate ale ΔABC şi $A'B'C'$.
Pentru ortocentru nu este adevărat deoarece unghiul drept se proiectează tot după un unghi drept numai dacă o latură este paralelă cu planul $\propto$.

5) Să se afle locul geometric al punctelor din spaţiu care se proiectează pe un plan după o dreaptă dată.

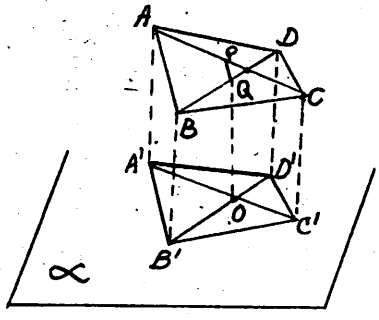
Soluţie:



Locul geometric al puntelor din spaţiu ce se proiectează pe un plan după o dreaptă, constituie mulţimea punctelor ce aparţin planului $\beta \perp \propto$.

6) Fiind date punctele necoplanare A,B,C,D. Să se determine un plan pe care punctele A,B,C,D, se proiectează în vîrful unui paralelogram.

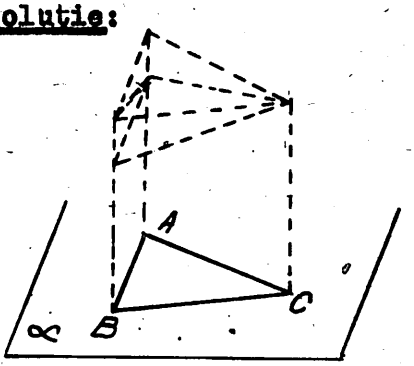
Soluţie:



ca proiecţiile lui A,B,C,D pe planul $\propto$ să fie un paralelogram $A'B'C'D'$ trebuie ca proiecţia mijlocului segmentului AC să coincidă cu proiecţia mijlocului segmentului B D. Acest lucru este posibil dacă planul $\propto$ este perpendicular pe dreapta ce trece prin mijlocul dreptei ce uneşte P şi Q.

7) Se consideră toate triunghiurile din spaţiu care se proiectează pe un plan α după acelaşi triunghi. Să se afle locul geometric al centrelor lor de greutate.

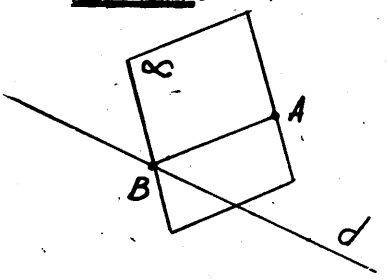
Soluţie:



Vîrfurile triunghiurilor din spaţiu care se proiectează pe un plan α după acelaşi ΔABC, trebuie să se situeze pe perpendicularele în A,B,C, pe planul α. Conform exer.4 locul geometric al centrului de greutate se află pe perpendiculara în centrul de greutate al triunghiului ABC, pe planul α.

8) Fie A un punct nesituat pe dreapta d.
Determinaţi un plan α astfel încît $pr_{\alpha} d$ să treacă prin $pr_{\alpha} A$

Soluţie:

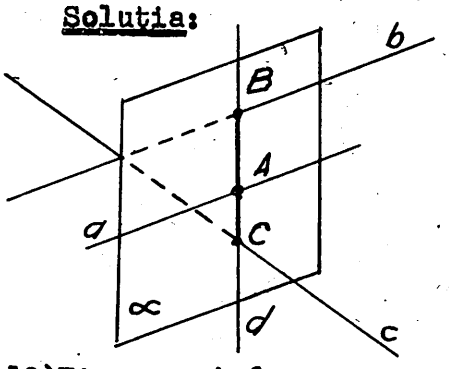


Fie B proiecţia lui A pe d

$$pr_{\alpha} A \in pr_{\alpha} d \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B \in d$$
$$d \perp AB$$

9) Determinaţi un plan pe care trei drepte date să se proiecteze după drepte concurente.

Soluţia:

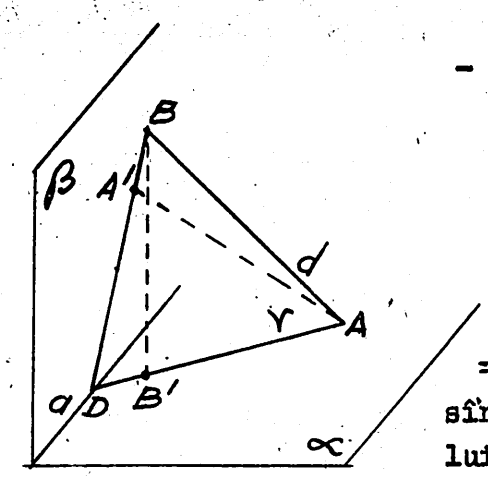


Considerăm dreptele date a,b,c. Prin dreapta a ducem un plan α care intersectează dreptele b şi c în B şi respectiv C, $BC \cap \alpha = \{A\}$
Punctele A, B şi C se află pe aceiaşi dreaptă d.

10) Fie α şi β două plane care se taie după o dreaptă a şi fie d o dreaptă perpendiculară pe a. Să se arate că proiecţiile dreptei d pe planele α şi β sînt concurente.

Soluţie:

$d \cap \alpha = \{A\}$
$d \cap \beta = \{B\}$
A' şi B' proiecţia lui A,B pe planele β şi α
$a \perp d$
$a \perp BB' \Rightarrow a \perp \gamma \quad \gamma = (dBB')$



dar $\alpha \subset \beta \Rightarrow \beta \perp \gamma$

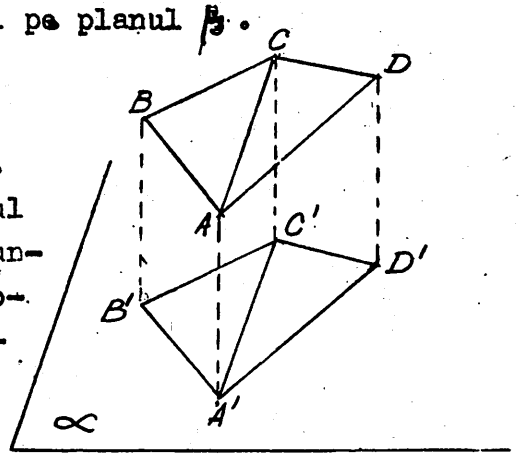
$AA' \perp \beta$, $A \in \gamma$ $\beta \perp \gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow AA' \subset \gamma \Rightarrow A'B = \gamma \cap \alpha$, $a = \alpha \cap \beta$

$\Rightarrow A'B$ şi AB' ce aparţin planului γ sînt concurente într-un punct D ce aparţine lui a. Dar $D \in \alpha$.
$D \in \beta$
$D \in \gamma$

Pag. 81

12. Arătaţi că formula (1) este valabilă şi înreazul în care S reprezintă aria unei suprafeţe poligonale situate în planul α ,iar S' aria proiecţiei ei pe planul β.



Soluţie:
Considerăm suprafaţa poligonală un patrulater oarecare ABCD. Ducînd diagonala AC patrulaterul ABCD s-a descompus în două triunghiuri ABC şi ACD ale căror proiecţii pe planul α sînt triunghiurile A'B'C' şi respectiv A'C'D'.

$\sigma[A'B'C'] = \sigma[ABC] \cdot \cos\varphi$

$\sigma[A'C'D] = \sigma[ACD] \cdot \cos\varphi$ unde φ este unghiul dintre planele ABCD şi A'B'C'D'. Prin însumarea celor două relaţii rezultă:

$$S' = \sigma(A'B'C') + \sigma[A'C'D'] = \sigma[ABC] \cdot \cos\varphi + \sigma[ACD] \cdot \cos\varphi =$$
$$= [\sigma[ABC] + \sigma[ACD] \cdot \cos\varphi = S \cdot \cos\varphi.$$

Analog se demonstrează pentru orice altă suprafaţă poligonală.

13. Fie ABC un triunghi $\|AB\| = 9$, $\|BC\| = 10$, $\|AC\| = 17$. Proiecţia triunghiului ABC pe un plan β are aria egală cu 18 .Să se afle măsura unghiului planelor(ABC) şi β .

Soluţie:
Folosind formula lui Heron aflăm aria triunhiului ABC

$$\sigma[ABC] = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c}$$

$$p = \frac{9+10+17}{2} = 18$$

$$\sigma[ABC] = \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1} = 9 \cdot 4 = 36$$

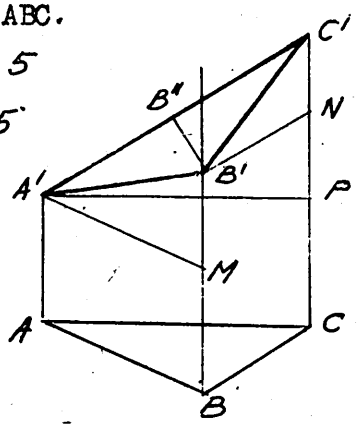
$$\cos\alpha = \frac{\sigma[A'B'C']}{\sigma[ABC]} = \frac{18}{16} = \frac{1}{2} \quad \text{deci} \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

unde α este unghiul dintre planele(ABC) şi β ,iar A'B'C' proiecţia lui ABC pe planul β .

14.Se dă triunghiul ABC cu laturile $\|BC\|=4$, $\|CA\|=6$, $\|AB\|=3$. Se ridica în A,B,C perpendiculare pe planul triunghiului şi se iau pe ele,de aceeaşi parte a planului(ABC),punctele A',B',C' astfel ca $\|AA'\|=2$, $\|BB'\|=6$, $\|CC'\|=9$ .Să se calculeze măsura unghiului planelor (ABC) şi A'B'C':

Soluţie:

Aflăm lungimile laturilor triunghiului ABC.



Din $\Delta A'MB'$, $\|A'B'\|=\sqrt{3^2+(6-2)^2}=\sqrt{9+16}=5$

Din $\Delta B'NC'$, $\|B'C'\|=\sqrt{16+(6-3)^2}=\sqrt{25}=5$

Din $\Delta A'PC'$, $\|A'C'\|=\sqrt{36+(9-2)^2}=\sqrt{85}$

Ducem $BB''\perp A'C'$, $B''\in A'C'$

$$\|B'B''\|=\sqrt{\|A'B'\|^2-\|A'A''\|^2}=\sqrt{25-\frac{85}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$$

Aflăm ariile celor două triunghiuri

Fie S,S' ariile triunghiurilor ABC respectiv A'B'C'.Din formula lui Heron găsim:

$$S=\sqrt{\frac{13}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{455}}{4} \qquad S'=\frac{\sqrt{85}\cdot\frac{\sqrt{15}}{2}}{2}=\frac{5\sqrt{3\cdot 17}}{4}$$

$$\cos\alpha=\frac{\frac{\sqrt{455}}{4}}{\frac{5\sqrt{3\cdot 17}}{4}}=\frac{\sqrt{455}}{5\sqrt{51}} \qquad \alpha=\arccos\frac{\sqrt{455}}{5\sqrt{51}}$$

15. Triunghiul ABC,avînd laturile $\|AB\|=5$, $\|AC\|=12$, $\|BC\|=13$, se proiectează pe un plan paralel cu latura [AC] după triunghiul A'B'C'.Stiind că $\|A'B'\|=4$ să se calculeze $\|B'C'\|$ şi măsura unghiului planelor (ABC) şi (A'B'C').

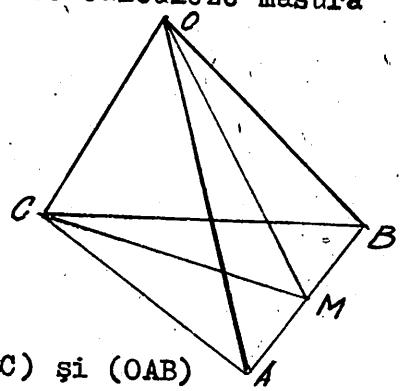
Soluţie:

Deoarece AC este paralelă cu planul după care se proiectează triunghiul ABC şi triunghiul ABC este dreptunghic înseamnă că şi triunghiul A'B'C' este dreptunghic.

$\cos\alpha=\frac{S'}{S}=\frac{\frac{12\cdot 4}{2}}{\frac{12\cdot 5}{2}}=\frac{4}{5}$ S' şi S fiind ariile triunghiurilor A'B'C' şi ABC.

Deci $\alpha=\arccos\frac{4}{5}$

16. Se consideră dreptele OA, OB, OC perpendiculare două cîte două. Stiind că $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ să se calculeze măsura unghiului planelor (ABC) şi (OAB).



Soluţie:

Ducem $CM \perp BA$ (1)

Deoarece $CO \perp OB$ şi $CO \perp OA$

Rezultă $CO \perp (OBA)$ deci $CO \perp BA$ (2)

Din (1) şi (2) rezultă $BA \perp (OCM)$

Cum $OMC (OCM)$, rezultă $OM \perp BA$

Deci $\widehat{OMC}$ reprezintă unghiul planelor (ABC) şi (OAB)

$\|OM\| = \frac{\|OA\| \cdot \|OB\|}{\|AB\|}$ $\|OM\| = \frac{a.b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ($\triangle OAB$ este dreptunghic)

$\triangle OCM$ este dreptunghic, cu unghiul drept în O.

($OC \perp (OAB)$ şi $OM \subset (OAB)$)

Deci $tg\,\widehat{OMC} = \frac{\|OC\|}{\|OM\|} = \frac{c}{\frac{a.b}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{a.b}$

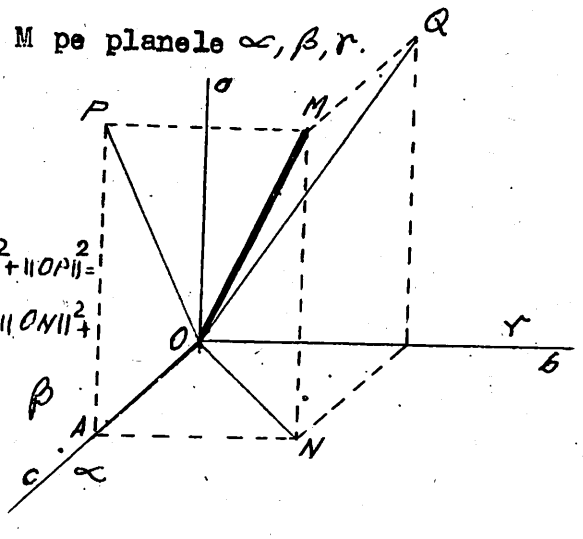
adică $\widehat{OMC} = arc\,tg\left(\frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\right)$

17. Să se arate că pătratul lungimii unui segment este egal cu semisuma pătratelor lungimilor proiecţilor acelui segment pe trei plane perpendiculare două cîte două.

Soluţie:

Fie N, P, Q proiecţiile punctului M pe planele α, β, γ.

Notăm $A = (PMN) \cap \alpha \cap \beta$



$$\|OM\|^2 = \|MN\|^2 + \|ON\|^2$$

$$\|OM\|^2 = \|MP\|^2 + \|OP\|^2$$

de unde: $2.\|OM\|^2 = \|MN\|^2 + \|MP\|^2 + \|ON\|^2 + \|OP\|^2 =$

$= \|MN\|^2 + \|AN\|^2 + \|ON\|^2 + \|OP\|^2 = \|AM\|^2 + \|ON\|^2 +$

$+ \|OP\|^2 = \|OQ\|^2 + \|ON\|^2 + \|OP\|^2$

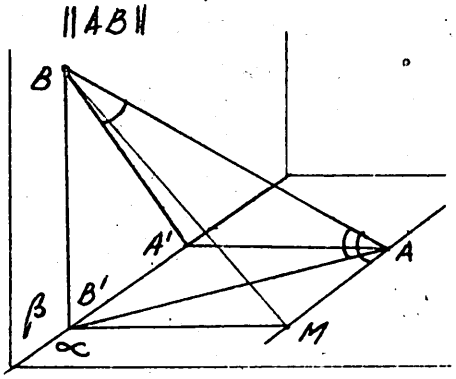
sau: $\|OM\|^2 = \frac{\|ON\|^2 + \|OP\|^2 + \|OQ\|^2}{2}$

18. O dreaptă taie două plane perpendiculare α şi β în A şi B. Fie A' şi B' proiecţiile punctelor A, B pe dreapta $\alpha \cap \beta$. Arătaţi că $\|AB\|^2 = \|AA'\|^2 + \|A'B'\|^2 + \|B'B\|^2$.

2. Dacă a, b, c sînt măsurile unghiurilor dreptei AB cu planele

α, β şi cu $\alpha \cap \beta$, atunci $\cos C = \frac{\|A'B'\|}{\|AB\|}$ şi

$$\sin^2 a + \sin^2 b = \sin^2 c$$



Soluţie:

1. Notăm cu M punctul de intersecţie al paralelelor duse din B' şi A la AA' şi la dreapta

$\alpha \cap \beta = d$

$BB' \perp \alpha$, $B'M \perp MA \Rightarrow BM \perp MA$

deci ΔBMA este dreptunghic

şi: $\|BA\|^2 = \|BM\|^2 + \|MA\|^2$

Dar şi $\Delta BB'M$ este dreptunghic

şi: $\|BM\|^2 = \|MB\|^2 + \|BB'\|^2$ cum: $|MA| \equiv |B'A'|$

şi $|MB'| \equiv |AA'|$ rezultă: $\|BA\|^2 = \|BM\|^2 + \|MA\|^2 = \|MB'\|^2 + \|BB'\|^2 + \|MA^2\|^2 =$

$= \|AA'\|^2 + \|BB'\|^2 + \|A'B'\|^2.$

2. $a = m(\widehat{BAB'})$; $b = m(\widehat{ABA'})$; $C = m(\widehat{BAM})$

În ΔMAB avem: $\cos C = \frac{\|AM\|}{\|AB\|} = \frac{\|A'B'\|}{\|AB\|}$

În $\Delta BAB'$ avem: $\sin a = \frac{\|BB'\|}{\|AB\|}$

În $\Delta ABA'$ avem: $\sin b = \frac{\|AA'\|}{\|BB'\|}$

În ΔBAM avem: $\sin C = \frac{\|BM\|}{\|AA'\|}$

Deci: $\sin^2 a + \sin^2 b = \frac{\|BB'\|^2}{\|AB\|^2} + \frac{\|AA'\|^2}{\|AB\|^2} = \frac{\|BB'\|^2 + \|AA'\|^2}{\|AB\|^2} =$

$= \frac{\|BB'\|^2 + \|MB'\|^2}{\|AB\|^2} = \frac{\|BM\|^2}{\|AB\|^2} = \sin^2 C$ şi deci $\sin^2 a + \sin^2 b = \sin^2 c$.

Pag.82.

19. Fie ABC un triunghi situat într-un plan α ,A'B'C' proiecţia lui pe un plan β , iar A"B"C" proiecţia triunghiului A'B'C' pe planul α .Notînd cu S,S',S" ariile triunghiurilor ABC,A'B'C', A"B"C" să se arate că S' este medie proporţională între S şi S"

Soluţie:

$S' = S \cos \alpha$

$S'' = S' \cos \alpha$ sau $\cos \alpha = \frac{S'}{S}$ de unde:

$S'' = S' \cdot \frac{S'}{S}$ adică $SS'' = S'^2$

Exerciţii recapitulative

pag.82

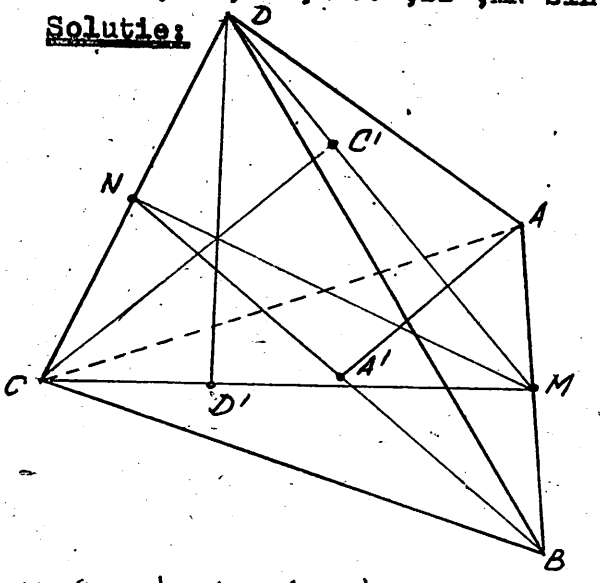
1. Un tetraedru [ABCD] are $|AC| \equiv |AD| \equiv |BC| \equiv |BD|$ M şi N fiind mijloacele muchiilor [AB],[CD], Să se arate:

a) MN $\perp$ AB, MN $\perp$ CD, AB $\perp$ CD.

b) Dacă A',B',C',D', sînt picioarele perpendicularelor duse din

vîrfurile A,B,C,D pe feţele opuse ale tetraedrului,punctele B, A',N sînt coliniare şi la fel AB'N; D,C',M; C,D',M.
c) AA',BB',MN şi CC',DD',MN sînt cîte trei drepte concurente.

Soluţie:



a) ΔADB isoscel $\{|AD| \equiv |BD|$
ΔACB isoscel $\{|AC| \equiv |BC|$
$\Delta ADB \equiv \Delta ACB \{|AB|$ (latură comună)
$\{|AD| \equiv |AC| \equiv |BC| \equiv |DB|$
(LLL)
M fiind mijlocul segmentului $|AB|$
$\Rightarrow DM \perp AB$
Analog $CM \perp AB$
$\{DM \perp AB \Rightarrow AB \perp (DMC)$
$\{CM \perp AB$
(CM şi DM determină planul (DMC) .
Deci $AB \perp DC$ $(DC \subset (DMC)$

$M \in (DMC)$ şi $N \in (DMC)$ Deci $dr\ MN \subset (DMC)$ deci $AB \perp MN$ sau $MN \perp AB$.

$|DM| \equiv |MC|$ deci ΔDMC isoscel

N fiind mijlocul segmentului $|DC| \Rightarrow MN \perp DC$

b) Fie $D' = \underset{(ABC)}{pr\ D}$ $DM \perp AB$ ABC ABC

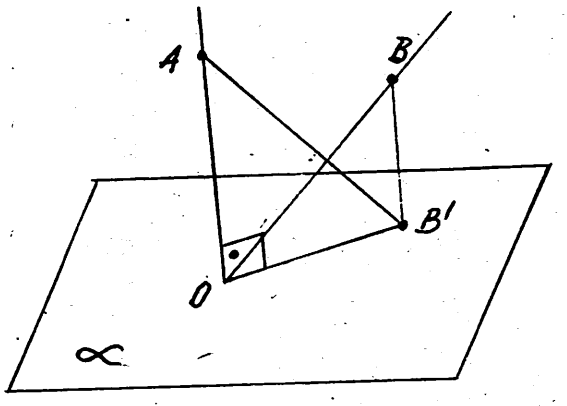
Atunci conform reciprocei teoremei celor trei perpendiculare $\Rightarrow D'M \perp AM$ dar şi $CM \perp AM$ deci $\Rightarrow CM = D'M$.
(în plan într-un punct al unei drepte se poate duce o singură perpendiculară)
Deci $\Rightarrow C, D', M$ coliniare
Analog se arată că A,B',N şi D,C',M sînt coliniare

c) In ΔDCM $\begin{cases} CC' \perp DM \\ MN \perp DC \\ DD' \perp CM \end{cases}$ deci CC',DD',MN fiind înălţimi sînt concurente,

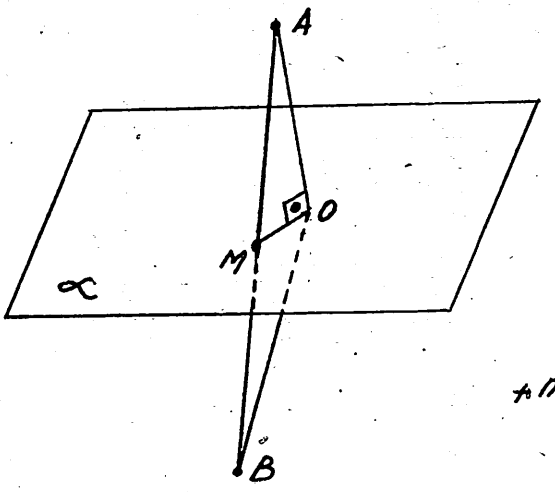
punctul de concurenţă fiind ortocentrul triunghiului DCM.
Analog în triunghiul ABN AA',BB',MN sînt înălţimi deci concurente sau:

b) Fie DD' înălţimea în triunghiul DCM $(DD' \perp CM, D' \in CM)$.
Deoarece $AB \perp (DCM) \Rightarrow DD'$ şi deci $DD' \perp (ABC)$ deoarece C,D',M sînt situate în planele(DCM)şi(ACB) $\Rightarrow$ D,C,M coliniare.

2. Dacă *semi*dreptele $[OA$ şi $[OB$ au originea lor în planul α, $OA \perp \alpha$ şi $OB \perp \alpha$ atunci cele două semidrepte formează un unghi ascuţit sau obtuz după cum sînt sau nu de aceeaşi parte a planului α.



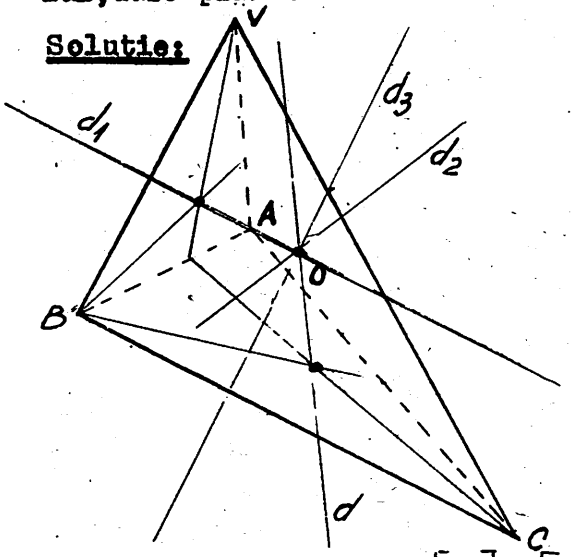
I. Semidreptele $[OA$ şi $[OB$ de aceeaşi parte a planului α, $O \in \alpha$
$(OAB) = \beta = (AOB')$ unde
$p_\alpha B = B'$ $\quad \alpha \cap \beta = OB'$
$\Delta AOB'$ dreptunghic în O
$[OB \subset int\, \hat{AOB} \Rightarrow$
$\Rightarrow m\hat{AOB} + m\hat{BOB'} = 90^\circ \Rightarrow$
$m\hat{AOB} < 90^\circ$ deci $\hat{AOB}$ este ascuţit



II. Punctele A şi B de o parte şi alta a planului α
$AO \perp \alpha$ $\quad$ at. $[AB] \cap \alpha = M$
AOM este drept. $AO \perp \alpha$ at
AO este perpendiculară pe orice dreaptă ce trece prin piciorul ei deci $AO \perp MO$.
$[OM \subset int\, \hat{ACB}$ at.
$m\hat{ACB} = m\hat{ACM} + m\hat{MOB}$, $m\hat{ACB} = 90^\circ +$
$+ m\hat{MOB} \Rightarrow m\hat{AOB} > 90^\circ$ deci AOB este obtuz.

3. Arătaţi că cele şase plane mediatoare ale muchiilor unui tetraedru au un punct comun.
b) Prin acest punct trec şi perpendicularele pe feţele tetraedrului, duse prin centrele cercurilor circumscrise acestor feţe.

Soluţie:



a) Fie α, β, γ planele mediatoare ale muchiilor $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ şi α', β', γ' planele mediatoare ale muchiilor $[VA]$, $[VB]$, $[CV]$.
$\alpha \cap \beta \cap \gamma = d$
$d \perp (ABC)$ în punctul O, de intersecţie a mediatoarelor laturilor triunghiului ABC.
Dreapta d reprezentînd locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de A, B şi C.

Mediatoarele muchiilor $[VA]$ şi $[VB]$ se vor intersecta după o dreaptă d_1 deci $\alpha' \cap \beta' = d_1$ cazul $\alpha' \cap \beta' = \phi$ este exclus deoarece VA şi VB sînt concurente.

Planul mediator $r' \parallel d_1$ deoarece VA,VB,VC sînt concurente / nu are acceptiune
și $r' \perp VB$ at $r' \cap d_1 = \{O\}$

Punctul O are proprietatea că
este egal depărtat de V,A,B și C
Dreapta d reprezintă mulțimea punctelor egal depărtate de A,B și C
$\cap \Rightarrow$ Partea comună a acestor două mulțimi este tocmai punctul O
deci $d \cap \{O\} = \{O\}$

Deci și din punct de vedere al logicii formale:

$$(\alpha \cap \beta \cap \gamma) \cap (\alpha' \cap \beta' \cap \gamma') = d \cap (\alpha' \cap \beta') \cap \gamma' =$$
$$= d \cap (d_1 \cap \gamma') = d \cap \{O\} = \{O\}$$

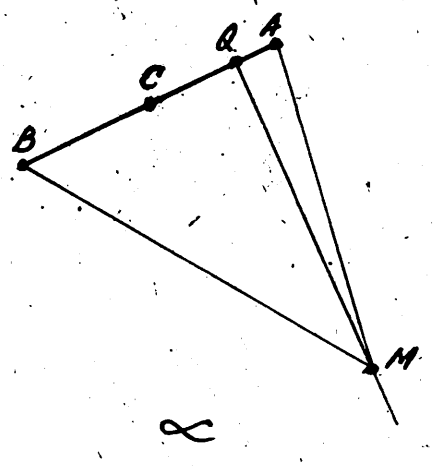
Deci cele șase plane mediatoare au un punct comun.
Analog detorită proprietății de asociativitate a intersecției putem considera în toate modurile posibile intersecția planelor mediatoare ale muchiilor tetraedrului respectiv.
b)Planele mediatoare ale laturilor fiecărei fețe se intersectează după o dreaptă perpendiculară pe planul feței în punctul de intersecție al mediatoarelor feței respective - reprezintă tocmai centrul cercului circumscris feței respective.
Datorită proprietăților pe care le posedă de exemplu: d, d_1, d_2 și d_3

$\alpha \cap \beta \cap \gamma = d \quad d \perp (ABC)$ în O'
$\alpha' \cap \gamma \cap \gamma' = d_2 \quad d_2 \perp (VAC)$ în O_2
$\alpha' \cap \beta' \cap \alpha = d_1 \quad d_1 \perp (VAB)$ în O_1
$\beta' \cap \gamma' \cap \beta = d_3 \quad d_3 \perp (VBC)$ în O_3

unde d reprezintă locul punctelor din spațiu egal depărtate de A,B și C.
d_1:locul punctelor din spațiu egal depărtate de V,A și B.
d_2:locul punctelor din spațiu egal depărtate de V,A și C
d_3:locul punctelor din spațiu egal depărtate de V,B și C
Rezultă că $d \cap d_1 \cap d_2 \cap d_3 = \{O\}$
Această intersecție este tocmai punctul O detrminat anterior drept punctul comun al planelor mediatoare a celor șase muchii ale tetraedrului.

4.Să se afle locul geometric al punctelor din spațiu care au diferența pătratelor distanțelor lor la două puncte date egală cu un număr dat.

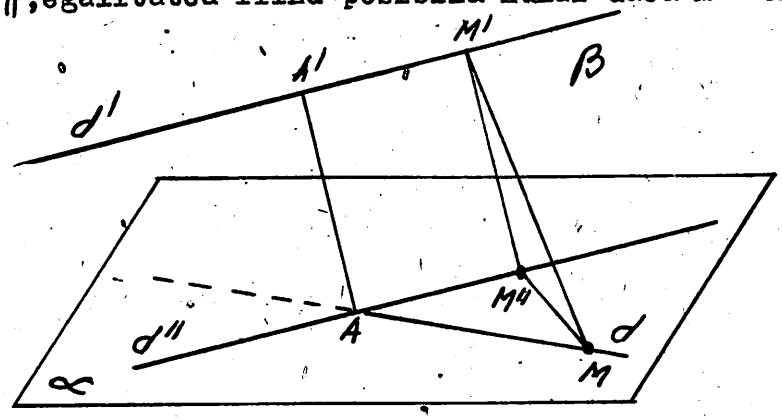
Soluție:



Locul geometric al punctelor din spațiu care au diferența pătratelor distanțelor la două puncte date egală cu un număr dat.Fie A și B punctele date și C mijlocul segmentului [AB], ∝ un plan care trece prin dreapta AB.Locul geometric al punctelor M din planul ∝ $\sigma.\hat{\iota}$ $\|MB\|^2-\|MA\|^2=k^2$ este dreapta MQ ⊥ AB punctul Q este astfel situat încît $\|QC\|=\frac{k^2}{4\|AB\|}$ Când planul ∝ se mișcă în jurul dreptei AB,punctul M descrie planul perpendicular pe AB în punctul Q.Acest plan este punctul geometric căutat.

7.Fie d și d' două drepte necoplanare și AA' perpendiculara comună a lor, $A\in d$ și $A'\in d'$ și $M\in d, M'\in d'$. Să se arate că $\|AA'\| \leqslant \|MM'\|$, egalitatea fiind posibilă numai dacă M = A și M'=A'

Soluție:



Din M' se coboară o perpendiculară pe planul ∝ fie M'' piciorul ei. $M'M''\subset\beta$ fiind planul proiectant al dreptei d'. $M'M''\perp\alpha$ este perpendiculară pe orice dreaptă din plan care trece prin piciorul ei, deci $M'M''\perp M''M$. $\Delta M'M''M$ este dreptunghic în M'' dar $\|AA'\| = \|M'M''\| = \sqrt{\|M'M\|^2-\|M''M\|^2} \Leftrightarrow$

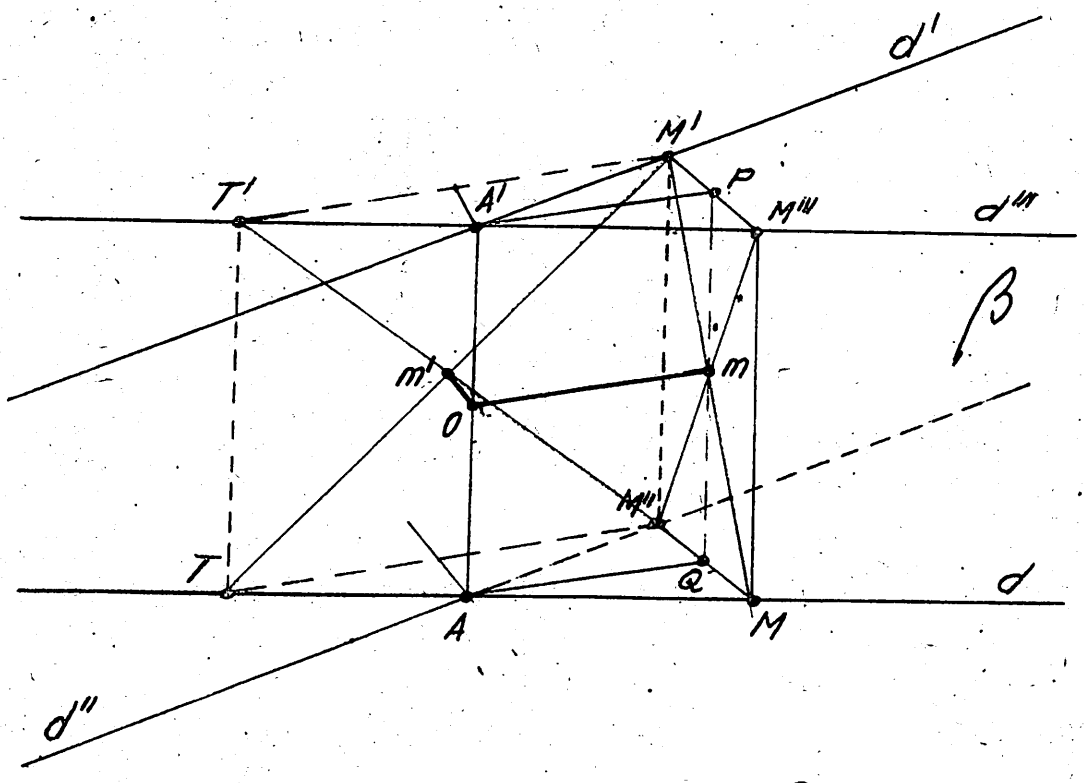
$\|AA'\| < \sqrt{\|M'M\|^2} = \|M'M\|$ deci $\|AA'\| < \|M'M\|$

dacă $\|M''M\| = 0$ adică $M = A$ și $M' = A'$ at.

$\|AA'\| = \|M'M\|$

8.Fie AA' perpendiculara comună a dreptelor necoplanare d,d' şi $M \in d, M' \in d'$ astfel ca $|AM| \equiv |A'M'|$. Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului $[MM']$.

Soluţie:



Fie AA' perpendiculara comună a dreptelor d,d' $d \subset \alpha$,prin A'A. ducem planul proiectant al dreptei d' pe planul α notat cu γ. $\alpha \cap \gamma = d''$ Prin A' ducem d''' $\| d$ $(d''', d) = \beta$, $d'' = pr_{\alpha} d$ Din ipoteză $\|A'M\| = \|AM\|$ ducem $M'M'' \perp \alpha$ deci $M'' \in d''$ Atunci în condiţiile respective $M'M''M''M'''$ este dreptunghi unde $M'M'' \| M'''M \| AA'$ fie m mijlocul segmentului $[M'M]$, $[M'M]$ diagonală în dreptunghiul respectiv şi PQ linie mijlocie atunci $PQ \| AA'$ deci figura A'PQA este dreptunghi situat în planul bisector al diedrului $(\beta \widehat{\ } \gamma)$

$$\beta' = [AA', M \text{ şi } \gamma' = [AA'M'$$

In cazul în care M'=A' şi M=A $|OA'| \equiv |OA|$ deci şi O aparţine locului căutat.Unind pe O cu m(mijloacele a două laturi paralele într-un dreptunghi) $\Rightarrow Om \perp AA'$, $Om \perp PQ$.

Trebuie arătat că oricare ar fi alte două puncte $N \in d$ şi $N' \in d'$ cu proprietatea că $|A'N'| \equiv |AN|$ şi $|Nm_1| \equiv |N'm_1|$ va rezulta că $Om_1 \perp A'A$ şi $Om_1 = Om$

Repetînd construcţia A'P'Q'A va fi un dreptunghi situat în acelaşi plan bisector al diedrului($\gamma'\beta'$), iar $Om_1 \perp A'A$ cum într-un punct al unei drepte în acelaş plan se poate duce o singură perpendiculară $\Rightarrow Om_1 = Om$.

S-a determinat o parte a locului geometric format dintr-o dreaptă perpendiculară pe AA' în mijlocul ei situată în planul bisector al diedrului $(\widehat{\gamma'\beta'}$.

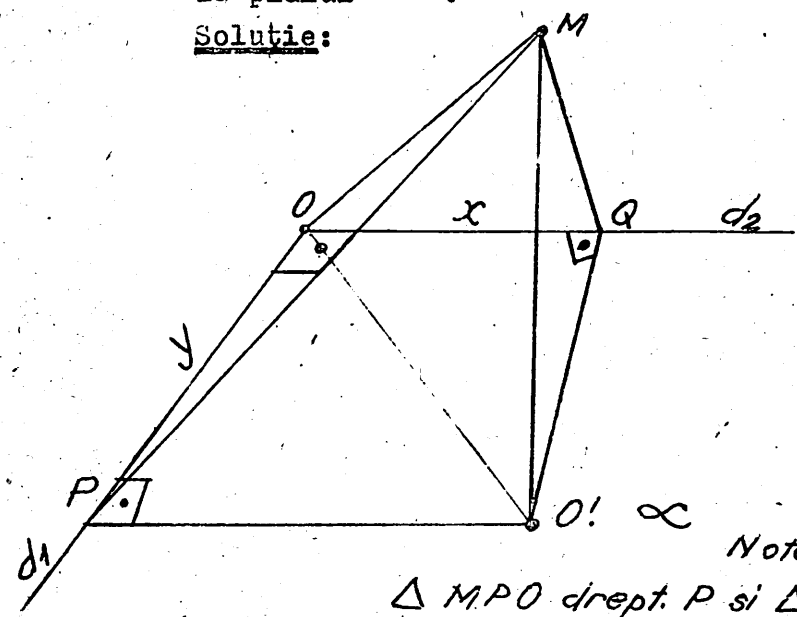
b)Dacă punctul $T \in d$ a.î semidreptele $|AT$ şi $|AM$ să fie opuse şi $|AT| \equiv |A'M'|$ se arată în mod analog că locul geometric este format dintr-o dreaptă $m'O \perp AA'$ în O situată în planul bisector al diedrului $(\gamma'\gamma'')$.

$\gamma'' = [AA', T'$ unde m'O şi mO fiind perpendiculare pe dreapta AA' în mijlocul ei "O" determină planul mediator al segmentului $[AA']$, cum cele două bisectoare sînt perpendiculare rezultă că:

locul geometric căutat este format din reuniunea a două drepte perpendiculare ce trec prin mijlocul segmentului $[AA']$, situate în planul mediator al acestuia şi paralele cu bisectoarele unghiurilor formate de proiecţiile lui d şi d', pe planul α.

9.Intr-un plan α se dau două drepte perpendiculare d_1 şi d_2 care se intersectează în punctul O.Distanţele unui punct M din spaţiu, nesituat în planul α, la dreptele d_1 şi d_2 sînt egale respectiv cu 3a şi 4a, iar $\|MO\| = 3a\sqrt{2}$. Să se calculeze distanţa de la M la planul α.

Soluţie:



$d(M,d_2)=4a$
$d(M,d_1)=3a$
$d(M,O)=3a\sqrt{2}$
$MO' \perp \alpha$
$pr_\alpha M = O'$
Prin O' ducem perpendiculara
$O'P \perp d_1$ şi $O'Q \perp d_2$
Atunci $MP \perp d_1$ şi $MQ \perp d_2$
(teorema celor trei perpend.)
Figura OQO'P este un dreptunghi.

Notez: $\|OP\| = y$, $\|OQ\| = x$, $\|MO'\| = z$

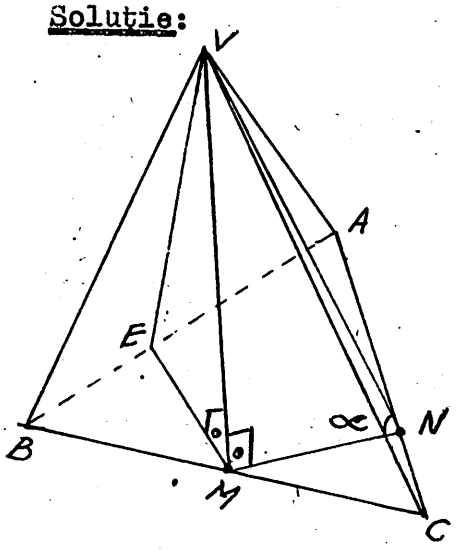
ΔMPO drept. P şi ΔMQO drept. în Q

$$\begin{cases} 18a^2 = 9a^2 + y \\ 18a^2 = 16a^2 + x \\ 18a^2 = z^2 + x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 9a^2 \\ x^2 = 2a^2 \\ z^2 = 7a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\sqrt{2} \\ y = 3a \\ z = a\sqrt{7} \end{cases}$$

$\|MO'\| = a\sqrt{7}$ $\quad$ $d(M,\alpha) = a\sqrt{7}$

10.Se consideră un tetraedru [VABC] cu următoarele proprietăţi: ABC este un triunghi echilateral de latură a, (ABC)⊥(VBC), iar planele(VAC) şi(VAB) formează cu planul (ABC) unghiuri de măsură 60^o. Să se calculeze distanţa de la punctul V la planul (ABC).

Solutie:



Deoarece(VBC)⊥(ABC) şi notînd cu M pr^V_{BC} = M şi pr^V_{AC} = N deci

VM ⊥∝ VN⊥ AC $AC \subset \propto$

atunci ⇒MN ⊥ AC(R.T.celor trei perp)

$m(\widehat{VNM}) = 60^\circ = \propto$

Notez pr^V_{AB} = E ME ⊥ AB

$\Delta dr\ VMN \equiv \Delta dr\ VME$ (CU) $\begin{cases} VM\ (lat.comună) \\ \widehat{VNM} \equiv \widehat{VEM} \end{cases}$

$\Rightarrow |ME| \equiv |MN|$

$\Delta dr\ MEB \equiv \Delta dr\ MNC \begin{cases} |ME| \equiv |MN| \\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C\ (ipot) \end{cases} \Rightarrow |BM| \equiv |MC|$

Deci $\|BM\| = \|MC\|$. Δ VBC este isoscel deoarece înălţimea VM cade în mijlocul segmentului [BC]

$\|MC\| = \|BM\| = \frac{a}{2}$ şi $AM \perp BC$

$\|MC\|^2 = \|NC\| \cdot \|AC\|$ $\frac{a^2}{4} = \|NC\| \cdot a$ $\|NC\| = \frac{a}{4}$

$\|MN\|^2 = \|NC\| \cdot \|AN\|$ $\frac{a}{4}\|MN\|^2 = \frac{a}{4} \cdot \frac{3a}{4}$ $\|MN\| = a\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\|VM\| = \|MN\| \cdot tg \propto = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{4}$

$\|VM\| = \frac{3a}{4}$

11.Pag.83

Se dă dreptunghiul ABCD cu ‖AB‖=4 şi ‖BC‖= 2. Pe planul dreptunghiului se ridică perpendicularele AA_1, BB_1, CC_1 şi DD_1, punctele A_1, B_1, C_1, D_1 fiind de aceeaşi parte a planului (ABC) şi $\|AA_1\| = 3, \|BB_1\| = 8, \|CC_1\| = 1$ şi $\|DD_1\| = 2$.M şi N fiind mijloacele segmentelor $[A_1C_1]$ respectiv $[B_1D_1]$, să se calculeze lungimea segmentului MN.

Solutie:

‖BB‖= 8cm ‖DD‖= 2cm

$\|CC_1\|$= 1cm $\|AA_1\|$= 3cm

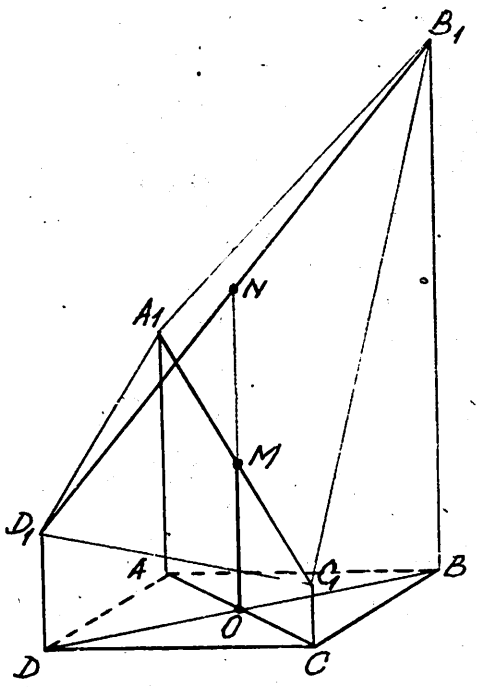
Notez (ABC) = ∝

$DD_1 \perp \propto$, $BB_1 \perp \propto$ determină planul β

$(DD_1, BB_1) = \beta$ $\propto \cap \beta = DB$

$AA_1 \perp \propto$ $CC_1 \perp \propto$ $(AA_1, CC_1) = \gamma$

$\propto \cap \gamma = AC$



$AC \cap DB = \{O\}$ $O \in \alpha$

Intersecţia a două plane perpendiculare pe acelaşi plan este o dreaptă perpendiculară pe planul respectiv, deci

$\beta \cap \gamma = OM$ şi $OM \perp \alpha$ şi $ON \perp \alpha$ $\Rightarrow OM = ON$

(Intr-un punct al unui plan nu se poate duce decît o perpendiculară pe planul respectiv)

Deci O, M, N coliniare.

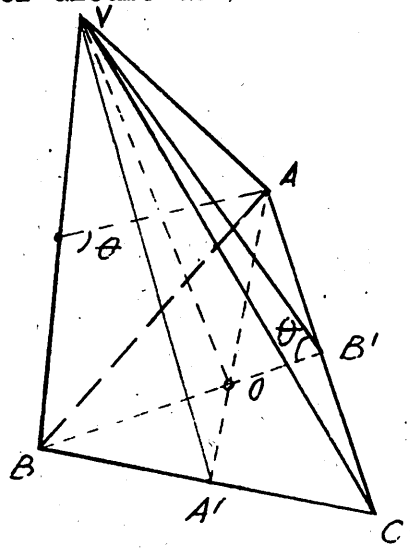
OM este linie mijlocie în trapezul AA_1C_1C

$\|OM\| = \frac{3+1}{2} = 2$ cm.

ON linie mijlocie în trapezul DD_1B_1B

$\|ON\| = \frac{2+8}{2} = 5$cm. Deci $\|MN\| = \|ON\| - \|OM\| = 3$cm.

12. Toate muchiile unui tetraedru au lungimea a. Să se arate că un vîrf se proiectează pe faţa opusă în centrul de greutate al acesteia. Să se afle măsura unghiurilor diedre determinate de cîte două feţe.



Soluţie:

Notez: $pr_{(ABC)} V = O$ deci $VO \perp (ABC)$

$pr_{BC} V = A'$ deci $VA' \perp BC$

Rezultă: $OA' \perp BC$ (R.T.celor 3 perp.)

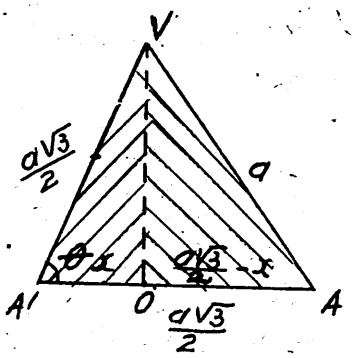
ΔVBC este echilateral şi $[VA']$ este şi înălţime şi mediană; deci $|BA'| \equiv |A'C|$

deci $[AA']$ mediană în ΔABC dar şi înălţime, deci $VA' \perp BC$

deci $VA' \perp BC$ şi $OA' \perp BC$ $\Rightarrow OA' = AA'$

Deci $O \in AA'$

Deci V se proiectează pe înălţimea feţei opuse. Se arată că proiecţia lui V pe ABC este chiar centrul de greutate al ΔABC.



a) $\|OA\| = x$ $\quad \|OA\| = \frac{a\sqrt{3}}{2} - x$

$\|VO\|^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - x^2$, $\|VO\|^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - x\right)^2$

$\|VA'\| = \|A'A\| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\|VA\| = a$

$\frac{a^2}{4} - a^2 = 2 \times \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $\quad \boxed{x = \frac{a\sqrt{3}}{6}}$

adică $\|OA'\| = \frac{2}{3}\|AA'\|$ adică O este punctul de intersecţie al medianelor.

b) Fie $(ABC) = \tilde{\pi}$ $pr_{\tilde{\pi}} V = O$ deci $VO \perp \tilde{\pi}$

Orice plan care trece prin VO este perpendicular pe $\tilde{\pi}$

Fie $(VAA') = \alpha$; $\alpha \perp \tilde{\pi}$, $\alpha \cap \tilde{\pi} = AA'$ dar $AA' \perp BC$

Analog notez $(VBB') = \beta$, $\beta \cap \tilde{\pi} = BB'$, $BB' \perp AC$ dar

$\alpha \cap \beta = VO$, $VO \perp (ABC)$ în O dar

$AA' \perp BC$

$BB' \perp BC \Rightarrow O$ este tocmai centrul de greutate al Δ ABC şi $VO \perp ABC$ în O.

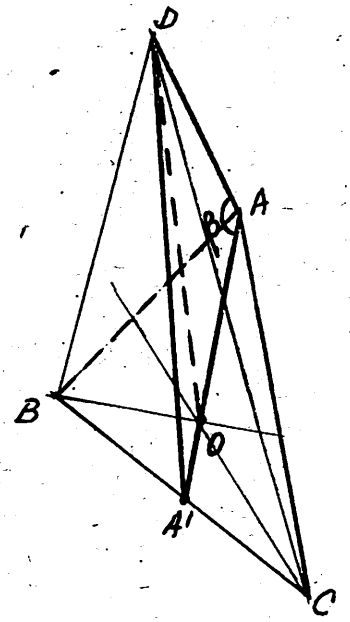
$AA' \cap BB' = \{O\}$

Analog se notează pentru fiecare vîrf.

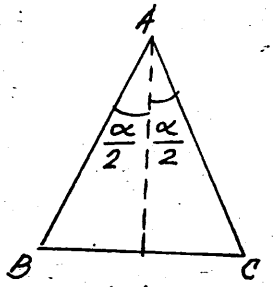
Notez unghiul diedru format de planul feţelor (VBC) şi (ABC) cu θ $\quad$ Din $\Delta\, VA'A \Rightarrow \cos\theta = \frac{\|A'O\|}{\|VA'\|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}$; $\boxed{\cos\theta = \frac{1}{3}}$

$m(\widehat{VA'A}) = \theta$, $\|A'O\| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

13. Se consideră un tetraedru [ABCD] astfel ca $\|AB\| = \|AC\| = a$ $m(\widehat{BAC}) = \alpha$ şi semidreptele [AD, [BD, [CD formează cu planul (ABC) unghiuri congruente de măsură β. Să se calculeze distanţa de la punctul D la planul (ABC).



Soluţie:



$\|A'C\| = a \sin\frac{\alpha}{2}$

$2\|A'C\| = \|BC\| = 2a \sin\frac{\alpha}{2}$

$\|AA'\| = a \cos\frac{\alpha}{2}$

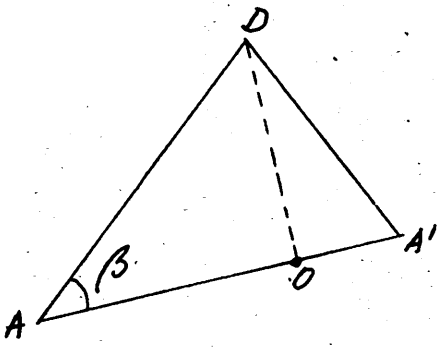
$\|AO\| = \|BO\| = \|CO\| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\|AO\| = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$tg\,\beta = \frac{\|DC\|}{\|AC\|}$ $\quad \alpha = 60°$

$\|DO\| = tg\,\beta \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\|DO\| = a\, tg\,\beta \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$

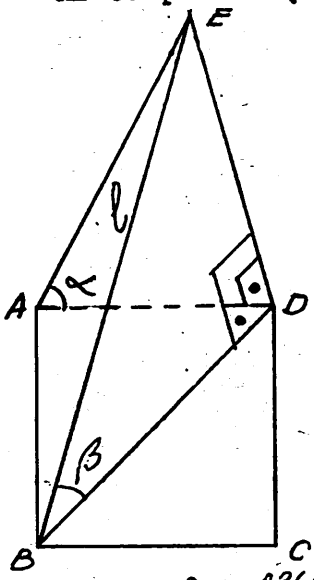


$$\|DO\| = \frac{a\,tg\,\beta}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\,,\quad \sqrt{3} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\,,$$

$$\|DO\| = \frac{a\,tg\,\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

14. Fie DE o dreaptă perpendiculară pe planul pătratului ABCD. Știind că $\|BE\| = \ell$ măsura unghiului format de [BE și (ABC) este β, să se determine lungimea segmentului [AE] și unghiul lui AE cu planul (ABC).



Soluție:

$DE \perp (ADC) \Rightarrow \begin{matrix} DE \perp BD \\ DE \perp AD \end{matrix}$

$m(\widehat{EBD}) = \beta$, $m(\widehat{EAD}) = \alpha$

Notăm : $\|AB\| = a$

$\triangle EDB$ dr. în $D \Rightarrow \cos\beta = \frac{a\sqrt{2}}{\ell}$

$$a = \frac{\ell\cos\beta}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\,\ell\cos\beta}{2}\,,\quad a = \frac{\sqrt{2}\,\ell\cos\beta}{2}$$

$\triangle ADE$ dr. în $D \Rightarrow \|AE\|^2 = \|AD\|^2 + \|DE\|^2$

$$\|AE\|^2 = \frac{2\ell^2\cos^2\beta}{2} + \ell^2\sin^2\beta\,,\qquad \sin\beta = \frac{\|DE\|}{\ell}$$

$$\|AE\|^2 = \frac{\ell^2\cos^2\beta + 2\ell^2\sin^2\beta}{2} \qquad \|DE\| = \ell\sin\beta$$

$$\|AE\|^2 = \frac{\ell^2(1+\sin^2\beta)}{2}$$

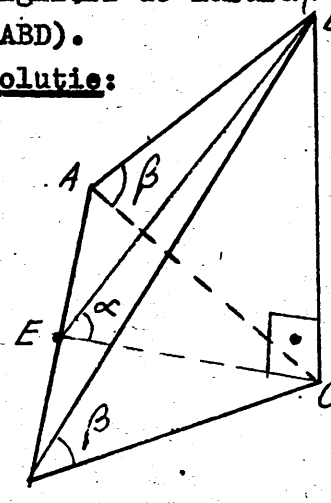
$$\boxed{\|AE\| = \ell\sqrt{\frac{1+\sin^2\beta}{2}}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{\|DE\|}{\|AD\|} = \frac{\ell\sin\beta}{\frac{\sqrt{2}\,\ell\cos\beta}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\,tg\,\beta$$

$$\boxed{tg\,\alpha = \sqrt{2}\,tg\,\beta}$$

15. Dreapta CD este perpendiculară pe planul triunghiului echilateral ABC de latură a, iar AD și BD formează cu planul (ABC) unghiuri de măsură β. Să se găsească unghiul planelor (ABC) și (ABD).

Soluție:



$DC \perp (ABC) \Rightarrow DC \perp EC$

$EC \perp AB$ și $DE \perp AB$.

Măsura unghiului diedru format de (ABC) și (ABD) este dată de măsura unghiului plan corespunzător $\widehat{DEC}$

Notez : $m(\widehat{DEC}) = \alpha$

$\|AB\| = \|AC\| = \|BC\| = a$

$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DBC}) = \beta$

ΔDEC dr în C.

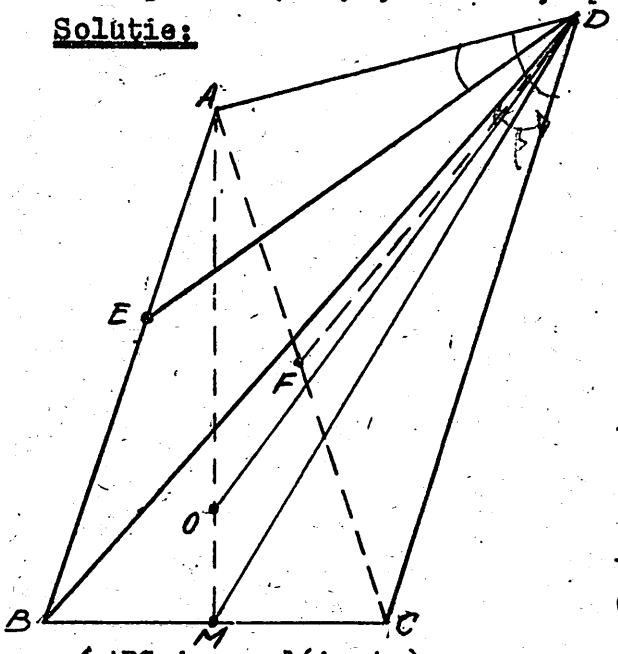
$$tg\beta = \frac{\|DC\|}{a} \Rightarrow \|DC\| = a\,tg\beta \qquad \|EC\| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Din } \Delta DCE \Rightarrow tg\alpha = \frac{\|DC\|}{\|EC\|} = \frac{a\,tg\beta}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\,tg\beta}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{tg\alpha = \frac{2\sqrt{3}\,tg\beta}{3}}$$

16. Intr-un tetraedru [ABCD] avem $\|DA\| = \|DB\| = \|DC\| = \ell$ $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ADC}) = \alpha$ și $m(\widehat{BDC}) = \beta$. Să se afle distanța punctului D la planul (ABC) și distanța punctului A la planul (BCD).

Soluție:



$$\Delta ADB \equiv \Delta ADC \begin{cases} \widehat{ADB} \equiv \widehat{ADC} \\ m\widehat{ADB} = \alpha \\ |AD| \equiv |BD| \equiv |DC| \end{cases}$$

(LUL)

$\Rightarrow \|AB\| \equiv \|AC\|$

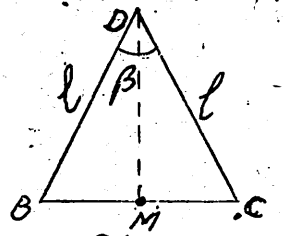
deci Δ ABC isoscel

ducem

$\begin{cases} DE \perp AB \text{ deci} \\ |AE| \equiv |EB| \\ \text{ADB isoscel(ipot.)} \end{cases}$

$\begin{cases} \Delta DBC \text{ isoscel(ipot.)} \\ \text{duc } DM \perp BC \\ \text{deci } |BM| \equiv |MC| \end{cases}$

Δ ADC isoscel(ipot.)
duc $DF \perp AC$
deci $|AF| \equiv |FC|$



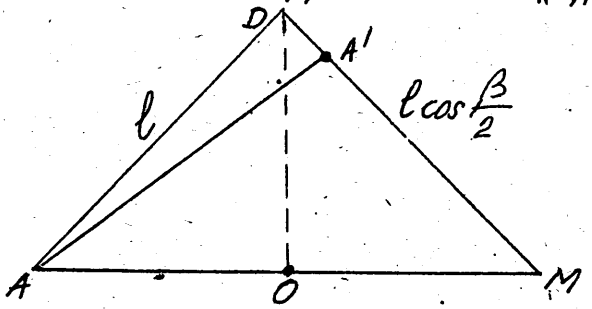
$$\|DM\| = \ell \cos\frac{\beta}{2}$$

$$\|AB\|^2 = \|AC\|^2 = 2\ell \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\|MC\| = \ell \sin\frac{\beta}{2}$$

$$\|AM\|^2 = 4\ell^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} - \ell^2 \sin^2\frac{\beta}{2}$$

$$\|AM\| = \ell\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}}$$



$$\|DO\| \cdot \|AM\| = \ell \cdot \ell \cos\frac{\beta}{2} \cdot \sin D$$

$$\boxed{\|DO\| = \frac{\ell^2 \cos\frac{\beta}{2} \cdot \sin D}{\ell\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}}}}$$

În ΔADM aplic T. cosinusului:

$$\ell^2 + \ell^2\cos^2\frac{\beta}{2} - 2\ell^2\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos D = \ell^2\left(4\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\cos D = \frac{\ell^2 + \ell^2\cos^2\frac{\beta}{2} - \ell^2\left(4\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}\right)}{2\ell^2\cos\frac{\beta}{2}}$$

Simplific prin ℓ^2

$$\cos D = \frac{1+\cos^2\frac{\beta}{2} - 4\sin^2\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{2-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$\cos D = \frac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$\cos D = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$\boxed{\cos D = \frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}}$$

$$\sin D = \sqrt{1-\cos^2 D} = \sqrt{1-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\beta}{2}}} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\beta}{2}}}$$

$$\boxed{\sin D = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\frac{\beta}{2}}}{\cos\frac{\beta}{2}}}$$

Deci $\|DO\| = \dfrac{\ell^2\cos\frac{\beta}{2}\cdot\frac{\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\frac{\beta}{2}}}{\cos\frac{\beta}{2}}}{\ell\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}}}$

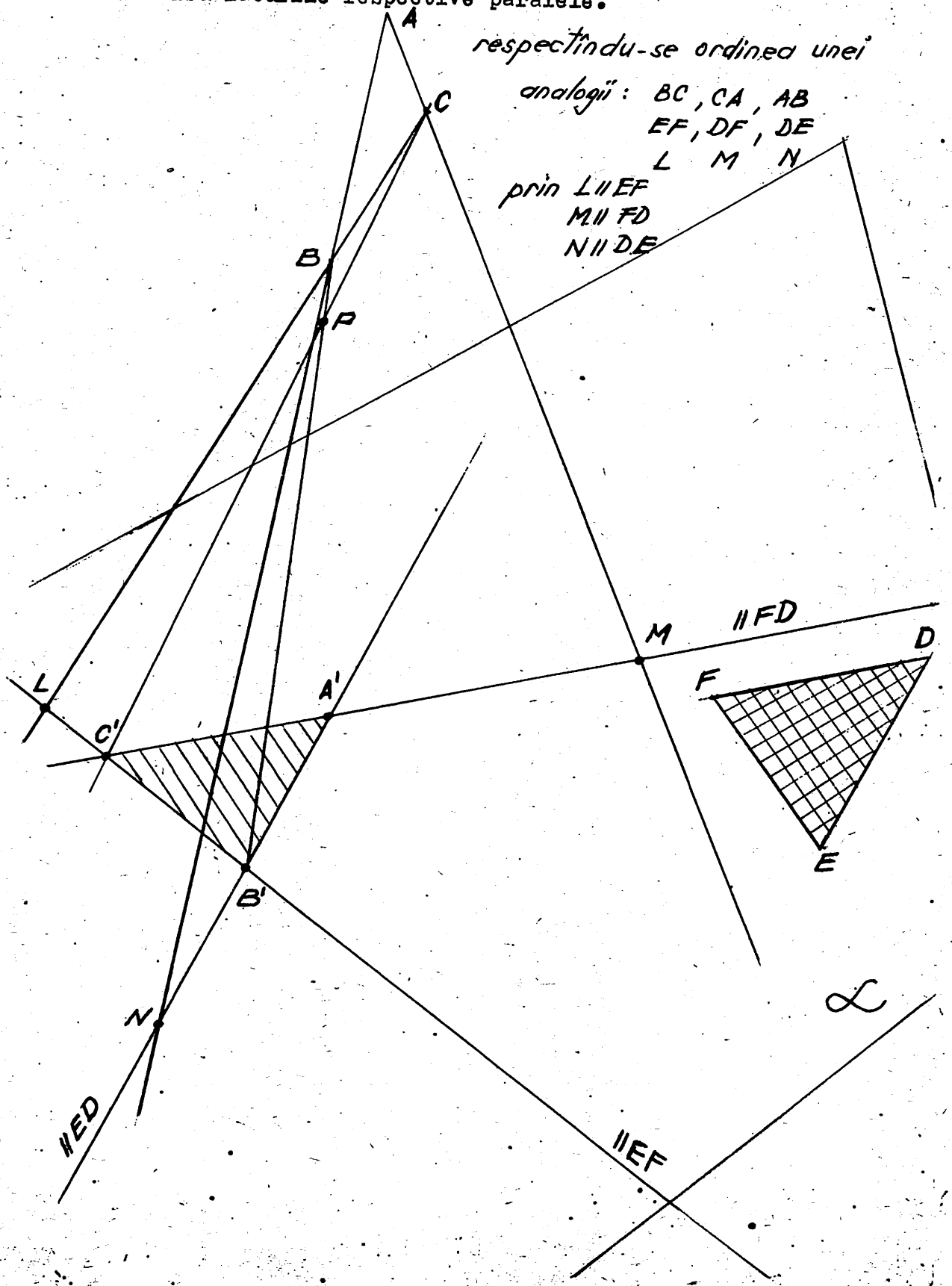
$$\boxed{\|DO\| = \frac{\ell\cos\frac{\beta}{2}\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\frac{\beta}{2}}}{\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}}}}$$

$$d(\Delta(OBC)) = \|AA'\|$$

$$\|AA'\| = \ell\sin D = \ell\,\frac{\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\frac{\beta}{2}}}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$\boxed{\|AA'\| = \frac{\ell}{\cos\frac{\beta}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\alpha}}$$

17. Se dau: un plan α , punctele necoliniare A,B,C exterioare acestui plan şi un triunghi DEF $\subset \alpha$. Să se determine un punct P astfel încît notînd cu A',B',C' punctele de intersecţie ale dreptelor PA,PB,PC cu planul α triunghiurile A'B'C' şi DEF să aibă laturile respective paralele.



Soluţie:

Se presupune problema rezolvată, adică s-a determinat punctul P $\sigma.\hat{i}$ dreptele $AP \cap \alpha = \{A'\}$, $BP \cap \alpha = \{B'\}$, $\{\in P \cap \alpha = \{C'\}$ şi $\Delta A'B'C'$ să posede proprietatea că: $\begin{cases} A'B' \parallel DE \\ B'C' \parallel EF \\ A'C' \parallel FD \end{cases}$

Notînd cu L,M,N punctele în care dreptele BC,CA,AB intersectează planul α se constată că BC şi B'C' determină un plan notat cu β, $\beta \cap = B'C'$ dar $\underline{L \in B'C'}$ analog $(AB, A'B') = \gamma$ $\gamma \cap \alpha = A'B'$ unde $N \in A'B'$ şi $(AC, A'C') = \delta$ $\delta \cap \alpha = A'C'$ $M \in A'C'$ ⊛

⊛ Deci $BC \cap B'C' = \{L\}$
$AC \cap A'C' = \{M\}$
$AB \cap A'B' = \{N\}$

Considerînd problema în mod invers se duc prin L,M,N paralele la dreptele Δ DEF adică, EF,FD,DE ele vor determina tocmai triunghiul A'B'C'.

I. Dreptele AA',BB',CC' fiind coplanare, două cîte două sînt fie concurente într-un punct P fie paralele.

In primul caz P este soluţia problemei, în al doilea caz problema nu are soluţie.

II. Dacă una din dreptele BC,CA,AB este paralelă cu planul α, problema are soluţie numai dacă dreapta aceea este paralelă cu latura respectivă a triunghiului DEF implicînd existenţa unui număr infinit de situaţii soluţii.

18. Fiind date planul α şi triunghiurile ABC şi A'B'C' nesituate în acest plan să se determine un triunghi DEF, aşezat în planul α pe de oparte dreptele AD,BE,CF şi pe de altă-parte dreptele A' B, B' E, C'F să fie concurente.

Soluţie:

Considerăm figura spaţială construită deci Δ DEF determinat $\sigma.\hat{i}$:

$AD \cap BE \cap CF = \{O\}$ şi $\Delta DEF \subset \alpha$
$A'D \cap B'E \cap C'F = \{O\}$

Atunci dreptele BC şi EF vor determina un plan notat cu β

deci $(BC, EF) = \beta$ analog notăm următoarele plane

$(AB, DE) = \gamma$

$(AC, DF) = \delta$

unde $BC \cap \alpha = EF$ şi

$BC \cap EF = \{M\}$ $\quad M \in \alpha$

$\gamma \cap \alpha = DE$ unde $AB \cap \alpha = L$ $\quad L \in DE$ $\quad L \in \alpha$

$\beta \cap \alpha = DF$ unde $N \in \alpha$ $\quad N \in DF$

Analog pentru $\triangle A'B'C'$ $(A'B', DE) = \gamma'$

$(B'C', EF) = \beta'$ unde

$(A'C', DF) = \beta'$

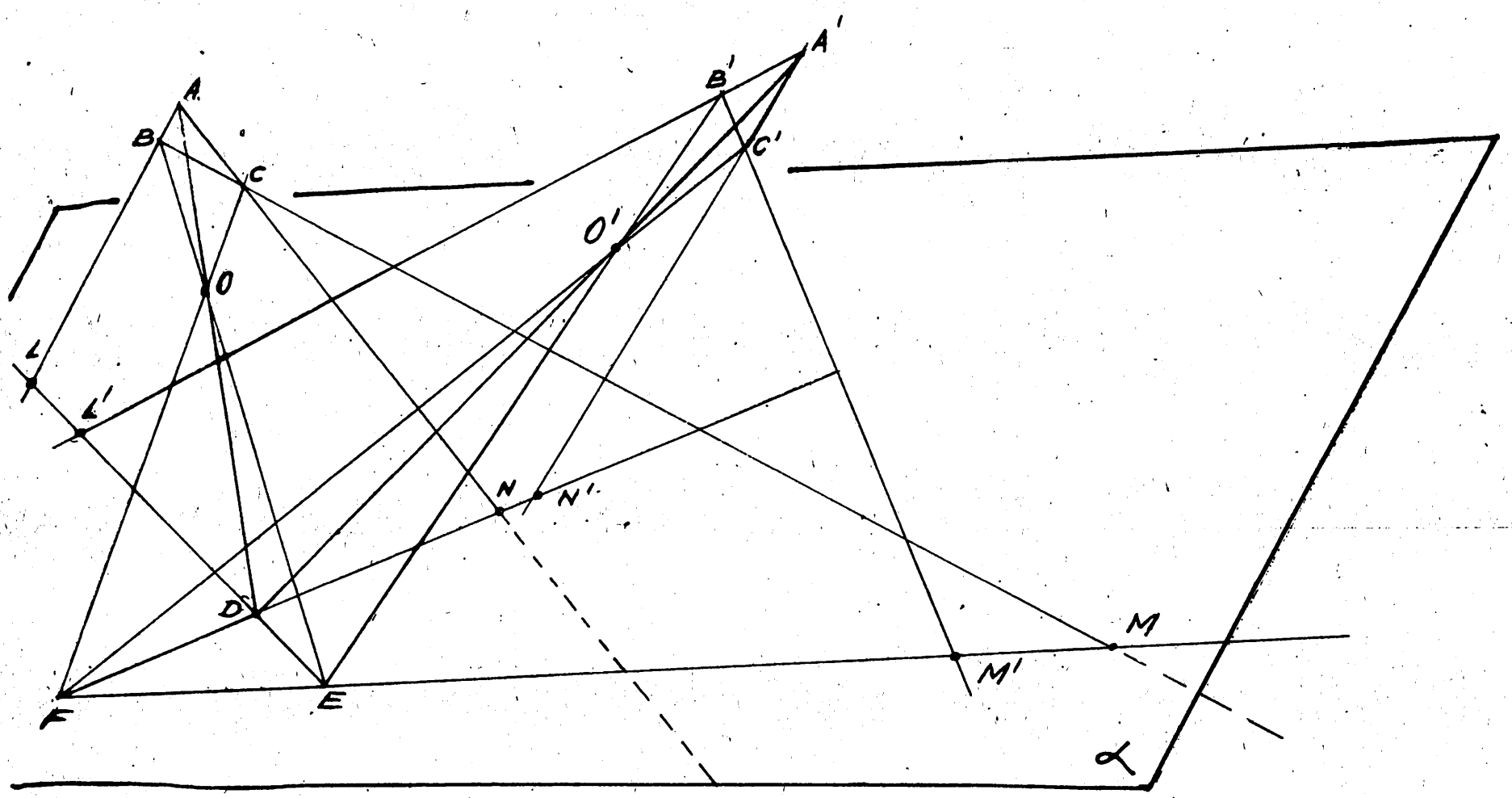
$$\begin{array}{lll} A'B' \cap \alpha = L' & L' \in DE & \\ B'C' \cap \alpha = M' & M' \in EF & \text{deci} \Rightarrow \\ A'C' \cap \alpha = N' & N' \in DE & \end{array} \quad \begin{cases} LL' = DE \\ NN' = FD \\ MM' = EF \end{cases}$$

In concluzie se poate afirma că laturile triunghiului D E F căutat se vor găsi situate pe dreptele MM', NN', LL'

deoarece $\begin{cases} F \in MM' \text{ şi } F \in NN' \text{ deci } MM' \cap NN' = \{F\} \\ D \in NN' \text{ şi } D \in LL' \text{ deci } LL' \cap NN' = \{D\} \\ E \in MM' \text{ şi } E \in LL' \text{ deci } MM' \cap LL' = \{E\} \end{cases}$

Considerînd acum raţionamentul în mod invers problema se rezolvă intersectînd dreptele AB,BC,AC cu planul α notînd intersecţiile respective cu L,M,N şi intersecţiile dreptelor A'B', B'C', A'C' tot cu planul α notîndu-le cu L',M',N' vîrfurile triunghiului DEF vor fi determinate de intersecţiile dreptelor coplanare

$$MM' \cap NN' = \{F\}$$
$$NN' \cap LL' = \{D\}$$
şi $$LL' \cap MM' = \{E\}$$


A
B
C
O
L
L'
A'
B'
C'
O'
N
N'
D
E
F
M
M'
α

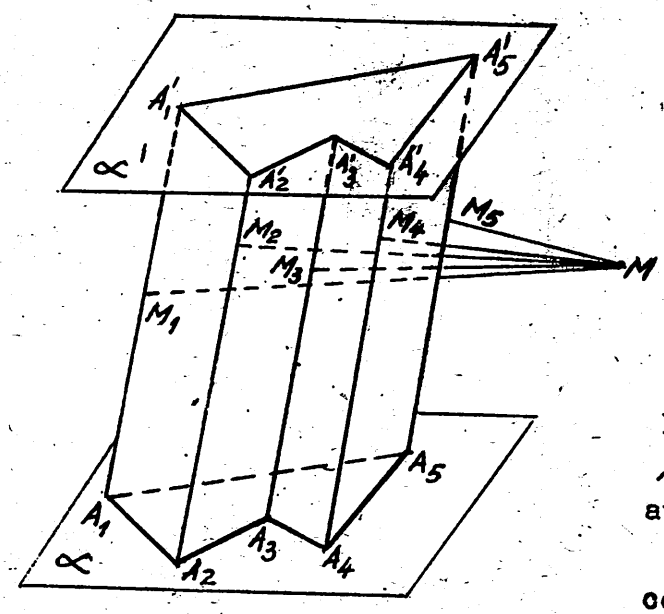
CAPITOLUL VI
POLIEDRE

§1. Prisma

Pag.86.

1.Să se demonstreze că proiecţiile unui punct din spaţiu pe muchiile laterale ale unei prisme sînt coplanare.

Soluţie:

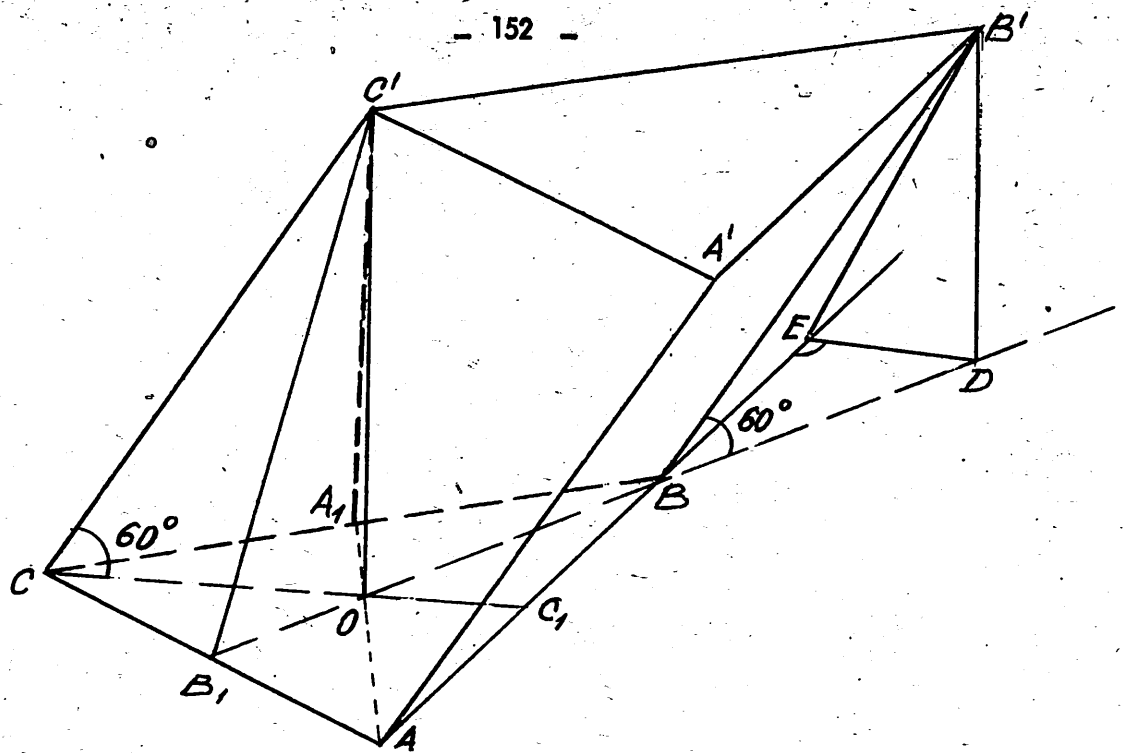


Dacă $MM_2 \perp A_2A_2'$ şi $A_2A_2' \parallel A_1A_1'$ atunci $MM_2 \perp A_1A_1'$. Dacă $A_1A_1' \perp MM_1$ şi $A_1A_1' \perp MM_2$ atunci A_1A_1' este perpendiculară pe planul β determinat de dreptele concurente MM_1 şi MM_2. Intersecţiile planului β cu muchiile laterale ale prismei sînt punctele Mi (i = 1,2,3...n) şi dacă $A_iA_i' \parallel A_1A_1'$ şi $A_1A_1' \perp \beta$ atunci $A_iA_i' \perp \beta$. Cum $A_iA_i' \perp \beta$. MM_i este din β deducem $MM_i \perp A_iA_i'$. Am arătat astfel că punctele Mi aparţin planului β perpendicular pe A_iA_i'.

2.Se dă o prismă triunghiulară cu bazele [ABC] şi [A'B'C'] .Fie D,E,F centrele de simetrie respectiv ale feţelor [BCC'B'] , [ACC'A'] , [ABB'A'] .Să se arate că dreptele AD,BE şi CF sînt concurente.

Soluţie:

Punctele D,E,F sînt intersecţiile diagonalelor paralelogramelor BCC'B', ACC'A', BAA'B' şi deci sînt mijloacele diagonalelor acestora. In triunghiul BAC', [AD] şi [BE] sînt mediane, deci concurente în punctul I astfel încît $\frac{\|AI\|}{\|ID\|} = \frac{\|BI\|}{\|IE\|} = \frac{2}{3}$ (∝)



O centrul cercului circumscris triunghiului ABC este și punctul de intersecție al medianelor. $\|AA_1\| = \|BB_1\| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\|OA_1\| = \frac{1}{3}\|AA_1\| = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \|OB_1\|$, $\|OC\| = \frac{2}{3}\cdot\|CC_1\| = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$C'O \perp (ABC) \Rightarrow C'O \perp OC$ și $\|C'O\| = \|CO\|$ $tg\, \widehat{C'CO} = \frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3} = a$

$C'O \perp (ABC)$, și $OA_1 \perp CB \Rightarrow C'A_1 \perp CB$ și $C'O \perp OA_1 \Rightarrow \|C'A_1\| =$

$= \sqrt{\|OA_1\|^2 + \|C'O\|^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{12} + a^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$

Deoarece $\Delta OC'B_1 \equiv \Delta OC'A_1 \Rightarrow \|C'B_1\| = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$

$B'D \perp (ABC) \Rightarrow \Delta COC' \equiv \Delta BDB' \Rightarrow \|CO\| = \|BD\| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Delta BDE \equiv \Delta BC_1O \Rightarrow \|DE\| = \|OC_1\| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Din $B'D \perp (ABC) \Rightarrow B'D \perp DE \Rightarrow \|B'E\| = \sqrt{\|B'D\|^2 + \|DE\|^2} =$

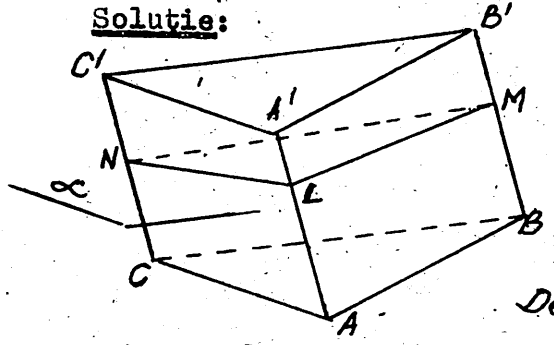
$= \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$

$\mathcal{A}_t = 2\mathcal{A}[ABC] + \mathcal{A}[C'A'AC] + \mathcal{A}[C'B'BC] + \mathcal{A}[B'A'AB] =$

$= 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\cdot a\cdot\frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}(1+\sqrt{13})$

6. Într-o prismă triunghiulară distanțele dintre muchiile laterale sînt 3, 4 și 5 iar lungimea muchiilor laterale este 6. Să se afle aria laterală a prismei.

Soluție:



Fie planul $\propto$ astfel încît

$\left.\begin{array}{l} \propto \perp AA' \\ \propto \cap [AA'] = \{L\} \\ \propto \cap [BB'] = \{M\} \\ \propto \cap [CC'] = \{N\} \end{array}\right\} \Rightarrow \|LN\|, \|LM\|, \|MN\|$ sînt înălțimile fețelor laterale

Deci $\mathcal{A}_l = \mathcal{A}[AA'C'C] + \mathcal{A}[C'CBB'] + \mathcal{A}[B'BAA'] =$

$= 6\cdot 3 + 6\cdot 4 + 6\cdot 5 = 6\cdot 12 = 72$

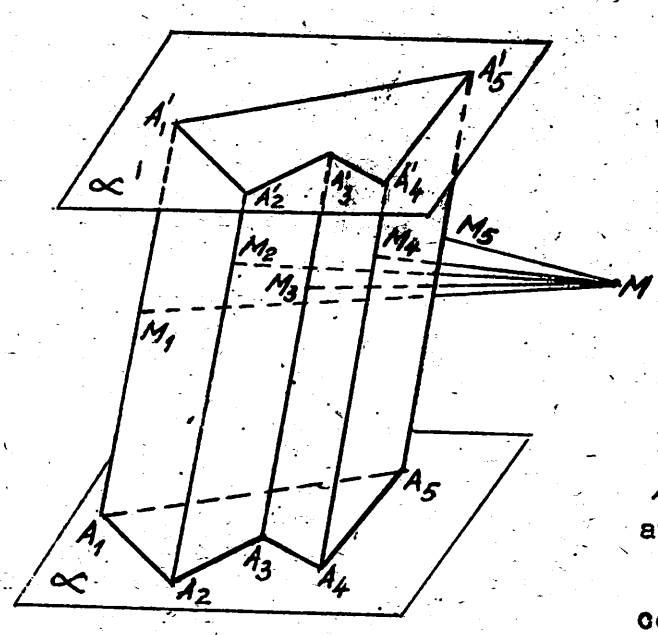
CAPITOLUL VI
POLIEDRE

§1. Prisma

Pag.86.

1.Să se demonstreze că proiecţiile unui punct din spaţiu pe muchiile laterale ale unei prisme sînt coplanare.

Soluţie:



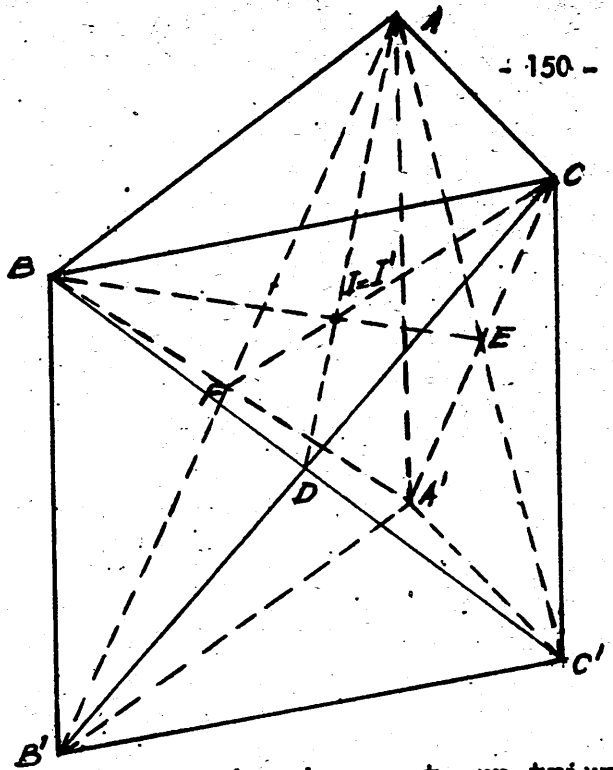
Dacă $MM_2 \perp A_2A_2'$ şi $A_2A_2' \parallel A_1A_1'$ atunci $MM_2 \perp A_1A_1'$

Dacă $A_1A_1' \perp MM_1$ şi $A_1A_1' \perp MM_2$ atunci A_1A_1' este perpendiculară pe planul β determinat de dreptele concurente MM_1 şi MM_2. Intersecţiile planului β cu muchiile laterale ale prismei sînt punctele Mi (i = 1,2,3...n) şi dacă $A_iA_i' \parallel A_1A_1'$ şi $A_1A_1' \perp \beta$ atunci $A_iA_i' \perp \beta$. Cum $A_iA_i' \perp \beta$. MM_i este din β deducem $MM_i \perp A_iA_i'$. Am arătat astfel că punctele Mi aparţin planului β perpendicular pe A_iA_i'.

2.Se dă o prismă triunghiulară cu bazele [ABC] şi [A'B'C'] .Fie D,E,F centrele de simetrie respectiv ale feţelor [BCC'B'] , [ACC'A'] , [ABB'A'] .Să se arate că dreptele AD,BE şi CF sînt concurente.

Soluţie:

Punctele D,E,F sînt intersecţiile diagonalelor paralelogramelor BCC'B', ACC'A', BAA'B' şi deci sînt mijloacele diagonalelor acestora.
In triunghiul BAC', [AD] şi [BE] sînt mediane, deci concurente în punctul I astfel încît $\frac{\|AI\|}{\|ID\|} = \frac{\|BI\|}{\|IE\|} = \frac{2}{3}$ (∝)

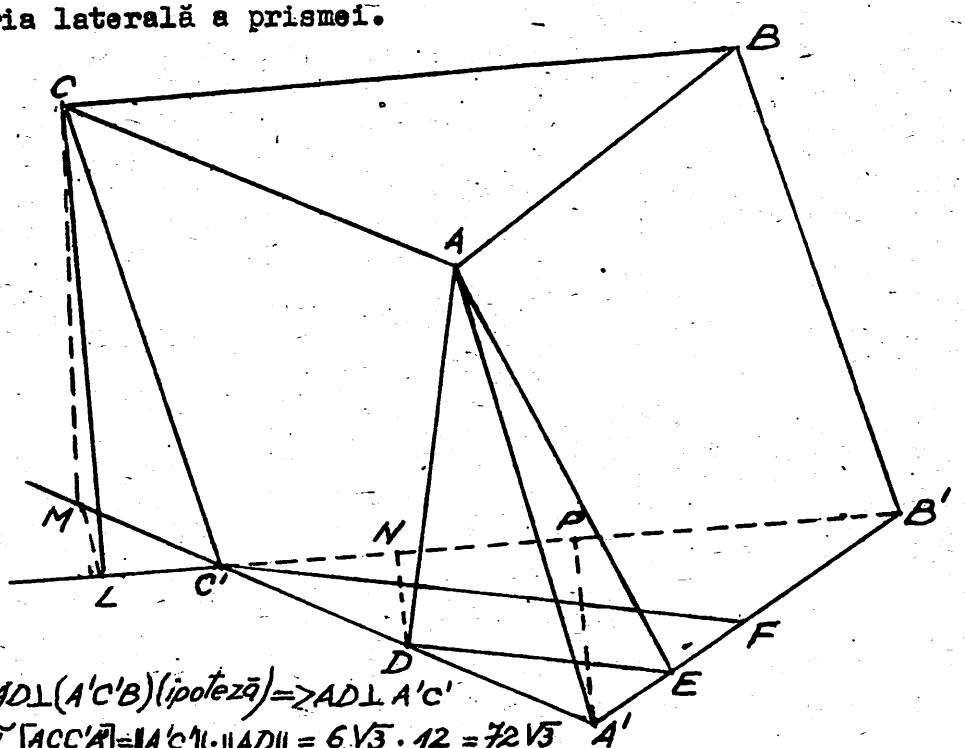


In triunghiul BCA', [BE] şi [CF] sînt mediane, deci concurente în punctul I' astfel încît $\frac{\|BI'\|}{\|I'E\|} = \frac{\|CI'\|}{\|I'F\|} = \frac{2}{3}$ (α')

Din relaţiile (α) şi (α') deducem că $\frac{\|BI\|}{\|IE\|} = \frac{\|BI'\|}{\|I'E\|} = \frac{2}{3}$ şi cum punctul care împarte un segment într-un raport dat este unic urmează că I'=I deci

$$BE \cap CF \cap AD = \{I\}$$

3. Baza unei prisme este un triunghi echilateral cu latura Un vîrf al unei baze se proiectează pe cealaltă bază, în mijlocul unei muchii ale acestuia. Înălţimea prismei fiind 12, să se afle aria laterală a prismei.



$AD \perp (A'C'B)$ (ipoteză) $\Rightarrow AD \perp A'C'$

$\mathcal{A}_l[ACC'A'] = \|A'C'\| \cdot \|AD\| = 6\sqrt{3} \cdot 12 = 72\sqrt{3}$

In triunghiul echilateral C'A'B' considerăm $C'F \perp A'B'$ ($F \in |A'B'|$) şi $DE \perp A'B'$. Deducem că $DE \parallel C'F$ şi deci $\|DE\| = \|C'F\| \cdot \frac{1}{2}$;

Dar $\|C'F\| = \sqrt{\|C'A'\|^2 - \|A'F\|^2} = \sqrt{108 - 27} = \sqrt{81} = 9$ (Triunghiul C'FA' este dreptunghic).

$$\|DE\| = \frac{1}{2} \cdot 9 = \frac{9}{2}$$

Din $AD \perp (A'B'C')$ și $DE \perp A'B' \Rightarrow AE \perp A'B'$.

Din triunghiul AED $(D \in 90^\circ) \Rightarrow \|AE\| = \sqrt{\|AD\|^2 + \|DE\|^2} =$

$$= \sqrt{144 + \frac{81}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{219}$$

$$\mathcal{A}[AA'B'B] = \|A'B'\| \cdot \|AE\| = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{219} = 9\sqrt{219}$$

Fie $CM \perp (A'B'C') \Rightarrow CM \subset (AA'C'C) \Rightarrow M \in A'C'$.

Dacă $ML \perp B'C'$ atunci $CL \perp B'C'$

Deoarece triunghiurile CC'M și AA'D sînt congruente atunci

$$\|CM\| = \|AD\| = 12 \text{ și } \|C'M\| = \|DA'\| = \|C'D\| = 3\sqrt{3}$$

Dacă $DN \perp B'C'$ atunci triunghiurile $IC'M$ și $NC'D$ sînt sînt congruente și deci $\|ML\| = \|DN\| = \|DE\|$

Triunghiurile CML și ADE fiind congruente obținem că :

$$\|CL\| = \|AE\| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{219}$$

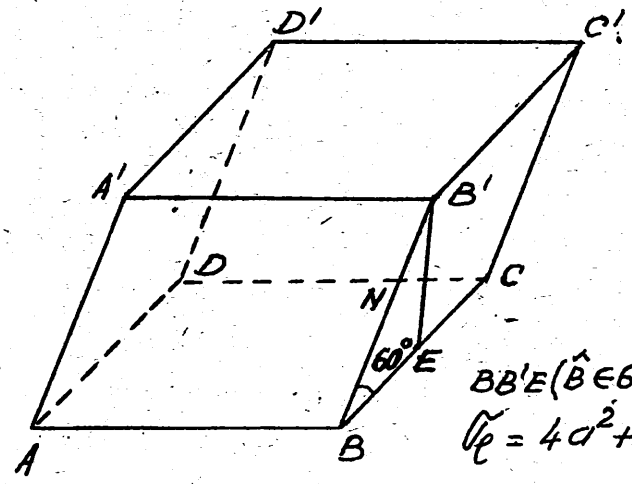
$$\mathcal{A}[CC'B'B] = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{219} = 9\sqrt{219}$$

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}[CC'A'A] + \mathcal{A}[AA'B'B] + \mathcal{A}[CC'B'B] =$$

$$= 72\sqrt{3} + 9\sqrt{219} + 9\sqrt{219} = 72\sqrt{3} + 18\sqrt{219}$$

4.Baza unei prisme este un pătrat cu latura a.Una din fețele laterale este pătrat,alta este un romb cu un unghi de măsură 6o.Să se afle aria totală a prismei.

Soluție:



ABCD, DCC'D', ABB'A', A'B'C'D' pătrate congruente de latură a.

$$\mathcal{A}[ABCD] = \mathcal{A}[DCC'D'] = \mathcal{A}[ABB'A'] = \mathcal{A}[A'B'C'D'] = a^2$$

$BCC'B$ și $ADD'A$ romburi congruente.

$$\mathcal{A}[BCC'B'] = \mathcal{A}[ADD'A] = \|BC\| \cdot \|EB'\|$$

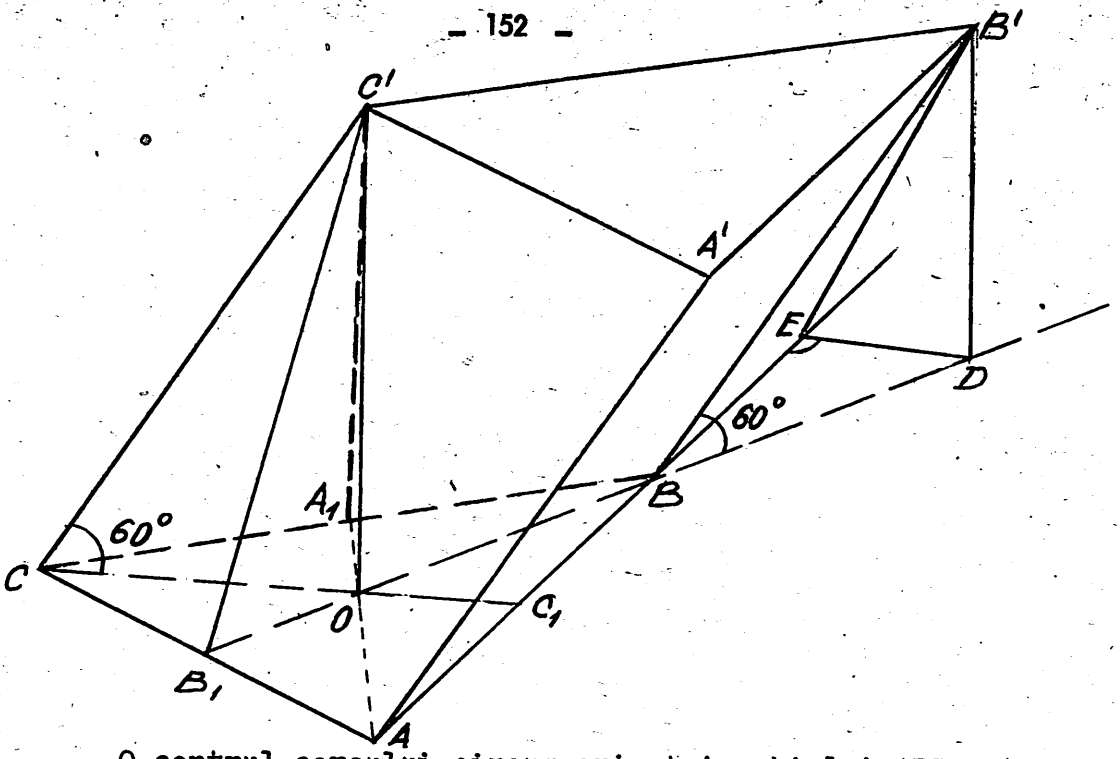
$E \in BC$ și $B'E \perp BC$

$BB'E$ $(\hat{B} \in 60^\circ$ și $\hat{E} \in 90^\circ) \Rightarrow \|B'E\| = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\mathcal{A}_t = 4a^2 + 2 \cdot \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2} = a^2(4 + \sqrt{3})$$

5.Baza unei prisme este un triunghi echilateral cu latura a. Muchiile laterale formează cu planul bazei un unghi de măsură 6o.Unul din vîrfurile bazei se proiectează pe cealaltă bază în centrul cercului circumscris acestuia.Să se afle înălțimea prismei și aria totală.

Soluție:



O centrul cercului circumscris triunghiului ABC este şi punctul de intersecţie al medianelor. $\|AA_1\| = \|BB_1\| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\|OA_1\| = \frac{1}{3}\|AA_1\| = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \|OB_1\|$, $\|OC\| = \frac{2}{3}\cdot\|CC_1\| = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$C'O \perp (ABC) \Rightarrow C'O \perp OC$ şi $\|C'O\| = \|CO\| \operatorname{tg} \widehat{C'CO} = \frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3} = a$

$C'O \perp (ABC)$ şi $OA_1 \perp CB \Rightarrow C'A_1 \perp CB$ şi $C'O \perp OA_1 \Rightarrow \|C'A_1\| =$

$= \sqrt{\|OA_1\|^2 + \|C'O\|^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{12} + a^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$

Deoarece $\Delta OC'B_1 \equiv \Delta OC'A_1 \Rightarrow \|C'B_1\| = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$

$B'D \perp (ABC) \Rightarrow \Delta COC' \equiv \Delta BDB' \Rightarrow \|CO\| = \|BD\| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Delta BDE \equiv \Delta BC_1O \Rightarrow \|DE\| = \|OC_1\| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Din $B'D \perp (ABC) \Rightarrow B'D \perp DE \Rightarrow \|B'E\| = \sqrt{\|B'D\|^2 + \|DE\|^2} =$

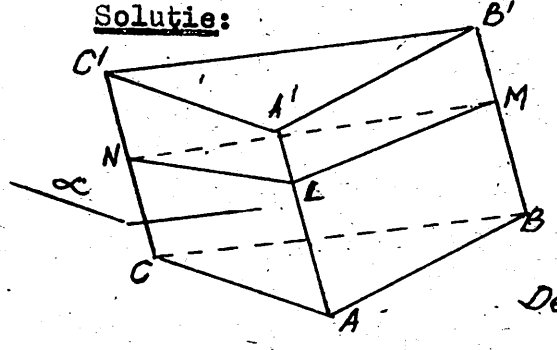
$= \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{12}} = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$

$\mathcal{A}_l = 2\mathcal{A}[ABC] + \mathcal{A}[C'A'AC] + \mathcal{A}[C'B'BC] + \mathcal{A}[B'A'AB] =$

$= 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\cdot a\cdot\frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}(1+\sqrt{13})$

6. Într-o prismă triunghiulară distanţele dintre muchiile laterale sînt 3, 4 şi 5 iar lungimea muchiilor laterale este 6. Să se afle aria laterală a prismei.

Soluţie:



Fie planul α astfel încît

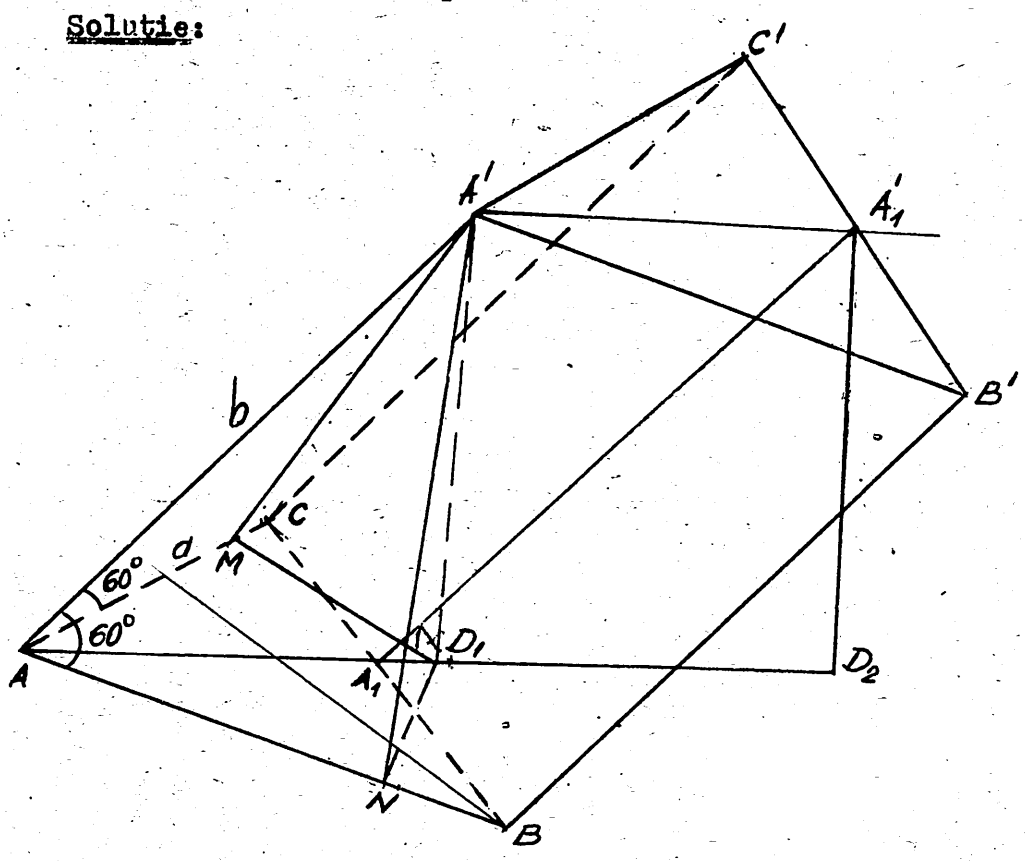
$\left.\begin{array}{l}\alpha \perp AA' \\ \alpha \cap [AA'] = \{L\} \\ \alpha \cap [BB'] = \{M\} \\ \alpha \cap [CC'] = \{N\}\end{array}\right\} \Rightarrow \|LN\|, \|LM\|, \|MN\|$ sînt înălţimile feţelor laterale

Deci $\mathcal{A}_l = \mathcal{A}[AA'C'C] + \mathcal{A}[C'CBB'] + \mathcal{A}[B'BAA'] =$

$= 6\cdot 3 + 6\cdot 4 + 6\cdot 5 = 6\cdot 12 = 72$

7. Baza unei prisme este un triunghi echilateral cu latura a; lungimea muchiilor laterale este b. Una din muchiile laterale formează cu muchiile adiacente ale bazei unghiuri cu măsura 60°. Să se afle aria laterală a prismei.

Soluție:



$$\left.\begin{array}{l} A'D_1 \perp (ABC)\ (D_1 \in (ABC)) \\ D_1M \perp AC\ (M \in AC) \\ D_1N \perp AB\ (N \in AB) \end{array}\right| \Rightarrow A'M \perp AC \text{ și } A'N \perp AB \text{ și } AD_1 \perp D_1M \text{ și } A_1D_1 \perp D_1N$$

$$\left.\begin{array}{l} A'AN \text{ și } A'AM: \hat{M} \equiv \hat{N} \in 90^\circ \\ |A'A| \equiv |A'A| \\ \widehat{A'AN} \equiv \widehat{A'AM} \in 60^\circ \end{array}\right| \Rightarrow \Delta A'AN \equiv \Delta A'AM \Rightarrow |A'N| \equiv |A'M|$$

$$\left.\begin{array}{l} A'D_1N \text{ și } A'D_1M: |A'N| \equiv |A'M| \\ |A'D_1| \equiv |A'D_1| \\ \widehat{A'D_1N} \equiv \widehat{A'D_1M} \in 90^\circ \end{array}\right| \Rightarrow \Delta A'D_1N \equiv \Delta A'D_1M \Rightarrow |D_1M| \equiv |D_1M|$$

$$\left.\begin{array}{l} |D_1M| \equiv |D_1N| \\ D_1M \perp AM \text{ și } D_1N \perp AN \\ [AD_1 \text{ - bisectoarea unghiului } A \\ ABC \text{ echilateral} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} [AD_1 \text{ bisectoarea unghiului BAC} \\ \Rightarrow |AD_1 \cap |BC| = \{A_1\} \text{ și } |CA_1| \equiv |A_1B| \end{array}$$

Fie $A_1' \in (C'B')$ astfel încît $A'A_1' \parallel AA_1 \Rightarrow A'A_1'$ bisectoarea unghiului $\widehat{B'A'C'}$ și $|C'A_1'| \equiv |A_1'B'|$

Din $A'D_1 \perp (ABC) \Rightarrow (A_1'A'D_1) \perp (ABC)$

Din $(A'A_1'D_1) \perp (ABC)$ și $A_1'D_2 \perp (ABC) \Rightarrow D_2 \in AD_1 = (ABC) \cap (A_1'A'D_1)$

Din $A_1'D_2 \perp (ABC)$ și $D_2A_1 \perp BC \Rightarrow A_1'A_1 \perp BC$

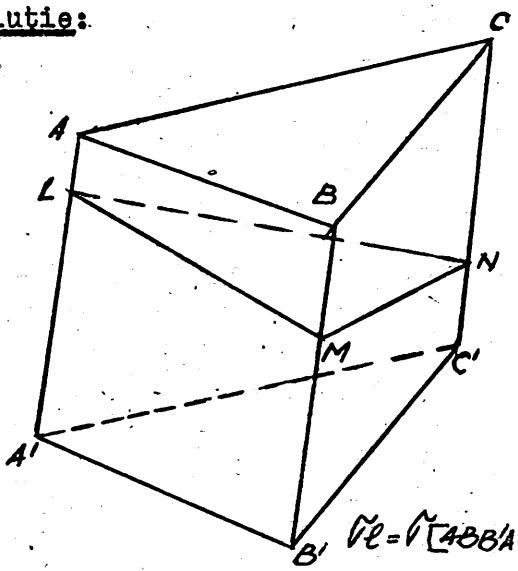
Din $A_1'B' \parallel A_1B$ și $|A_1'B'| \equiv |A_1B| \Rightarrow A_1'A_1BB'$ paralelogram

Din $A_1'A_1BB'$ paralelogram și $m\hat{A}_1 = 90 \Rightarrow A_1'A_1BB'$ dreptunghic și $\|A_1'A_1\| = \|BB'\| = b$

$\mathcal{A}_\ell = \mathcal{A}[A'ABB'] + \mathcal{A}[A'ACC'] + \mathcal{A}[CC'BB'] =$
$= \|AB\| \cdot \|A'N\| + \|AC\| \cdot \|A'M\| + \|BC\| \cdot \|A_1A_1\| =$
$= a \cdot b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + a \cdot b \frac{\sqrt{3}}{2} + a \cdot b = ab(\sqrt{3}+1).$
$\|A'N\| = \|A'A\| \cdot \sin m(\widehat{A'AN}) = b \sin 60^\circ = \|A'M\|$

8. Într-o prismă triunghiulară, două fețe laterale sînt perpendiculare între ele și au ariile respectiv de 60 și 80. Să se afle aria laterală a prismei dacă lungimea muchiilor laterale este de 10.

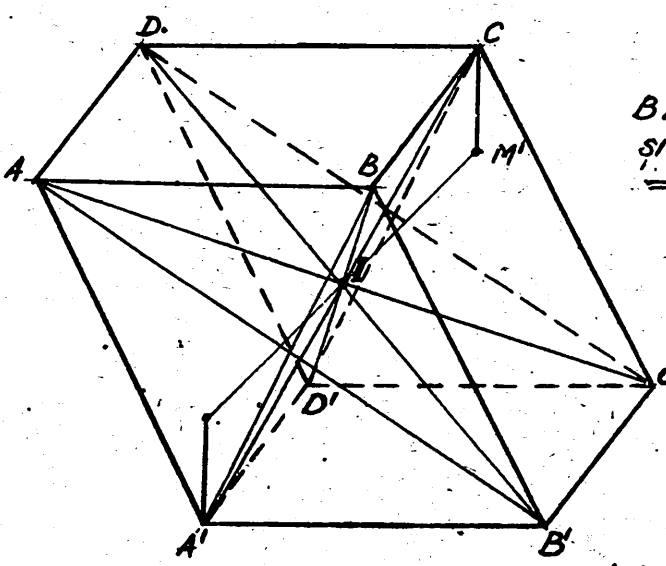
Soluție:



Fie $L \in |AA'|$, $M \in |BB'|$, $N \in |CC'|$ astfel încît $AA' \perp LM$, $AA' \perp LN$, rezultă că $AA' \perp (MLN)$ și că $AA' \perp MN$.
Deci $LM \perp LN$ atunci MLN este triunghi dreptunghic și $\|MN\| = \sqrt{\|LM\|^2 + \|LN\|^2}$
Din $\mathcal{A}[ABB'A'] = \|AA'\| \cdot \|LM\| = 60$ (de exemplu) deducem că $\|LM\| = \frac{60}{10} = 6$
Din $\mathcal{A}[ACC'A'] = 80 = \|AA'\| \cdot \|LN\|$ deducem $\|LN\| = \frac{80}{10} = 8$; $\|MN\| = \sqrt{36+64} = 10$
$\mathcal{A}_\ell = \mathcal{A}[ABB'A'] + \mathcal{A}[ACC'A'] + \mathcal{A}[BCC'B'] = 60+80+10 \cdot 10 = 240$

9. Să se demonstreze că diagonalele unui paralelipiped sînt concurente, punctul de intersecție al acestora fiind și centru de simetrie al paralelipipedului.

Soluție:



AB'C'D paralelogram deoarece $AD \| B'C'$ și $|AD| \equiv |B'C'| \Rightarrow |AC'| \cap |DB'| = I$ astfel încît $|DI| \equiv |IB'|$ și $|AI| \equiv |IC'|$

$BDD'B'$ paralelogram deoarece $|BD| \equiv |B'D'|$ și $BD \| D'B' \Rightarrow$
$\Rightarrow |BD'| \cap |DB'| = \{I'\}$,
I' mijlocul segmentelor $|BD'|, |DB'|$
Din $|ID| \equiv |IB'|$ și $|I'D| \equiv |I'B'| \Rightarrow$
$\Rightarrow I = I'$.
$BCD'A'$ paralelogram deoarece: $|BC| \equiv |A'D'|$ și $BC \| A'D' \Rightarrow$
$\Rightarrow |BD'| \cap |A'C| = \{I\}$ și I'' mijlocul $|BD'|$ și $|A'C|$.
Din $|IB| \equiv |ID'|$ și $|I''B| \equiv |I''D'| \Rightarrow I'' = I$

Deci $|AC'| \cap |DB'| \cap |BD'| \cap |CA'| = \{I\}$-centrul de simetrie al vîrfurilor.

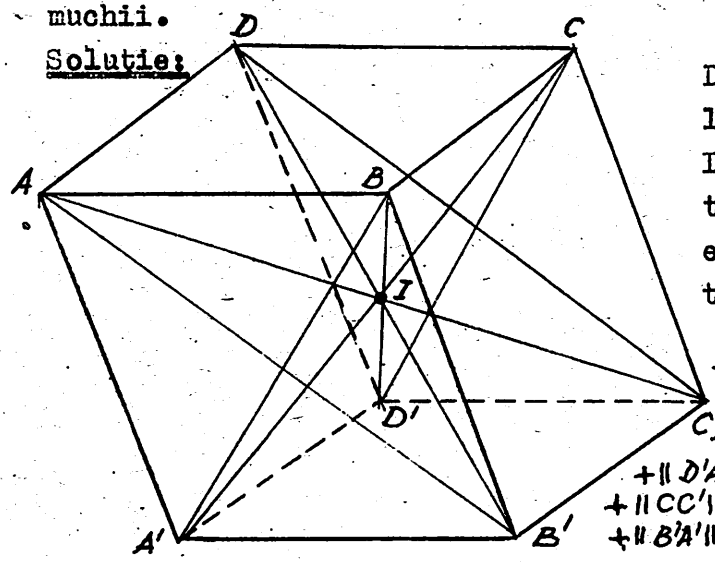
Fie $M \in [AA'D'D]$ şi $MI \cap [BCC'B'] = \{M'\}$

$A'MI$ şi $CM'I$ sînt congruente avînd:

$$|A'I| \equiv |CI|$$
$$\widehat{MIA'} \equiv \widehat{M'IC}$$
$$\widehat{MA'I} \equiv \widehat{M'CI}$$ (avînd laturile paralele).

Deducem că: $|MI| \equiv |IM'|$ şi deci $(\forall)$ M aparţinînd paralelipipedului simetricul său faţă de I aparţine paralelipipedului.

1o. Să se arate că într-un paralelipiped oarecare, suma pătratelor celor patru diagonale este egală cu suma pătratelor celor 12 muchii.

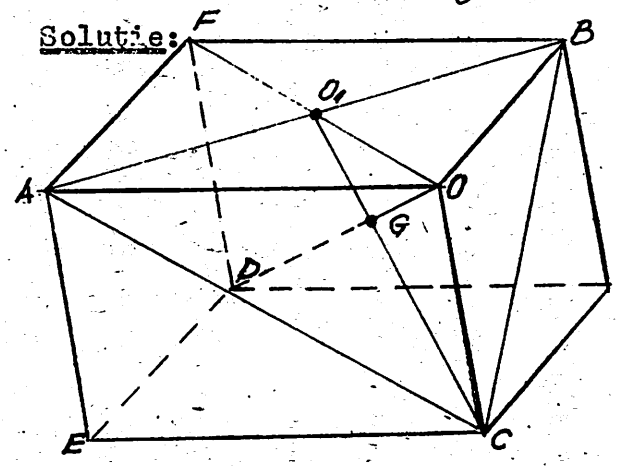


Solutie:

Diagonalele paralelipipedului sînt concurente(ex.9)
Intr-un paralelogram suma pătratelor diagonalelor este egală cu suma pătratelor laturilor.

$$(\|AC'\|^2+\|DB\|^2)+(\|CA'\|^2+\|BD'\|^2)=\|AD\|^2+$$
$$+\|DC'\|^2+\|C'B'\|^2+\|B'A\|^2+\|BC\|^2+\|CD'\|^2+$$
$$+\|D'A'\|^2+\|A'B\|^2=\|AD\|^2+\|BC\|^2+$$
$$+(\|DC'\|^2+\|CD'\|^2)+(\|B'A\|+\|A'B\|^2)+$$
$$+\|D'A'\|^2+\|C'B'\|^2=\|AD\|^2+\|BC\|^2+\|DC\|^2+$$
$$+\|CC'\|^2+\|D'C'\|^2+\|DD'\|^2+\|AB\|^2+\|BB'\|^2+$$
$$+\|B'A'\|^2+\|AA'\|^2+\|A'D'\|^2+\|C'B'\|^2$$

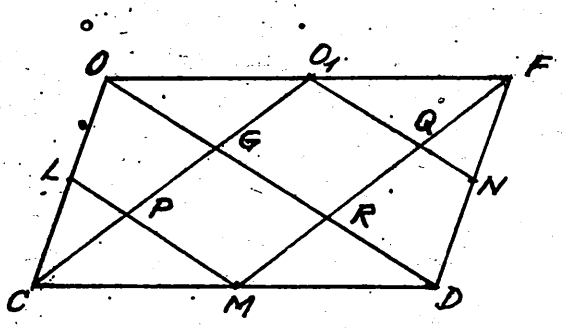
11. Fie O un vîrf al unui paralelipiped oarecare iar A,B,C vîrfurile situate pe muchiile care conţin punctul O.Să se demonstreze că punctul G,în care diagonala ce trece prin O a paralelipipedului intersectează planul (ABC) este centrul de greutate al triunghiului ABC şi că $\|OG\|$ este $\frac{1}{3}$ din lungimea diagonalei respective.



Solutie:

In planul(OFDC) $|OO_1| \cap |OD| = \{G\}$
$|OO_1| \subset (ABC)$ şi $G \in |O_1C| \Rightarrow G \in (ABC)$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \{G\} = |OD| \cap (ABC)$.

In paralelogramul AOBF, O_1 fiind intersecţia diagonalelor reţinem că O_1 este mijlocul segmentului $|AB|$. Atunci $|CO_1|$ este mediană a triunghiului ABC.

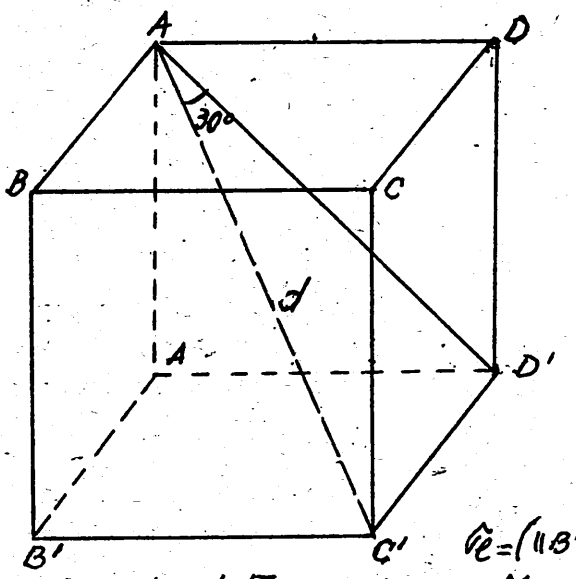


Reţinem alăturat secţiunea OFDC cunoscută ca fiind un paralelogram şi O_1 mijlocul laturii $|OF|$. Adăugăm şi punctele L,M,N ca mijloace ale laturilor $|OC|, |CD|, |DF|$.
Atunci $|LM|$ este linie mijlocie în triunghiul COD.
Deducem că $LM \parallel OD$ şi $LM \cap CG = \{P\}$ şi $|CP| \equiv |PG|$; $|O_1N|$ este linie mijlocie în triunghiul FOD şi $O_1N \cap FM = \{Q\}$ şi $|FQ| \equiv |QR|$ ($\{R\} = |OD| \cap |MF|$).

Din congruenţa: $\Delta OCO_1 \equiv \Delta DFM$ deducem $\widehat{OCO_1} \equiv \widehat{DFM}$ şi $CO_1 \parallel FM$
Din congruenţa: $\Delta FO_1N \equiv \Delta CML$ deducem $\widehat{FO_1N} \equiv \widehat{CML}$ şi $O_1N \parallel LM$
Patrulaterele O_1QRG, $RGPM$ şi QO_1PM sînt paralelograme şi au laturile opuse respectiv congruente.
Din: $|FN| \equiv |CL|$, $\widehat{NFQ} \equiv \widehat{LCP}$ şi $\widehat{FNQ} \equiv \widehat{CLP} \Rightarrow \Delta FNQ \equiv \Delta CLP$ şi deci $|FQ| \equiv |CP|$
Din relaţiile stabilite anterior: $|FQ| \equiv |QR|$
$|QR| \equiv |O_1G|$
$|CP| \equiv |FQ|$
$|CP| \equiv |PG|$
deducem că: $|QG| \equiv |PG| \equiv |CP|$ şi deci G este punctul de intersecţie a medianelor triunghiului ABC.
Din triunghiul CDG în care PM este linie mijlocie reţinem că $\|PM\| = \frac{1}{2}\|GD\|$. Dar $\|PM\| = \|GR\|$ în paralelogramul PMRG.
Atunci $\|RD\| = \|PM\| = \|GR\|$
Asemănător se arată şi că $\|OG\| = \|GR\|$
Deci: $\|OG\| = \frac{1}{3}\|OD\|$.

12. Intr-un paralelipiped dreptunghic cu baza pătrat, diagonalele au lungimea d şi fac cu feţele laterale unghiuri cu măsura 30. Să se calculeze lungimile muchiilor paralelipipedului şi aria sa.

Soluție:



Din $C'D' \perp (D'DAA')$ rezultă că $C'D' \perp AD'$ și $m(\widehat{C'A'D'}) = 30(d_p)$

și în continuare

$$\|C'D'\| = \frac{1}{2}\|AC'\| = \frac{d}{2}$$

$$\|AD'\| = \sqrt{\|AC'\|^2 - \|C'D'\|^2} = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{4}} = \frac{d\sqrt{3}}{2}$$

Din triunghiul dreptunghic $ADD'(\hat{D} \in 90^\circ)$ deducem că

$$\|DD'\|^2 = \|AD'\|^2 - \|AD\|^2 = \frac{3d^2}{4} - \frac{d^2}{4} = \frac{2d^2}{4} \text{ și } \|DD'\| = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

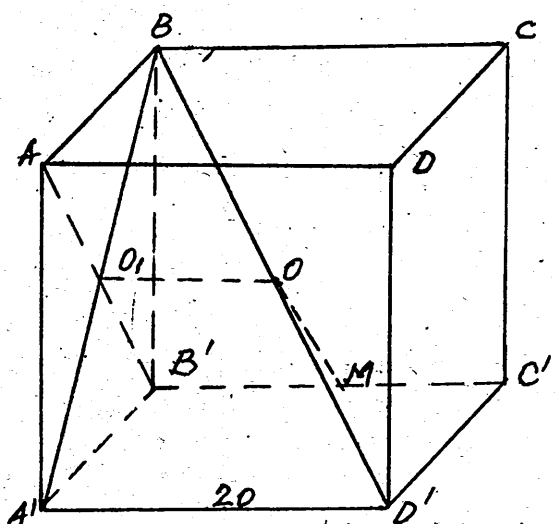
$$\mathcal{A}_l = (\|B'C'\| + \|C'D'\| + \|D'A'\| + \|A'B'\|)\|CC'\| =$$

$$= 4 \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} = d^2\sqrt{2}\,; \quad \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = d^2\sqrt{2} + 2 \cdot \frac{d^2}{4 \cdot 2} = \frac{d^2}{2}(1+2\sqrt{2})$$

Pag.87.

13*. Se dă un cub cu latura 2o. Să se afle distanța dintre o diagonală a cubului și o muchie laterală pe care nu o intersectează.

Soluție:



Fie $|BD'|$ diagonala considerată și $|B'C'|$ muchia indicată în ipoteză. Deoarece $B'C' \| A'D'$ deducem că $B'C' \perp (BA'D')$. Distanța dintre dreapta $B'C'$ și planul $(BA'D')$ este lungimea perpendicularei coborîte dintr-un punct oarecare al dreptei B'C' pe planul $(BA'D')$.

Fie $B' \in [B'C']$ din

$$\left.\begin{array}{l} B'A' \perp A'D' \\ BA' \perp A'D' \\ BO' \perp A'B \ (ABB'A' - \text{pătrat}) \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B'O' \perp (BA'D')$$

Construind $O_1O \| A'D' \Rightarrow O_1O \| B'C' (O \in |BO'|)$

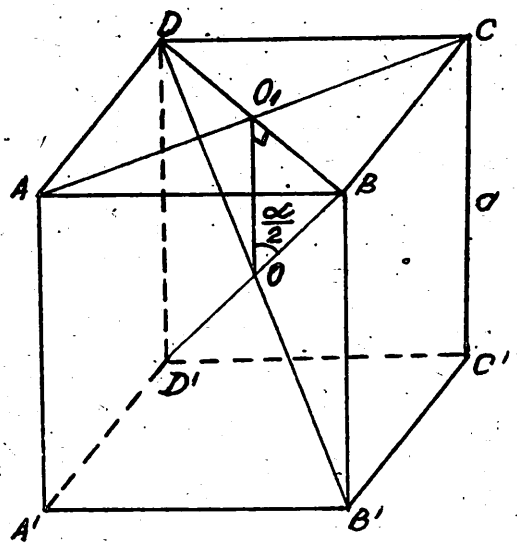
Construind $OM \| O_1B' (M \in |B'C'|) \Rightarrow OM \perp B'C'$, $OM \perp (BA'D')$

Din $OM \perp BD'$ și $OM \perp B'C' \Rightarrow \|OM\|$ reprezintă distanța de la dreapta B'C' la dreapta BD'.

Dar O_1OMB' paralelogram (construcție) $\Rightarrow \|OM\| = \|BO'\| = \frac{m\sqrt{2}}{2} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$

14.Să se calculeze sinusul unui unghi format de două diagonale ale unui cub.

Soluție:



Diagonalele cubului sînt de lungimi egale și se intersectează în punctul O, centrul de simetrie al cubului.

Triunghiul OBD este isoscel ($|OB| \equiv |OD|$) și $|OO_1|$ este mediatoare și bisectoare.

Deci $\hat{BOD}$, unghiul căutat, este dublul unghiului $\hat{BOO_1}$. Fie $m(\hat{BOD}) = \alpha$

$$\sin\alpha = \sin 2\cdot\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

In triunghiul OO_1B ($OO_1 \perp O_1B$) deducem că:

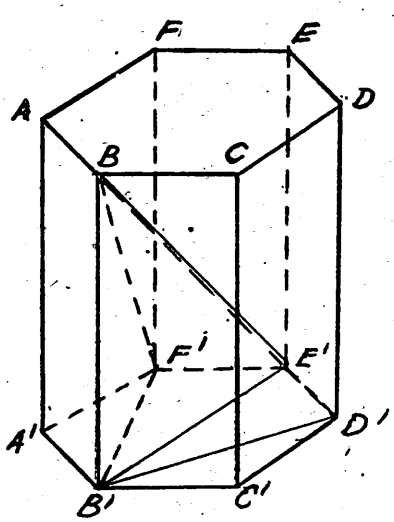
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\|O_1B\|}{\|OB\|} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\|OO_1\|}{\|OB\|} = \frac{a}{2}\cdot\frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin\alpha = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

15.Lungimea muchiei bazei unei prisme hexagonale regulate este a, iar înălțimea 2 a. Să se calculeze lungimile diagonalelor și măsurile unghiurilor pe care le formează acestea cu baza.

Soluție:



Deoarece $\triangle BB'D' \equiv \triangle BB'F$ ($|BB'| \equiv |BB'|$, $\hat{BB'D'} \equiv \hat{BB'F'} \in 90°$, $|B'D'| \equiv |B'F'|$) rezultă că $\|B'D'\| = \|B'F'\|$.

In triunghiul $BB'D'$ ($B' \in 90°$; $\|B'D'\| = a\sqrt{3}$) deducem: $\|BD'\| = \sqrt{\|BB'\|^2 + \|B'D'\|^2} =$

$$= \sqrt{4a^2 + 3a^2} = a\sqrt{7}.$$

$\|BF'\| = a\sqrt{7}$

Din $\hat{B'D'B} = \frac{\|BB'\|}{\|BD'\|} = \frac{2a}{a\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$,

$m(\hat{B'D'B}) = \arcsin\frac{2\sqrt{7}}{7} = m(\hat{B'F'B})$.

In triunghiul $BB'E'$ ($B' \in 90°$, $\|BE'\| = 2a$) deducem:

$\|BE'\| = \sqrt{\|BB'\|^2 + \|B'E'\|^2} =$

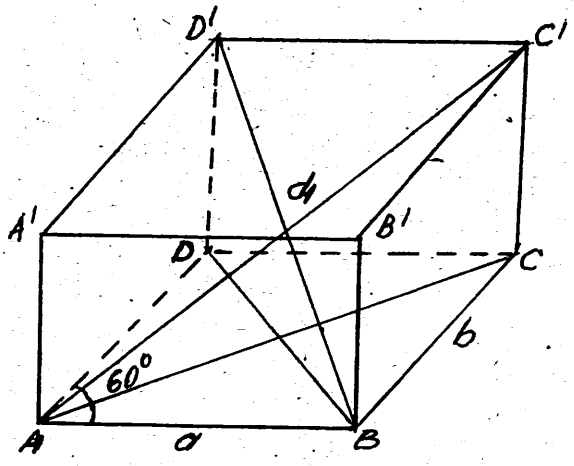
$= \sqrt{4a^2 + 4a^2} = 2a\sqrt{2}$, $m(\hat{B'E'B}) = 45$

deoarece $\|B'E'\| = \|BB'\| = 2a$

16.Intr-un paralelipiped drept, muchiile bazei cu lungimile a și b și formează un unghi de măsură 60°. Cea mai mare diagonală a bazei are lungimea egală cu lungimea celei mai mici diagonale a

paralelipipedului.Să se afle lungimile diagonalelor paralelipipedului.

Soluţie:



$ABCD$ - paralelogram şi $m(\hat{A})=60^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow m(\hat{D})=120^\circ$
In triunghiul $DAC \Rightarrow \|AC\|^2 =$
$= \|AD\|^2 + \|DC\|^2 + 2\|AD\|\cdot\|DC\|\cos 120$
$\|AC\|^2 = b^2 + a^2 + 2 \cdot b \cdot a \cdot \frac{1}{2}$
$\|D'B\| = d_1 = \sqrt{a^2+b^2+ab}$

In triunghiul $D'DB$ $(\hat{D} \in 90^\circ)$
obţinem: $\|DD'\| = \sqrt{\|D'B\|^2 - \|DB\|^2} =$
$= \sqrt{a^2+b^2+ab-a^2-b^2+ab} = \sqrt{2ab}$.
Am folosit în triunghiul DAB,

$$\|DB\|^2 = a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ = a^2+b^2-2ab\cdot\frac{1}{2}$$

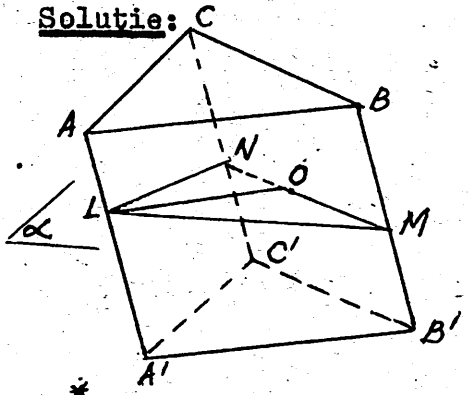
In triunghiul $C'AC$ $(\hat{C} \in 90^\circ)$ obţinem:

$$\|AC'\|^2 = d_2^2 = \sqrt{\|AC\|^2+\|CC'\|^2} = \sqrt{a^2+b^2+ab+2ab}$$
$$d_2 = \sqrt{a^2+b^2+3ab}$$

Pag.88.

17.Să se arate că într-o prismă triunghiulară oblică distanţa dintre o muchie laterală şi faţa opusă este egală cu înălţimea triunghiului obţinut prin secţionarea prismei cu un plan perpendicular pe muchiile laterale.

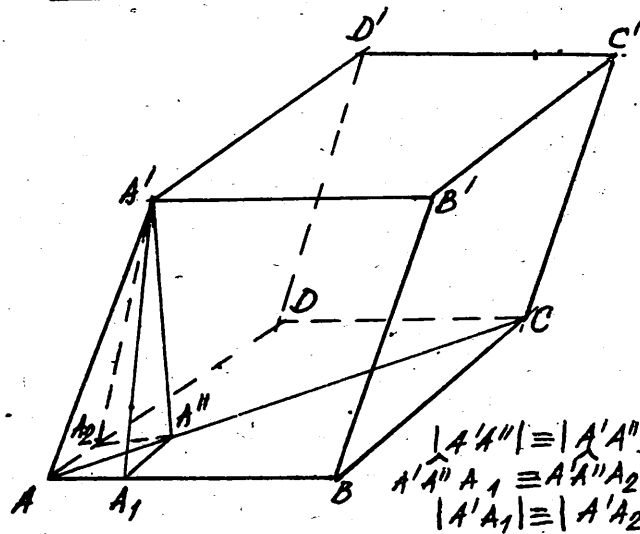
Soluţie:



Fie $\alpha \perp AA'$ şi $[LMN]$ intersecţia cu prisma.Deducem că
$CC' \perp CN$, $CC' \perp NM$.
Dacă $NM \perp CC'$, $LN \perp CC'$ şi $LO \perp NM$
atunci $LO \perp (CBB'C')$
(reciproca teoremei celor trei perpendiculare)

18. Baza unui paralelipiped oblic este un romb ABCD şi muchia laterală $[AA']$ formează cu muchiile adiacente ale bazei unghiuri congruente. A" fiind proiecţia lui A' pe planul bazei,să se arate că punctele A,C,A" sînt coliniare.

Soluţie:



Fie $A'A'' \perp (ABCD)$, $A_1A'' \perp AB$, $A_2A'' \perp AD \Rightarrow A'A_1 \perp AB$ şi $A'A_2 \perp AD$

Considerăm triunghiurile : $A'AA_1$ şi $A'A_2A$

$\hat{A}_1 \equiv \hat{A}_2$

$|A'A| \equiv |A'A|$ $\Big| \Rightarrow \Delta A'AA_1 \equiv \Delta A'AA_2 \Rightarrow$

$A'\hat{A}A_1 \equiv A'\hat{A}A_2$ $\Big| \Rightarrow |AA_1| \equiv |AA_2|$

Considerăm triunghiurile $A'A''A_1$ şi $A'A''A_2$

$|A'A''| \equiv |A'A''|$

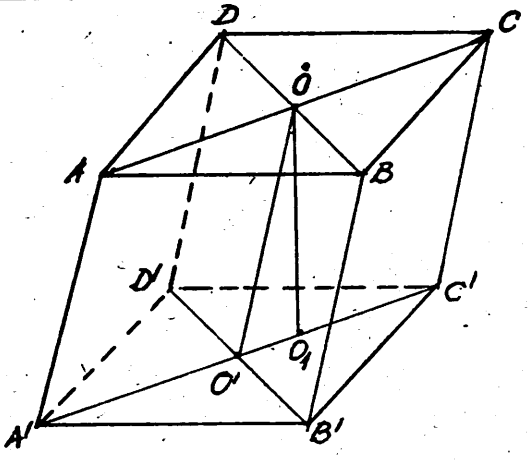
$A'\hat{A}''A_1 \equiv A'\hat{A}''A_2 \in 90^\circ$ $\Big| \Rightarrow \Delta A'A_1A'' \equiv \Delta A'A_2A'' \Rightarrow$

$|A'A_1| \equiv |A'A_2|$

$\Rightarrow |A_1A''| \equiv |A_2A''| \Rightarrow A'' \in$ bisectoarei unghiului $\hat{A}$, bisectoare care în cazul rombului ABCD este diagonala $|AC|$. Deci A, A'' şi C sînt coliniare.

19*. Baza unui paralelipiped este un romb şi planul uneia dintre secţiunile diagonale este perpendicular pe baze. Să se demonstreze că cealaltă secţiune diagonală este dreptunghi.

Soluţie:



Fie $(ACC'A') \perp (A'B'C'D')$ şi $OO_1 \perp (A'B'C'D') \Rightarrow OO_1 \subset (ACC'A')$

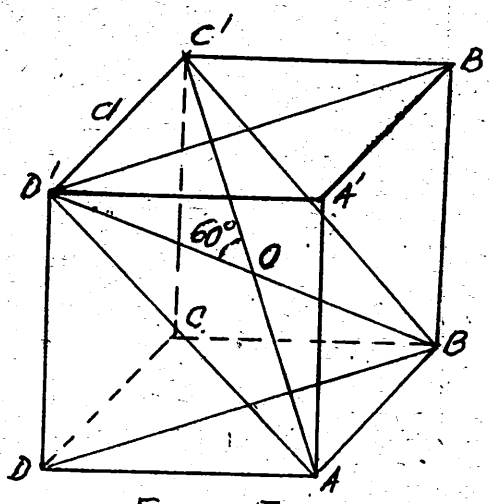
Dar OO' unind mijloacele laturilor opuse în paralelogramul DBB'D' este paralelă cu muchiile laterale ale paralelipipedului.

Din $OO' \perp B'D'$ şi $BB' \parallel OO' \Rightarrow$ $BB' \perp B'D'$ deci secţiunea diagonală $[DBB'D']$ este un triunghi.

2o. In prisma patrulateră regulată ABCDA'B'C'D' diagonalele $[AC']$ şi $[BD']$ determină un unghi de măsură 60°. Să se demonstreze că secţiunea diagonală a prismei este un pătrat.

Soluţie:

Fie $\| C'D' \| = a$



$|AB| \equiv |D'C'|$ şi $AB \parallel D'C' \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ABC'D' paralelogram
$C'D' \perp (AA'D'D) \Rightarrow C'D' \perp D'A$ $\Big| \Rightarrow$ ABC'D' dreptunghi
$\Rightarrow |OC'| \equiv |OD'|$
$m(D'\hat{O}C') = 60°$ $\Big| \Rightarrow \|AC'\| = 2\|C'D'\| = 2a$

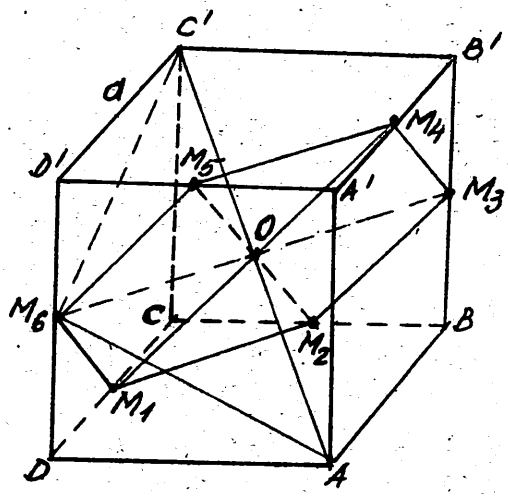
In triunghiul $AD'C'(\hat{D'} \in 90°) \Rightarrow$
$\Rightarrow \|AD'\| = \sqrt{\|AC'\|^2 - \|D'C'\|^2} =$
$= \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

In triunghiul $ADD'(D \in 90°) \Rightarrow$
$\Rightarrow \|DD'\| = \sqrt{\|AD'\|^2 - \|AD\|^2} =$
$= \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$

Fie $[D'DBB']$ secţiunea diagonală.
In pătratul ABCD, $\|DB\| = a\sqrt{2}$
Deci $\|DD'\| = \|DB\| = a\sqrt{2}$ şi dreptunghiul DBB'D' este pătrat.

*21. Se dă cubul $[ABCDA'B'C'D']$. Să se demonstreze că mijloacele muchiilor cubului care nu conţin nici unul din vîrfurile A şi C' sînt coplanare şi sînt vîrfurile unui hexagon regulat.

Soluţie:

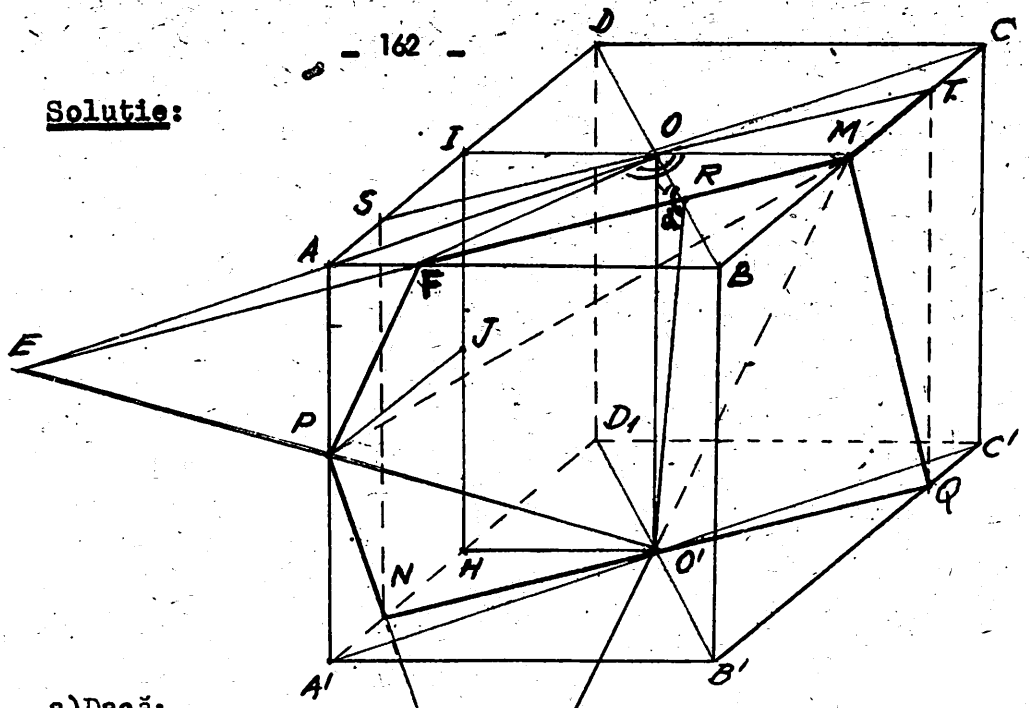


a - lungimea muchiei cubului.
Fie Mi mijloacele muchiilor indicate în enunţul problemei.
$\Delta C'D'M_6 \equiv \Delta ADM_6$ deoarece:
$|C'D'| \equiv |AD|, |D'M_6| \equiv |DM_6, C'\hat{D'}M_6 \equiv$
$\equiv A\hat{D}M_6 = 90° \Rightarrow |C'M_6| \equiv |AM_6|$ $\Big| \Rightarrow$
$|C'O| \equiv |OA|$ construcţie
$\Rightarrow M_6O \perp AC'$.
Asemănător se arată că $M_iO \perp AC'$ cînd $i = 1,2,3,4,5$.
Dar mulţimea dreptelor perpendiculare pe C'A în O este un plan perpendicular pe C'A.
$\|C'A\| = a\sqrt{3}$

$\|M_6C'\| = \sqrt{\|M_6D'\|^2 + \|D'C'\|^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$
In $\Delta M_6C'O(\hat{O} \in 90°) \Rightarrow \|M_6O\| = \sqrt{\|M_6C'\|^2 - \|C'O\|^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
In general se arată că: $\|M_iO\| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ $(i = 1,2,3,4,5,6)$
Deci punctele Mi aparţin aceluiaşi cerc.
Dar $\|M_1M_6\| = \|M_6M_5\| = \|M_5M_4\| = \|M_4M_3\| = \|M_3M_2\| = \|M_2M_1\| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
Ultimile rezultate conduc la afirmaţii: $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ este un hexagon regulat.

*22. Se dă cubul $[ABCDA'B'C'D']$ de latură a şi se consideră punctele: M mijlocul lui $[BC]$, P mijlocul lui $[AA']$ şi O' centrul feţei $[A'B'C'D']$. Se cere: a) forma secţiunii obţinută prin secţionarea cubului cu planul (MPO'), b) aria acestei secţiuni.

Soluție:



a) Dacă:

$\{E\} = AC \cap PQ' \Rightarrow E \in (ABC) \cap (MO'P)$.

$\{F\} = EM \cap |AB| \Rightarrow F \in (MO'P)$

H, I mijloacele segmentelor $|A'D'|$, AD și $\{G\} = IH \cap O'M \Rightarrow G \in (ADD') \cap (MO'P)$

$\{N\} = PG \cap |A'D'|$ și $\{Q\} = O'N \cap |B'C'| \Rightarrow N \in (MO'P)$ și $Q \in (MO'P)$.

Secțiunea este deci pentagonul $MQNPF$ și $FM \parallel NQ$ și $NP \parallel MQ$

b) $[AP]$ linie mijlocie în $EO'O$, $[AF]$ linie mijlocie în EOM.

Reținem $\|AF\| = \frac{\|OM\|}{2} = \frac{a}{4}$

$[HO']$ linie mijlocie în $MIG \Rightarrow \|GM\| = 2\|O'M\| = 2\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = a\sqrt{5}$

Dacă J este mijlocul segmentului $[IH]$ cum $NH \parallel PJ$ obținem:

$\frac{\|NH\|}{\|PJ\|} = \frac{\|GH\|}{\|GJ\|}$, $\frac{\|NH\|}{\frac{a}{2}} = \frac{a}{\frac{3a}{2}}$, $\|NH\| = \frac{a}{3}$

$\|A'N\| = \|QC'\| = \|A'H\| - \|NH\| = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$

Dacă $T = pr_{(ABC)}^{Q}$ și $S = pr_{(ABC)}^{N}$ atunci $pr_{(ABC)}^{PNQMF} = AFMTS$.

$\mathcal{A}[AFMTS] = \mathcal{A}[PNQMF] \cdot \cos\alpha$, α fiind măsura unghiului planelor celor două poligoane.

$\mathcal{A}[AFMTS] = \mathcal{A}[ABC] - \mathcal{A}[FBM] = \frac{a^2}{2} - \frac{\|FB\| \cdot \|BM\|}{2} =$

$= \frac{a^2}{2} - \frac{(a - \frac{a}{4}) \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{3a^2}{16} = \frac{5a^2}{16}$

Fie R piciorul perpendicularei din O pe FM.

Din $O'O \perp (ABC)$ și $OR \perp FM \Rightarrow O'R \perp FM$. Unghiul planelor poligoanelor are măsura $\alpha = m(O'\hat{R}O)$.

Dacă: $\mathcal{A}[OFM] = \frac{\|FM\| \cdot \|OR\|}{2} = \frac{\|OM\| \cdot \alpha(F,OM)}{2}$ deducem că:

$$\|OR\| = \frac{\|OM\| \cdot \alpha(F,OM)}{\|FM\|}$$

In triunghiul $FBM (B \in 90°)$: $\|FM\| = \sqrt{\|FB\|^2 + \|BM\|^2} =$

$= \sqrt{\frac{9}{16}a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{4}$

Deci $\|OR\| = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{13}}{4}} = \frac{a}{\sqrt{13}}$

In triunghiul dreptunghic $O'OR\ (\hat{O}\in 90^\circ)$ obţinem:

$$\|O'R\|=\sqrt{\|OO'\|^2+\|OR\|^2}=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{13}}=\frac{a\sqrt{14}}{\sqrt{13}}$$

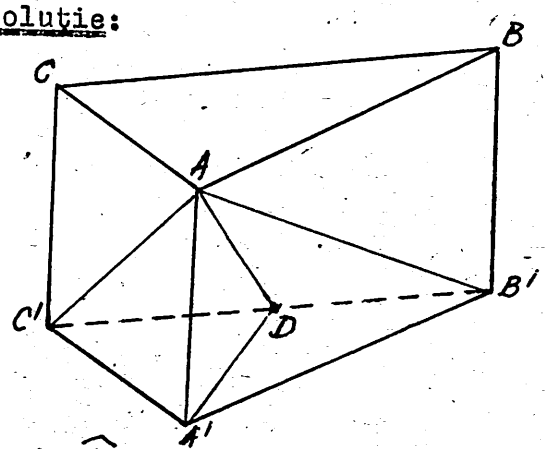
$$\cos\alpha=\cos O\hat{R}O'=\frac{\|OR\|}{\|O'R\|}=\frac{a}{\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{13}}{a\sqrt{14}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

In final:

$$\mathcal{C}[PNQMF]=\frac{\mathcal{C}[AFMTS]}{\cos\alpha}=\frac{5a^2}{16}\sqrt{14}$$

23.Intr-o prismă triunghiulară regulată se consideră secţiunea determinată de o muchie a bazei în vîrful opus al celeilalte baze. Să se afle:1)măsura unghiului diedru dintre planul de secţiune şi planul bazei dacă lungimea muchiei bazei este egală cu înălţimea triunghiului de secţiune;2)lungimile diagonalei feţei laterale dacă lungimea muchiei bazei este a şi secţiunea face cu baza un unghi de măsura 6o.

Soluţie:



1) $[AB'C']$ secţiunea cerută

$AA'\perp(A'B'C')$ şi $A'D\perp B'C'\Rightarrow AD\perp B'C'\Rightarrow$

$\Rightarrow m(AB'C'),(A'B'C')=m(A\hat{D}A')$

Fie $\|AB\|=a$

In triunghiul A'B'C', echilateral, $A'D\perp B'C'$ şi $\|B'D\|=\|DC'\|=\frac{a}{2}$

$$\|A'D\|=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Din ipoteza $\|AD\|=a$

$$\cos A\hat{D}A'=\frac{\|A'D\|}{\|AD\|}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow A\hat{D}A'\in 30^\circ$.

2)Dacă $A\hat{D}A'\in 60^\circ$ atunci $A'\hat{A}D\in 30^\circ$ şi $\|AD\|=2\|A'D\|=a\sqrt{3}$.

In triunghiul dreptunghic $ADC'\ (D\in 90^\circ)$ există relaţia

$$\|AC'\|=\sqrt{\|AD\|^2+\|DC'\|}=\sqrt{3a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{13}}{2}$$

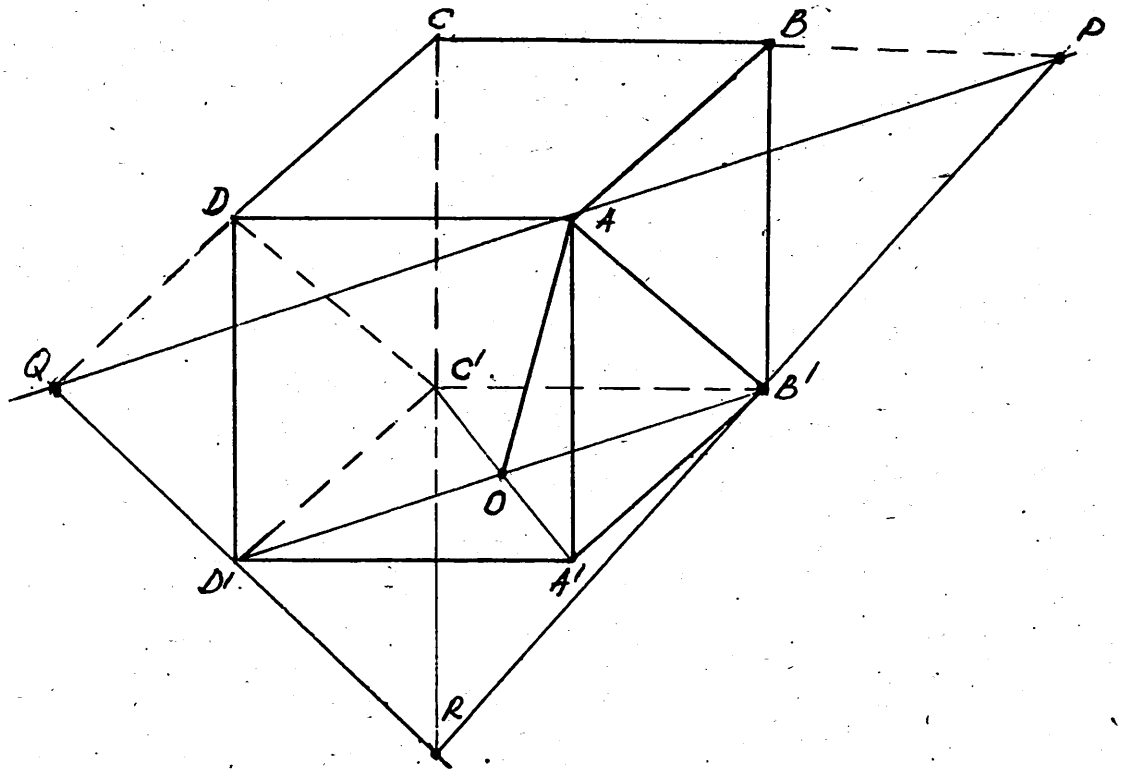
24.Se dă cubul ABCD A'B'C'D' de latură a.Pe semidreptele CB, CD, CC' se iau respectiv punctele P,Q,R astfel ca

Să se calculeze aria şi perimetrul secţiunii cubului prin planul (PQR).

Soluţie:

Din: $BA\|CQ$ şi $\|BA\|=\frac{1}{2}\|CQ\|$ deducem că $|BA|$ este linie mijlocie a triunghiului PCQ,A aparţinînd segmentului $|PQ|$.

Din: $D'D\|CR$ şi $\|D'D\|=\frac{1}{2}\|CR$ deducem că $|DD'|$ este linie mijlocie în triunghiul CQR şi deci D' aparţine segmentului $|QR|$.



Din: $BB' \parallel CR$ şi $\|BB'\| = \frac{1}{2}\|CR\|$ deducem că $|BB'|$ este linie mijlocie în triunghiul PCR şi deci B aparţine segmentului $|PR|$.

Secţiunea cu planul (PQR) este deci triunghiul $[AD'B']$.

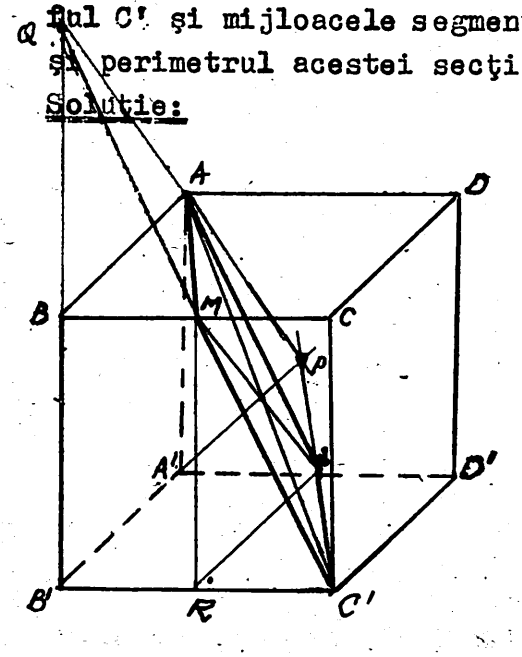
Cum $AA' \perp (O'A'B')$ şi $AO \perp O'B'$ rezultă că $AO \perp O'B'$.

In triunghiul $AA''O$ dreptunghic în A' scriem: $\|AO\| = \sqrt{\|AA'\|^2 + \|OA'\|^2}$

$$\|AO\| = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}; \quad \mathcal{A}[AO'B'] = \frac{1}{2}\|O'B'\| \cdot \|AO\| = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Perimetrul $AD'B' = 3 \cdot a\sqrt{2}$, triunghiul $AD'B'$ fiind echilateral şi lungimea unei laturi fiind diagonala feţei ($a\sqrt{2}$).

25. Fie cubul $[ABCD\ A'B'C'D']$ de *latură* a. Să se construiască poligonul obţinut prin secţionarea cubului cu planul determinat de vîrful C' şi mijloacele segmentelor $|A'D'|$ şi $|BC|$ şi să se afle aria şi perimetrul acestei secţiuni.



Soluţie:

Fie M mijlocul segmentului $|BC|$ şi N mijlocul segmentului $|A'D'|$

$C'M \cap B'B = \{Q\}$, $C'N \cap B'A' = \{P\}$

In triunghiul $QB'C'$, $|BM|$ este linie mijlocie.

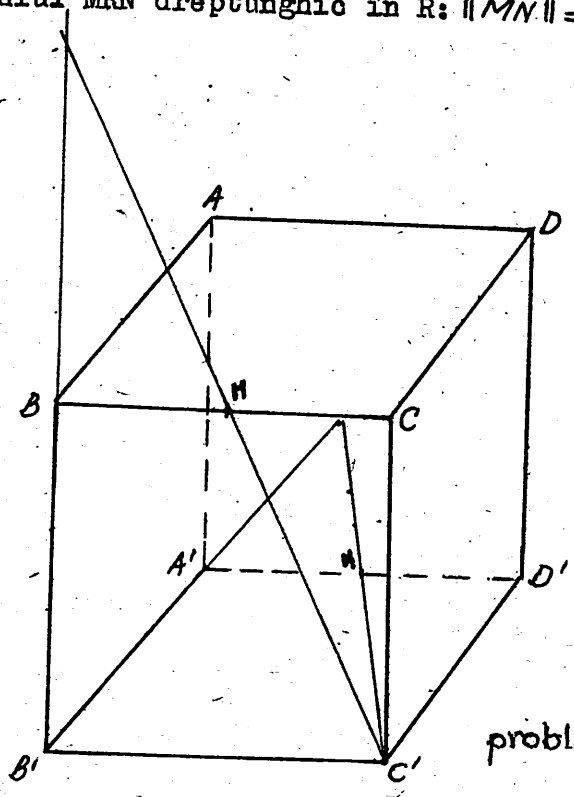
$\Delta NPA' \equiv \Delta NC'D' \Rightarrow \|A'P\| = \|C'D'\|$ şi $\|PN\| = \|NC\|$.

In triunghiul $QB'P$, $|BA|$ linie mijlocie.

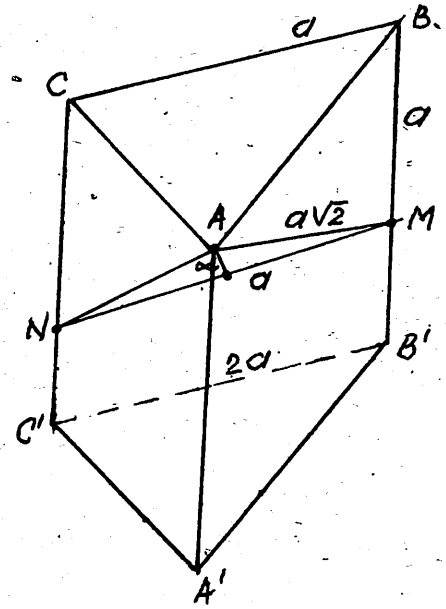
Secţiunea căutată este $[ANC'M]$

Deoarece $|AN|$ linie mijlocie în

$PQC' \Rightarrow AN \parallel MC'$ și $\|AN\| = \|MC'\|$, $ANC'M$ paralelogram.
Deoarece triunghiurile ABM și C'CM sînt congruente deducem că $\|AM\| = \|MC'\|$ și deci ANC'M este romb.
In triunghiul $ABM\ (\hat{B} \in 90°)$: $\|AM\| = \sqrt{\|AB\|^2 + \|BM\|^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$
Perimetrul rombului $= 4 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = 2a\sqrt{5}$.
Diagonala $|AC'|$ are lungimea $a\sqrt{3}$, fiind diagonală a cubului
$R \in |B'C'|$, mijloc al segmentului $|BC'|$.
In triunghiul MRN dreptunghic în R: $\|MN\| = \sqrt{\|MR\|^2 + \|RN\|^2}$



probl. 25



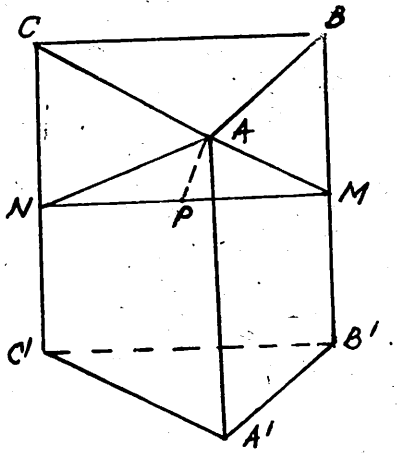
$$2a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{4} =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{7}}{4}$$

próbl. 26

26.Să se construiască secţiunea unei prisme triunghiulare regulate ABC A'B'C' printr-un plan ce trece prin vîrful A, mijlocul M al muchiei laterale BB' şi este paralel cu BC. Să se calculeze aria secţiunii dacă muchia bazei are lungimea a şi muchia laterală 2 a.

Solutie:



Secţiunea căutată este [ANM] unde N este mijlocul muchiei CC'.

$AMB \equiv ANB$ avînd: $|AB| \equiv |AC|$

$\hat{B} \equiv \hat{C} \in 90^\circ$

$|BM| \equiv |CN|$

$\Rightarrow |AM| \equiv |AN|$ şi ANM isoscel

Dacă $\|BB'\| = 2a \Rightarrow \|BM\| = a$

In triunghiul ABM, $\|AM\| = \sqrt{\|AB\|^2 + \|BM\|^2} = a\sqrt{2}$

Fie P mijlocul segmentului $|NM|$, $(|NM| \equiv |C'B'|)$

$\Rightarrow m(\hat{APM}) = 90^\circ$ şi $\|AP\| = \sqrt{\|AM\|^2 - \|PM\|^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

$\mathcal{A}[ANM] = \frac{1}{2}\|NM\| \cdot \|AP\| = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}$.

§2. Piramida

Pag.90.

1.Este posibil ca într-o piramidă cu muchiile laterale congruente, baza să fie: a)triunghi; b)dreptunghi; c)romb, trapez isoscel; trapez oarecare?

a)In planul triunghiului oarecare ABC să fie O centrul cercului circumscris. Construim dreapta $SO \perp pl(ABC)$ - fig.1

Intrucît $\triangle SOA \equiv \triangle SOB \equiv \triangle SOC$

($|SO|$ catetă comună şi $|OA| \equiv |OB| \equiv |OC|$)

rezultă $|SA| \equiv |SB| \equiv |SC|$

Am realizat o piramidă cu baza un triunghi oarecare şi muchiile laterale congruente.

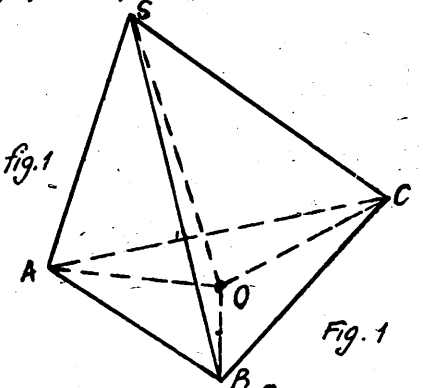


Fig. 1

b)In planul dreptunghiului ABCD, punctul O reprezintă intersecţia diagonalelor; Construim $SO \perp pl(ABCD)$.

Au loc congruenţele de triunghiuri:

$\triangle SOA \equiv \triangle SOB \equiv \triangle SOC \equiv \triangle SOD$

din care rezultă:

$|SA| \equiv |SB| \equiv |SC| \equiv |SD|$.

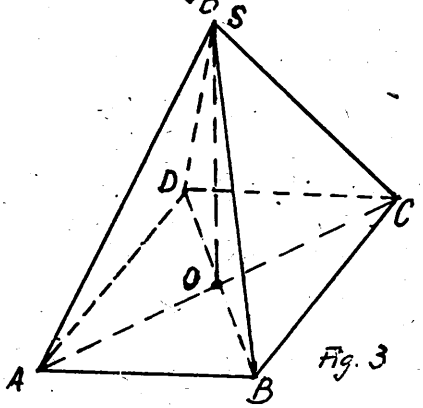


Fig. 3

S-a putut astfel analiza o piramidă cu baza dreptunghi şi muchiile laterale congruente.

c)Să presupunem că există o piramidă cu baza un romb(diferit de pătrat) $[ABCD]$ şi muchiile laterale congruente.Fie $OG \perp p/(ABCD)$ astfel încît $SO \perp p/(ABCD)$ Deoarece prin ipoteză $|SA| \equiv |SB| \equiv |SC| \equiv |SD|$ avem $\Delta SOA \equiv \Delta SOB \equiv SOC \equiv \Delta SOD \Rightarrow$ $\Rightarrow |OA| \equiv |OB| \equiv |OC| \equiv |OD|$

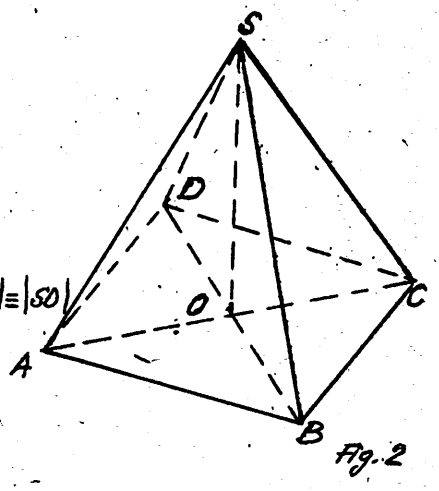


Fig.2

Aşadar vîrfurile rombului(diferit de pătrat)ar fi situate pe un cerc de centru O.Stim însă că rombul considerat,cu două unghiuri opuse ascuţite nu este inscriptibil.Contradicţia la care am ajuns ne conduce la concluzia că nu există o piramidă cu baza un romb şi muchiile laterale congruente.

d)Trapezul isoscel ABCD($AB \| CD$) este inscriptibil şi fie.O centrul cercului circumscris.Construim $SO \perp p/(ABCD)$. Avem $\Delta SOA \equiv \Delta SOB \equiv \Delta SOC \equiv$ $\equiv \Delta SOD$ Deoarece $|OA| \equiv |OB| \equiv |OC| \equiv |OD|$ Rezultă $|SA| \equiv |SB| \equiv |SC| \equiv |SD|$.

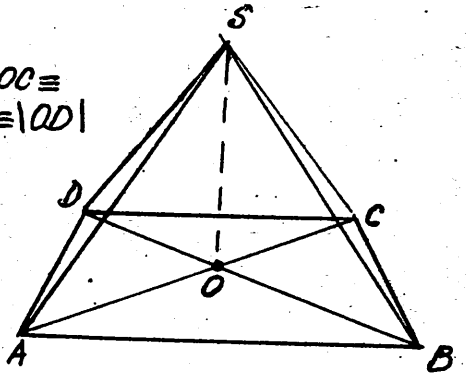


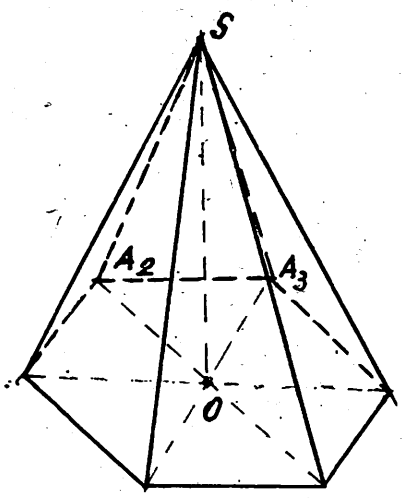
Fig.4

Am dovedit existenţa unei piramide $[SABCD]$ cu baza un trapez isoscel şi muchiile laterale congruente.

e)Presupunem că există o piramidă $[SABCD]$ cu baza un trapez oarecare $[ABCD]$ $(AB \| CD)$ şi muchiile laterale congruente.Ducînd $SO \perp p/(ABCD)$ cu $O \in p/(ABCD)$ avem $\Delta SAO \equiv \Delta SBO \equiv \Delta SCO \equiv \Delta SDO$ Rezultă $|OA| \equiv |OB| \equiv |OC| \equiv |OD|$ şi trapezul este inscriptibil.Deoarece prin ipoteză am exclus dreptunghiurile şi trapezele isoscele am ajuns la o contradicţie(trapezele isoscele şi dreptunghiurile sînt singurele patrulatere inscriptibile cu două laturi opuse paralele).Nu există aşadar o piramidă cu baza trapez oarecare şi muchiile laterale congruente.

2.Să se arate că dacă muchiile laterale ale unei piramide sînt congruente,atunci poligonul de bază poate fi înscris într-un cerc cu centrul în piciorul înălţimii piramidei.

Soluţie:



Fie $[SA_1A_2\text{----}A_n]$ o piramidă în care muchiile laterale sînt congruente: $|SA_1| \equiv |SA_2| \equiv \text{---} \equiv |SA_n|$. Dacă notăm cu O piciorul înălţimii $|SO|$, aşadar $|SO| \perp p(A_1A_2\text{----}A_n)$, $O \in p(A_1A_2\text{--}A_n)$ au loc următoarele congruenţe de triunghiuri dreptunghice:

$\Delta SA_1O \equiv \Delta SA_2O \equiv \Delta SA_3O \equiv \text{---} \equiv SA_nO$

şi rezultă $|OA_1| \equiv |OA_2| \equiv \text{---} \equiv |OA_n|$

Am arătat aşadar că punctele $A_1, A_2, \text{---}, A_n$ sînt situate pe cercul de centrul O.

3. Să se formuleze şi să se demonstreze reciproca proprietăţii precedente.

<u>Soluţie:</u>

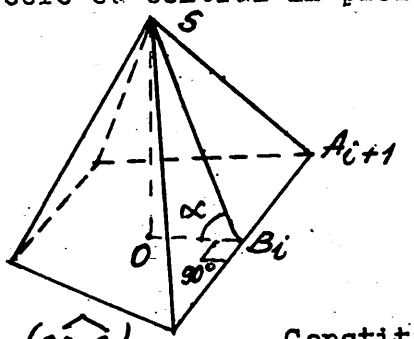
Reciproca proprietăţii enunţate în cadrul problemei nr.2 se poate formula astfel:

Dacă într-o piramidă poligonul de bază este înscris într-un cerc de centru O, punctul O reprezintă piciorul înălţimii piramidei, atunci muchiile laterale sînt congruente.

Vom folosi figura de la problema nr.2. Pe baza ipotezei $SO \perp p(A_1A_2\text{--}A_n)$ şi $|OA_1| \equiv |OA_2| \equiv \text{----} \equiv |OA_n|$.

Au loc congruenţele de triunghiuri dreptunghice $\Delta SA_1O \equiv \equiv |SA_2O \text{---} \equiv \Delta SA_nO$ şi rezultă $|SA_1| \equiv |SA_2| \equiv \text{----} \equiv |SA_n|$

4*. Să se arate că dacă feţele laterale ale unei piramide formează cu planul bazei unghiuri diedre congruente, atunci poligonul de la bază poate fi circumscris unui cerc cu centrul în piciorul înălţimii.



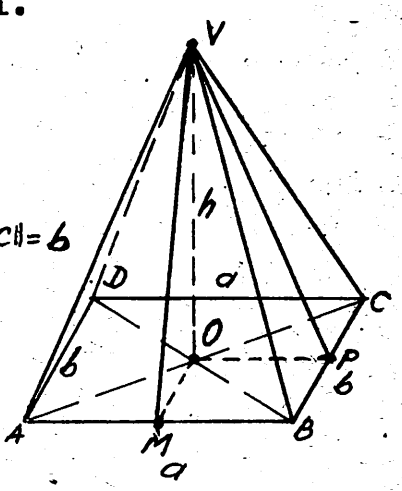
<u>Soluţie:</u>

Considerăm piramida $[SA_1A_2\text{---}A_{n-1}A_n]$ în care $|SO|$ este înălţimea din S, iar $|OB_i| \perp |A_iA_{i+1}|$, $i = 1, 2, \text{------} n$ (considerăm $A_{n+1} = A_1$). Din teorema celor trei perpendiculare rezultă $|SB_i| \perp |A_iA_{i+1}|$. Stim din ipoteză că $\alpha = m(\widehat{SB_iO})$. Constituie măsura unghiului diedru determinat de $[SA_iA_{i+1}]$ şi $[A_1\text{-----}A_n]$ pentru $i = 1, 2, \text{-----} n$.

Avem $\|OB_i\| = \|SO\| ctg\alpha = r$, $i = 1,2,\dots n$. Rezultă că poligonul $(A_1 A_2 \dots A_n)$ este circumscris cercului de centrul O şi rază r.

5. O piramidă are ca bază un dreptunghi cu dimensiunile a şi b, înălţimea fiind h, iar piciorul înălţimii fiina centrul bazei. Să se calculeze aria laterală a piramidei.

Soluţie:



Notăm prin $[VABCD]$ piramida cu baza $[ABCD]$ - dreptunghi $\{O\} = AC \cap BD$ şi $|VO|$ reprezintă înălţimea piramidei. $\|VO\| = h$, $\|AB\| = \|DC\| = a$, $\|AD\| = \|BC\| = b$. Punctele M şi P fiind mijloacele laturilor $|AB|$ şi $|BC|$ avem $OM \perp AB$ şi $OP \perp BC$. Aplicînd teorema celor trei perpendiculare rezultă $VM \perp AB$ şi $VP \perp BC$. Din aplicarea teoremei lui Pitagora în ΔVOM şi ΔVOP rezultă $\|VM\| = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + b^2}$, $\|VP\| = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + a^2}$

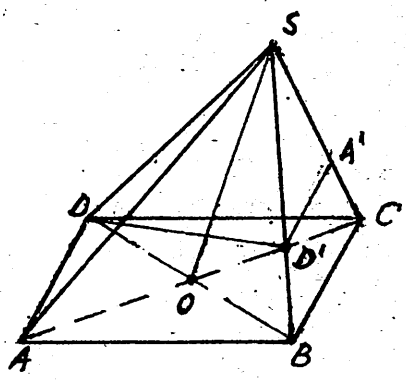
Notînd cu $\mathcal{A}_\ell$ aria laterală a piramidei obţimem :

$$\mathcal{A}_\ell = 2\mathcal{A}[BCV] + 2\mathcal{A}[ABV],$$

$$\mathcal{A}_\ell = \frac{1}{2}\left[b\sqrt{4h^2 + a^2} + a\sqrt{4h^2 + b^2}\right]$$

6.* Fie $[SABCD]$ o piramidă cu baza $[ABCD]$, dreptunghi. Se proiectează A şi D pe muchiile $[SC]$ şi $[SB]$ respectivă în A' şi D'. Să se demonstreze că triunghiurile SBC şi SA'D' sînt asemenea.

Soluţie:



Aplicăm teorema lui Pitagora - generalizată în ΔSBD şi ΔSAC (cu presupunerea că $\widehat{BSD}$ şi $\widehat{ASC}$ sînt ascuţite)

(1) $\|OB\|^2 = \|SD\|^2 + \|SB\|^2 - 2\|SB\| \cdot \|SD'\|$

(2) $\|AC\|^2 = \|SA\|^2 + \|SC\|^2 - 2\|SC\| \cdot \|SA'\|$

In ΔSAC şi ΔSBD aplicăm relaţia medianei pentru $|SO|$.

(3) $\|SB\|^2 + \|SD\|^2 = 2\|SO\|^2 + 2\left(\frac{\|DB\|}{2}\right)^2$

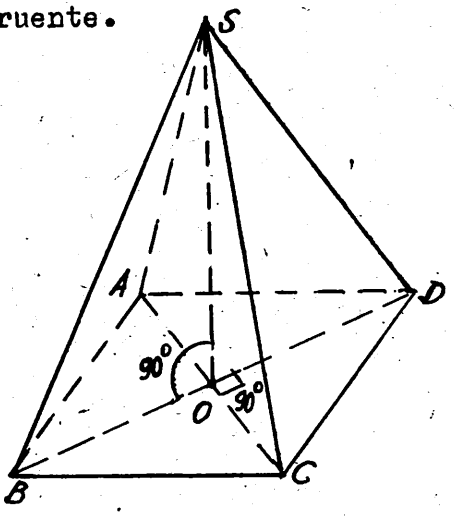
(4) $\|SA\|^2 + \|SC\|^2 = 2\|SO\|^2 + 2\left(\frac{\|AC\|}{2}\right)^2$

Stim că $\|DB\| = \|AC\|$ - diagonale într-un dreptunghi. Se obţine $\|SB\|^2 + \|SD\|^2 = \|SA\|^2 + \|SC\|^2$. Din relaţiile (1),(2),(3),(4) rezultă:

$$\|SB\| \cdot \|SD'\| = \|SC\| \cdot \|SA'\| \Longleftrightarrow \frac{\|SB\|}{\|SA'\|} = \frac{\|SC\|}{\|SD'\|}$$

Obţinem $\Delta SA'D' \sim \Delta SBC$.

7.Baza unei piramide este un romb şi înălţimea piramidei trece prin punctul de intersecţie a diagonalelor bazei.Să se arate că feţele laterale ale piramidei sînt congruente.



Soluţie:

Fie $[SABCD]$ piramida cu baza romb.

Ţinînd seama că baza piramidei este un romb putem scrie:

$$\|AB\| = \|BC\| = \|CD\| = \|DA\| .$$

Din proprietăţile rombului rezultă

$$\|AO\| = \|OC\| , \quad \|BO\| = \|OD\|$$

unde $AC \cap BD = \{O\}$ şi $AC \perp BD$

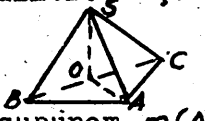
$$SO \perp p/(ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases}$$

Triunghiurile SAC şi SBD fiind isoscele(înălţimea $|SO|$ este şi mediană) avem $\|SA\| = \|SC\|$ şi $\|SB\| = \|SD\|$.

Folosind cazul al treilea de congruenţă a triunghiurilor obţinem:

$\Delta SBC \equiv \Delta SDC \equiv \Delta SDA \equiv \Delta SBA$ adică feţele laterale ale piramidei sînt congruente.

8.Baza unei piramide este un triunghi dreptunghic şi muchiile laterale sînt congruente.Să se arate că planul uneia dintre feţele laterale este perpendicular pe planul bazei.



Soluţie:

Piramida fiind $[SABC]$ avem $|SA| \equiv |SB| \equiv |SC|$ Presupunem $m(A) = 90°$.

Fie O piciorul perpendicularei din S pe planul (ABC).

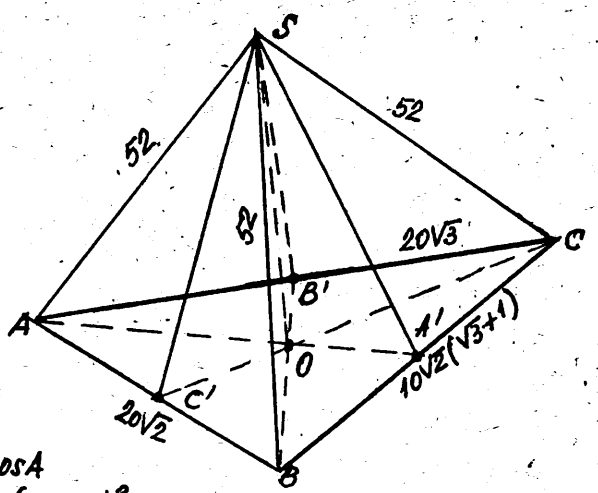
$$SO \perp p/(ABC) \Rightarrow SO \perp OA , \; SO \perp OB , \; SO \perp OC$$

$$\Delta SOA \equiv \Delta SOB \equiv \Delta SOC$$

Rezultă $|OA| \equiv |OB| \equiv |OC|$ şi punctul O este aşadar centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC.Punctul O aparţine atunci ipotenuzei $|BC|$. Din relaţiile $|SO| \perp p/(ABC)$ şi $|SO| \subset p/(SBC)$ rezultă $p/(SBC) \perp p/(ABC)$.

9.* Muchiile laterale ale unei piramide au lungimea 52.Baza este un triunghi cu laturile $20\sqrt{2}, 20\sqrt{3}$ şi $10\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$.Să se afle:a)înălţimea piramidei;b)unghiul dintre muchiile laterale şi planul bazei;c)Măsura unghiurilor diedre determinate de bază şi feţele laterale.

Soluţie:



a)Considerăm [SABC] piramida cu muchiile laterale de lungime 52.Scriem relaţia cosinusului în ΔABC ştiind că :

$\|AB\| = 20\sqrt{2}$,
$\|AC\| = 20\sqrt{3}$
$\|BC\| = 10\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$

$\|BC\|^2 = \|AB\|^2 + \|AC\|^2 - 2\|AB\| \cdot \|AC\| \cos A$

$200(\sqrt{3}+1)^2 = 800 + 1200 - 800\sqrt{6}\cos A \Rightarrow (\sqrt{3}+1)^2 = 10 - 4\sqrt{6}\cos A.$

$4 + 2\sqrt{3} = 10 - 4\sqrt{6}\cos A \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\sin^2 A = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 A = \frac{\sqrt{3}+2}{4}.$

Stim din teorema sinusului că $\frac{\|BC\|}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{\|BC\|^2}{\sin^2 A} = 4R^2.$

$$R^2 = \frac{1}{4}\,\frac{200(\sqrt{3}+1)^2}{\frac{\sqrt{3}+2}{4}} = 400 \Rightarrow R = 20$$

SO fiind înălţimea piramidei avem $\|SO\| = \sqrt{\|AS\|^2 - \|AO\|^2} = \sqrt{52^2 - 20^2} = 48$

b) [AO] fiind proiecţia muchiei laterale [SA] pe planul(ABC), dacă $\alpha = m(\widehat{SAO}) = m(\widehat{SBO}) = m(\widehat{SCO})$ avem $\sin\alpha = \frac{\|SO\|}{\|SA\|} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

c) Fie A',B',C' mijloacele laturilor [BC] , [AC] , [AB] .Aceste puncte sînt şi picioarele înălţimilor din S construite pe feţele laterale.

$\|SA'\| = \sqrt{52^2 - [5\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)]^2} = \sqrt{2504 - 100\sqrt{3}}$,

$\|SB'\| = \sqrt{52^2 - (10\sqrt{3})^2} = \sqrt{2404}$

$\|SC'\| = \sqrt{52^2 - (10\sqrt{2})^2} = \sqrt{2504}$,

$\sin(\widehat{SA'O}) = \frac{\|SO\|}{\|SA'\|} = \frac{48}{\sqrt{2504-100\sqrt{3}}} = \frac{24}{\sqrt{626-25\sqrt{3}}}$,

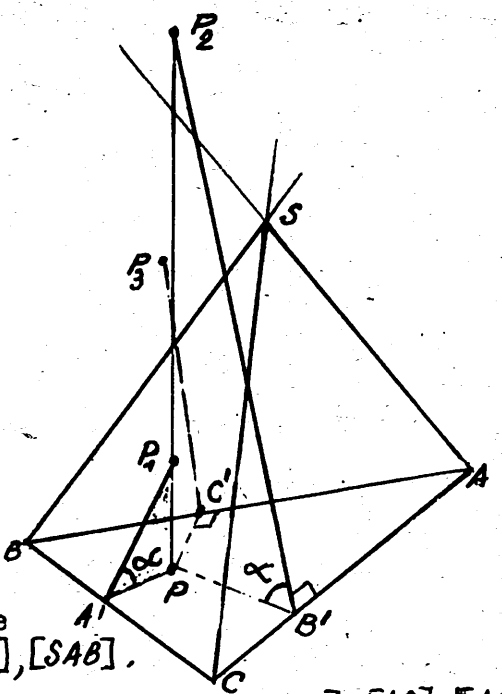
$\sin(\widehat{SB'O}) = \frac{\|SO\|}{\|SB'\|} = \frac{24}{\sqrt{601}}$,

$\sin(\widehat{SC'O}) = \frac{\|SO\|}{\|SC'\|} = \frac{24}{\sqrt{626}}$

lo. Se ridică într-un punct al bazei unei piramide triunghiulare regulate o perpendiculară pe planul bazei ce intersectează planele feţelor laterale în trei puncte.Să se demonstreze că suma distanţelor acestor puncte la piciorul perpendicularei este constantă.

Soluţie:

Vom reaminti mai întîi un rezultat din geometria plană. Dacă punctul P este interior triunghiului echilateral ABC sau pe laturi, atunci suma distanţelor de la acest punct la laturi este egală cu lungimea înălţimii triunghiului. Facem şi observaţia că piramida considerată $[SABC]$ este regulată, aşadar unghiurile diedre formate de feţele laterale şi bază au aceeaşi măsură α. Vom nota cu P_1, P_2, P_3 intersecţiile perpendicularei construite în P pe planul (ABC) cu $[SBC], [SAC], [SAB]$.



Fie A', B', C' picioarele perpendicularelor din P pe $[BC], [AC], [AB]$. In triunghiurile dreptunghice P_1PA', P_2PB', P_3PC' putem scrie:

$$\left.\begin{aligned} \|PP_1\| &= \|PA'\| \operatorname{tg}\alpha \\ \|PP_2\| &= \|PB'\| \operatorname{tg}\alpha \\ \|PP_3\| &= \|PC'\| \operatorname{tg}\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\|PP_1\| + \|PP_2\| + \|PP_3\| = \\ &= \operatorname{tg}\alpha \left(\|PA'\| + \|PB'\| + \|PC'\|\right) = \\ &= \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{unde} \end{aligned}$$

$$a = \|AB\| = \|AC\| = \|BC\|$$

11. Să se afle muchia laterală şi aria laterală a unei piramide regulate cu lungimea laturii bazei a şi înălţimea H, dacă baza este: a) triunghiulară; b) patrulateră; c) hexagonală.

Solutie:

a) Considerăm piramida regulată $[SABC]$ şi fie O piciorul înălţimii din S. Punctul O este pentru triungiul echilateral ABC centrul cercului circumscris, ortocentru şi centru de greutate. Notăm

$\|SO\| = h$, $\|AB\| = \|BC\| = \|CA\| = a$

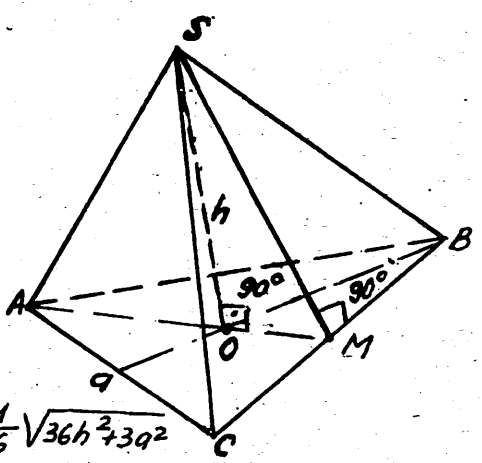
M fiind mijlocul laturii $|BC|$ avem

$$\|SB\|^2 = \|SO\|^2 + \|OB\|^2, \quad \|SB\|^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 =$$

$$= h^2 + \frac{3a^2}{3} \Rightarrow \|SB\| = \frac{1}{23}\sqrt{9h^2+3a^2}.$$

$$\|SM\|^2 = \|SO\|^2 + \|OM\|^2 = h^2 + \frac{3a^2}{36} \Rightarrow \|SM\| = \frac{1}{6}\sqrt{36h^2+3a^2}$$

$$\mathcal{A}_\ell = \frac{3a\|SM\|}{2} = \frac{a}{4}\sqrt{36h^2+3a^2}$$



b) Considerăm piramida patrulateră regulată $[SABCD]$ în care punctul O este piciorul înălţimii din S, $\{O\} = AC \cap BD$. Fie M mijlocul laturii $|BC|$. Notăm $\|AB\| = a$, $\|SO\| = h$. In pătratul ABCD de latură a, avem $\|DB\|^2 = 2a^2 \Rightarrow \|DB\| = a\sqrt{2} \Rightarrow \|OB\| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

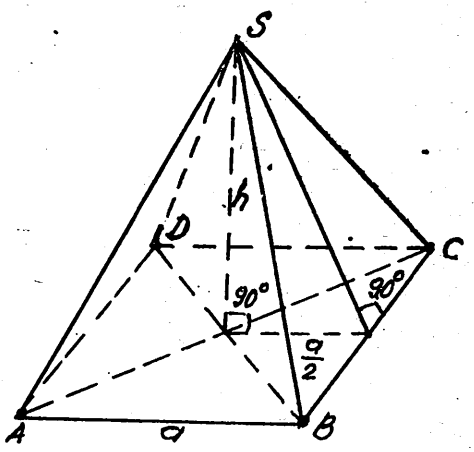
$\|SB\|^2 = \|SO\|^2 + \|OB\|^2 = h^2 + \frac{2a^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|SB\| = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2+2a^2}$

$\|SM\|^2 = \|SO\|^2 + \|OM\|^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|SM\| = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2+a^2}$

$\mathcal{A}_\ell = \frac{4 \cdot a \cdot \|SM\|}{2} = a\sqrt{4h^2+a^2}$.



c)Considerăm piramida hexagonală regulată $[SABCDEF]$ în care punctul O este piciorul înălțimii din S. Fie M mijlocul laturii $|AB|$. Raza $\|OB\| = a$, apotema bazei $\|OM\| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\|SO\| = h$.

$\|SB\|^2 = \|SO\|^2 + \|OB\|^2$

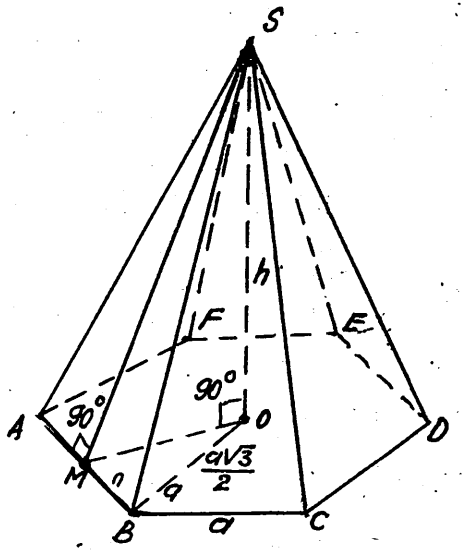
$\|SB\|^2 = h^2 + a^2$, $\|SB\| = \sqrt{h^2+a^2}$

$\|SM\|^2 = \|OM\|^2 + \|SO\|^2$

$\|SM\|^2 = h^2 + \frac{3a^2}{4} \Rightarrow$

$\|SM\| = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2+3a^2}$

$\mathcal{A}_\ell = \frac{6a \cdot \|SM\|}{2} = \frac{3a}{2}\sqrt{4h^2+3a^2}$.



12.Să se afle înălțimea și muchia laterală a unei piramide regulate cu lungimea laturii bazei a și apotema m, dacă baza este: a)triunghiulară; b)patrulateră; c)hexagonală.

<u>Soluție</u>:

a)Păstrăm notațiile din problema a 11-a. Fie $m = \|SM\|$ apotema piramidei $[SABC]$; $|SM| \perp |BC|$; $h^2 = \|SO\|^2 = \|SM\|^2 - \|OM\|^2$

$h^2 = \|SO\|^2 = \|SM\|^2 - \|OM\|^2$; $h^2 = m^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$h^2 = m^2 - \frac{3a^2}{36} \Rightarrow h = \frac{1}{6}\sqrt{36m^2-3a^2}$; $\|SB\|^2 = \|SM\|^2 + \|BM\|^2$

$\|SB\|^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \|SB\| = \frac{1}{2}\sqrt{4m^2+a^2}$

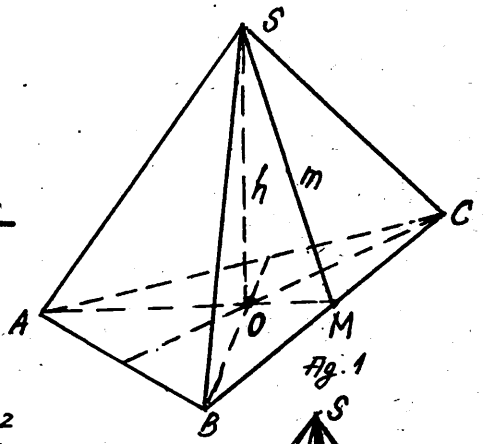


Fig. 1

b) Fie $m = \|SM\|$, apotema piramidei $[SABCD]$; $|SM| \perp |BC|$; $\|SB\|^2 = \|SM\|^2 + \|OM\|^2$,

$\|SB\|^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \|SB\| = \frac{1}{2}\sqrt{4m^2+a^2}$.

$h^2 = \|SO\|^2 = \|SM\|^2 - \|OM\|^2 = m^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$,

$h = \|SO\| = \frac{1}{2}\sqrt{4m^2-a^2}$.

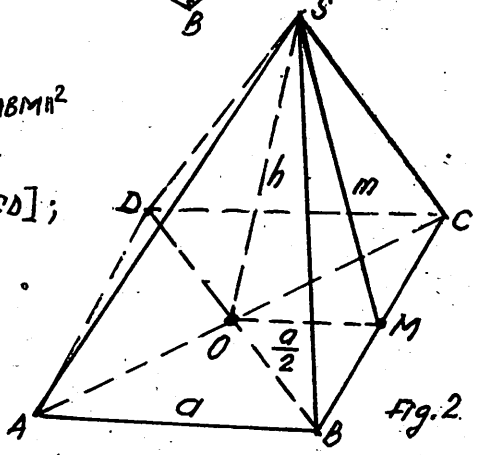
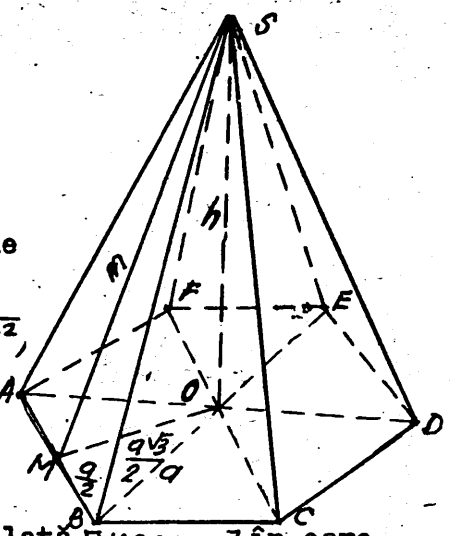


Fig. 2



c)Fie $m = \|SM\|$ apotema piramidei hexagonale $[SABCDEF]$; $|SM| \perp |AB|$

$\|SB\|^2 = \|SM\|^2 + \|MB\|^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \|SB\| = \frac{1}{2}\sqrt{4m^2+a^2}$,

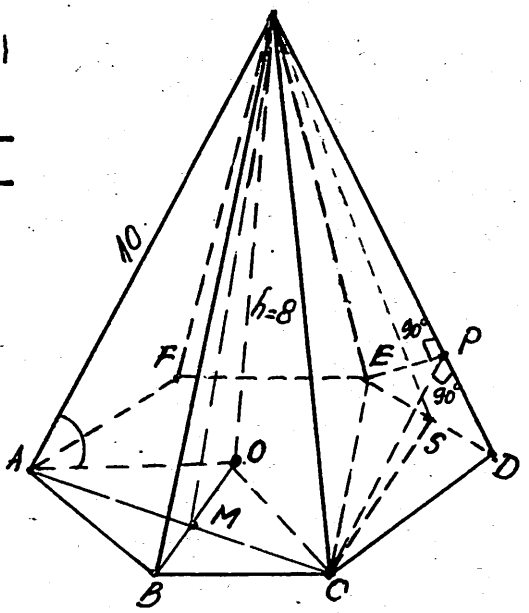
$h^2 = \|SO\|^2 = \|SM\|^2 - \|OM\|^2 = m^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = m^2 - \frac{3a^2}{4}$,

$h = \|SO\| = \frac{1}{2}\sqrt{4m^2-3a^2}$.

Pag.91

13*. Se consideră piramida hexagonală regulată $[VABCDEF]$ în care $\|VA\| = 10$ şi înălţimea este 8.Să se afle: a)$\mathcal{A}[VAC]$;b)măsura unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei;c)măsura unghiului diedru dintre două feţe laterale alăturate.

Soluţie:



a)Considerăm perpendiculara pe $|VO|$ planul bazei şi din ΔVAO calculăm raza cercului circumscris hexagonului regulat cu centrul în punctul O.

$r = \|AO\|^2 = \|VA\|^2 - \|VO\|^2$

$r^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow r = 6$

Rezultă $\|AB\| = r = 6$.

$\|AC\| = r\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

(latura triunghiului echilateral AEC înscris în acelaşi cerc)

Dacă $\{M\} = |OB| \cap |AC|$

avem $\|OM\| = \frac{r}{2} = 3$

şi $\|VM\|^2 = \|VO\|^2 + \|OM\|^2 = 64+9 = 73 \Rightarrow \|VM\| = \sqrt{73}$.

Dar $|VM| \perp |AC|$ deoarece $|VO \perp pl(ABCDEF)$ şi $|OM| \perp |AC|$ (în rombul ABCD diagonalele sînt perpendiculare).

$\mathcal{A}[VAC] = \frac{1}{2}\|AC\| \cdot \|VM\| = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{73} = 3\sqrt{219}$.

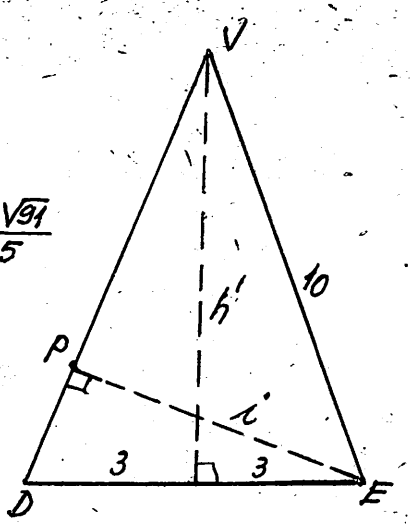
b)Pentru adetermina măsura unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei calculăm $\cos \hat{VAO} = \frac{\|AO\|}{\|VA\|} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

c)Pentru a detrmina măsura unghiului diedru dintre două feţe laterale alăturate,de exemplu $[VED]$; $[VDC]$ vom calcula mai întîi lungimile înălţimilor congruente $|CP|, |EP|$ (avem $|CP| \perp\!\!\!\perp |VD|$ şi $|EP| \perp |VD|$).Notăm $i = \|EP\| = \|CP\|$,

$h' = \|VS\|$ unde S este mijlocul lui $|DE|$.

$\|SO\| = \|SE\| = 3$, $\|VE\| = \|VD\| = 10$

$h' = \sqrt{100-9} = \sqrt{91}$



Observăm că $\|DE\| \cdot h' = \|VD\| \cdot i$

$6\cdot\sqrt{91} = 10 \cdot i \Rightarrow i = \|EP\| = \|CP\| = \frac{3\sqrt{91}}{5}$

Pentru a determina măsura unghiului diedru format de feţele laterale $[VDC]$ şi $[VDE]$ aplicăm teorema cosinusului în $\triangle ECP$

Putem scrie:

$\|EC\|^2 = i^2 + i^2 - 2i\cos E\hat{P}C$

$\|EC\| = 6\sqrt{3} \Rightarrow 36\cdot 3 = 2i^2(1-\cos E\hat{P}C)$

$36\cdot 3 = 2\cdot\frac{9\cdot 91}{25}(1-\cos E\hat{P}C)$

$\cos E\hat{P}C = -\frac{59}{31}$.

14. Intr-o piramidă patrulateră **regulată** $[VABCD]$ aria unei feţe laterale este q. Unghiul diedru dintre două feţe laterale alătura te au măsura 120. Să se afle $\sphericalangle[VAC]$

<u>Soluţie</u>:

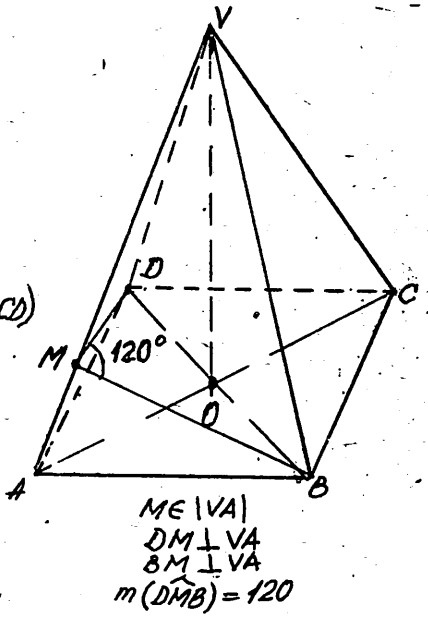
Intrucît unghiul diedru determinat de feţele $[VAB]$, $[VAD]$ are măsura 120, atunci faţa $[VAC]$ se află situată în semiplanul bisector al unghiului diedru considerat. Prin urmare unghiul diedru determinat de $[VAB]$ şi $[VAC]$ are măsura 60. Stim că $\{O\} = AC \cap BD$ şi $VO \perp p/(ABCD)$

$\left.\begin{matrix} BO \perp AC \\ BO \perp VO \end{matrix}\right\} \Rightarrow BO \perp p/(VAC)$

Din ipoteză $q = \sphericalangle[VAB]$

$\sphericalangle[VAO] = \sphericalangle[VAB]\cos 60^\circ = \frac{1}{2}q$

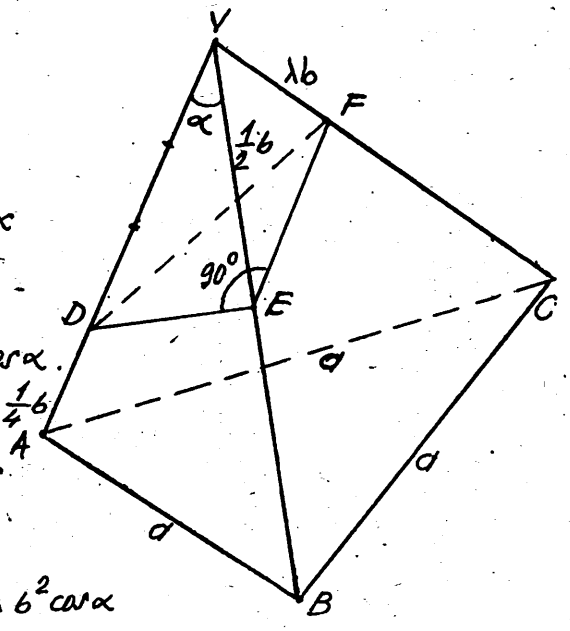
$\sphericalangle[VAC] = 2\sphericalangle[VAO] = 2\cdot\frac{1}{2}q = q$



$M \in |VA|$
$DM \perp VA$
$BM \perp VA$
$m(D\hat{M}B) = 120$

15. Se consideră piramida triunghiulară regulată $[VABC]$ în care latura bazei are lungimea a, şi muchiile laterale cu lungimea b. Se consideră punctul $D \in |VA|$ astfel ca $\|DA\| = \frac{1}{4}\|VA\|$, punctul E, mijlocul lui $|VB|$, iar punctul $F \in |VC|$ astfel ca $\|VF\| = \lambda\|VC\|$. *Să se determine λ în funcţie de a şi b astfel ca triunghiul DEF să fie dreptunghic în E.*

<u>Soluţie</u>:



Vom calcula mai întîi
$\|DE\|, \|EF\|, \|DF\|$
aplicînd teorema cosinusului în triunghiurile VDE, VEF, VDF.

$\|DE\|^2 = \frac{9}{16}b^2 + \frac{1}{4}b^2 - 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}b^2\cos\alpha$

$\|EF\|^2 = \frac{1}{4}b^2 + \lambda^2 b^2 - 2\frac{1}{2}\lambda b^2\cos\alpha$

$\|DF\|^2 = \frac{9}{16}b^2 + \lambda^2 b^2 - 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\lambda b^2\cos\alpha$.

Stim că triunghiul DEF este dreptunghic($m(E) = 90$)aşadar are loc relaţia :

$\|DF\|^2 = \|DE\|^2 + \|EF\|^2$

$\frac{1}{2}b^2 - \frac{3}{4}b\cos\alpha - \lambda b^2\cos\alpha = -\frac{3}{2}\lambda b^2\cos\alpha$

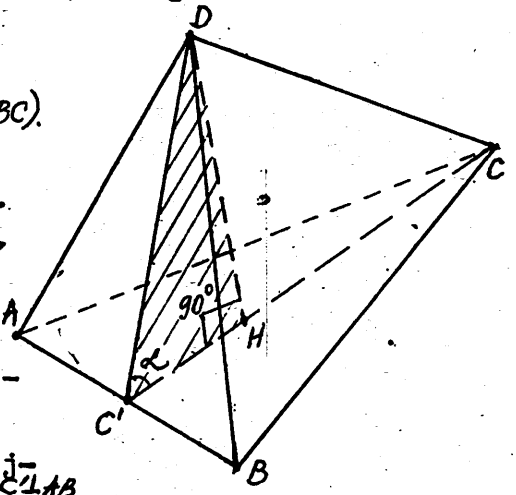
1) $\frac{1}{2} = \cos\alpha\left(\frac{3}{4} + \lambda - \frac{3}{2}\lambda\right)$; $\cos\alpha = \frac{2}{3-2\lambda}$. Aplicăm din nou teorema cosinusului în triunghiul VAB : $a^2 = b^2 + b^2 - 2b^2\cos\alpha$

2) $\cos\alpha = \frac{2b^2 - a^2}{2b^2}$

Din relaţiile (1) şi (2) determinăm pe λ .

$\frac{3-2\lambda}{2} = \frac{2b^2}{2b^2 - a^2}$, $\lambda = \frac{3a^2 - 2b^2}{2(a^2 - 2b^2)}$

16. Să se calculeze măsura unghiului diedru dintre planele determinate de două **feţe** ale unui tetraedru regulat.

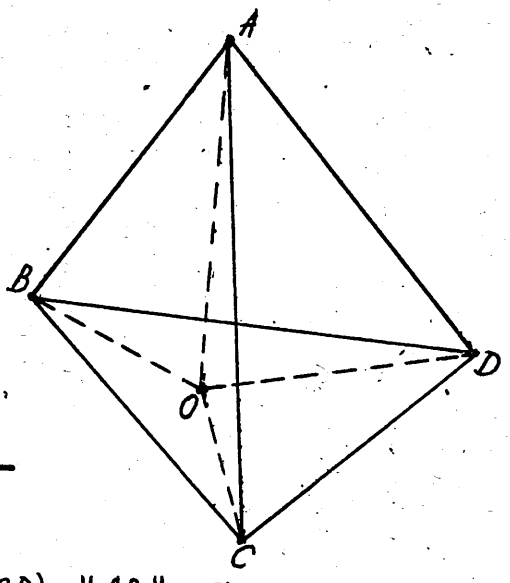


Soluţie:
In tetraedrul $[DABC]$ construim înălţimea $|DH|$, $DH \perp p(ABC)$, $H \in p(ABC)$.
Stim că $\|DA\| = \|DB\| = \|DC\|$
Observăm că au loc următoarele congruenţe: $\Delta DAH \equiv \Delta DBH \equiv \Delta DCH \Rightarrow$
$\Rightarrow \|HA\| = \|HB\| = \|HC\|$.
Punctul H este aşadar centrul cercului circumscris triunghiului echilateral ABC, ortocentrul şi centrul de greutate. Dacă punctul C' este mijlocul lui $|AB|$,deoarece $DH \perp p(ABC)$, $HC \perp AB$ folosind teorema celor trei perpendiculare rezultă $DC' \perp AB$ .Intrucît $\|HC'\| = \frac{1}{3}\|CC'\| = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}$ şi $\|DC'\| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ putem calcula măsura unghiului diedru detreminat de două feţe: $\cos \widehat{DC'H} = \frac{\|HC'\|}{\|DC'\|} = \frac{1}{3}$.

17. Se consideră tetraedrul $[ABCD]$ în care $|AB| \equiv |AC| \equiv |AD|$ .Să se arate că perpendiculara din A pe planul(BCD) trece prin centrul cercului circumscris triunghiului BCD.

Soluţie:

Construim $AO \perp p/(BCD)$,
$O \in p/(BCD)$.
$AO \perp p/(BCD) \Rightarrow \begin{cases} AO \perp OB \\ AO \perp OC \\ AO \perp OD \end{cases}$

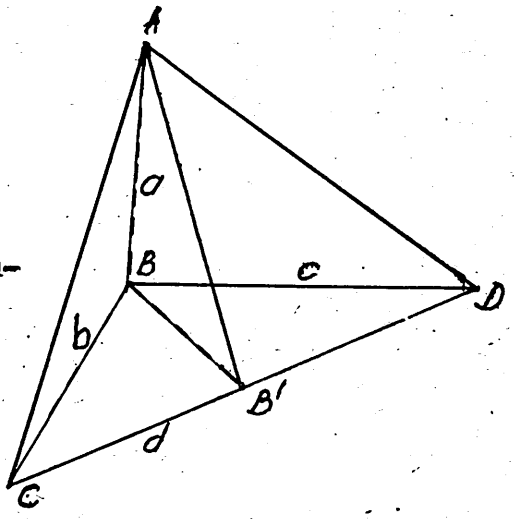


Şi $\Delta AOB \equiv \Delta AOC \equiv \Delta AOD$
deoarece sînt triunghiuri dreptunghice cu ipotenuzele congruente şi latura $|AO|$ comună. Rezultă $\|OB\| = \|OC\| = \|OD\|$ aşadar punctul O este centrul cercului circumscris triunghiului BCD.

18. In tetraedrul $[ABCD]$, $AB \perp (BCD)$, $\|AB\| = a$, $\|BC\| = b$, $\|BD\| = c$, $\|DC\| = d$. Să se afle măsura unghiului diedru dintre planele(ADC)şi(BDC).

Soluţie:

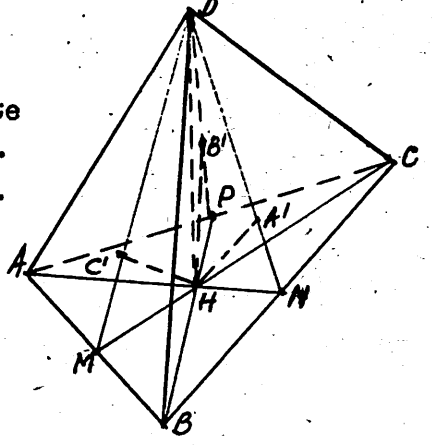
Construim $BB' \perp CD$ cu $B' \in |CD|$.
Stiind că $AB \perp p/(BCD)$ şi $BB' \perp CD$, din aplicarea teoremei celor trei perpendiculare rezultă $AB' \perp CD$.
$m(\hat{AB'B}) = \alpha$ reprezintă măsura unghiului diedru format de feţele $[ACD]$ şi $[BCD]$.
Putem scrie $tg\alpha = \frac{a}{\|BB'\|}$ Lungimea înălţimii BB' se calculează cu formula $\|BB'\| = \frac{2}{d}\sqrt{p(p-b)(p-c)(p-d)}$,
$p = \frac{b+c+d}{2}$.



19. Să se arate că într-un tetraedru regulat suma distanţelor de la centrul bazei la feţele laterale este egală cu înălţimea tetraedrului.

Soluţie:

In tetraedru $[DABC]$ centrul bazei este punctul H, ortocentrul şi centrul de greutate al triunghiului ABC şi totodată piciorul înălţimii din D. M,H,P sînt mijloacele laturilor $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$.
Fie $|HC'| \perp |DM|$, $C' \in |DM|$.
$HC' \perp DM$
$HM \perp AB \Rightarrow HC' \perp p/(ABD)$.
$DM \perp AB$



Calculăm lungimea înălţimii $|HC'|$ în triunghiul dreptunghic HDM.

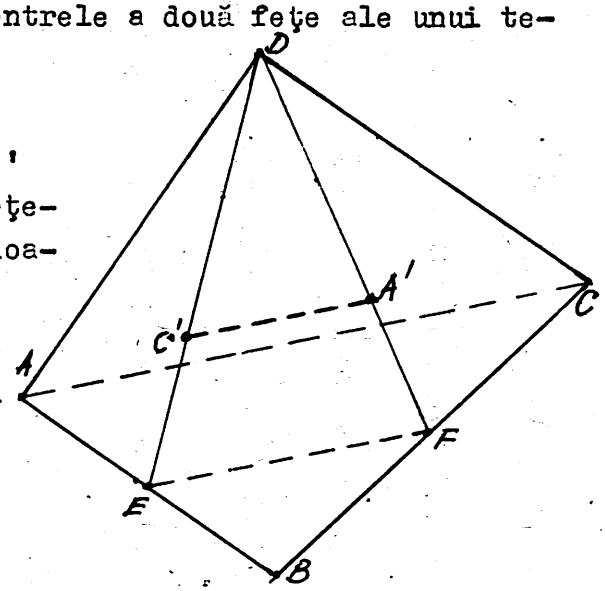
$$\|HC'\| = \frac{\|DH\| \cdot \|HM\|}{\|DM\|} = \frac{1}{3}\|DH\| \quad \text{deoarece}$$

$$\|HM\| = \frac{1}{3}\|CM\| = \frac{1}{3}\|DM\| .$$

In mod analog construim $|HA'| \perp |DH|$ şi $|HB'| \perp |DP|$ cu $A' \in |DH|$ şi $B' \in |DP|$ şi obţinem $|HA'| \perp p/(DBC)$, $|HB'| \perp p/(DAC)$ apoi $\|HA'\| = \|HB'\| = \frac{1}{3}\|DH\|$

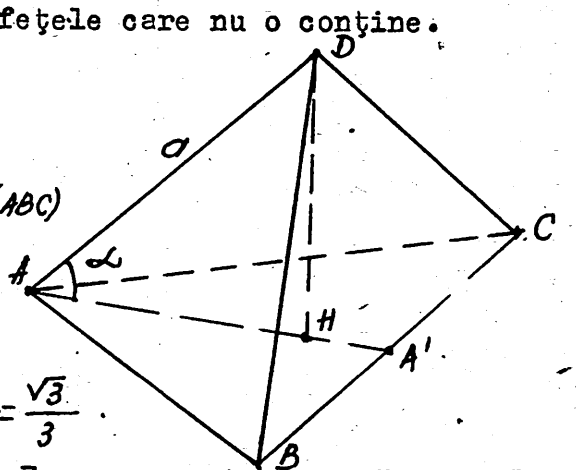
Rezultă în final: $\|HA'\| + \|HB'\| + \|HC'\| = \|DH\|$

20. Să se afle distanţa dintre centrele a două feţe ale unui tetraedru regulat de muchie a.



Soluţie:
In tetraedrul $[DABC]$ notăm cu C' şi A' centrele de greutate ale feţelor $[DAB]$, $[DBC]$ iar cu E,F mijloacele laturilor $|AB|$, $|BC|$
Avem $\frac{DC'}{DE} = \frac{2}{3}$; $\frac{DA'}{DF} = \frac{2}{3} \Rightarrow A'C' \| EF$
Atunci $\Delta DC'A' \sim \Delta DEF$ şi $\frac{\|A'C'\|}{\|EF\|} = \frac{2}{3}$
Ţinînd seama că $\|EF\| = \frac{1}{2}a$, obţinem $\|A'C'\| = \frac{2}{3}\|EF\| = \frac{a}{3}$.

21. Să se calculeze măsura unghiului format de o muchie a unui tetraedru regulat cu una dintre feţele care nu o conţine.



Soluţie:
Notăm cu a lungimea unei muchii în tetraedrul $[ABCD]$ şi fie $H \in p/(ABC)$ astfel încît $DH \perp p/(ABC)$
Punctul H fiind şi centrul de greutate în triunghiul ABC avem

$$\|AH\| = \frac{2}{3}\|AA'\| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\alpha = \cos \widehat{DAH} = \frac{\|AH\|}{\|AD\|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

22. Se consideră tetraedrul $[SABC]$ ale cărei muchii $[SA]$, $[SB]$ şi $[SC]$ sînt perpendiculare două cîte două. Să se calculeze lungimile muchiilor $[SA]$, $[SB]$ şi $[SC]$ în funcţie de lungimile a,b,c ale laturilor triunghiurilor ABC.

Ce condiţii satisfac lungimile a,b,c?

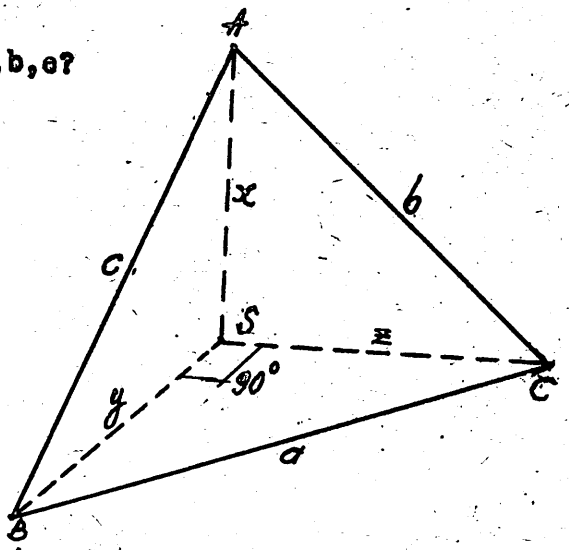
Soluţie:

Facem următoarea notaţie:

$x = \|SA\|$

$y = \|SB\|$

$z = \|SC\|$



Aplicăm teorema Lui Pitagora în triunghiurile SAB,SAC,SBC şi se formează sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x^2+y^2=c^2 \\ x^2+z^2=b^2 \\ y^2+z^2=a^2 \end{cases}$$

Prin adunarea egalităţilor rezultă $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$. Ţinînd seama de prima ecuaţie obţinem

$$z^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2) \Rightarrow z=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2-c^2}$$

In mod analog obţinem:

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+c^2-b^2}$$

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{b^2+c^2-a^2}$$

Trebuie îndeplinite condiţiile:

$$\begin{cases} a^2+b^2>c^2 \\ a^2+c^2>b^2 \\ b^2+c^2>a^2 \end{cases}$$

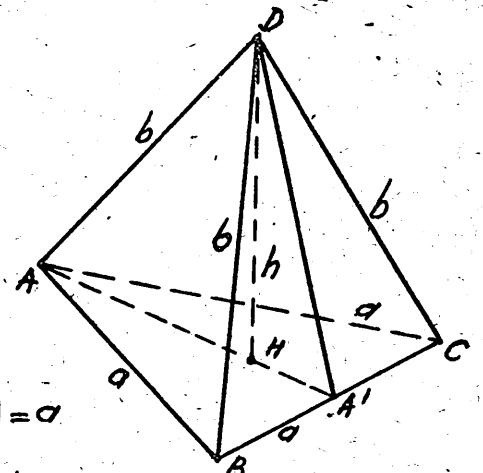
care sînt caracteristicile unui triunghi ascuţitunghic.

Pag.92

23. Intr-o piramidă triunghiulară regulată se cunosc lungimile muchiilor bazei şi a muchiilor laterale,respectiv a şi b.Să se determine aria secţiunii duse printr-o muchie laterală şi înălţimea piramidei.

Soluţie:

Notăm cu h lungimea înălţimii $|OH|$ a piramidei $[DABC]$. Punctul $H \in p/(ABC)$ este centrul cercului circumscris triunghiului echilateral ABC, de asemenea este centrul de greutate şi ortocentrul în acest triunghi.



Din datele problemei putem scrie

$\|DA\|=\|DB\|=\|DC\|=b$, $\|AB\|=\|BC\|=\|CA\|=a$

$\|AA'\|=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

ştiind că $AA' \perp BC$ şi că punctul A' este mijlocul lui $|BC|$.

$$\|HA\|=\frac{2}{3}\|AA'\| \Rightarrow \|HA\|=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul DHA şi obţinem

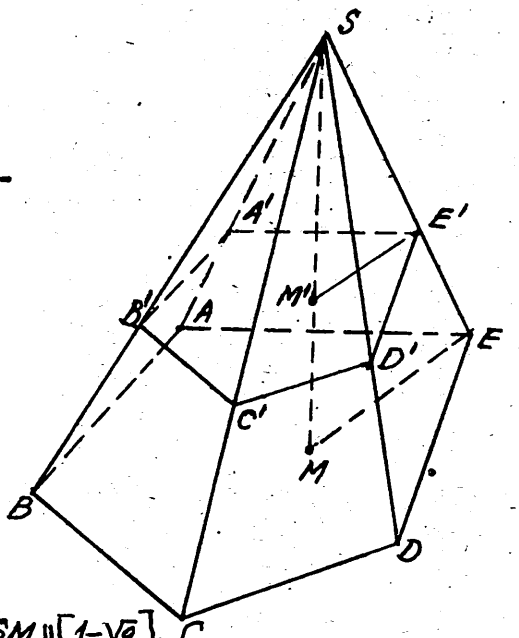
$$h^2=\|DA\|^2-\|HA\|^2=b^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{9b^2-3a^2}{9}, \quad h=\frac{1}{3}\sqrt{9b^2-3a^2}$$

$$\mathcal{C}[DAA']=\frac{1}{2}\|AA'\|, \quad h=\frac{a}{4}\sqrt{36^2-a^2}.$$

24.Să se ducă un plan paralel cu baza unei piramide astfel ca aria laterală a piramidei formate să fie într-un raport dat,q, cu aria laterală a piramidei date.

Soluţie:

Vom considera o piramidă pentagonală $[SABCDE]$ care secţionată cu un plan paralel cu baza formează suprafaţa $[A'B'C'D'E']$. Construim înălţimea $|SM|$ a piramidei date şi fie $|SM'|$ înălţimea piramidei obţinute prin secţionare. Notînd cu $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ ariile suprafeţelor $[ABCDE]$, $[A'B'C'D'E']$ şi cu $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ ariile laterale corespunzător piramidei date şi celei obţinute prin secţionare avem:



$$\frac{\mathcal{L}'}{\mathcal{L}} = \frac{\mathcal{P}'}{\mathcal{P}} = \frac{\|SM'\|^2}{\|SM\|^2} = q$$

Obţinem $\|SM'\| = \|SM\|\sqrt{q} \Rightarrow \|MM'\| = \|SM\|[1-\sqrt{q}]$.

Poziţia punctului M' pe înălţimea $|SM|$ fiind determinată, planul care conţine pe M' şi este paralel cu baza piramidei este cel căutat.

25.Lungimea muchiilor unei piramide patrulatere regulate este a.Să se afle aria secţiunii prin planul determinat de mijloacele a două muchii alăturate ale bazei şi mijlocul înălţimii.

Soluţie:

In figura 1 $[SABCD]$ reprezintă piramida patrulateră regulată cu muchiile de lungime a. Fie M,N mijloacele laturilor $|AB|$, $|BC|$, iar E mijlocul înălţimii $|SO|$, $O \in pl(ABCD)$

Prin punctul E construim $M'H' \| AC$ cu $M' \in |SA|$, $H' \in |SC|$. Avem $\begin{cases} MH \| AC \\ M'H' \| AC \end{cases}$ şi $\begin{aligned} \|MH\| &= \frac{1}{2}\|AC\| \\ \|M'H'\| &= \frac{1}{2}\|AC\| \end{aligned}$

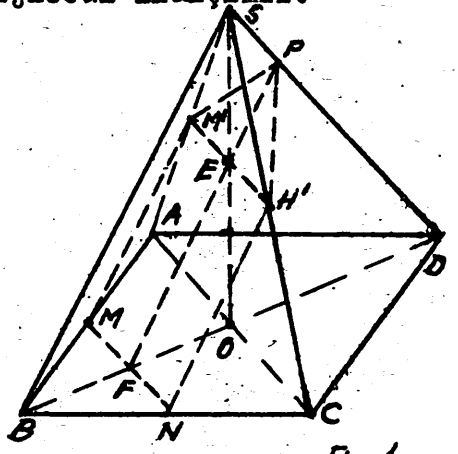


Fig.1

In triunghiurile SAB, SBC avem $MM' \| BS$ şi $HH' \| BS$.

$$AC \perp pl(SOB) \Rightarrow AC \perp SB \Rightarrow \begin{matrix} AC \perp MH' \\ AC \perp HH' \end{matrix}$$

Deoarece $M'N' \perp MM'$ patrulaterul MNN'M' este un dreptunghi cu aria $\mathcal{P}[MHN'M'] = \|MN\| \cdot \|MM'\| = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Pentru determinarea ariei secţiunii $[MM'PN'N]$ mai trebuie calculată aria $\triangle M'N'P$ (fig.2)

Notînd $x = \|EP\|$ şi construind $OO' \parallel SB \parallel EP$ avem

$x = \frac{1}{2}\|OO'\|$, $\|OO'\| = \frac{1}{2}\|SB\| \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{a}{4}$

Deci:

$$\mathcal{A}[M'N'P] = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{4}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{16}$$

$$\mathcal{A}[MM'PN'N] = \frac{a^2\sqrt{2}}{4} + \frac{a^2\sqrt{2}}{16} = \frac{5a^2\sqrt{2}}{16}$$

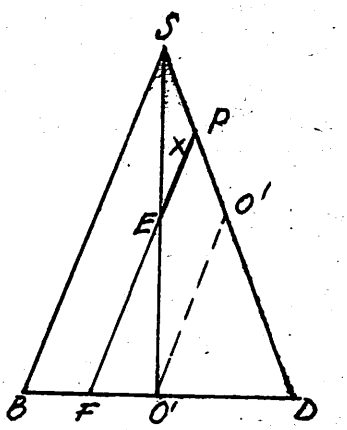
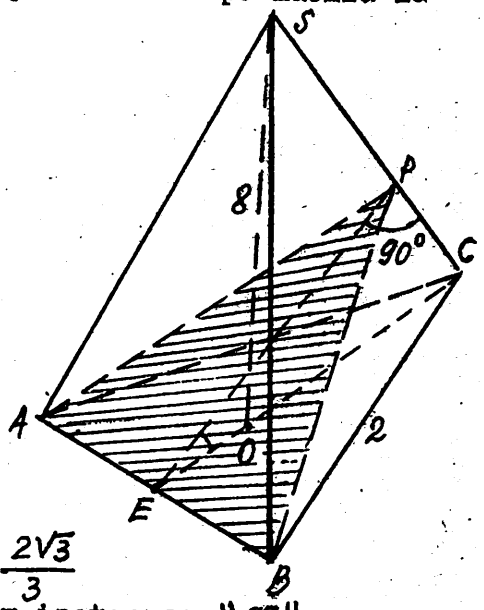


Fig.2

26. Înălţimea unei piramide triunghiulare regulate este 8 şi lungimea muchiei bazei este 2. Să se calculeze aria secţiunii ce trece printr-o muchie a bazei şi este perpendiculară pe muchia laterală opusă.



Solutie:

Fie $[SABC]$ piramida triunghiulară regulată în care $\|AB\| = \|BC\| = \|CA\| = 2$ iar $SO \perp p(ABC)$, $\|SO\| = 8$

In planul de secţiune $(ABP) \perp SC$, $P \in |SC|$ putem scrie

$$\mathcal{A}[ABP] = \frac{1}{2}\|AB\|\cdot\|PE\|$$

unde E este mijlocul lui $|AB|$.

Punctul O este pentru triunghiul echilateral ABC atît ortocentru cît şi centru de greutate.

$$\|EC\| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \quad \|OC\| = \frac{2}{3}\|EC\| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

In triunghiul dreptunghic SOC calculăm ipotenuza $\|SC\|$

$$\|SC\| = \sqrt{\|SO\|^2 + \|OC\|^2} = \sqrt{64 + \frac{12}{9}} = \frac{14}{\sqrt{3}} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

Observăm că $\Delta ECP \sim \Delta SCO$ ($\widehat{PEC} \equiv \widehat{CSO}$ -au laturile perpendiculare)

Rezultă:

$$\frac{\|EP\|}{\|SO\|} = \frac{\|EC\|}{\|SC\|} \Leftrightarrow \frac{EP}{8} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{14\sqrt{3}}{3}}$$

$$\|EP\| = \frac{12}{7} \Rightarrow \mathcal{A}[ABP] = \frac{1}{2}\|AB\|\cdot\|EP\| = \frac{12}{7}$$

27. Un tetraedru regulat $[ABCD]$ este secţionat cu planul paralel cu BD, care trece prin A şi prin centrul feţei $[BCD]$. Să se afle aria secţiunii dacă lungimea muchiei tetraedrului este 9.

Soluţie:

Dacă $|AO|$ este înălţime în tetraedrul regulat, punctul O reprezintă centrul bazei, ortocentrul şi centrul de greutate al triunghiului BDC.

Prin punctul O ducem $MN \parallel BD$ unde

$M \in |BC|$, $N \in |CO|$

Planul (AMN) trece prin punctele A, O şi este paralel cu BD.

$\Delta CMN \sim \Delta CBD \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\|MN\|}{\|BD\|} = \frac{\|CO\|}{\|CC'\|} = \frac{2}{3}$

C' este mijlocul laturii $|BD|$,

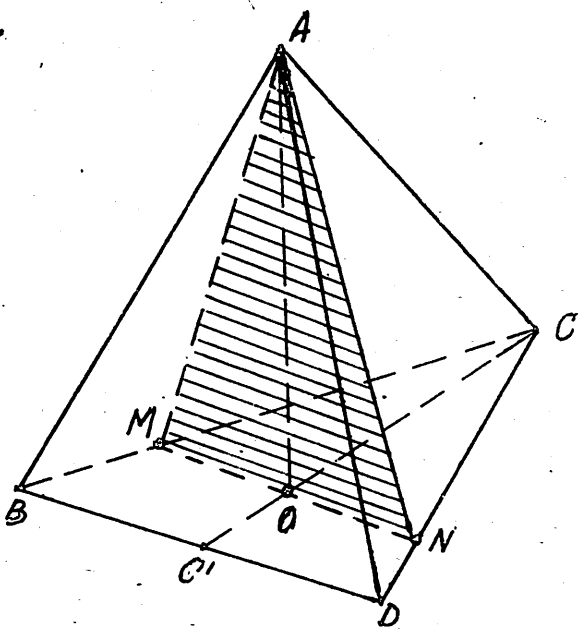
$\|BD\| = \|DC\| = \|BC\| = a = 9$

Avem $\|MN\| = \frac{2a}{3}$ Ştim că $\|AO\| = a\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\mathcal{A}[AMN] = \frac{1}{2}\|MN\| \cdot \|AO\| = \frac{a^2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$

Ţinînd seama că $a = 9$ obţinem

$\mathcal{A}[AMN] = 27\sqrt{\frac{2}{3}} = 9\sqrt{6}$



Pag.93

28. Intr-o piramidă patrulateră regulată, lungimea laturii bazei este a, iar a muchiei laterale b. Să se construiască secţiunea făcută printr-un plan care trece prin una din diagonalele bazei şi este paralel cu o muchie laterală şi să se calculeze aria acestei secţiuni.

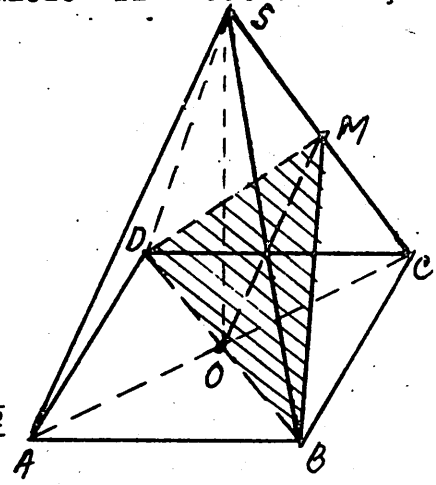
Soluţie:

In piramida $[SABCD]$ fie M mijlocul muchiei laterale $|SC|$, iar O centrul bazei $[ABCD]$. Cum $|OM|$ este linie mijlocie în ΔSOA avem :

$OM \parallel SA$ şi $\|OM\| = \frac{1}{2}\|SA\| = \frac{1}{2}b$

Deoarece $SA \parallel OM$ şi $OM \subset p/(MDB)$ urmează că $p/(DMB) \parallel SA$.

$\mathcal{A}[DMB] = \frac{1}{2}\|DB\| \cdot \|OM\| = \frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot\frac{b}{2} = \frac{ab\sqrt{2}}{4}$



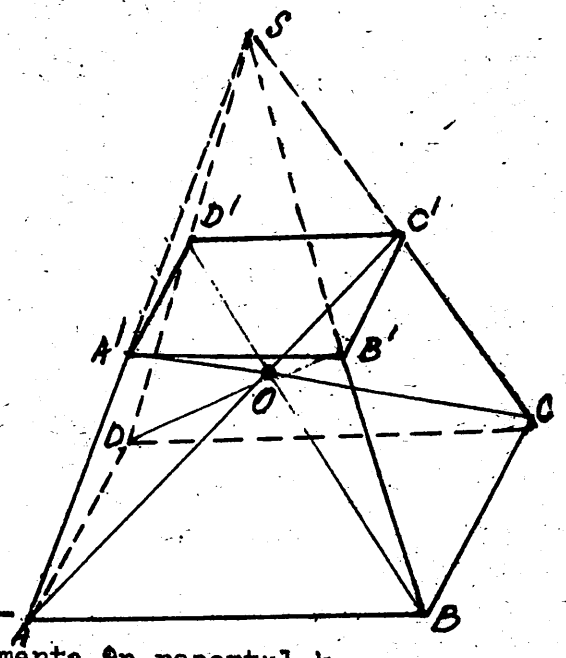
§ 3. Trunchiul de piramidă

Pag.94.

1. Să se arate că cele patru diagonale ale unui trunchi de piramidă ale cărui baze sînt paralelograme, sînt concurente.

Soluţie:

Notaţiile fiind cele din figura alăturată, bazele trunchiului de



piramidă fiind paralelograme putem scrie:

$AD \parallel BC \parallel B'C' \parallel A'D'$

$AB \parallel A'B' \parallel O'C' \parallel DC$.

Trebuie să arătăm că diagonalele A'C, B'D, C'A, D'B sînt concurente.

In planul determinat de A'D', BC avem $A'C \cap BD' = \{O\}$

$\Delta OA'D' \sim \Delta OCB$ şi urmează

$\frac{\|OA'\|}{\|OC\|} = \frac{\|OD'\|}{\|OB\|} = \frac{\|A'D'\|}{\|BC\|} = k$ (raportul de asemănare a bazelor)

Aşadar punctul $O \in |A'C|$ şi determină pe această diagonală două segmente în raportul k.

Să arătăm în continuare că $|AC'|$ şi $|DB'|$ trec tot prin punctul O.

In planul determinat de A'B' şi CD avem $|A'C| \cap |DB'| = \{O\}$

$\Delta A'O'B' \sim \Delta CO'D \Rightarrow \frac{O'A'}{O'C} = \frac{O'B'}{O'D'} = \frac{A'B'}{DC} = k$

Deducem că şi O' determină pe $|A'C|$ tot două segmente în raportul k.

Aşadar O' = O.

Considerăm şi a patra diagonală AC'

Presupunem că $AC' \cap A'C = \{O''\}$ în planul determinat de AC şi $A'C'$ (paralele)

$\Delta O''A'C' \sim \Delta O''AC$ şi avem

$$\frac{O''A'}{O''C} = \frac{O''C'}{O''A} = \frac{A'C'}{AC} = k$$

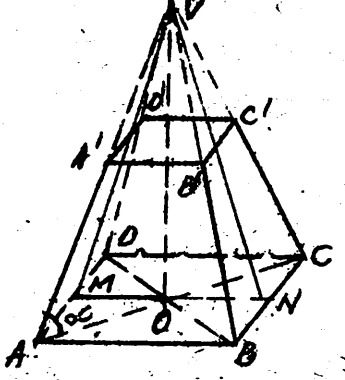
Constatăm că $\frac{A'C'}{AC} = k$ din asemănarea triunghiurilor ABC şi A'B'C'

Deoarece $\frac{O''A'}{O''C} = k$ urmează că O''=O

şi cu aceasta am arătat că cele patru diagonale sînt concurente în O.

2. Muchiile laterale ale unui trunchi de piramidă patrulateră regulată formează cu planul bazei unghiuri de măsură $\alpha = arctg \frac{\sqrt{2}}{2}$

Să se arate că două feţe laterale opuse sînt perpendiculare.



Solutie:

Fp. $T = [ABCDA'B'C'D']$

ABCD pătrat

A'B'C'D' pătrat

$\alpha = arctg \frac{\sqrt{2}}{2}$

$C: (VAD) \perp (VBC)$

Am considerat piramida din care provine trunghiul de piramidă.

Deoarece avem o piramidă patrulateră regulată, planele (VAD) şi (VBC) se vor intersecta după o dreaptă(d)care va fi paralelă cu planul bazei(ABCD), atunci $d \parallel BC$ şi $d \parallel AD$.
Cum $V \in d$, aturci perpendicularele duse pe d în punctul V, $VM \subset (VAD)$ şi $VN \subset (VBC)$ vor fi şi perpendiculare pe AD respecti BC. Dar VM şi VN sînt înălţimile triunghiurilor isoscele VAD şi respectiv VBC.
In concluzie unghiul format de planele (VAD) şi (VBC) este unghiul $\widehat{MVN}$.
Dar $\triangle VAD \equiv \triangle VBC$ $(L.L.L) \Rightarrow |VM| \equiv |VN| \Rightarrow \triangle VMN$ este isoscel şi $|VO|$ înălţimea sa.
Dacă în $\triangle VMO$ aplic funcţia: $tg\,\widehat{VMO} = \frac{\|VO\|}{\|MO\|}$
Dar $\triangle VAO$

$$tg\,\alpha = \frac{\|VO\|}{\|AO\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Dar $\|AO\| = \frac{\|AC\|}{2} = \frac{\|AB\|\sqrt{2}}{2}$
şi $\|MO\| = \frac{\|AB\|}{2}$
Deci :

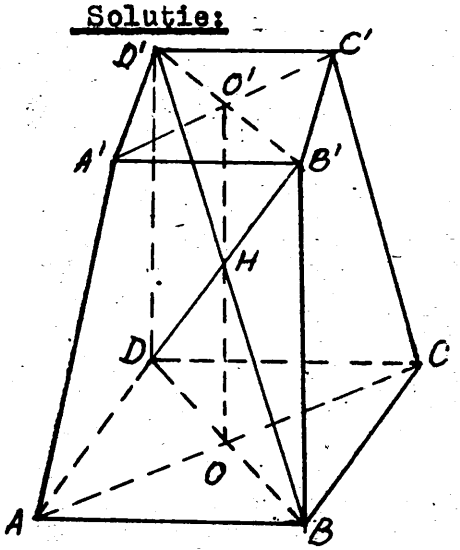
$$\frac{\|VO\|}{\frac{\|AB\|\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \|VO\| = \frac{\|AB\|\sqrt{2}^2}{4} = \frac{\|AB\| \cdot 2}{4_2} = \frac{\|AB\|}{2}$$

Deci : $tg(\widehat{VMO}) = \frac{\frac{\|AB\|}{2}}{\frac{\|AB\|}{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{VMO} = 45^\circ$

şi cum $\triangle VMN$ isoscel $\Rightarrow \widehat{MVN} = 90^\circ$

3.Intr-un trunchi de piramidă patrulateră regulată, diagonalele sînt perpendiculare două cîte două. Lungimile muchiilor bazelor sînt 2o respectiv lo. Să se determine înălţimea, lungimile diagonalelor ale muchiilor laterale şi ale diagonalelor feţelor laterale.

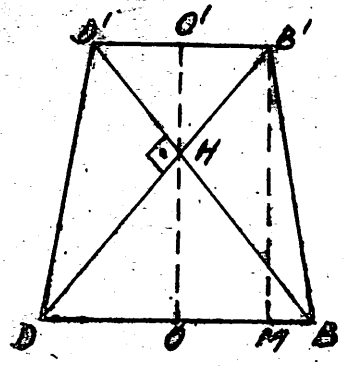
Soluţie:



Ip. T = $[ABCDA'B'C'D']$ trunchi de piramidă.
$B'D \perp BD'$.
$\|AB\| = \|BC\| = \|CD\| = \|DA\| = 20$
$\|A'B'\| = \|B'C'\| = \|C'D'\| = \|D'A'\| = 10$

C: $\|OO'\| = ?$, $\|BD\| = ?$, $\|AA'\| = ?$
$\|C'B\| = ?$

Dem. Am ales diagonalele trunchiului de piramidă $|B'D|$ şi $|BD'|$ care fac parte din planul trapezului isoscel BB'D'D. Triunghiurile dreptunghice BHD şi B'HD' sînt isoscele, proprietate ce rezultă



din congruenţa $\triangle BB'D \equiv \triangle DD'B$
şi $\triangle D'B'B \equiv \triangle B'D'D$.
In $\triangle BHD$ ($\widehat{BHD} \equiv 90$) notez $\|BH\| = \|DH\| = x$ şi prin teorema lui Pitagora:

$\|BD\|^2 = 2x^2$

$(20\sqrt{2})^2 = 2 \cdot x^2$

$400 \cdot 2 = 2x^2$, $x = 20$

adică: $\|BH\| = \|DH\| = 20$

Analog în $\triangle B'HD'$ găsesc $\|B'H\| = \|D'H\| = 10$

Deci am găsit că lungimea diagonalelor trunchiului de piramidă este 2e + 1e = 3e

Pentru a afla lungimea înălţimii, folosesc acelaşi trapez isoscel BB'DD', duc $B'M \perp BD$ dar $|B'M| \equiv |OO'|$ şi în $\triangle MB'D$ dreptunghic în M am $\|DM\| = 15\sqrt{2}$, $\|B'D\| = 30$

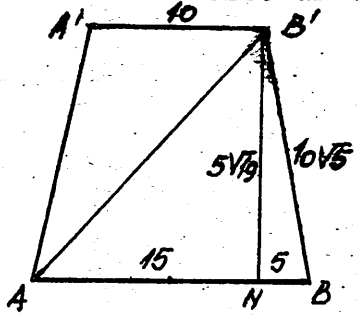
şi prin teorema lui Pitagora $\|B'M\| = \sqrt{900-450} = \sqrt{450} = 15\sqrt{2}$

Deci înălţimea $\|OO'\| = 15\sqrt{2}$

Muchia $|B'B|$ se află din $\triangle B'MB$ dreptunghic

$\|B'B\| = \sqrt{450+50} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$

Pentru a afla diagonala unei feţe laterale se consideră faţa ABB'A' care este un trapez isoscel, duc $B'N \perp AB$



$\triangle ANB'$ dreptunghic

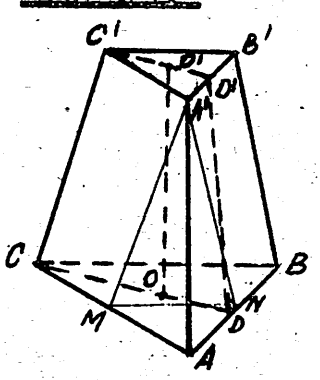
$\|AN\| = 15$, $\|NB'\| = 5$

$\triangle B'NB$, $\|B'N\| = \sqrt{500-25} = \sqrt{475} = 5\sqrt{19}$

$\triangle ANB'$, $\|AB'\| = \sqrt{225+475} = \sqrt{700} = 10\sqrt{7}$

4. Muchiile bazelor unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată sînt 2 şi 5, iar înălţimea 1. Printr-un vîrf al bazei mici se duce un plan paralel cu faţa opusă. Să se afle aria secţiunii.

Soluţie:



Ip. Fie $T = [ABCA'B'C']$ trunchiul de piramidă

$\|AB\| = \|BC\| = \|CA\| = 5$

$\|A'B'\| = \|B'C'\| = \|C'A'\| = 2$

$\|OO'\| = 1$

$(A'MN) \parallel (BB'C'C)$

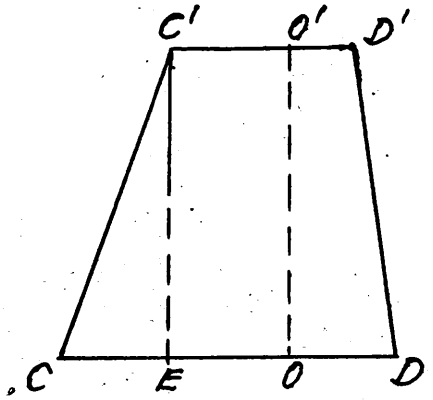
C: $\mathcal{A}[A'MN] = ?$

Dem.: Planul $(A'MN) \parallel (BB'C'C) \Rightarrow$

$\Rightarrow A'M \parallel C'C$ şi $A'N \parallel B'B$

şi cum planele bazelor sînt paralele, rezultă că A'C'CM, A'B'BN sînt paralelograme deci $\|A'M\| = \|CC'\|$, $\|A'N\| = \|B'B\|$, dar $\|BB'\| = \|CC'\| = \|AA'\|$

Pentru a afla lungimea muchiei laterale, folosesc trapezul C'D'DC în care avem $\|CD\| = \frac{\|AB\|\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$



$\|C'D'\| = \frac{\|A'B'\|\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$\|OO'\| = 1$

$\|O'D'\| = \frac{1}{3}\|C'D'\| = \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, şi $\|C'O'\| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\|OD\| = \frac{1}{3}\|CD\| = \frac{1}{3}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$, şi $\|CO\| = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

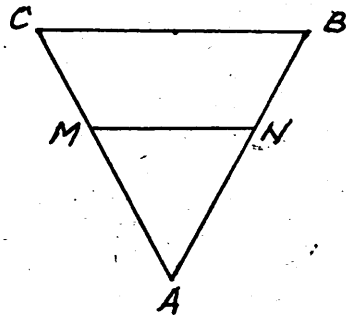
Dacă:

$C'E \perp CD$, $\|CE\| = \frac{5\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

şi atunci $\|CC'\| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$

Deci $\|AM\| = \|AN\| = 2$

Pentru calculul lui $\|MN\|$ folosesc triunghiul bazei mari, ΔABC cu $MN \| BC$ şi $\|CM\| = \|BN\| = 2$



Aplic teorema fundamentală a asemănării

$\frac{\|AM\|}{\|AC\|} = \frac{\|AN\|}{\|AB\|} = \frac{\|MN\|}{\|BC\|}$

$\frac{3}{5} = \frac{\|MN\|}{5} \Rightarrow \|MN\| = 3$

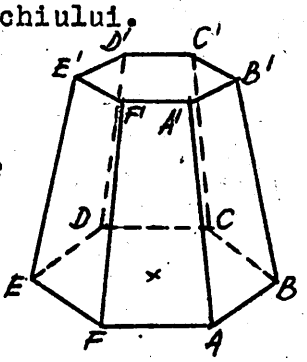
Pentru aria ΔAMN folosesc formula lui Heron

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$p = \frac{2+2+3}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

$\mathcal{A}[AMN] = \sqrt{\frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(1\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{3^2}{2}} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$

5. Un trunchi de piramidă regulată are ca bază două hexagoane regulate cu lungimile laturilor a şi b; lungimea muchiei laterale este c. Să se calculeze aria laterală a trunchiului.



<u>Soluţie</u>: Ip. $T = [ABCDEFA'B'C'D'E'F']$

$\|AB\| = \|BC\| = \|CD\| = \|DE\| = \|EF\| = \|FA\| = a$

$\|A'B'\| = \|B'C'\| = \|C'D'\| = \|D'E'\| = \|E'F'\| = \|F'A'\| = b$

$\|AA'\| = \|BB'\| = \|CC'\| = \|DD'\| = \|EE'\| = \|FF'\| = c$

c: $\mathcal{A}_\ell[T] = ?$

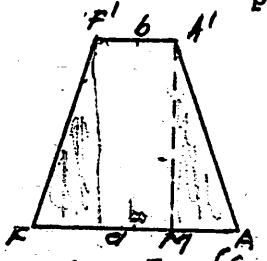
Dem.: $\mathcal{A}_\ell[T] = \frac{(P_B + P_b)\,a_p}{2}$

ap - apotema

P_B - perimetrul bazei mari

P_b - perimetrul bazei mici

Să aflăm apotema a_p care este de fapt înălţimea unei feţe laterale, spre exemplu $AA'F'F$



$\|A'M\| = ?$

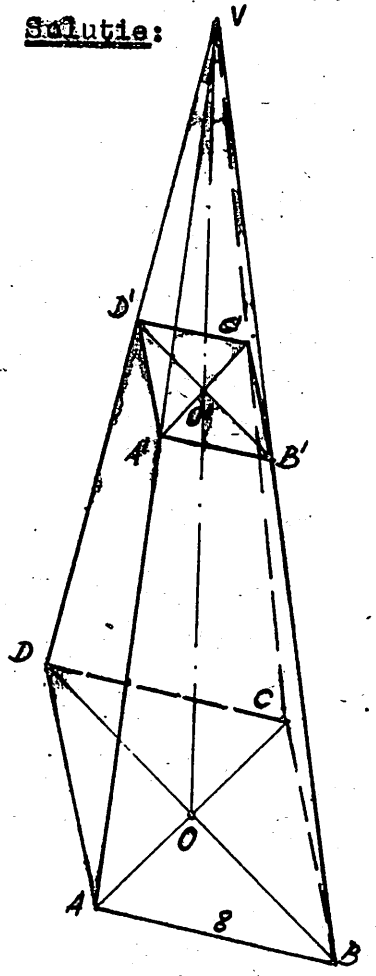
$\|MA\| = \frac{a-b}{2}$

$\|A'M\| = \sqrt{c^2 - \frac{(a-b)^2}{4}}$

$$\mathcal{A}_l[T] = \frac{(6a+6b)\cdot\sqrt{c^2-\frac{(a-b)^2}{4}}}{2} = 3(a+b)\sqrt{c^2-\frac{(a-b)^2}{4}}$$

6. Un trunchi de piramidă are ca baze două romburi cu lungimile laturilor 8 respecti 6 şi cu cîte un unghi cu măsura 120°. Înălţimea trunchiului este egală cu triplul lungimii diagonalei mari a bazei mici. Să se calculeze înălţimea piramidei din care provine trunchiul.

Soluţie:



$T = [ABCDA'B'C'D']$

$ABCD$ romb $\|AB\| = 8$

$A'B'C'D'$ romb $\|A'B'\| = 6$

$m(\widehat{BAD}) = 120$

$\|OO'\| = 3\|B'D'\|$

$\|VO\| = ?$

$m(\widehat{BAD}) = 120 \Rightarrow m(\widehat{OAD}) = 60 \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\widehat{ABO}) = 30 \Rightarrow \|AO\| = \frac{\|AD\|}{2} = \frac{8}{2} = 4$

$\Rightarrow \|AC\| = 8.$

Deci Δ ACD echilateral şi atunci

$\|DO\| = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \Rightarrow \|BO\| = 8\sqrt{3}$

Analog $m(\widehat{B'A'D'}) = 120 \Rightarrow m(\widehat{O'A'D'}) = 60$

$\Rightarrow m(\widehat{O'D'A'}) = 30 \Rightarrow \|A'O'\| = 3 \Rightarrow \|A'C'\| = 6$

$\|B'D'\| = 2\frac{6\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

Deci $\|OO'\| = 3 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$

$\Delta VA'B' \sim \Delta VAO$ (teorema fundamentală a asemănării) $\frac{\|VO'\|}{\|VO\|} = \frac{\|A'O'\|}{\|AO\|}$

Dar $\|VO'\| = \|VO\| - \|OO'\|$

Deci $\frac{\|VO\| - \|OO'\|}{\|VO\|} = \frac{3}{4}$

$1 - \frac{\|OO'\|}{\|VO\|} = \frac{3}{4}$; $\frac{\|OO'\|}{\|VO\|} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\frac{18\sqrt{3}}{\|VO\|} = \frac{1}{4}$, $\|VO\| = \frac{4 \cdot 18\sqrt{3}}{1} = \frac{72\sqrt{3}}{1} = 72\sqrt{3}$

§4. Mulţimi poliedrale

Pag. 102.

1. Descompuneţi o prismă pentagonală în tetraedre.

Soluţie:

Conform proprietăţii 1(pag.95):("Orice prismă se descompune în prisme triunghiulare")descompunem mai întîi prisma pentagonală [ABCDE = A'B'C'D'E'] în prisme triunghiulare: [ABCA'B'C'] , [ACDA'C'D'] şi [ADEA'D'E'] .

Conform proprietăţii 2(pag.95): ("Orice prismă triunghiulară se descompune în 3 tetraedre"), fiecare prismă triunghiulară o descompunem în cîte 3 tetraedre:

[A'ABC] , [BB'CA'], [B'C'A'C] , [A'ACD] , [CC'DA'], [C'D'A'D] , [A'ADE], [DD'EA'] , [D'E'A'E].

2.Descompuneţi un trunchi de piramidă hexagonală în piramide.

Soluţie:

Conform proprietăţii 4,pag.96:"Orice trunchi de piramidă se descompune în trunchiuri de piramidă triunghiulare", descompunem trunchiul de piramidă hexagonală în trunchiuri de piramidă triunghiulare:

[ABCA'B'C'], [ACDA'C'D'], [ADEA'D'E] şi [AEFA'E'F]

Conform proprietăţii 5, pag.96 "Orice trunchi de piramidă triunghiulară se descompune în 3 tetraedre;descompunem aceste trunchiuri de poramidă triunghiulară în cîte 3 tetraedre.

[A'ABC], [BB'CA'], [B'C'A'C], [A'ACD], [CC'DA'], [C'D'A'D], [A'ADE], [DD'EA'], [D'E'A'E], [A'AEF], [EE'FA'] şi [E'F'A'F].

3.Arătaţi că un cub poate fi descompus prin plane paralele cu feţele lui în trei paralelipipede congruente şi două cuburi.

Soluţie:

Secţionînd cubul de latură a cu un plan paralel cu două feţe opuse se obţin două paralelipipede avînd muchiile (a,a,x) şi (a,a,a, - x).

In continuare,se secţionează amîndouă cu un plan paralel cu alte două feţe opuse şi se obţin paralelipipedele de muchii (a,x,x) , (a,a-x,x),(a,a-x,a-x)şi(a,x,a-x).Secţionînd încă unul din ele pentru a avea trei paralelipipede congruente trebuie ca $a-x=\frac{a}{2}$ deci $x=\frac{a}{2}$ .Deci cele trei paralelipipede sînt congruente şi au dimensiunile $(a,\frac{a}{2},\frac{a}{2})$ şi cuburile $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$

4.Într-un poliedru convex se notează cu m numărul muchiilor, cu $f_3, f_4, f_5, \ldots$ numărul feţelor triunghiulare, patrulatere, pentagonale, ... şi cu v_3, v_4, v_5 ....numărul vîrfurilor din care pleacă 3,4,5,... muchii.
Să se arate că:

$$2m = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots = 3v_3 + 4v_4 + 5v_5 + \ldots$$

Soluţie:
Pentru că fiecare muchie aparţine la două feţe ale poliedrului rezultă că:

$$2m = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots$$

iar pentru că fiecare muchie trece prin două vîrfuri avem:

$$2m = 3v_3 + 4v_4 + 5v_5 + \ldots$$

5.Să se arate că în orice poliedru convex avem:

$$m+6 \leq 3f \leq 2m$$
$$m+6 \leq 3v \leq 2m$$

Soluţie:
Din problema 4, pag.102 avem $3f \leq 2m$ şi $3v \leq 2m$.
Din relaţia lui Euler $(v-m+f=2) \Rightarrow$

$$3m+6 = 3v+3f \text{ sau } 2m+(m+6) = 3v+3f$$

şi pentru că $2m \geq 3f$, $2m \geq 3v \Rightarrow m+6 \leq 3f$ şi

$m+6 \leq 3v$. c.c.t.d.

6.Dacă din fiecare vîrf al unui poliedru convex pleacă cel puţin patru muchii, atunci poliedrul are feţe triunghiulare.
Soluţie:
Presupunem prin absurd că poliedrul nu are feţe triunghiulare.
Din problema 4, pag.102 $\Rightarrow 2m \geq 4f$ sau $m \geq 2f$ şi de asemenea $m \geq 2v$, de unde avem că:
$2m \geq 2f+2v$ sau $m \geq f+v$ în contradicţie cu relaţia lui Euler:

$$m+2 = f+v$$

Rezultă deci că poliedrul are şi feţe triunghiulare.

7.Adunînd măsurile unghiurilor tuturor feţelor unui poliedru convex, se obţine dublul sumei unghiurilor unui poligon convex avînd acelaşi număr de vîrfuri.
Soluţie:
Dacă poliedrul are v vîrfuri, trebuie trebuie să arătăm că suma unghiurilor este $S = (v-2) \cdot 360^\circ$

Notăm cu f_i, $i = 3,4,5,\ldots$ numărul feţelor care au i laturi atunci suma S_i a unghiurilor acestor feţe este: $S_i = (i-2) \cdot 180^\circ$ iar suma S a unghiurilor poliedrului este:

$$S = f_3 S_3 + f_4 S_4 + f_5 S_5 + \ldots = f_3 \cdot (3-2) \cdot 180^\circ + f_4 (4-2) 180^\circ + \ldots$$

$$\ldots = 180^\circ (3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots) - 360^\circ (f_3 + f_4 + \ldots) =$$

$$= 360^\circ \cdot m - 360^\circ \cdot f = 360^\circ \cdot (m - f) \underset{(Euler)}{=} 360^\circ (v-2) = 360^\circ (v-2) \quad \text{cctd.}$$

8.* Arătaţi că dacă un punct variază în intervalul unui poligon regulat, suma distanţelor sale la planele feţelor rămîne constantă.

Soluţie:

Fie M un punct în interiorul poliedrului şi feţele $F_1, F_2, \ldots F_n$ cu $[F_1] \equiv [F_2] \equiv \ldots \equiv [F_n]$.

Unind M cu vîrfurile poliedrului obţinem n piramide cu vîrful în M şi bazele $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

Fie d_i - distanţa de la M la Fi, $i = \overline{1,n}$

Atunci $V = \sum_{v=1}^{n} \frac{\sigma[F_i] \cdot d_i}{3}$ unde V este volumul poliedrului.

Dar $\sigma[F_1] \overset{v=1}{=} \sigma[F_2] = \ldots = \sigma[F_5] \overset{not}{=} \sigma$ şi deci

$\sum_{v=1}^{n} d_i = \frac{3V}{\sigma}$ deci constant cctd.

9.* Să se arate că centrele feţelor [ABCD], [ABB'A'], [CBB'C'] ale unui cub [ABCDA'B'C'D'] şi punctul A se află într-un acelaşi plan. Să se deducă de aici că un unghi diedru al octaedrului regulat şi cel al tetraedrului regulat sînt suplementare.

Soluţie:

Fie O_1, O_2, O_3, O_4 - centrele feţelor (ABCD), (ABB'A'), (CBB'C'), (A'B'C'D') şi M mijlocul segmentului $[O_2O_3] \Rightarrow [O_2O_3]$ este linie mijlocie în $\Delta AB'C$ deci $O_2O_3 \parallel AC$ şi cum $O_1 \in AC$ rezultă că O_2, O_3, O_1 şi A sînt coplanare. Unghiul diedru al tetraedrului rezultat $[O_1O_2O_3B]$ este congruent cu $\widehat{BMO_1}$ şi unghiul-diedru al octoedrului regulat este congruent cu $\widehat{O_1MO_4}$.

Pentru că $[O_2O_4]$ este linie mijlocie în $\Delta A'BC' \Rightarrow$

$O_2O_4 \parallel BC'$ şi $\|O_2O_4\| = \frac{1}{2} \|BC'\| = \|BO_3\|$.

Deci B, O_2, O_3, O_4 sînt coplanare şi $BO_2O_3O_4$ este paralelogram

Atunci B, M, O_4 sînt coliniare şi

$m(\widehat{BMO_1}) + m(\widehat{O_1MO_4}) = 180^\circ$

Pag.107. **§ 5. Volumul mulțimilor poliedrale**

1.Baza unui paralelipiped drept este un romb cu latura de lungime a și un unghi de măsură 60°.Aria laterală a paralelipipedului este $8a^2$.Să se afle volumul paralelipipedului.

Soluție:

Fie I înălțimea, avem $\mathcal{A}_\ell(P) = 4a \cdot J \Rightarrow J = 2a$

Dacă B este aria bazei, avem $\mathcal{B} = a^2 \cdot \sin 60° = a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$, și $V_{(P)} = \mathcal{B} \cdot J = a\sqrt{3}$.

2.Baza unui paralelipiped drept este un paralelogram cu laturile de lungime a și 4a, iar unghiul ascuțit al paralelogramului are măsura 60°.Să se afle volumul paralelipipedului, știind că cea mai lungă diagonală a lui are lungimea 5a.

Soluție:

Fie ABCD baza și $m(\hat{A}) = 60°$.Avem $\|AC\| > \|BD\|$, deci cea mai lungă diagonală pornește din A.I fiind înălțimea, avem

$J^2 = 25a^2 - \|AC\|^2 = 25a^2 - (\|AB\|^2 + \|BC\|^2 - 2\|AB\| \cdot \|BC\| \cdot \cos\hat{B}) = 4a^2$

și $V_{(P)} = 4a^2 \sin 60° \cdot 2a = 4a^3\sqrt{3}$.

3.Un plan d, perpendicular pe muchiile prismei $P = [A_1A_2 \ldots A_nA_1' \ldots A_n']$ intersectează suporturile muchiilor în $B_1, B_2, \ldots B_n$. Dacă $\mathcal{S} = \mathcal{A}[B_1B_2 \ldots B_n]$ și l este lungimea unei muchii, să se arate că $n_{(P)} = \mathcal{S} \cdot \ell$.

Soluție:

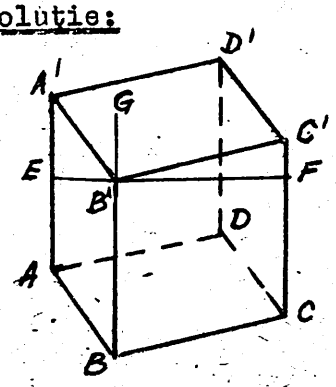
Fie $|A'P|$ înălțimea prismei și Q măsura unghiului dintre d și $(A_1A_2A_3 \ldots A_n)$.Avem $m(\widehat{AA'P}) = \theta$, deci $\|AP\| = \|AA'\| \cos\theta = \ell \cdot \cos\theta$.

Deoarece $[B_1B_2 \ldots B_n]$ este proiecția pe d a lui $[A_1A_2 \ldots A_n]$ avem $\mathcal{A}[B_1B_2 \ldots B_n] = \mathcal{A}[A_1A_2 \ldots A_n]\cos\theta$ deci

$$n_{(P)} = \ell \cdot \cos\theta \frac{\mathcal{S}}{\cos\theta} = \ell \cdot \mathcal{S}$$

4.Într-un paralelipiped două fețe laterale au ariile S_1 și S_2 și formează un unghi de măsură 150°.Să se afle volumul paralelipipedului dacă muchia laterală este de lungime l.

Soluție:



Fie $\mathcal{A}[ABB'A'] = S_1$, $\mathcal{A}[BB'C'C] = S_2$

$B'E \perp AA'$, $B'F \perp CC'$ și $B'G \perp (ADD')$

Deoarece $EB' \perp BB'$, $GB' \perp BB'$ și $FB' \perp BB'$, dreptele $B'E, B'G$ și $B'F$ sînt coplanare, iar $m(\widehat{EB'G}) = m(\widehat{EB'F}) - m(\widehat{GB'F}) = 150 - 90 = 60$.

Avem $\|B'E\| = \frac{1}{\ell} \cdot \mathcal{C}[ABB'A']$ şi $\|B'G\| = \|B'E\| \cdot \cos 60^\circ$, deci

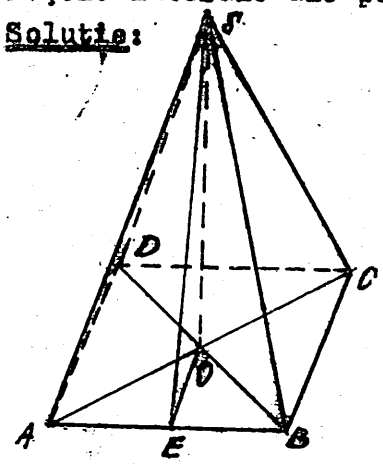
$V(p) = \|B'G\| \mathcal{C}[ADDA'] = \frac{S_1 S_2}{2\ell}$

5. Se consideră o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei de lungime l_0 şi înălţimea 12. Să se calculeze:

a) aria laterală şi volumul piramidei

b) distanţa de la centrul bazei la muchia laterală, respectiv la feţele laterale ale piramidei.

Soluţie:



Fie SABCD piramida şi $\{O\} = |AC| \cap |BD|$

$|SO|$ este înălţimea şi avem :

$\|AO\| = \frac{1}{2}\|AC\| = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$,

deci $\|SA\| = \sqrt{194}$.

Fie E mijlocul lui $|AB|$, avem

$SE \perp AB$ şi $OE \perp AB$, $\|OE\| = \frac{1}{2}\|BC\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \|SE\| = \sqrt{\|SO\|^2 + \|OE\|^2} = 13$

Obţinem $V(p) = \frac{1}{3}\mathcal{C}[ABCD] \cdot \|SO\| = 400$

şi $\mathcal{C}_\ell(p) = \frac{4 \cdot \|AB\| \cdot \|SE\|}{2} = 260$

b) Distanţa de la O la SA este înălţime în triunghiul dreptunghic SOA şi deci $d(O, SA) = \frac{\|OA\| \cdot \|OS\|}{\|SA\|} = \frac{60\sqrt{97}}{97}$ iar $d(O; (S,A,B)) = \frac{3V(SAOB)}{\mathcal{C}[SAB]} = \frac{3 \cdot \frac{1}{4}V(p)}{\frac{1}{4}\mathcal{C}_\ell(p)} = \frac{60}{13}$

6. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are latura bazei mari $\|AB\| = 3a$, latura bazei mici $\|A'B'\| = a$ şi muchia laterală $\|AA'\| = 2a$. Să se calculeze volumul şi aria trunchiului.

Soluţie:

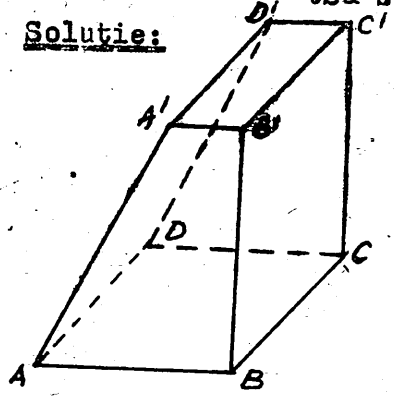


Fig. 108

Înălţimea trunchiului este înălţimea trapezului isoscel ACC'A', deci

$h = \sqrt{\|AA'\| - \frac{1}{4}(\|AB\|\sqrt{2} - \|A'B'\|\sqrt{2})^2} = a\sqrt{7}$

$V(T) = \frac{a\sqrt{7}}{3}(9a^2 + a^2 + 3a^2) = \frac{13a^2\sqrt{7}}{3}$

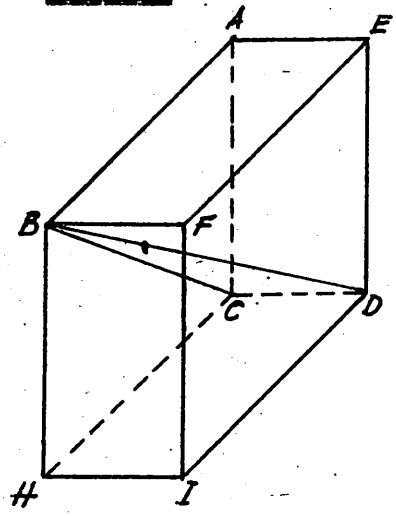
Apotema trunchiului este înălţimea trapezului ABB'A' şi are lungimea $a\sqrt{3}$, iar

$\mathcal{C}_t(T) = \left(a^2 + 9a^2 + 4\frac{(a+3a)a\sqrt{3}}{2}\right) = a^2(10+8\sqrt{3})$

7. Să se demonstreze că volumul unui tetraedru [ABCD] este a şasea parte din volumul unei prisme a cărei bază este un paralelogram cu laturile congruente şi paralele cu două muchii opuse $|AB|$ şi $|CD|$ şi a cărei înălţime este egală cu cea mai

scurtă distanţă dintre cele două muchii.

Soluţie:

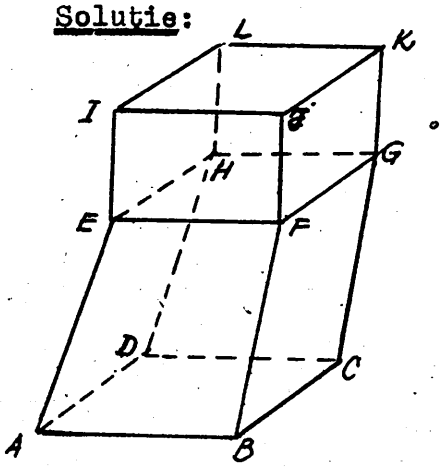


vom folosi faptul că dacă dreptele AB şi CD sînt necoplanare, există şi sînt unic determinate planele α şi β ale încît $ABC\subset\alpha$, $CDC\subset\beta$ şi $\alpha\parallel\beta$, iar cea mai scurtă distanţă dintre AB şi CD este distanţa dintre α şi β. Fie $AE\parallel BF\parallel CD$ aşa încît $\|AE\|\equiv\|BF\|\equiv|CD|$ iar E şi F în semispaţiul determinat de (ABC) şi D. Fie $CH\parallel DI\parallel AB$ aşa încît $|CH|\equiv|DI|\equiv|AB|$ iar H şi I în semispaţiul determinat de (ABC) şi B.

Obţinem o prismă P ca cea cerută în text. Fie d distanţa de la B la (ACD); avem $V(ABCD)=\frac{1}{3}\,d\cdot\mathcal{A}[ACD]=\frac{1}{3}\cdot d\cdot\frac{1}{2}\mathcal{A}[ACDE]=\frac{1}{6}V(P)$

8. Se construieşte un coş de moară de forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată continuată cu o prismă patrulateră avînd baza comună cu baza mică a trunchiului de piramidă. Se ştie că diagonala bazei mari este de 180 cm, diagonala bazei mici 72 cm, iar înălţimea coşului este 160 cm. Să se calculeze volumul coşului, ştiind că raportul dintre volumul trunchiului şi cel al prismei este 8.

Soluţie:



Avem $\|AB\|=180\frac{\sqrt{2}}{2}=90\sqrt{2}$ şi $\|EF\|=72\frac{\sqrt{2}}{2}=36\sqrt{2}$.

Dacă x este înălţimea trunchiului T (lungimea acestuia), atunci înălţimea piramidei P are lungimea $160-x$, iar $V(T)=\frac{x}{3}\left(\|AB\|^2+\|EF\|^2+\|AB\|\cdot\|EF\|\right)$;

$V(P)=(160-x)\cdot\|EF\|^2$

Din $8=\frac{V(T)}{V(P)}=\frac{x}{3(160-x)}\left[\left(\frac{\|AB\|}{\|EF\|}\right)^2+1+\frac{\|AB\|}{\|EF\|}\right]$

Obţinem: $x=\frac{1024}{9}$, iar volumul coşului: $V=V(T)+V(P)\simeq 1{,}078\,m^3$.

9. Un tetraedru $[VABC]$ are înălţimea h. La distanţele de $\frac{h}{3}$ şi $\frac{h}{2}$ de vîrful V se duc plane paralele cu baza tetraedrului obţinîndu-se secţiunile A'B'C' respectiv A"B"C". Să se determine

raportul volumelor trunchiurilor de piramidă $[ABCA''B''C'']$ şi $[A''B''C''A'B'C']$.

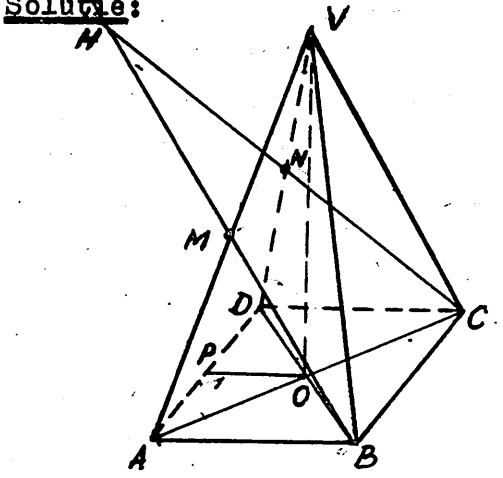
Soluţie:

Fie $V = v(ABCV)$, $V_1 = v(VA'B'C')$, $V_2 = v(VA''B''C'')$;
datorită asemănării avem $\frac{V_1}{V} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$;

$\frac{V_2}{V} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, iar $v(ABCA''B''C'') = v(VABC) - v(VA'B'C') =$
$= \frac{19}{8 \cdot 27} V$. Deci, raportul cerut este $\frac{189}{19}$.

lo. Piramida $[VABCD]$ de înălţime h are ca bază un dreptunghi de laturi $\|AB\| = a$, $\|BC\| = b$, iar piciorul înălţimii este centrul bazei piramidei. Prin BC şi mijlocul M al muchiei laterale $|VA|$ se duce planul α. Se cere:
a) Să se calculeze raportul dintre volumele piramidelor $[VHMN]$ şi $[HABCD]$ unde $\{N\} = VD \cap \alpha$ şi $\{H\} = BM \cap CN$;
b) măsura unghiului diedru dintre feţele $[VAD]$ şi $[HAD]$ în cazul particular $h = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) a$.

Soluţie:



a) Deoarece $AD \| BC$, avem $AD \| \alpha$, deci α taie (VAD) după o paralelă la AD şi deci MN este linie mijlocie în triunghiul VAD. Avem $MN \| AD \| BC$ şi $\|MN\| = \frac{1}{2}\|AD\| = \frac{1}{2}\|BC\|$, deci MN este linie mijlocie în triunghiul HBC.
Deoarece $\|HM\| \equiv \|MB\|$ şi $|AM| \equiv |MV|$, $ABVH$ este paralelogram, deci $VH \| AB \Rightarrow VH \| (ABCD) \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha(H; ABCD) = \alpha(V; ABCD) \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha(H; ABCD) = \alpha(V; ABCD) \Rightarrow$
$\Rightarrow V(HABCD) = V(VABCD)$.
Din $|MH| \equiv |MB| \Rightarrow \alpha(H, (VMN)) = \alpha(B; (VMN))$ deci $v(HMNV) = v(BMNV)$. Deoarece piramidele $[BMNV]$ şi $[BADV]$ au aceeaşi înălţime din B, obţinem:

$$\frac{v(BMNV)}{v(BADV)} = \frac{\mathcal{A}[VMN]}{\mathcal{A}[VAD]} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Analog $\frac{v(VABD)}{v(VABCD)} = \frac{\mathcal{A}[ABD]}{\mathcal{A}[ABCD]} = \frac{1}{2}$, deci $\frac{v(HMNV)}{v(HABCD)} = \frac{1}{8}$

b) Fie P mijlocul lui $[AD]$; din $|HA| \equiv |VB| \equiv |CV| \equiv |HD|$ rezultă $HP \perp AD$, deci, $m((\widehat{HAD}), (\widehat{VAD})) = m(\widehat{HPV})$.
Avem $\Delta HAD \equiv \Delta VAD$ $(L.L.L)$ de unde $|HP| \equiv |VP|$.
Deoarece $|VH| \equiv |AB|$ şi $VH \| AB$, din ΔVHP obţinem

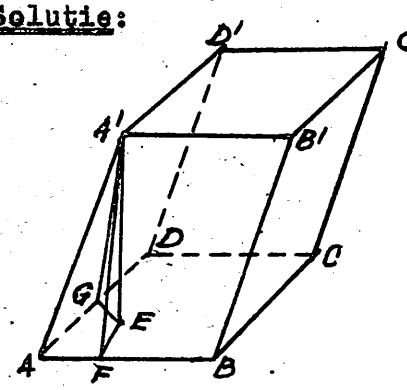
$$\sin \frac{\widehat{VHP}}{2} = \frac{\|VH\|}{2\|NP\|} = \frac{\|OP\|}{\|VP\|}.$$

Cum $\|OP\| = \frac{a}{2}$ şi $\|VP\| = \sqrt{\|VO\|^2 + \|OP\|^2} = a\sqrt{2+\sqrt{3}} \Rightarrow$

$$\sin \frac{\widehat{VHP}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow m(\widehat{VHP}) = 30^\circ.$$

11. Un paralelipiped are ca bază dreptunghiul ABCD, iar muchiile $[AB]$, $[AD]$ și $[AA']$ au respectiv lungimile a, b, c. Unghiurile $\widehat{A'AB}$ și $\widehat{A'AD}$ sînt congruente și au măsura x (în radiani).
a) Să se arate că $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$
b) Să se arate că volumul paralelipipedului este $V = abc\sqrt{-\cos 2x}$
c) Dacă α este măsura unghiului feței $[ABB'A']$ cu baza $[ABCD]$ și $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ să se arate că $\cos\alpha = ctg\, x$

Soluție:



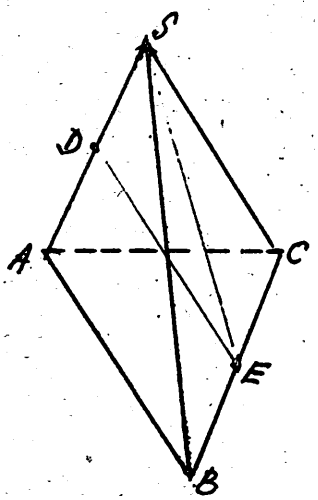
a) Fie $A'E \perp ABCD (E \in (ABCD))$ și $F = pr_{AB}A'$, $G = pr_{AD}A'$.
Avem și $EF \perp AB$, $EG \perp AD$.
Din $\Delta A'AF \equiv \Delta A'AG$ obținem $|AF| \equiv |AG|$, deci $\Delta AEF \equiv \Delta AEG$
$\Rightarrow m(\widehat{EAF}) = 45$ sau ~~$m(\widehat{EAF}) = 135$~~.
Dar $|\cos x| = \frac{\|AF\|}{\|AA'\|} < \frac{\|AF\|}{\|AE\|} = |\cos \widehat{EAF}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, deci $\cos x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$

b) $\|A'E\| = \sqrt{\|AA'\|^2 - \|AE\|^2} = \sqrt{\|AA'\|^2 - (\|AF\|\cdot\sqrt{2})^2} =$
$= \sqrt{\|AA'\|^2 - 2(\|AA'\|^2 |\cos x|)^2} = \|AA'\|\sqrt{1 - 2\cos^2 x} =$
$= \|AA'\|\sqrt{-\cos 2x}$ dar $V = \mathcal{A}[ABCD] \cdot \|A'E\| = abc\sqrt{-\cos 2x}$.

c) Deoarece $A'F \perp AB$ și $EF \perp AB$, $\alpha = m(\widehat{A'FE})$,
iar $|\cos\alpha| = \frac{\|EF\|}{\|A'F\|} = \frac{\|AF\|}{\|A'F\|} = |ctg\, x|$. Observăm că
$x < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow E \in int\, \widehat{BAD} \Leftrightarrow \alpha < \frac{\pi}{2}$, deci $|\cos\alpha| = |ctg\, x| \Rightarrow \cos\alpha = ctg\, x$

12. O piramidă triunghiulară regulată $[SABC]$ are latura bazei de lungime a și fețele laterale triunghiuri dreptunghice în S.
a) Să se calculeze volumul piramidei
b) Fie D și E mijloacele muchiilor $|AS|$ și $|BC|$. Să se calculeze $\|DE\|$ și măsurile α și β ale unghiurilor $\widehat{DEC}$ și $\widehat{SDE}$.

Soluție:



a) Avem $\|SA\| = \|SB\| = \|SC\| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ și
$SA \perp SB$, $SA \perp SC \Rightarrow SA \perp (SBC)$
deci $V = \frac{\|SA\| \cdot \mathcal{A}[SBC]}{3} = \frac{\|SA\|^3}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$

b) Din $DS \perp (SBC)$ și $SE \perp BC \Rightarrow \alpha = 90$
In triunghiul dreptunghic DSE avem $tg\, SDE = \frac{\|SE\|}{\|SD\|} = \frac{2\|SE\|}{\|SA\|} = 2\frac{\|SE\|}{\|SC\|} =$
$= 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, deci $\beta = arctg\sqrt{2}$. Avem și
$\|DE\|^2 = \frac{2(\|ED\|^2 + \|ES\|^2) - \|SA\|^2}{4}$ iar
$\|AE\| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\|ES\| = \frac{a}{2}$, $\|AS\| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
deci: $\|DE\| = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

§6. Mulţimi măsurabile în spaţiu. Exerciţii recapitulative

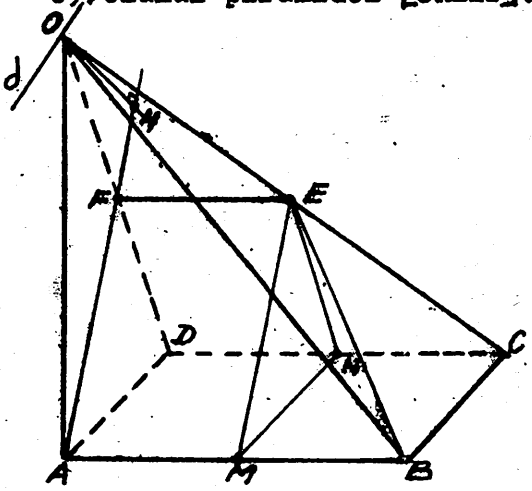
Pag.1o9

1. Se consideră piramida patrulateră $[OABCD]$ cu baza dreptunghi ($\|AB\|=a$, $\|BC\|=b$) şi muchia $[OA]$ perpendiculară pe planul bazei ($\|OA\|=h$). Se notează cu E şi F respectiv mijloacele segmentelor $[OC]$, $[OD]$. Se cere:

a) aria totală a piramidei;

b) să se precizeze ce fel de patrulater este ABEF şi să i se calculeze aria;

c) volumul piramidei $[OABEF]$.



Soluţie:

a) Conform definiţiei:

$\mathcal{A}_t(P) = \mathcal{A}[ABCD] + \mathcal{A}[OAB] + \mathcal{A}[OBC] + \mathcal{A}[OCD] + \mathcal{A}[ODA]$

$ABCD$ dreptunghi $\Rightarrow \mathcal{A}[ABCD] = \|AB\| \cdot \|BC\| = ab$

$\left.\begin{array}{l} OA \perp (ABC) \\ AB \subset (ABC) \end{array}\right| \Rightarrow OA \perp AB \Rightarrow$

OAB triunghi dreptunghic $\hat{m}A \Rightarrow \mathcal{A}[OAB] = \frac{1}{2}\|AB\| \cdot \|OA\| = \frac{ah}{2}$

Analog $\mathcal{A}[ODA] = \frac{1}{2}\|AD\| \cdot \|OA\| = \frac{bh}{2}$,

($\|AD\| = \|BC\| = b$), $OA \perp (ABC)$, $A \in (ABC)$

$ABCD$ dreptunghi $\Rightarrow AD \perp DC$, $DC \subset (ABC)$,

$D \in DC \Rightarrow OD \perp DC$

(conform reciprocei l a teoremei celor trei perpendiculare)

$OD \perp DC \Rightarrow \Delta ODC$ dreptunghic $\hat{m}D \Rightarrow \mathcal{A}[ODC] = \frac{1}{2}\|DC\| \cdot \|OD\|$

In triunghiul dreptunghic OAD avem: $\|OD\|^2 = \|OA\|^2 + \|AD\|^2 = h^2 + b^2 \Rightarrow \|OD\| = \sqrt{b^2+h^2}$

Deci: $\mathcal{A}[ODC] = \frac{1}{2} a\sqrt{b^2+h^2}$

Analog, în triunghiul dreptunghic OAB, $\|OB\| = \sqrt{a^2+h^2}$ şi cum $OB \perp BC$ (demonstraţie analoagă) avem $\mathcal{A}[OBC] = \frac{1}{2} b\sqrt{a^2+h^2}$

In consecinţă:

$\mathcal{A}_t(P) = ab + \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{b^2+h^2} = ab + \frac{1}{2}\left[h(a+b) + a\sqrt{b^2+h^2} + b\sqrt{a^2+h^2}\right]$

b) Cum E este mijlocul segmentului $[OC]$ şi F mijlocul lui $[OD] \Rightarrow EF$ linie mijlocie în $ODC \Rightarrow EF \| DC$ şi $\|EF\| = \frac{1}{2}\|DC\|$

$ABCD$ paralelogram $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} DC \| AB \\ EF \| DC \end{array}\right| \Rightarrow EF \| AB \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A, B, E, F \text{ coplanare} \\ EF \cap AB = \phi \end{array}\right| \Rightarrow |EF| \cap |AB| = \phi$

Cum $|EF| \subset EF$ şi $|AB| \subset AB$

$ABCD$ dreptunghi $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} AD \| BC \\ BC \subset (OBC) \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AD \| (OBC) \\ AD \subset (OAD) \\ O \in (OBC) \cap (OAD) \end{array}\right| \Rightarrow (OAD) \cap (OBC) = d$ cu $O \in d$ şi $d \| AD$

$d \| AD \Rightarrow \left.\begin{array}{l} d \cap AD = \phi \\ [AD] \subset AD \end{array}\right| \Rightarrow [AD] \cap d = \phi \Rightarrow$ în planul (OAB), punctele A şi D se află în acelaşi semiplan deschis S, limitat de dreapta d.

$\left.\begin{array}{l} D \in S \\ O \in d \end{array}\right| \Rightarrow |OD| \subset S$ (cf. problemei 5, §5 manual cls.a IX-a) şi

cum $F \in |OD| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} F \in S \\ A \in S \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |AF| \cap d = \phi \\ |AF| \subset (OAD) \\ (OAD) \cap (OBC) = d \end{array}\right| \Rightarrow |AF| \cap (OBC) = \phi \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right| \Rightarrow |AF| \cap |BE| = \phi$

Aşadar: $\left.\begin{matrix}|AF|\cap|BE|=\phi\\ |EF|\cap|AB|=\phi\end{matrix}\right| \Rightarrow ABEF$ patrulater, $EF\parallel AB \Rightarrow ABEF$ trapez sau paralelogram

Dar $\|EF\|=\frac{1}{2}\|DC\|$
ABCD dreptunghi $\Rightarrow |DC|\equiv|AB|$ $\Big| \Rightarrow \|EF\|=\frac{1}{2}\|AB\|<\|AB\| \Rightarrow |EF|\not\equiv|AB|$ şi deci

ABCD nu poate fi paralelogram. Rezultă deci că ABEF este trapez

ABCD dreptunghi $\Rightarrow AB\perp AD$, $OA\perp AB$, $OA\cap AD=\{A\}$ $\Big| \Rightarrow AB\perp(OAD)$, cum $AF\subset(OAD)$ $\Big| \Rightarrow AB\perp AF$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ABEF trapez dreptunghic

In consecinţă:

$$\mathcal{A}[ABEF]=\frac{1}{2}(\|AB\|+\|EF\|)\cdot\|AF\|=\frac{1}{2}\left(\|AB\|+\frac{1}{2}\|AB\|\right)\cdot\|AF\|=\frac{3}{4}\|AB\|\cdot\|AF\|$$

F fiind mijlocul lui $|OD| \Rightarrow AF$ mediană în $\triangle OAD$ $\Big| \Rightarrow \|AF\|=\frac{1}{2}\|OD\|=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+h^2}$

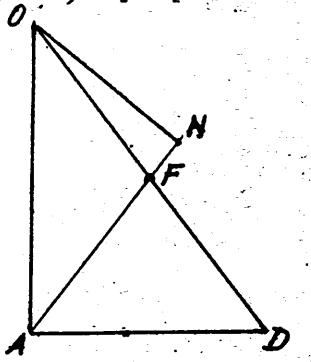
OAD triunghi dreptunghic

Deci: $\mathcal{A}[ABEF]=\frac{3}{8}a\sqrt{6^2+h^2}$

c) Am demonstrat la punctul b) că $\left.\begin{matrix}AB\perp(OAD)\\ AB\subset(ABF)\end{matrix}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix}(ABF)\perp(OAD)\\ AF\subset(ABF)\\ AF\subset(OAD)\end{matrix}\right| \Rightarrow AF=(ABF)\cap(OAD)$

După cum ştim, daca două plane sînt perpendiculare, o perpendiculară dusă într-unul din ele pe dreapta lor de intersecţie va fi perpendiculară pe al doilea plan.



Fie deci $OH\perp AF$, $H\in AF$.

Cum $O\in(OAD)$ şi $H\in AF$, $AF\in(OAD) \Rightarrow OH\subset(OAD)$

In consecinţă $OH\perp(ABF)$ şi deci:

$$V[OABEF]=\frac{1}{3}\mathcal{A}[ABEF]\cdot\|OH\|$$

In planul (OAD), $OH\perp AF$, $H\in AF \Rightarrow \mathcal{A}[OAF]=\frac{1}{2}\|AF\|\cdot\|OH\|$ $\Big| \Rightarrow \frac{1}{2}\|AF\|\cdot\|OH\|=\frac{1}{2}\mathcal{A}[OAD]$

AF fiind mediană în $\triangle OAD \Rightarrow \mathcal{A}[OAF]=\frac{1}{2}\mathcal{A}[OAD]$

$$\Rightarrow \|OH\|=\frac{\mathcal{A}[OAD]}{\|AF\|}=\frac{\frac{6h}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{6^2+h^2}}=\frac{6h}{\sqrt{6^2+h^2}}$$

Aşadar:

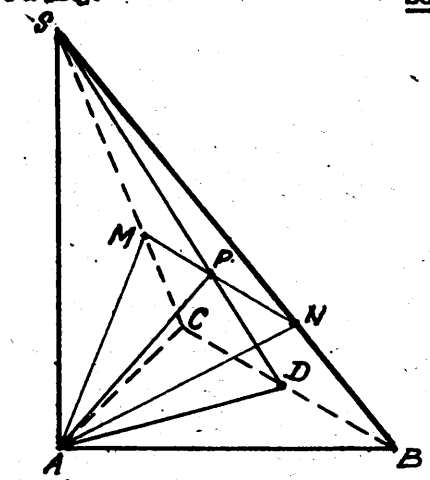
$$V[OABEF]=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}a\sqrt{6^2+h^2}\cdot\frac{6h}{\sqrt{6^2+h^2}}=\frac{a6h}{8}$$

Observaţie:

Se mai putea calcula prin: $V[OABEF]=V[OABCD]-V[ABCDEF]$ poliedrul $[ABCDEF]$ descompunîndu-se într-o prismă triunghiulară $[AFDMEN]$ şi o piramidă patrulateră $[EMBCN]$, unde $EM\perp AB$ şi $M\in AB$ şi N mijlocul segmentului $[DC]$ şi deci:

$$V[ABCDEF]=V[EMBCN]+V[AFDMEN].$$

2.* O piramidă are ca bază triunghiul dreptunghic isoscel ABC cu $\|AB\|=\|AC\|=a$ şi muchia $|SA|$ perpendiculară pe bază, $\|SA\|=b$.
Să se calculeze:
a) aria totală a piramidei;
b) măsura unghiului diedru format de feţele $[SBC]$ şi $[ABC]$ în cazul $a=b\sqrt{2}$;
c) aria în funcţie de a şi b, a secţiunii determinate în această piramidă de un plan ce trece prin A, este perpendicular pe faţa $[SBC]$ şi o intersectează pe aceasta după o dreaptă MN paralelă cu $[BC]$.



Soluţie: a) Conform ipotezei $SA\perp(ABC), A\in(ABC)$ şi deci, cum $AB\subset(ABC), AC\subset(ABC)\Rightarrow$
$\Rightarrow SA\perp AB$, $SA\perp AC$.
Deci triunghiurile SAB şi SAC sînt dreptunghic în A şi vom putea scrie:

$$\mathcal{A}[SAB]=\frac{1}{2}\|AB\|\cdot\|SA\|=\frac{ab}{2}$$
$$\mathcal{A}[SAC]=\frac{1}{2}\|AC\|\cdot\|SA\|=\frac{ab}{2}$$

Fie $AD\perp BC$, $D\in BC$
Cum $BC\subset(ABC)$, $SA\perp(ABC), A\in(ABC)$ $\Rightarrow SD\perp BC$ (Conform teoremei celor trei perpendiculare). Deoarece $\triangle ABC$ este isoscel, $AD\perp BC$, $D\in BC$ (AD înălţime) $\Rightarrow$ AD mediană
ABC dreptunghic în A $\Rightarrow \|AD\|=\frac{1}{2}\|BC\|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$SA\perp(ABC)$, $AD\subset(ABC)\Rightarrow SA\perp AD\Rightarrow\triangle SAD$ dreptunghic în A $\Rightarrow$
$$\Rightarrow \|SD\|^2=\|SA\|^2+\|AD\|^2=b^2+\frac{2a^2}{4}\Rightarrow\|SD\|=\frac{\sqrt{4b^2+2a^2}}{2}$$
$SD\perp BC$, $D\in BC\Rightarrow \mathcal{A}[SCB]=\frac{1}{2}\|BC\|\cdot\|SD\|=\frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{4b^2+2a^2}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2b^2+a^2}}{2}$
$$\Rightarrow \mathcal{A}[SCB]=\frac{a\sqrt{2b^2+a^2}}{2}$$

ABC triunghi dreptunghic isoscel $\Rightarrow \mathcal{A}[ABC]=\frac{a^2}{2}$
In consecinţă: $\mathcal{A}_t[SABC]=\mathcal{A}[ABC]+\mathcal{A}[SAB]+\mathcal{A}[SBC]+\mathcal{A}[SCA]=\frac{a^2}{2}+2\cdot\frac{ab}{2}+\frac{a\sqrt{2b^2+a^2}}{2}$
Deci: $$\mathcal{A}_t[SABC]=\frac{a}{2}\left(a+2b+\sqrt{2b^2+a^2}\right)$$

b) $AD\perp BC, D\in BC$
$SD\perp BC, D\in BC$
$BC=(ABC)\cap(SBC)$
$\Rightarrow$ măsura unghiului diedru format de feţele $[SBC]$ şi $[ABC]$ este $m(\widehat{ASD})$.

Vom nota cu $\alpha=m(\widehat{ADS})$
In triunghiul dreptunghic SAD: $tg\,\alpha=\frac{\|SA\|}{\|AD\|}=\frac{b}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{b\sqrt{2}}{a}=\frac{a}{a}=1$
(conform ipotezei punctului b). Aşadar: $m(\widehat{ADS})=45$ şi deci şi măsura unghiului diedru format de feţele $[SBC]$ şi $[ABC]$ este 45.

c) Fie π planul de secţiune. Conform ipotezei $A\in\pi$, $\pi\cap(SBC)=MN$, $MN\|BC$.
Cum $AD\perp BC$, $SD\perp BC$, $SD\cap AD=\{D\}\Rightarrow BC\perp(SAD)$

$BC \perp (SAD),\ BC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAD)$

$D \in BC,\ BC \subset (SBC) \Rightarrow D \in (SBC) \Rightarrow \left.\begin{matrix} SD \subset (SBC) \\ SD \subset (SAD) \end{matrix}\right| \Rightarrow SD = (SBC) \cap (SAD)$

Fie $AP \perp SD,\ P \in SD$

$P \in SD,\ SD \subset (SAD) \Rightarrow P \in (SAD) \Rightarrow AP \subset (SAD)$

Aşadar, $AP \subset (SAD)$ este perpendiculară pe dreapta SD de intersecţie a planelor perpendiculare (SAD) şi (SBC) .In consecinţă $AP \perp (SBC)$.

$AP \perp (SBC),\ A \in \widetilde{\pi}$ şi $\widetilde{\pi} \perp (SBC) \Rightarrow AP \subset \widetilde{\pi}$ (dacă două plane sînt perpendiculare, atunci perpendiculara pe unul dintre ele ce trece printr-un punct al celuilalt este conţinută în aceasta din urmă.

$$\left.\begin{matrix} AP \subset \widetilde{\pi} \Rightarrow P \in \widetilde{\pi} \\ P \in (SAD) \end{matrix}\right| \Rightarrow P \in \widetilde{\pi} \cap (SAD) = MN$$

Aşadar ducînd prin P paralela la BC obţinem dreapta MN ($M \in SC, N \in SB$) de intersecţie a planului de secţiune cu (SAD)

$$\left.\begin{matrix} M \in SC \\ SC \subset (SAC) \end{matrix}\right| \Rightarrow M \in (SAC) \Rightarrow AM \subset (SAC) \left.\begin{matrix} \\ A \in \widetilde{\pi},\ M \in \widetilde{\pi} \Rightarrow AM \subset \widetilde{\pi} \end{matrix}\right| \Rightarrow AM = (SAC) \cap \widetilde{\pi}.$$

Analog $AN = (SAB) \cap \widetilde{\pi}$.

Aşadar, secţiunea determinată în piramidă de planul $\widetilde{\pi}$ este suprafaţa triunghiulară [AMN] .

$MN \parallel BC,\ M \in SC,\ N \in SB \Rightarrow \Delta SBC \sim \Delta SNM$

$SD \perp BC,\ D \in BC \Rightarrow$ înălţime în SBC

$SD \perp BC,\ BC \parallel MN \Rightarrow \left.\begin{matrix} SD \perp MN \\ SD \cap MN = \{P\} \end{matrix}\right| \Rightarrow SP$ înălţime în SNM

$$\Bigg| \Rightarrow \frac{\|MN\|}{\|BC\|} = \frac{\|SP\|}{\|SD\|}$$

ΔSAD dreptunghic în A, $AP \perp SD,\ P \in SD \Rightarrow$

$$\begin{cases} \|SA\|^2 = \|SD\| \cdot \|SP\| \Rightarrow \|SP\| = \dfrac{6^2}{\sqrt{4b^2+2a^2}} = \dfrac{2b^2}{\sqrt{4b^2+2a^2}} \\ \|AP\| = \dfrac{\|SA\| \cdot \|AD\|}{\|SD\|} = \dfrac{6 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{4b^2+2a^2}} = \dfrac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2+2b^2}} = \dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+2b^2}} \end{cases}$$

In consecinţă : $\dfrac{\|MN\|}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\frac{2b^2}{\sqrt{4b^2+2a^2}}}{\frac{\sqrt{4b^2+2a^2}}{2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|MN\| = \frac{2\sqrt{2}ab^2}{a^2+2b^2}$$

$AP \perp (SBC),\ MN \subset (SBC) \Rightarrow \left.\begin{matrix} AP \perp MN \\ P \in MN \end{matrix}\right| \Rightarrow$ AP înălţime în $\Delta AMN \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{A}[AMN] = \frac{1}{2} \|MN\| \cdot \|AP\| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}ab^2}{a^2+2b^2} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$$

Deci:

$$\mathcal{A}[AMN] = \frac{\sqrt{2}a^2b^3}{(a^2+2b^2)\sqrt{a^2+2b^2}}$$

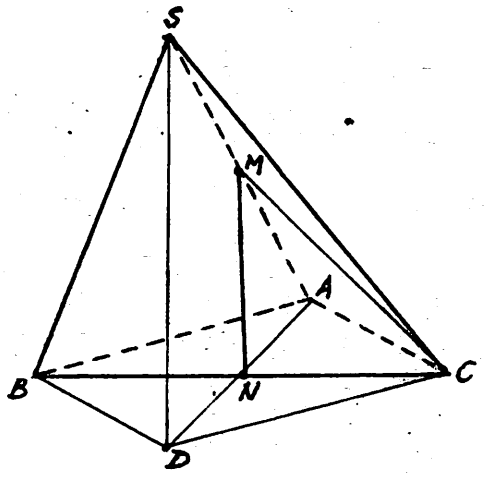
3°.Se consideră tetraedru [SABC] în care $\|SA\| = 2a$, $\|SB\| = \|SC\| = a\sqrt{3}$, $\|AB\| = \|AC\| = a$ iar unghiul dreptei SA cu planul ABC are măsura 45.Fie M şi N respectiv mijloacele muchiilor [SA], [BC] şi D proiecţia lui S pe planul (ABC) .

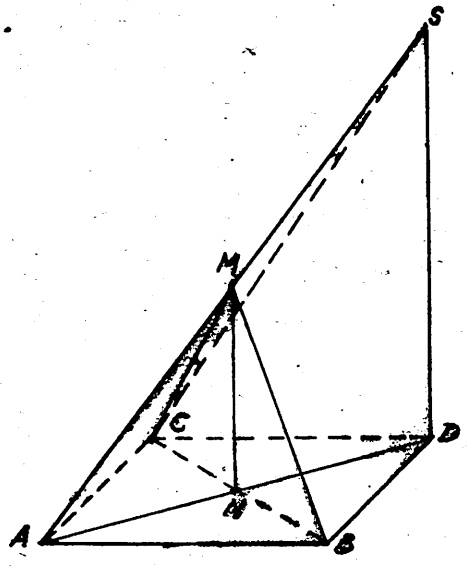
a)Să se arate că $BC \perp MN$ şi $BC \perp SA$

b)Să se arate că ABCD este pătrat

c)Să se calculeze aria laterală a tetraedrului, considerînd ca bază triunghiul ABC

Soluţie:





a) $|SB| \equiv |SC|$ (ipoteză)
$|AB| \equiv |AC|$ (ipoteză)
$|SA| \equiv |SA|$
$\Rightarrow \Delta SAB \equiv \Delta SAC$

M fiind mijlocul lui $|SA| \Rightarrow \begin{cases} BM \text{ mediană în } \Delta SAB \\ CM \text{ mediană în } \Delta SAC \end{cases} \Rightarrow |BM| \equiv |MC| \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta BMC$ isoscel cu baza $|BC|$

N fiind mijlocul lui $|BC| \Rightarrow MN$ mediană în $BMC \Rightarrow \underline{MN \perp BC}$

$|AB| \equiv |AC| \Rightarrow ABC$ isoscel cu baza $|BC|$

N fiind mijlocul lui $|BC| \Rightarrow AN$ mediană în $ABC \Rightarrow AN \perp BC$

Cum $BC \perp MN$, $BC \perp AN$ şi $MN \cap AN = \{N\} \Rightarrow BC \perp (AMN)$

Cum M este mijlocul lui $SA \Rightarrow M \in SA \Rightarrow SA = AM$, şi cum $AM \subset (AMN) \Rightarrow SA \subset (AMN) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{BC \perp SA}$

b) $D = pr_{(ABC)} S \Rightarrow SD \perp (ABC)$, $D \in (ABC)$

Conform ipotezei $|SB| \equiv |SC|$, $B, C \in (ABC) \Rightarrow |BD| \equiv |DC| \Rightarrow BDC$ isoscel cu baza $|BC|$

N fiind mijlocul lui $|BC| \Rightarrow DN$ mediană în BDC

$\Rightarrow DN \perp BC$

Cum $AN \perp BC$, $N \in BC$, iar AN, DN şi $BC \subset (ABC) \Rightarrow DN = AN$, conform unicităţii perpendicularei în N pe BC, în planul (ABC). Deci $N \in AD$.

$N \in AD$, $N \in |BC| \Rightarrow |BC| \cap AD \neq \phi \Rightarrow$ în planul (ABC) punctele B şi C sînt separate de dreapta AD. In consecinţă, (conform ex. 6, § 5 manual IX) segmentele $|AB|$ şi $|BD|$ fiind incluse în semiplanul limitat de AD care conţine pe B, segmentele $|AC|$ şi $|DC|$ în semiplanul limitat de AD care conţine pe C, iar cele două semiplane fiind opuse (deci disjuncte) $|AC| \cap |BD| = \phi$, $|AB| \cap |DC| = \phi$. Deci ABCD este patrulater.

$D = pr_{(ABC)} S$ şi $A \in (ABC) \Rightarrow |AD| = pr_{(ABC)} |AS| \Rightarrow \hat{SAD}$ este unghiul dreptei SA cu planul (ABC) şi deci, conform ipotezei, $m(\hat{SAD}) = 45$

$\left.\begin{matrix} SD \perp (ABC) \\ AD \subset (ABC) \end{matrix}\right| \Rightarrow SD \perp AD \Rightarrow SAD$ dreptunghic în D. Cum $m(\hat{SAD}) = 45 \Rightarrow SAD$ triunghi dreptunghic isoscel $\Rightarrow \|SA\|^2 = 2\|SD\|^2 \Rightarrow 4a^2 = 2\|SD\|^2 \Rightarrow \|SD\| = a\sqrt{2}$

$SD \perp (ABC)$, $BD \subset (ABC) \Rightarrow SD \perp BD \Rightarrow SDB$ dreptunghic în $D \Rightarrow \|BD\|^2 =$

$= \|SB\|^2 - \|SD\|^2 \Rightarrow \|BD\|^2 = 3a^2 - 2a^2 = a^2 \Rightarrow \|BD\| = a$

Am arătat că BDC este isoscel cu $|BD| \equiv |DC| \Rightarrow \|BD\| = \|DC\| = a$

Conform ipotezei $\|AB\| = \|AC\| = a$

Deci $|AB| \equiv |AC| \equiv |BD| \equiv |DC|$, ABCD patrulater $\Rightarrow$ ABDC romb

Avînd SAD dreptunghic isoscel $\Rightarrow \|AD\| = \|SD\| = a\sqrt{2}$

Aplicînd teorema cosinusului în ABD: $\cos B = \frac{\|AB\|^2+\|BD\|^2-\|AD\|^2}{2\|AB\|\cdot\|BD\|} = \frac{a^2+a^2-2a^2}{2a^2} = 0$, unde $B = \measuredangle(\widehat{ABD}) \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\widehat{ABD}) = 90$, ABDC romb $\Rightarrow$ ABDC pătrat

c) ABDC pătrat $\Rightarrow BD \perp AB$, $AB \subset (ABC)$, $SD \perp (ABC)$, $D \in (ABC) \Rightarrow SB \perp AB$ (conform teoremei celor trei perpendiculare)

$\Rightarrow$ SBA dreptunghic în B $\Rightarrow \mathcal{A}[SBA] = \frac{1}{2}\|AB\|\cdot\|SB\| = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$

Analog (sau observînd că $\Delta SBA \equiv \Delta SCA$) $\Rightarrow \mathcal{A}[SCA] = \frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$

$|SB| \equiv |SC| \Rightarrow SBC$ isoscel cu baza $|BC|$

N fiind mijlocul lui $|BC| \Rightarrow SN$ mediană în SBC $\Rightarrow SN \perp BC$

ABDC pătrat $\Rightarrow \|ND\| = \frac{1}{2}\|AD\| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$SD \perp (ABC)$, $DN \subset (ABC) \Rightarrow SD \perp DN \Rightarrow SDN$ dreptunghic în D $\Rightarrow \|SN\|^2 = \|SD\|^2 + \|ND\|^2 \Rightarrow \|SN\|^2 = 2a^2 + \frac{2a^2}{4} \Rightarrow \|SN\| = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

$SN \perp BC$, $N \in BC \Rightarrow \mathcal{A}[SBC] = \frac{1}{2}\|BC\|\cdot\|SN\| = \frac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{10}}{2} = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}$

(ABDC fiind pătrat, $\|BC\| = \|AD\| = a\sqrt{2}$)

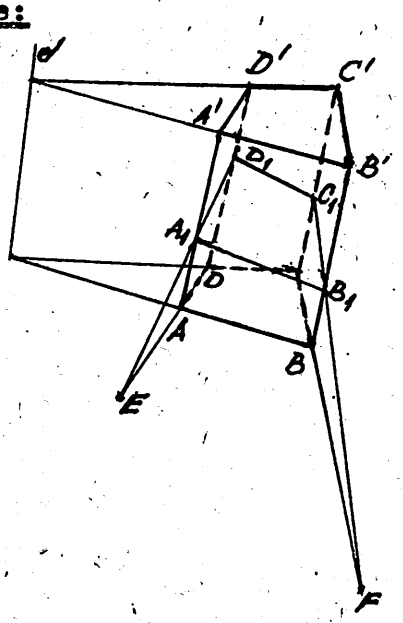
Aşadar:

$$\mathcal{A}_t[SABCD] = \mathcal{A}[SAB] + \mathcal{A}[SAC] + \mathcal{A}[SBC] = 2\cdot\frac{1}{2}a^2\sqrt{3} + \frac{a^2\sqrt{5}}{2} = a^2\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

Pag.llo

4.Se consideră prisma $[ABCDA'B'C'D']$ .Pe dreapta AD se consideră punctul E astfel încît $A \in |ED|$, $\|AE\| = a$, iar pe CB se consideră punctul F astfel încît $B \in |FC|$, iar $\|BF\| = b$ .Un plan ce trece prin dreapta EF intersectează muchiile laterale $|AA'|, |BB'|, |CC'|, |DD'|$ respectiv în punctele A_1, B_1, C_1, D_1.Să se demonstreze că $A_1B_1C_1D_1$ este paralelogram şi că $\frac{\|AA_1\|}{a} = \frac{\|BB_1\|}{b}$.

Solutie:



Problema este greşită

$[ABCDA'B'C'D']$ fiind prismă $\Rightarrow$ ABCD patrulater.In cazul patrulaterului oarecare, $AB \cap CD \neq \phi$

$AB \subset (AA'B)$, $DC \subset (DD'C) \Rightarrow (AA'B) \cap (DD'C) \neq \phi$

şi conform axiomei $I_6 \Rightarrow \exists d = (AA'B) \cap (DD'C)$

$DD' \parallel AA'$, $AA' \subset (AA'B)$, $DD' \not\subset (AA'B)$ $\Rightarrow DD' \parallel (AA'B)$ Cum $DD' \subset (DD'C)$ iar $(DD'C) \cap (AA'B) = d$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow DD' \parallel d$

Dacă $A_1B_1C_1D_1$ ar fi paralelogram $\Rightarrow D_1C_1 \parallel A_1B_1$

$A_1 \in AA'$, $AA' \subset (AA'B) \Rightarrow A_1 \in (AA'B)$

$BB' \parallel AA',\ AA' \subset (AA'B),\ B \in (AA'B) \Rightarrow BB' \subset (AA'B)$

şi cum $B_1 \in BB' \Rightarrow B_1 \in (AA'B)$ Deci $A_1B_1 \subset (AA'B)$

$D_1C_1 \parallel A_1B_1$

$D_1 \in DD',\ DD' \parallel (AA'B) \Rightarrow D_1 \notin (AA'B) \Rightarrow D_1C_1 \not\subset (AA'B)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow D_1C_1 \parallel (AA'B)$ (1)

Dar $D_1C_1 \subset (DD'C)$

$D_1C_1 \cap DD' = \{D_1\}$

$DD' \nparallel d$ şi $DD' \subset (DD'C)$ $\Rightarrow D_1C_1 \cap d \neq \phi$

$d = (AA'B) \cap (DD'C) \Rightarrow d \subset (AA'B)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow D_1C_1 \cap (AA'B) \neq \phi$ ceeace contrazice (1).

Din această justificare decurge cu necesitate condiţia

$(AA'B) \parallel (DD'C)$ şi cum $AB = (AA'B) \cap (ABD),\ DC = (DD'C) \cap (ABD) \Rightarrow$

$\Rightarrow AB \parallel DC$ $\Rightarrow ABCD$ paralelogram $\Rightarrow$

Analog apare necesară condiţia $AD \parallel BC$

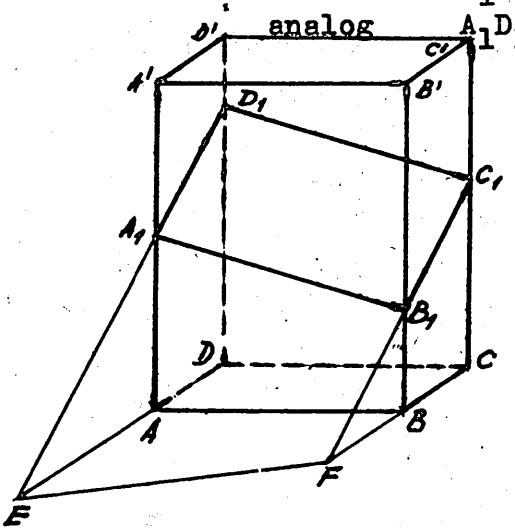
$\Rightarrow [ABCDA'B'C'D']$ paralelipiped

<u>Rezolvarea problemei în ipoteza ABCDA'B'C'D' paralelipiped</u>

Fie $\widetilde{\pi}$ planul de secţiune ce trece prin dreapta EF.

$[ABCDA'B'C'D']$ paralelipiped $\Rightarrow$ planele feţelor $[ABB'A']$ şi $[DCC'D']$ sînt paralele $\Rightarrow$ intersecţiile lor cu orice alt plan sînt drepte paralele $\Rightarrow A_1B_1 \parallel C_1D_1$

analog $A_1D_1 \parallel B_1C_1$ $\Rightarrow A_1B_1C_1D_1$ paralelogram.



$[ABCDA'B'C'D']$ paralelipiped $\Rightarrow$

$\Rightarrow [ADD'A'] \equiv [BCC'D'] \Rightarrow \widehat{A'AD} \equiv \widehat{B'BC}$

$A_1 \in |AA'|$, $|A'A| \subset |AA'| \Rightarrow A_1 \in AA' \Rightarrow [AA' \equiv [AA_1 \Rightarrow \widehat{A'AD} = \widehat{A_1AD}$ Analog $\widehat{B_1BC} = \widehat{B'BC}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{A_1AD} \equiv \widehat{B_1BC}$

$A \in |DE|$ (ipoteză) $\Rightarrow [AD$ şi $[AE$ opuse $\Rightarrow$

$\Rightarrow m(\widehat{A_1AD}) + m(\widehat{A_1AE}) = 180$

Analog $m(\widehat{B_1BC}) + m(\widehat{B_1BF}) = 180$

$\Rightarrow \widehat{A_1AE} \equiv \widehat{B_1BF}$

Deoarece $E \in AD,\ AD \subset (AA'D)$ rezultă $E \in (AA'D)$. Cum $E \in \widetilde{\pi}$ rezultă $E \in \widetilde{\pi} \cap (AA'D)$, deci $E \in A_1D_1$ şi deci $EA_1 = A_1D_1$. Deoarece $A_1D_1 \parallel B_1C_1$, rezultă $EA_1 \parallel B_1C_1$. Analog $FB_1 = B_1C_1$ şi cum $EA_1 \parallel B_1C_1$, rezultă $EA_1 \parallel FB_1$. Analog $EA \parallel FB$. Deci unghiurile $\widehat{A_1EA}$ şi $\widehat{B_1FB}$ au laturile paralele, Rezultă că ele sînt congruente sau suplementare.

Analog, $\widehat{EA_1A}$ şi $\widehat{FB_1B}$ au laturile paralele, deci sînt congruente sau suplementare.

In triunghiul EA_1A, $m(\widehat{EA_1A}) + m(\widehat{A_1EA}) = 180 - m(\widehat{A_1AE})$.

In triunghiul FB_1B, $m(\widehat{FB_1B}) + m(\widehat{B_1FB}) = 180 - m(\widehat{B_1BF})$.

Cum $\widehat{A_1AE} \equiv \widehat{B_1BF}$, rezultă că $m(\widehat{EA_1A}) + m(\widehat{A_1EA}) = m(\widehat{FB_1B}) + m(\widehat{B_1FB})$ (1)

Dacă $\widehat{A_1EA}$ şi $\widehat{B_1FB}$ ar fi suplementare şi de asemenea $\widehat{EA_1A}$ şi $\widehat{FB_1B}$ ar fi suplementare ar rezulta din:

$m(\widehat{A_1EA}) = 180 - m(\widehat{B_1FB})$

$m(\widehat{EA_1A}) = 180 - m(\widehat{FB_1B})$

adunînd cele două relaţii: $m(\widehat{A_1EA}) + m(\widehat{EA_1A}) = 360 - [m(\widehat{B_1FB}) + m(\widehat{FB_1B})]$

şi ţinînd cont de(1): $2[m(\widehat{A_1EA}) + m(\widehat{EA_1A})] = 360$

adică: $m(\widehat{A_1EA}) + m(\widehat{EA_1A}) = 180$ ceea ce contrazice teorema sumei măsurilor unghiurilor unui triunghi.

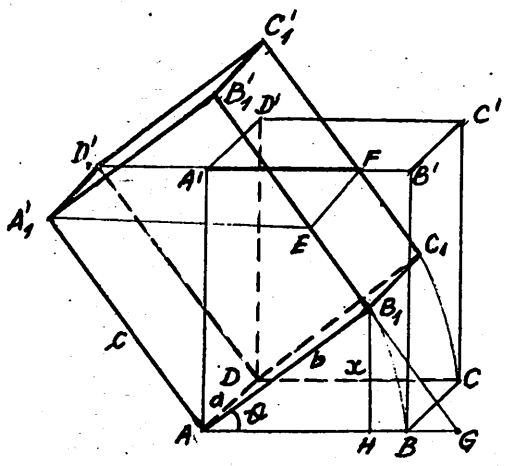
Deci $\widehat{A_1EA} \equiv \widehat{B_1FB}$, $\widehat{EA_1A} \equiv \widehat{FB_1B}$ (oricare dintre relaţii implicînd-o şi pe cealaltă).

Aşadar, avînd unghiurile respectiv congruente, cele două triunghiuri sînt asemenea: $\Delta A_1EA \sim \Delta B_1FB$.

De unde rezultă: $\frac{\|AA_1\|}{\|BB_1\|} = \frac{\|EA\|}{\|FB\|}$ adică $\frac{\|AA_1\|}{\|BB_1\|} = \frac{a}{b}$ sau, echivalent $\frac{\|AA_1\|}{a} = \frac{\|BB_1\|}{b}$.

5. O cutie de tablă are forma de paralelipiped dreptunghic [ABCDA'B'C'D'] cu dimensiunile a,b,c şi este plină cu ulei. Cutia fiind aşezată cu baza [ABCD] pe un plan orizontal se ridică de la un capăt, rotind-o în jurul muchiei [AD] ($\|AD\| = a$) astfel că muchia opusă se află la distanţă x de planul orizontal. Ce cantitate de lichid poate rămîne în cutie?

Soluţie:



Fie [ABCDA'B'C'D'] cutia în poziţia iniţială, adică avînd baza [ABCD] într-un plan orizontal. Să considerăm $[AB_1C_1D'_1B'_1C'_1D'_1]$ ca fiind cutia după o rotaţie de unghi α.

Deoarece [ABCDA'B'C'D'] este paralelipiped dreptunghic, $AD \perp (ABB')$. Deci (ABB') este planul perpendicular pe AD care trece prin A şi este reuniunea dreptelor perpendiculare pe AD care trec prin A.

Deoarece cutia este din tablă (nedeformabilă), $[AB_1C_1DA'_1B'_1C'_1D'_1]$ este de asemenea paralelipiped dreptunghic şi deci $AB_1 \perp AD$ şi $AA'_1 \perp AD$. In consecinţă $AB_1 \subset (ABB')$, $AA'_1 \subset (ABB')$ şi ele fiind drepte concurente, rezultă că $(AB_1B'_1) = (ABB')$.

Să observăm că $AB_1 \perp AD$, $AB \perp AD$ şi $(AB_1C_1) \cap (ABC) = AD \Rightarrow$ unghiul plan corespunzător unghiului diedru format de semiplanele ce conţin bazele [ABCD] şi respecti $[AB_1C_1D]$ este $\widehat{BAB_1}$ şi deci $\mu(\widehat{BAB_1}) = \alpha$

Fie $\widetilde{\Pi}$ planul ce conţine suprafaţa care indică nivelul uleiului în cutie. Conform legii fizicii, $\widetilde{\Pi} \parallel (ABC)$ şi $A'_1D'_1 \subset \widetilde{\Pi}$.

In poziţia iniţială, $(\theta = 0)$, $A'_1D'_1 = A'D'$ şi deci $\widetilde{\Pi} = (A'B'C')$ (unicitatea planului paralel cu (ABC) ce trece prin A'D'), In acest caz volumul uleiului este deci egal cu volumul paralelipipedului, adică:

$$V_u = abc.$$

Să observăm că rotaţia paralelipipedului poate fi făcută (cu interes pentru problemă) pînă cînd $A'_1D'_1$ ajunge în planul orizontal (ABC). In acest caz $\widetilde{\Pi} = (ABC)$ şi deci volumul uleiului rămas în cutie este nul.

In acest caz, $A'_1A \perp AD$, $AB \perp AD$ şi $AB, AD, AA'_1 \subset (ABC) \Rightarrow A'_1A \perp AB$ (unicitatea perpendicularei într-un punct pe o dreaptă în plan) Cum $AB_1 \perp A'_1A$ şi $A'_1A = AB$ rezultă $AB_1 \perp AB$ şi deci $\theta = \measuredangle(\widehat{BAB_1}) = \frac{\pi}{2}$

Deci $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Să considerăm acum o rotaţie de unghi $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Cum $\theta = \measuredangle(B_1\widehat{AB}) < \frac{\pi}{2} \Rightarrow AB$ nu este perpendiculară pe AB_1. Deoarece $B_1B'_1 \perp AB_1$ iar $AB, AB_1, B_1B'_1 \subset (ABB') \Rightarrow B_1B'_1 \cap AB \neq \phi$. Fie $\{G\} = B_1B'_1 \cap AB$.

$AB \subset (ABC)$ şi $G \in AB \Rightarrow G \in (ABC)$. Aşadar $B_1B'_1 \cap (ABC) = \{G\}$. Cum $\widetilde{\Pi} \parallel (ABC) \Rightarrow \widetilde{\Pi} \cap B_1B'_1 \neq \phi$. Fie $\{E\} = \widetilde{\Pi} \cap B_1B'_1$.

Din felul în care s-a făcut rotaţia şi notaţia paralelipipedului rezultă că punctele B'_1 şi G sînt separate de planul (AB_1C_1) şi deci $B_1 \in |B'_1G|$ ceeace implică $\|B'_1G\| > \|B'_1B_1\| = c$. Deoarece planele $(A'_1ED'_1) = \widetilde{\Pi}$ şi (ABC) sînt paralele şi $AA'_1 \parallel B'_1B_1$ rezultă $\|EG\| = \|AA'_1\| = c$. Deci $\|EG\| < \|B'_1G\|$ şi deci $E \in |B'_1G|$ ($E \in GB'_1$ care reprezintă intersecţia dintre $B_1B'_1$ şi semispaţiul limitat de (ABC) care conţine pe B'_1).

Cum $E \in |B'_1G|$, $B_1 \in |B'_1G|$ deosebim trei posibilităţi $E \in |B'_1B_1|$, $E = B_1$ sau $E \in |B_1G|$.

1) Să considerăm: $E \in |B'_1B_1|$.

$C_1C'_1$ fiind paralelă cu $B_1B'_1$ iar $B_1B'_1$ intersectînd planul $\widetilde{\Pi} \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists C_1C'_1 \cap \widetilde{\Pi} = \{F\}$ Atunci nivelul uleiului în cutie este marcat de suprafaţa $[A'_1EFD'_1]$. In consecinţă, volumul uleiului va fi:

$$V_u = V[AB_1C_1DA'_1B'_1C'_1D'_1] - V[A'_1EB'_1D'_1FC'_1]$$

Deoarece $EF \parallel A'_1D'_1$ (intersecţiile planului $\widetilde{\Pi}$ cu planele paralele (ADD'_1) şi $(B_1C_1C'_1)$) $A'_1D'_1 \parallel B'_1C'_1$ şi $(A'_1EB'_1) \parallel (D'_1FC'_1)$ $((A'_1EB'_1) = (A'_1AB_1), (D'_1FC'_1) = (DCC'_1)$, rezultă că $[A'_1EB'_1D'_1FC'_1]$ este o prismă triunghiulară dreaptă $(A'_1D'_1 \perp (A'_1EB'_1)$ şi deci:

$$V[A'_1EB'_1D'_1FC'_1] = G[A'_1B'_1E] \cdot \|A'_1D'_1\| = a \cdot G[A'_1B'_1E]$$

$A'_1E \parallel AG$, $A'_1B'_1 \parallel AB_1 \Rightarrow B'_1\widehat{A'_1E}$ şi $B_1\widehat{AG}$ sînt congruente sau suplementare. Cum $m(B'_1\widehat{A'_1E}) < 90$ ($\Delta B'_1A'_1E$ este dreptunghic) şi $m(B_1\widehat{AG}) < 90$ (B_1AE triunghi

dreptunghic) rezultă: $\widehat{B_1'A_1'E} \equiv \widehat{B_1AG}$.

Intrucît $|A_1'B_1'| \equiv |AB_1|$, $\widehat{B_1'A_1'E} \equiv \widehat{B_1AG} \Rightarrow \Delta B_1'A_1'E \equiv \Delta B_1AG$ (fiind triunghiuri dreptunghice în B_1' şi respectiv B_1) Rezultă deci că:

$$\mathcal{C}[A_1'B_1'E] = \mathcal{C}[AB_1G]$$

Fie $B_1H \perp AB$, $H \in AB$. Cum $B_1H \subset (ABB')$, $(ABB') \perp (ABC)$ şi $(ABB') \cap (ABC) = AB$ rezultă că $B_1H \parallel (ABC)$ Deoarece $B_1C_1 \parallel AD$ şi $AD \subset (ABC)$ rezultă $B_1C_1 \parallel (ABC)$ şi în consecinţă, $\|B_1H\| = d(B_1C_1(ABC)) = x$.

In triunghiul dreptunghic ABG, $\mu(\widehat{B_1AG}) = \theta$.

Intr-adevăr, $\theta < \frac{\pi}{2}$ şi $B_1H \perp AB = AG$, $H \in AB \Rightarrow H \in |AB$ şi deci $|AB = |AH, AB_1G$ fiind triunghi dreptunghic în B_1 şi $B_1H \perp AB = AG, H \in AB \Rightarrow H \in |AG|$ şi cum $|AG| < |AG \Rightarrow H \in |AG$ şi deci $|AH = |AG$. In consecinţă, $|AB = |AG$ şi deci $\widehat{B_1AB} = \widehat{B_1AG}$.

Aşadar, în triunghiul dreptunghic AB_1G, $\mu(\widehat{B_1GA}) = \frac{\pi}{2} - \theta = \mu(\widehat{B_1GH})$, $(H \in |AG|)$ $B_1H \perp AG$, $H \in AG \Rightarrow B_1HG$ triunghi dreptunghic în H şi deci:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\|B_1H\|}{\|B_1G\|} \Rightarrow \|B_1G\| = \frac{x}{\cos\theta}$$

In triunghiul dreptunghic AB_1H: $\sin\theta = \frac{x}{b} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{b^2 - x^2}{b^2}$, $\theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\theta > 0$ şi deci $\cos\theta = \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b}$

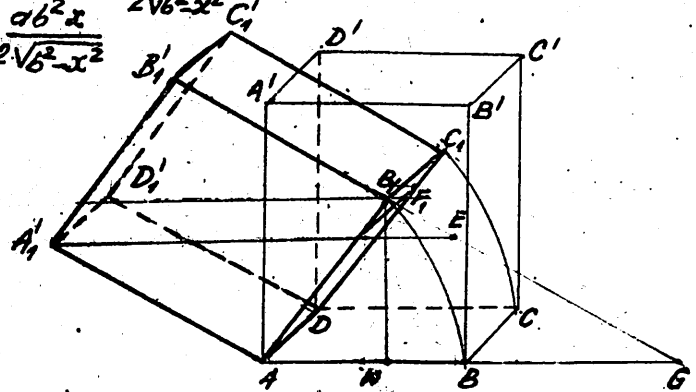
Aşadar: $\|B_1G\| = \frac{xb}{\sqrt{b^2 - x^2}}$

In consecinţă:

$$\mathcal{J}[AB_1G] = \frac{1}{2}\|AB_1\| \cdot \|B_1G\| = \frac{xb^2}{2\sqrt{b^2 - x^2}}$$

Şi deci: $V[A_1'EB_1'D_1'FC_1'] = \frac{ab^2x}{2\sqrt{b^2 - x^2}}$

Deci: $V_u = abc - \frac{ab^2x}{2\sqrt{b^2 - x^2}}$



2) $E = B_1$

Deoarece $\widetilde{\pi} = (A_1'D_1'E) = (A_1'D_1'B_1)$ şi $\widetilde{\pi} \parallel (ABC) \Rightarrow (A_1'B_1D_1') \parallel (ABC)$.

Atunci suprafaţa care marchează nivelul uleiului este $[A_1'B_1C_1D_1']$ $(B_1C_1 \parallel A_1'D_1'$, deci $B_1C_1 \subset (A_1'D_1'B_1)$ şi, în consecinţă:

$$V_u = V[AB_1A_1'DC_1D_1'] = \frac{1}{2}[AB_1C_1DA_1'B_1'C_1'D_1'] = \frac{abc}{2}$$

3) $E \in |B_1G|$

Dreapta $A_1'E$ intersectează o latură a triunghiului AB_1G şi nu trece prin nici unul dintre vîrfurile acestuia $(A_1'E \parallel AG$, $A_1'E \neq B_1'B_1)$. Rezultă deci că intersectează încă o singură latură a triunghiului. Cum $A_1'E \parallel AG$, rezultă că $A_1'E \cap |AB_1| \neq \phi$ şi fie $\{E_1\} = A_1'E \cap |AB_1|$.

Deci, cum $\tilde{\pi}$ intersectează pe AB_1 ($A_1' \in \tilde{\pi}$), va intersecta şi pe DC_1 ($DC_1 \parallel AB_1$).
Fie $\{F_1\} = \tilde{\pi} \cap DC_1$.
Analog cu demonstraţia de la 1) se arată că $[A_1'AE_1D_1'DF_1]$ este prisma triunghiulară dreaptă şi deci:

$$V_u = V[A_1'AE_1D_1'DF_1] = \mathcal{G}[A_1'AE_1] \cdot \|AD\| = a\,\mathcal{G}[A_1'AE_1].$$

$A_1'E \parallel AG$, $A_1'E = E_1E \Rightarrow E_1E \parallel AG$ şi cum $E \in |B_1G|$, $E_1 \in |AB_1|$, conform teoremei lui Thales:

$$\frac{\|EG\|}{\|B_1G\|} = \frac{\|AE_1\|}{\|AB_1\|}$$

de unde: $\|AE_1\| = \dfrac{\|EG\| \cdot \|AB_1\|}{\|B_1G\|}$

Cum $\|B_1G\| = \dfrac{xb}{\sqrt{b^2-x^2}}$ (calcul identic cu cel de la 1), iar $\|EG\| = \|A_1'A\| = c$ (segmente congruente prinse între plane paralele pe drepte paralele), obţinem:

$$\|AE_1\| = \frac{c\sqrt{b^2-x^2}}{x}$$

Atunci: $\mathcal{G}[A_1'AE_1] = \frac{1}{2}\|A_1'A\| \cdot \|AE_1\| = \dfrac{c\sqrt{b^2-x^2}}{2x}$

şi deci: $V_u = \dfrac{ac^2\sqrt{b^2-x^2}}{2x}$

Observaţie:

$E \in |B_1'B_1| \Leftrightarrow |B_1'E| < |B_1'B_1|$ (echivalenţa este susţinută de $E \in |B_1'G|$)

Cum $\|B_1'E\| = \|B_1G\| = \dfrac{xb}{\sqrt{b^2-x^2}}$ obţinem:

$$E \in |B_1'B| \Leftrightarrow \frac{xb}{\sqrt{b^2-x^2}} < c \Leftrightarrow xb < c\sqrt{b^2-x^2} \Leftrightarrow x^2b^2 < c^2b^2 - c^2x^2, (xb>0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}, (x>0)$$

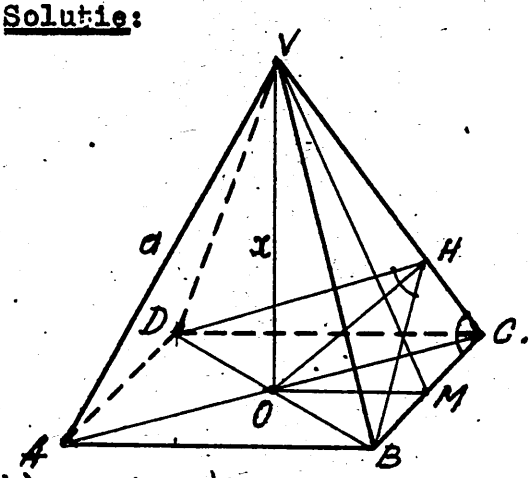
Observînd că $\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}} = h$ este lungimea înălţimii triunghiului dreptunghic $A'AB$, (relative la ipotenuză),
cele trei cazuri sînt reprezentate şi prin situaţiile:

1) $x < h$ sau, mai precis $x \in (0, h)$
2) $x = h$
3) $x > h$ sau, mai precis $x \in (h, b)$. $(x = b \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{2})$

6. O piramidă patrulateră regulată are muchiile laterale de lungime a.
a) Notînd cu x înălţimea piramidei, să se calculeze volumul piramidei.
b) Dacă α este măsura unghiului diedru format de două feţe laterale alăturate şi β măsura unghiului pe care muchiile laterale îl formează cu laturile bazei, să se arate că $\cos\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta = 0$
c) Se secţionează piramida cu un plan paralel cu baza, să se demonstreze că condiţia necesară şi suficientă ca să existe un

punct egal depărtat de cele 6 feţe ale trunchiului de piramidă format este ca înălţimea să fie medie proporţională între laturile bazelor.

Soluţie:



a) Fie $[VABCD]$ piramida patrulateră regulată. Avem deci: ABCD pătrat cu $|AC| \cap |BD| = \{O\}$, iar $VO \perp (ABC)$

In triunghiul dreptunghic VOC $(\hat{O} \in 90^\circ)$ avem $\|OC\| = \sqrt{\|VC\|^2 - \|VO\|^2} = \sqrt{a^2 - x^2}$

ABCD pătrat $\Rightarrow \|OC\| = \frac{1}{2}\|AC\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \|AC\| = 2\sqrt{a^2 - x^2}$

Cum $\|AC\| = \|AB\|\sqrt{2} \Rightarrow \|AB\| = \sqrt{2}\sqrt{a^2 - x^2}$

Aşadar:

$$V_{[VABCD]} = \frac{1}{2}\|AB\|^2 \cdot \|VO\| = \frac{2}{3}x(a^2 - x^2)$$

b) $VO \perp (ABC),\ BD \subset (ABC),\ ABCD$ pătrat $\Rightarrow BD \perp AC,\ VO \cap AC = \{O\} \Rightarrow BD \perp (VAC)$

Fie $OH \perp VC,\ H \in VC,\ VC \subset (VAC),\ BD \perp (VAC),\ BD \cap (VAC) = \{O\} \Rightarrow BH \perp VC$ (conform teoremei celor trei perpendiculare)

Analog:

$DH \perp VC,\ DH \subset (VDC)$
$BH \perp VC,\ BH \subset (VBC)$
$H \in VC,\ VC = (VDC) \cap (VBC)$

$\Rightarrow$ măsura unghiului diedru dintre feţele (VDC) şi (VBC) este măsura unghiului $\hat{DHB}$.

Conform ipotezei $\mathcal{M}(\hat{DHB}) = \alpha$

Cum feţele laterale ale unei piramide regulate sînt suprafeţe triunghiulare, congruente, iar BH şi DH sînt înălţimi relative la latura $|VC|$ în cele două triunghiuri $\Rightarrow$

$$\Rightarrow |BH| \equiv |DH| \ (\triangle VBC \equiv \triangle VDC,\ |VC| \equiv |VC|$$

Conform teoremei cosinusului în DHB, avem:

$$\cos\alpha = \frac{\|BH\|^2 + \|DH\|^2 - \|DB\|^2}{2\|BH\| \cdot \|DH\|} = \frac{2\|BH\|^2 - \|DB\|^2}{2\|BH\|^2}$$

In triunghiul VBC, $BH \perp VC,\ H \in VC \Rightarrow \mathcal{A}_{[VBC]} = \frac{1}{2}\|BH\| \cdot \|NC\| = \frac{a}{2}\|BH\|$

Fie $VM \perp BC,\ M \in BC$ (VM apotemă)

In triunghiul dreptunghic VBC avem:

$$\|VM\|^2 = \|VO\|^2 + \|OM\|^2 = x^2 + \frac{1}{4}\|AB\|^2 = x^2 + \frac{2(a^2 - x^2)}{4}$$

Deci: $\|VM\| = \sqrt{\frac{a^2 + x^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + x^2}}{2}$, iar $\mathcal{A}_{[VBC]} = \frac{1}{2}\|BC\| \cdot \|VM\| =$

Deci: $\mathcal{A}_{[VBC]} = \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - x^4}$ $\qquad = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + x^2}}{2}$

Aşadar: $\frac{a}{2}\|BH\| = \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - x^4} \Rightarrow \|BH\| = \frac{\sqrt{a^4 - x^4}}{a}$

In consecinţă:

$$\cos\alpha = \frac{2\frac{a^4 - x^4}{a^2} - 4(a^2 - x^2)}{2\frac{a^4 - x^4}{a^2}} = \frac{\frac{a^4 - x^4 - 2a^4 + 2x^2a^2}{a^2}}{\frac{a^4 - x^4}{a^2}} = \frac{-x^4 - a^4 + 2x^2a^2}{a^4 - x^4} = \frac{-(a^2 - x^2)^2}{(a^2 - x^2)(a^2 + x^2)}$$

Deci: $\cos\alpha = \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}$

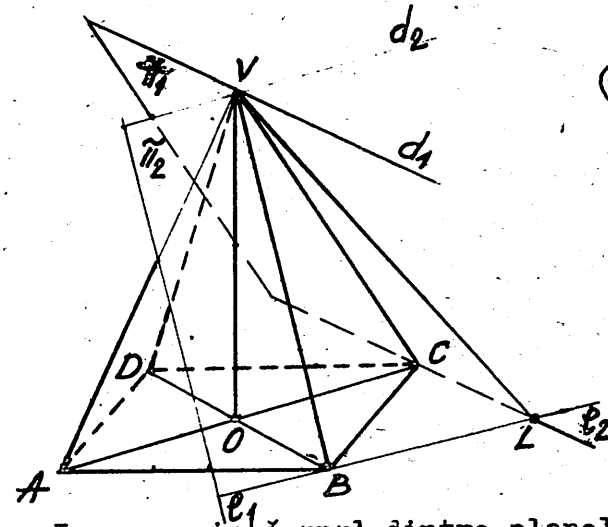
Conform ipotezei $\mathcal{M}(\hat{VCB}) = \beta,\ M \in |BC| \Rightarrow \hat{VCB} = \hat{VCM} \Rightarrow \mathcal{M}(\hat{VCM}) = \beta$

In triunghiul dreptunghic VMC:

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{\|MC\|}{\|VM\|} = \frac{\|BC\|}{2\|VM\|} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a^2 - x^2}}{2\frac{\sqrt{2}\sqrt{a^2 + x^2}}{2}} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$$

Aşadar: $\cos\alpha + ctg^2\beta = \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2} + \frac{a^2-x^2}{a^2+x^2} = 0$

c)



I.După cum se ştie(problema 3,§3, cap.5)locul geometric al punctelor egal depărtate de planele (VBC) şi (VDC) este reuniunea planelor bisectoare ale unghiurilor diedre determinate de (VBC) şi (VDC) Deoarece BHD este triunghi isoscel $(|BH| \equiv |HD|$ şi O este mijlocul lui $|BD|$, rezultă $[HO$ bisectoarea lui $\widehat{DHB}$, $\widehat{DHB}$ fiind unghiul plan corespunzător unghiului diedrului format de semiplanele ce conţin feţele $[VBC]$ şi $[VDC]$

In consecinţă unul dintre planele bisectoare de mai sus este $(VOH) = (VAC)$ iar al doilea plan bisector este $\tilde{\pi}_1$ planul perpendicular pe (VAC) care trece prin CV.

Aşadar, locul geometric al punctelor egal depărtate de planele (VBC) şi (VDC) este : $(VAC) \cup \tilde{\pi}_1$

Analog, locul geometric al punctelor egal depărtate de planele (VAB) şi (VBC) este $(VBD) \cup \tilde{\pi}_2$, unde $\tilde{\pi}_2$ este planul perpendicular pe (VBD) care trece prin VB.

In consecinţă, locul geometric al punctelor egal depărtate de planele (VAB), (VBC) şi (VDC) este:

$$\left((VAC)\cup\tilde{\pi}_1\right)\cap\left((VBD)\cup\tilde{\pi}_2\right) = \left((VAC)\cap(VBD)\right)\cup\left((VAC)\cap\tilde{\pi}_2\right)\cup\left(\tilde{\pi}_1\cap(VBD)\right)\cup\left(\tilde{\pi}_1\cap\tilde{\pi}_2\right)$$

Deoarece $VO \subset (VAC)$ şi $VO \subset (VBC) \Rightarrow (VAC)\cap(VBD) = VO$.

Cum $V \in VB$, $VB \subset \tilde{\pi}_2 \Rightarrow V \in \tilde{\pi}_2$. Cum $V \in (VAC)$ rezultă $V \in (VAC)\cap\tilde{\pi}_2$,

deci $\exists\, d_2 = (VAC)\cap\tilde{\pi}_2$ şi $V \in d_2$

Analog, $\exists\, d_1 = \tilde{\pi}_1 \cap (VBD)$ şi $V \in d_1$.

$AC \perp BD$ şi $AC \perp VO \Rightarrow AC \perp (VBD)$. Cum şi $\tilde{\pi}_2 \perp (VBD) \Rightarrow AC \parallel \tilde{\pi}_2$

$B \in VB$, $VB \subset \tilde{\pi}_2 \Rightarrow B \in \tilde{\pi}_2$ şi cum $B \in (ABC) \Rightarrow B \in \tilde{\pi}_2 \cap (ABC)$. Deci $\exists\, \ell_1 = \tilde{\pi}_2 \cap (ABC)$

$AC \parallel \tilde{\pi}_2$, $AC \subset (ABC)$, $(ABC)\cap\tilde{\pi}_2 = \ell_2 \Rightarrow AC \parallel \ell_2$

Analog $\exists\, \ell_1 = \tilde{\pi}_1 \cap (ABC)$ şi $\ell_1 \parallel BD$

Cum $AC \cap BD \neq \phi$, $\ell_2 \parallel AC$, $\ell_1 \parallel BD$ şi $\ell_1, \ell_2 \subset AB, BD \subset (ABC) \Rightarrow \ell_1 \cap \ell_2 \neq \phi$

Fie $\{L\} = \ell_1 \cap \ell_2 \Rightarrow L \in \ell_1$ şi cum $\ell_1 \subset \tilde{\pi}_1 \Rightarrow L \in \tilde{\pi}_1$,

analog $L \in \tilde{\pi}_2$. Deci $L \in \tilde{\pi}_1 \cap \tilde{\pi}_2$

Cum şi $V \in \tilde{\pi}_1 \cap \tilde{\pi}_2$, rezultă $\tilde{\pi}_1 \cap \tilde{\pi}_2 = VL$

In concluzie, locul geometric al punctelor egal depărtate de planele (VAB), (VBC) şi (VDC) este $VO \cup d_1 \cup d_2 \cup VL$.

II.Locul geometric al punctelor egal depărtate de planele (VAB) şi (VAD) fiind $(VAC) \cup \tilde{\pi}_3$, unde $\tilde{\pi}_3$ este planul perpendicular pe (VAC)

care trce prin VA rezultă că locul geometric al punctelor egal depărtate de planele (VAB), (VBC), (VCD) şi (VAD) este: $(VO \cup d_1 \cup d_2 \cup VL) \cap ((VAC) \cup \tilde{\pi}_3) = (VO \cap (VAC)) \cup (VO \cap \tilde{\pi}_3) \cup (d_1 \cap (VAC)) \cup (d_1 \cap \tilde{\pi}_3) \cup (d_2 \cap (VAC)) \cup (d_2 \cap \tilde{\pi}_3) \cup (VL \cap (VAC)) \cup (VL \cap \tilde{\pi}_3)$.

Să găsim aceste intersecţii:

Avem: 1) $VO \cap (VAC) = VO$ $(O \in AC, AC \in (VAC))$

2) $VO \cap \tilde{\pi}_3 = \{V\}$ $(O \in (VAC), (VAC) \cap \tilde{\pi}_3 = VA, O \notin VA$ şi deci $O \notin \tilde{\pi}_3 \Rightarrow VO \notin \tilde{\pi}_3)$

3) $d_1 = \tilde{\pi}_1 \cap (VBD)$, $BD \subset (VDB)$, $BD \parallel \tilde{\pi}_1 \Rightarrow d_1 \parallel BD$ şi cum $DB \perp (VAC) \Rightarrow d_1 \perp (VAC)$ deci $d_1 \not\subset (VAC)$ şi cum $V \in d_1 \Rightarrow d_1 \cap (VAC) = \{V\}$

4) $d_1 \perp (VAC)$, $V \in d_1 \cap \tilde{\pi}_3$, $\tilde{\pi}_3 \perp (VAC) \Rightarrow d_1 \subset \tilde{\pi}_3 \Rightarrow d_1 \cap \tilde{\pi}_3 = d_1$

5) $d_2 = (VAC) \cap \tilde{\pi}_2 \Rightarrow d_2 \subset (VAC) \Rightarrow d_2 \cap (VAC) = d_2$.

6) $d_2 = (VAC) \cap \tilde{\pi}_2$, $AC \subset (VAC)$; $AC \parallel \tilde{\pi}_2 \Rightarrow d_2 \parallel AC$ şi cum $AC \cap \tilde{\pi}_3 = \{A\} \Rightarrow$ $\Rightarrow d_2$ înteapă planul $\tilde{\pi}_3$ deci $d_2 \cap \tilde{\pi}_3 = \{V\}$ $(V \in d_2, V \in \tilde{\pi}_3)$.

7) $L \in \ell_1$, $\ell_1 \parallel AC \Rightarrow L \notin AC$.

Cum $L \in \ell_1$, $\ell_1 \subset (ABC) \Rightarrow L \in (ABC)$. $(ABC) \cap (VAC) = AC$ şi cum $L \in AC \Rightarrow L \notin (VAC)$

Deci $VL \not\subset (VAC)$ şi deci $VL \cap (VAC) = \{V\}$

8) $\ell_2 \parallel DB$, $DB \parallel d_1 \Rightarrow \ell_2 \parallel d_1$ şi cum $d_1 \subset \tilde{\pi}_3 \Rightarrow \ell_2 \parallel \tilde{\pi}_3$ (se arată că $\ell_2 \not\subset \tilde{\pi}_3$); $L \in \ell_2$, $\ell_2 \parallel \tilde{\pi}_3 \Rightarrow L \notin \tilde{\pi}_3 \Rightarrow VL \not\subset \tilde{\pi}_3$ şi cum $V \in \tilde{\pi}_3 \Rightarrow VL \cap \tilde{\pi}_3 = \{V\}$

In consecinţă locul geometric al punctelor egal depărtate de planele (VAB), (VBC), (VCD) şi (VAD) este: $VO \cup d_1 \cup d_2$.

III. Fie N mijlocul segmentului $|AD|$. Cum piramida este regulată, rezultă că $VN \subset VAD$ şi $ON \perp AD$. Deoarece $VN \subset (VAD)$, $ON \subset ABC$ şi $AD = (VAD) \cap (ABC)$, rezultă că $\widehat{VNO}$ este unghiul plan corespunzător unghiului diedru format de semiplanele ce conţin feţele $[VAD]$ şi $[ABCD]$. Fie $[NS$ bisectoarea lui $\widehat{VNO}$, $S \in |VO|$ (deoarece $[NS \subset$ int. $\widehat{VNO}$ şi conform teoremei transversalei, intersectează segmentul $|VO|$).

In consecinţă (DAS) este unul dintre planele bisectoare ale unghiurilor diedre formate de planele (VAD) şi (ABC). Fie $\tilde{\pi}_4$ al doilea plan bisector, adică $\tilde{\pi}_4$ este planul perpendicular pe (VAS) ce trece prin AD.

Aşadar, locul geometric al punctelor egal depărtate de (VAD) şi (ABC) este $(DAS) \cup \tilde{\pi}_4$.

In consecinţă, punctele egal depărtate de (VAB), (VBC), (VDA) şi (ABC) vor fi punctele intersecţiei:

$(VO \cup d_1 \cup d_2) \cap ((DAS) \cup \tilde{\pi}_4) = (VO \cap (DAS)) \cup (VO \cap \tilde{\pi}_4) \cup (d_1 \cap (DAS)) \cup (d_2 \cap (DAS)) \cup (d_1 \cap \tilde{\pi}_4) \cup (d_2 \cap \tilde{\pi}_4)$

Să găsim aceste intersecţii:

1. $S \in |VO| \subset VO$, $S \in (DAS) \Rightarrow VO \cap (DAS) = \{S\}$ (se arată că $VO \not\subset (VAS)$)

S-a arătat în etapa II că $d_1 \parallel BD$ şi $d_2 \parallel AC$ şi cum AC şi $BD \subset (ABC) \Rightarrow$ $\Rightarrow d_1 \parallel (ABC)$, $d_2 \parallel (ABC)$.

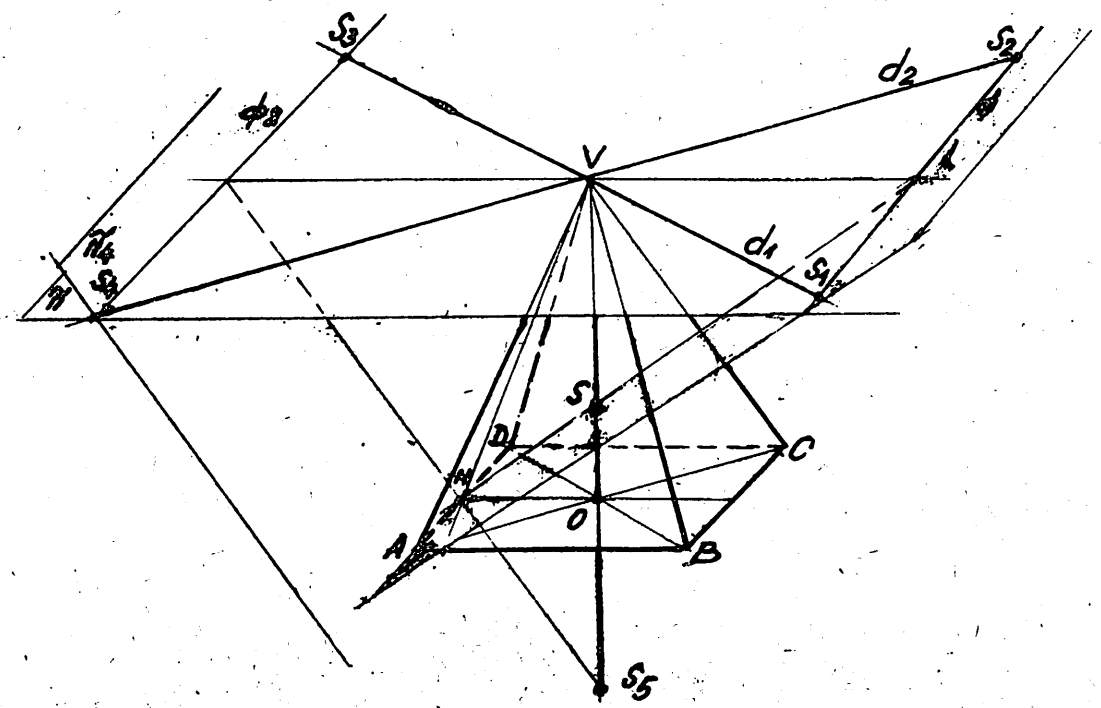
De asemenea s-a arăta că $V \in d_1$, $V \in d_2 \Rightarrow d_1 \cap d_2 = \{V\} \Rightarrow \exists \tilde{\pi} = (d_1 d_2)$ având proprietăţile: $V \in \tilde{\pi}$ şi $\tilde{\pi} \parallel (ABC)$ deoarece conţine două drepte concurente paralele cu (ABC).

2. Cum $\tilde{\gamma} \parallel (ABC)$ şi $(DAS) \cap (ABC) = AD \Rightarrow \exists (DAS) \cap \tilde{\gamma} = p_1$ şi $p_1 \parallel AD$.
Deoarece AD şi AC sînt concurente, rezultă p_1 şi d_1 concurente (ele fiind coplanare). Fie deci $\{S_1\} = d_1 \cap p_1$. Cum $p_1 \subset (DAS)$, rezultă $\{S_1\} = d_1 \cap (DAS)$.

3. Analog $d_2 \cap p_1 = \{S_2\} = d_2 \cap (DAS)$

4-5. Cum $\tilde{\gamma} \parallel (ABC)$ şi $(DAS) \cap (ABC) = AD \Rightarrow \exists p_2 = \tilde{\pi}_4 \cap \tilde{\gamma}$ şi $p_2 \parallel AD$. Deci $\exists \{S_3\} = p_2 \cap d_1$ şi $\{S_4\} = d_2 \cap p_2$ şi cum $p_2 \subset \tilde{\pi}_4 \Rightarrow \{S_3\} = d_1 \cap \tilde{\pi}_4$ şi $\{S_4\} = d_2 \cap \tilde{\pi}_4$

6. $VO \perp (ABC)$, $(ABC) \parallel \tilde{\gamma} \Rightarrow VO \perp \tilde{\gamma}$.
Cum $(DAS) \perp \tilde{\pi}_4$ şi $(DAS) \cap \tilde{\gamma} = p_1 \Rightarrow \tilde{\gamma} \not\perp \tilde{\pi}_4$ (altfel s-ar contrazice unicitatea planului perpendicular pe un plan dat ce trece printr-o dreaptă dată)
Deci $VO \perp \tilde{\gamma}$, $\tilde{\pi}_4 \not\perp \tilde{\gamma} \Rightarrow VO \parallel \tilde{\pi}_4$
Cum $V \notin \tilde{\pi}_4$ (altfel, $\tilde{\pi}_4 = (VAD)$) $\Rightarrow VO \not\subset \tilde{\pi}_4$ şi cum $VO \not\parallel \tilde{\pi}_4 \Rightarrow \exists \{S_5\} = VO \cap \tilde{\pi}_4$
In concluzie, există exact 6 puncte ($S\, S_1 S_2 S_3 S_4 S_5$) egal depărtate de toate planele: (VAB), (VBC), (VCD), (VDA) şi (ABC).
Fie $\tilde{\delta}$ planul de secţiune şi $[A'B'C'D']$ secţiunea făcută în piramidă. Conform ipotezei, $\tilde{\delta} \parallel (ABC)$.
După cum se ştie, locul geometric al punctelor egal depărtate de două plane paralele este un plan paralel cu acestea care trece prin mijlocul segmentului determinat de cele două plane paralele pe o perpendiculară comună.



Cum $VO \perp (ABC)$ și $(ABC) \parallel \gamma \Rightarrow VO \perp \gamma$ și fie $\{O'\} = VO \cap \gamma$.
Notăm cu $\widetilde{\Pi}_5$ planul paralel cu γ și cu (ABC) care trece prin mijlocul lui $|OO'|$, adică locul geometric al punctelor egal depărtate de γ și (ABC).

In consecință punctele egal depărtate de (VAB), (VBC), (VCD), (VDA) (ABC) și γ vor fi punctele intersecției:

$$\widetilde{\Pi}_5 \cap \{S, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$$

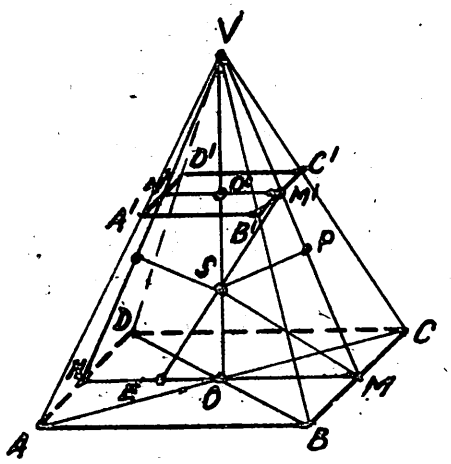
Deoarece $\widetilde{\Pi}_5 \parallel (ABC)$ și $(ABC) \parallel \gamma \Rightarrow \widetilde{\Pi}_5 \parallel \gamma$ ($\widetilde{\Pi}_5 \neq \gamma$ întrucît $V \in \gamma$ și $V \notin \widetilde{\Pi}_5$)
Cum $\{S_1, S_2, S_3, S_4\} \subset \gamma$, iar $\widetilde{\Pi}_5 \parallel \gamma \Rightarrow \{S_1, S_2, S_3, S_4\} \cap \widetilde{\Pi}_5 = \emptyset$
Să observăm că $O' \in |VO|$.
Intr-adevăr, $[A'B'C'D']$ fiind secțiunea făcută în piramidă de planul γ, avem $A' \in |VA|$. Adică $|VA| \cap \gamma = \{A'\} \neq \emptyset$.
Deci V și A sînt separate de γ.
Deoarece $|AO| \subset (ABC)$ și $\gamma \parallel (ABC) \Rightarrow |AO| \cap \gamma = \emptyset$. Deci A și O nu sînt separate de γ.
In consecință, V și O sînt separate de γ, adică $|VO| \cap \gamma \neq \emptyset$ și cum $\gamma \cap VO = \{O'\}$ iar $|VO| \subset VO$ rezultă $\gamma \cap |VO| = \{O'\}$ și deci $O' \in |VO|$.
Deoarece $O' \in |VO| \Rightarrow |OO'| \subset |VO|$ și deci mijlocul segmentului $|OO'|$, singurul punct comun al planului $\widetilde{\Pi}_5$ cu VO este conținut de segmentul $|VO|$.
$S_5 \in VO$. Să arătăm că $S_5 \notin |VO|$ și deci S_5 nu poate fi conținut de $\widetilde{\Pi}_5$. Intr-adevăr, $SO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$, $ON \perp AD$, $N \in AD$, $AD \subset (ABC) \Rightarrow SN \perp AD$ (conform teoremei celor trei perpendiculare)

$$(DAS) \perp \widetilde{\Pi}_4,\ (DAS) \cap \widetilde{\Pi}_4 = AD,\ SN \subset (DAS) \text{ și } SN \perp AD \Rightarrow SN \perp \widetilde{\Pi}_4.$$
$$N \in AD,\ AD \subset \widetilde{\Pi}_4 \Rightarrow N \in \widetilde{\Pi}_4 \text{ și cum } S_5 \in \widetilde{\Pi}_4 \Rightarrow NS_5 \subset \widetilde{\Pi}_4.$$

Așadar, $SN \perp NS_5$.
Cum triunghiul VNO este dreptunghic în $O \Rightarrow m(\widehat{VNO}) < 90$.
In planul (VNS), $m(\widehat{VNO}) < 90$, $m(\widehat{SNS_5}) = 90$, $|NS_5 \subset \text{int } \widehat{VNO}| \Rightarrow |NS_5 \not\subset \text{int } \widehat{VNO} \Rightarrow S_5 \notin |VO|$

Așadar $\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\} \cap \widetilde{\Pi}_5 = \emptyset$ și deci, există un punct (și numai unul) egal depărtat de planele (VAB), (VAD), (VBC), (VCD), (ABC), (A'B'C') = γ, dacă și numai dacă $S \in \widetilde{\Pi}_5$. Acest lucru este posibil deoarece $S \in |VO|$.
Din cele arătate mai sus, putem afirma că există un punct egal depărtat de cele 6 fețe ale trunchiului de piramidă dacă și numai dacă S este mijlocul segmentului $|OO'|$. Să cercetăm această situație:
M mijlocul segmentului $|BC| \Rightarrow OM \perp BC$, $VM \perp BC \Rightarrow BC \perp (VOM)$
Cum $BC \subset (VBC)$ și $BC \perp (VOM) \Rightarrow (VBC) \perp (VOM)$, iar $(VBC) \cap (VOM) = VM$
Fie $SP \perp VM$, $P \in VM$. Rezultă deci că $SP \perp (VBC)$. Deci $\|SP\| = d(S, (VBC))$. Cum $S \in VO$, iar VO face parte din locul geometric al punctelor egal depărtate de (VAB), (VBC), (VCD) și (VAD) avem că

$$\|SP\| = d(S, (VBC)) = d(S, (VAB)) = d(S, (VCD)) = d(S, (VDA))$$



In consecinţă, S egal depărtat de feţele trunchiului $\Leftrightarrow \|SP\| = \|SO\| = \|SO'\|$ (A)
Cum triunghiurile $SO'M'$, SPM' şi SOM, SPM sînt dreptunghice şi au $|SM'| \equiv |SM'|$, respectiv $|SM| \equiv |SM|$, condiţia (1) este echivalentă cu:

$\Delta SOM' \equiv \Delta SPM'$ şi $\Delta SOM \equiv \Delta SPM$ (1')

condiţie echivalentă cu:

$\widehat{O'SM'} \equiv \widehat{M'SP}$ şi $\widehat{OSM} \equiv \widehat{MSP}$ (2)

Conform axiomei de construcţie a unghiurilor, cum $\widehat{O'SM'}$ şi $\widehat{M'SP}$ au o latură comună, iar $|SO' \neq SP$ ele pot fi congruente $\Leftrightarrow$ $|SO'$ şi $|SP$ sînt în semiplane opuse faţă de SM'.
Mai mult, cum $m(\widehat{O'SM'}) + m(\widehat{M'SP}) < 180^\circ$ (ele fiind unghiuri ascuţite în triunghiurile dreptunghice $SO'M$ şi $SM'P$ rezultă că

$|SM' \subset int\,\widehat{O'SP}$

Analog, $|SM \subset int\,\widehat{OSP}$. Şi deci condiţia (2) este echivalentă cu: [SM' bisectoarea lui $\widehat{O'SP}$ şi [SM bisectoarea lui $\widehat{OSP}$ (3)
Deoarece $S \in |OO'| \Rightarrow |SO$ şi $|SO'$ semidrepte opuse şi deci $m(\widehat{O'SP}) + m(\widehat{PSO}) = 180$ adică $\widehat{O'SP}$ şi $\widehat{PSO}$ sînt unghiuri adiacente suplementare. Atunci din (3) $\Rightarrow SM' \perp SM$ şi deci triunghiul MSN' este dreptunghic în S.
$SP \perp MM'$, $P \in MM'$ rezultă conform teoremei înălţimii:

$$\|SP\|^2 = \|M'P\| \cdot \|PM\|$$

Din (1') $\Rightarrow \|M'P\| = \|O'M'\| = \frac{1}{2}\|A'B'\|$ şi $\|PM\| = \|OM\| = \frac{1}{2}\|AB\|$
şi cum $\|SP\| = \|SO\| = \frac{1}{2}\|OO'\|$ obţinem:

$$\|OO'\|^2 = \|AB\| \cdot \|A'B'\|$$

Aşadar, dacă S este egal depărtat de feţele trunchiului de piramidă, a rezultat cu necesitate $\|OO'\|^2 = \|AB\| \cdot \|A'B'\|$
Reciproc, fie $\|OO'\|^2 = \|AB\| \cdot \|A'B'\|$ şi S mijlocul lui $|OO'|$.
Fie $E \in MN$ cu $O \in |EM|$ şi $|OE| \equiv |O'M'|$.
Întrucît triunghiurile dreptunghice SOE şi SO'M' au $|OE| \equiv |O'M'|$ şi $|SO| \equiv |SO'| \Rightarrow \Delta SOE \equiv SO'M'$ şi deci $\widehat{ESO} \equiv \widehat{MSO'}$.
Cum $S \in |OO'|$ semidreptele $|SO, |SO'$ sînt opuse şi conform teoremei reciproce a unghiurilor opuse la vîrf, $|SE$ şi $|SM'$ opuse, deci $S \in |EM'|$. Cum $|OE| \equiv |O'M'| \Rightarrow \|OE\| = \frac{1}{2}\|A'B'\|$; $\|OM\| = \frac{1}{2}\|AB\| \Rightarrow$
$\Rightarrow \|OE\| \cdot \|OM\| = \frac{1}{4}\|A'B'\| \cdot \|AB\| = \frac{\|OO'\|^2}{4} = \left(\frac{\|OO'\|}{2}\right)^2 = \|SO\|^2$.
Deoarece SO este înălţime în SEM şi $\|SO\|^2 = \|OE\| \cdot \|OM\| \Rightarrow SEM$ este ~~triunghi~~ dreptunghic în S, adică $SM \perp SE$. Cum $SE = EM' = SM'$, rezultă că SMM' este triunghi dreptunghic în S ($SM \perp SM'$).
Dar $SM \perp EM' \Rightarrow SM$ înălţime în EMM'.
Din $\Delta SOE \equiv \Delta SO'M' \Rightarrow |SE| \equiv |SM'|$ şi deci SM mediană în EMM'.

In consecinţă EMM' este isoscel şi [MS este bisectoarea lui M'ME.

Aşadar: $S\hat{M}O \equiv S\hat{M}P$ (deoarece $S\hat{M}O \equiv S\hat{M}E$ întrucât $O \in |EM| \Rightarrow |MO| \equiv |ME|$ iar $SP \perp MM', P \in MM'$ şi SMM' triunghi dreptunghic $\Rightarrow$

$\Rightarrow P \in |MM'| \Rightarrow |MP| \equiv |MM' \Rightarrow S\hat{M}M' \equiv S\hat{M}P$)

In consecinţă $\triangle SMO \equiv \triangle SMP$ (fiind dreptunghice, prin cazul I.U.)

Rezultă deci $\|PM\| = \|OM\| = \frac{1}{2}\|AB\|$.

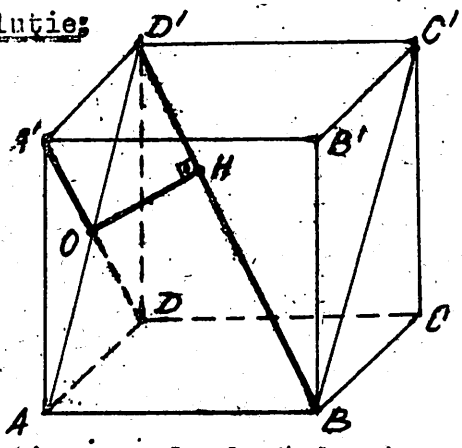
EMM' isoscel, $\Rightarrow |EM| \equiv |MM'|$ şi cum $O \in |EM|, P \in |MM'|, |OM| \equiv |MP|$ rezultă $\|PM'\| = \|OE\| = \frac{1}{2}\|A'B'\|$ (conform teoremei de adunare şi scădere a segmentelor).

In triunghiul dreptunghic M'SM, conform teoremei înălţimii $\|SP\|^2 = \|M'P\| \cdot \|PM\| = \|OM\| \cdot \|OE\|$. Deci $\|SP\| = \|SO\| = \|SO'\|$, ceea ce implică S egal depărtat de feţele trunchiului de piramidă.

7/

Lungimea muchiilor unui cub este a. Să se afle distanţa dintre o diagonală a cubului şi o diagonală a feţelor laterale cu care nu se intersectează.

Soluţie:



Considerăm cubul [ABCDA'B'C'D'] diagonala [BD'] a cubului şi diagonala [A'D] a feţei [ADD'A']. Intr-adevăr, cele două diagonale nu se intersectează deoarece: $[A'D] \subset (AA'D)$, $[BD'] \cap (AA'D) = \{D\}$ şi $D' \notin [A'D]$

Distanţa dintre dreptele A'D şi BD' este lungimea segmentului determinat de punctele de intersecţie cu cele două drepte a perpendicularei lor comune.

Deoarece [ABCDA'B'C'D'] este cub, AA' $\perp$ (ABC) şi cum $AB \subset (ABC)$ rezultă că $AA' \perp AB$.

De asemenea, ABCD fiind pătrat, $AB \perp AD$ şi cum $AD \cap AA' = \{A\}$, rezultă că $AB \perp (AA'D)$. Cum $A'D \subset (AA'D)$, rezultă că $AB \perp A'D$.

Deoarece [ABCDA'B'C'D'] este cub, ADD'A' este pătrat şi deci $A'D \perp AD'$.

Cum $AB \cap AD' = \{A\}$, rezultă deci că $A'D \perp (ABD')$.

Considerînd, în planul (ABD'), $OH \perp BD'$, unde $\{O\} = A'D \cap HD'$ şi $H \in BD'$, obţinem perpendiculara comună.

Intr-adevăr, $O \in AD'$ iar $AD' \subset (ABD')$. Deci $O \in (HBD')$, $H \in BD'$ şi $BD' \subset (ABD') \Rightarrow H \in (ABD')$, aşadar $OH \subset (ABD')$ şi cum $A'D \perp (HBD')$,

rezultă că $OH \perp A'D$.

Deci $OH \perp AD$, $O \in AD$, $OH \perp BD'$, $H \in BD'$ şi în consecinţă $d(AD, BD') = \|OH\|$

Am arătat că $AB \perp (AA'D)$ şi cum $AD' \subset (AA'D)$ rezultă că $AB \perp AD'$ şi deci ABD' este triunghi dreptunghic.

$OH \perp BD'$, $H \in BD' \Rightarrow \widehat{OHD'} \in 90^\circ$ şi deci şi OHO' este triunghi dreptunghic.

ABCD fiind pătrat deci patrulater convex, rezultă că $|AO| \cap |AD| = \{O\}$ şi deci $O \in |AD|$. Atunci $|BO| \subset int\ \widehat{ABD'}$ şi deci $\widehat{OBD'} < \widehat{ABD'}$.

ABD' fiind dreptunghic în A, $m(\widehat{ABD'}) < 90^\circ$ şi deci $m(\widehat{OBD'}) < 90^\circ$.

De asemenea $m(\widehat{AD'B}) < 90^\circ$ (ABD' fiind triunghi dreptunghic în A).

Cum $O \in |AD'|$, iar $|AD'| \subset |D'A|$, rezultă că $|D'A| = |D'O|$ şi deci $\widehat{AD'B} = \widehat{OD'B}$. In consecinţă $m(\widehat{OD'B}) < 90^\circ$.

Aşadar, în triunghiul BOD', $m(\widehat{OD'B}) < 90^\circ$, şi cum $OH \perp BD'$, $H \in BD'$, rezultă că $H \in |BD'|$. Cum $|BD'| \subset |D'B|$, rezultă că $H \in |D'B|$ şi deci $|D'B| = |D'H|$. Deoarece şi $|D'A| = |D'O|$ rezultă că $\widehat{AD'B} = \widehat{OD'H}$ şi cum $\widehat{D'AB} \equiv \widehat{OHD'} \in 90^\circ$ rezultă că $\Delta D'AB \sim \Delta D'HO$.

In consecinţă:

$$\frac{\|OH\|}{\|AB\|} = \frac{\|D'O\|}{\|D'B\|}$$

[ABCDA'B'C'D'] fiind cub şi $\|AB\| = \|AA'\| = a$ rezultă că $\|BD'\| = a\sqrt{3}$ şi ADD'A' pătrat cu $\|AA'\| = a$. Atunci:

$$\|D'O\| = \frac{1}{2}\|D'A\| = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.$$

Deci:

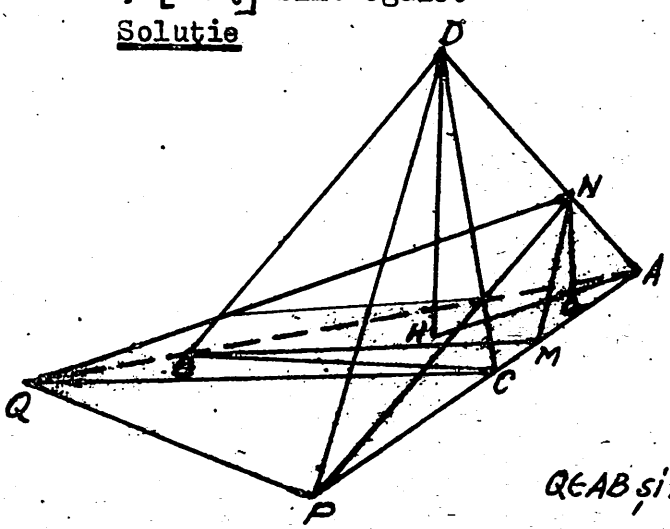
$$\|OH\| = \frac{\|AB\| \cdot \|D'O\|}{\|D'B\|} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

După cum am arătat mai sus, $d(A'D, BD') = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

8/

Se consideră tetraedrul [ABCD], punctele $M \in |AD|$ şi $N \in |AD|$ şi se duce prin C paralela la BM care taie pe AB în Q şi prin D paralela la MN care taie pe AC în P. Să se arate că volumele tetraedrelor [ABCD] şi [ANPQ] sînt egale.

Soluţie



Fie $DH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$;

atunci: $V[ABCD] = \frac{1}{3}\mathcal{C}[ABC] \cdot \|DH\|$;

notînd cu $\alpha = m(\widehat{BAC})$,

putem exprima

$$\mathcal{C}[ABC] = \frac{1}{2}\|AB\| \cdot \|AC\| \cdot \sin\alpha$$

In consecinţă

$$V[ABCD] = \frac{1}{6}\|AB\| \cdot \|AC\| \cdot \|DH\| \cdot \sin\alpha \quad (1)$$

Fie $NO \perp (AQP)$, $O \in (AQP)$; atunci

$$V[ANPQ] = \frac{1}{3}\mathcal{C}[AQP] \cdot \|NO\| \quad (2)$$

$Q \in AB$ şi $AB \subset (ABC)$, iar $P \in AC$ şi $AC \subset (ABC)$.

Deci P şi Q aparţin planului (ABC) ceea ce implică $(ABC)=(APQ)$
Cum $NO\perp(APQ), O\in(APQ)$ rezultă că $NO\perp(ABC)$ şi $O\in(ABC)$.
Dar şi $DH\perp(ABC)$, deci $NO\parallel DH$
$N\in|AD|$ şi $|AD|\subset(DHA)$. Deci $N\in(DHA)$ şi cum $NO\parallel DH$, iar $DH\subset(DHA)$, rezultă că $NO\subset(DHA)$. Deci $O\in(DHA)$ şi cum $O\in(ABC)\Rightarrow O\in(ABC)\cap(DHA)$
Dar $H\in(ABC)$ şi deci $(ABC)\cap(DHA)=AH$ In consecinţă $O\in AH$
Din $O\in AH, N\in AD$ şi $NO\parallel DH$, conform teoremei fundamentale a asemănării, rezultă că $\triangle ANO\sim\triangle ADH$ şi deci:

$$\frac{\|NO\|}{\|DH\|}=\frac{\|AN\|}{\|AD\|} \quad \text{de unde} \quad \|NO\|=\frac{\|AN\|\cdot\|DH\|}{\|AD\|} \qquad (3)$$

$M\in|AC|, M\in BM\Rightarrow|AC|\cap BM\neq\phi$ şi deci A şi C sînt separate de BM (în planul (ABC)) $BM\parallel CQ\Rightarrow BM\cap CQ=\phi$ şi cum $|CQ|\subset CQ$, rezultă că $BM\cap|CQ|=\phi$ Deci C şi Q nu sînt separate de BM(în planul (ABC)). In consecinţă A şi Q sînt separate de BM şi deci $|AQ|\cap BM\neq\phi$. Cum $|AQ|\subset AQ$ şi $AQ\cap BM=\{B\}$ $(AQ=AB)$ rezultă că $|AQ|\cap BM=\{B\}$ şi deci $B\in|AQ|$
Dar $|AQ|\subset|AQ$ şi deci $B\in|AQ$, de unde rezultă că $[AQ=[AB$.
Analog $M\in|AP|$ şi cum $|AP|\subset|AP$, rezultă $M\in|AP$ şi deci $[AP=[AM$.
Dar $M\in|AC|, |AC|\subset|AC$ şi deci $M\in|AC$. Aşadar $[AC=[AP$
Prin urmare $[AM=[AC$ şi cum $[AQ=[AB$, rezultă că $\hat{QAP}=\hat{BAC}$.
Deci $\measuredangle(\hat{QAP})=\theta$. Putem exprima atunci:

$$\mathcal{G}[AQP]=\frac{1}{2}\|AQ\|\cdot\|AP\|\sin\theta \qquad (4)$$

Din $M\in AC, Q\in AB$ (deci $B\in AQ$) şi $BM\parallel QC$, conform teoremei fundamentale a asemănării rezultă $\triangle AQC\sim\triangle ABM$ şi deci:

$$\frac{\|AQ\|}{\|AB\|}=\frac{\|AC\|}{\|AM\|},$$

de unde: $\|AQ\|=\frac{\|AB\|\cdot\|AC\|}{\|AM\|}$ (5)

Din $N\in AD, M\in AP$ $(AP=AC)$ şi $MN\parallel DP$, conform teoremei fundamentale a asemănării rezultă $\triangle ANM\sim\triangle ADP$ şi deci: $\frac{\|AP\|}{\|AM\|}=\frac{\|AD\|}{\|AN\|}$
De unde: $\|AP\|=\frac{\|AM\|\cdot\|AD\|}{\|AN\|}$ (6)

Din (4), (5) şi (6) rezultă: $\mathcal{G}[AQP]=\frac{1}{2}\cdot\frac{\|AB\|\cdot\|AC\|}{\|AM\|}\cdot\frac{\|AM\|\cdot\|AD\|}{\|AN\|}\sin\theta$

Impreună cu (3), înlocuind în (2) obţinem:

$$\mathcal{V}[ANPQ]=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\|AB\|\cdot\|AC\|\cdot\|AD\|}{\|AN\|}\cdot\frac{\|AN\|\cdot\|DH\|}{\|AD\|}\sin\theta$$

Adică:

$$\mathcal{V}[ANPQ]=\frac{1}{6}\|AB\|\cdot\|AC\|\cdot\|DH\|\sin\theta$$

Deci, în conformitate cu (1), $\mathcal{V}[ANPQ]=\mathcal{V}[ABCD]$

9/

Fie [VABCDEF] o piramidă hexagonală regulată cu muchia bazei de lungime a şi înălţimea piramidei ||VO|| = a. Pe muchia [VC] se consideră un punct oarecare M. Planul (ABM) intersectează muchiile [VD], [VE] şi [VF] respectiv în N, P şi Q. Să se arate că:

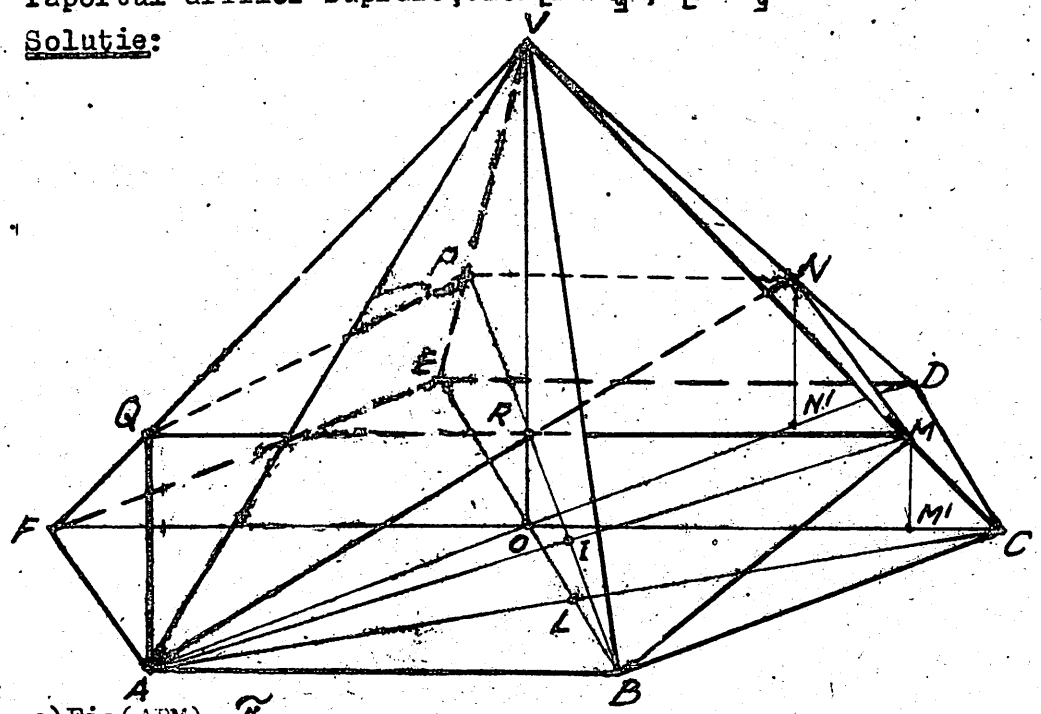
a) Dreptele AN, BP, MQ şi VO sînt concurente;

b) Patrulaterele ABMQ şi MNPQ sînt trapeze isoscele;

c) Să se afle locul geometric al punctului de intersecţie a dreptelor AM şi BP cînd M descrie muchia [VC].

d) In cazul cînd M este mijlocul segmentului [VC] să se afle raportul ariilor suprafeţelor [MNPQ] şi [ABMQ].

<u>Soluţie:</u>



a) Fie $(ABM) = \tilde{\pi}$

Cum [VABCDEF] este piramidă hexagonală regulată ABCDEF este hexagon regulat şi în consecinţă $AB \parallel FC$. Deoarece $FC \subset (VFC)$ rezultă că $AB \parallel (VFC)$. In consecinţă $AB \cap (VFC) = \phi$ şi cum $AB \subset \tilde{\pi}$, rezultă că $(VFC) \neq \tilde{\pi}$.

$M \in VC$, $VC \subset (VFC) \Rightarrow M \in (VFC)$. Cum $M \in \tilde{\pi}$, rezultă că $(VFC) \cap \tilde{\pi} \neq \phi$ şi conform axiomei I_6, intersecţia lor este o dreaptă.

Conform ipotezei $\tilde{\pi} \cap [VF] = \{Q\}$. Deci $Q \in \tilde{\pi}$ şi $Q \in [VF]$ care este conţinut în (VFC). Aşadar, $Q \in \tilde{\pi} \cap (VFC)$ şi cum $M \in (VFC) \cap \tilde{\pi}$, rezultă că $(VFC) \cap \tilde{\pi} = QM$ în cazul $M \neq Q$.

Deoarece $M \in [VC]$, $[VC] \subset VC$, iar $Q \in [VF]$, $[VF] \subset VF$ şi

$$VC \cap VF = \{V\}, \quad M = Q \Leftrightarrow M = Q = V$$

Aşadar în cazul $M \neq V$, $Q \neq V$, $(VFC) \cap \tilde{\pi} = QM$ şi deoarece $AB \subset \tilde{\pi}$ şi $AB \parallel (VFC)$ rezultă că $MQ \parallel AB$.

Cum $AB \parallel FC$ şi $AB \parallel MQ$, rezultă că $MQ = FC$ sau $MQ \parallel FC$ (1)

Dar $MQ \cap VC = \{M\}$, $FC \cap VC = \{C\}$. In consecinţă, $MQ = FC \Leftrightarrow M = C$, iar în acest caz planele (ABM), şi (ABC), conţinînd punctele necoliniare A, B şi C=M s-ar confunda, iar N, P, Q ar fi respectiv D, E, F şi problema devine neinteresantă.

Aşadar, dacă $M \neq C \Rightarrow MQ \neq FC$ şi din (1) $\Rightarrow MQ \parallel FC$.

$MQ \parallel FC \Rightarrow MQ \cap FC = \phi$ şi cum $|FC| \subset FC$ rezultă $|FC| \cap MQ = \phi$.

Deci, în planul (VFC) punctele F şi C nu sînt separate de MQ. In consecinţă notînd cu d = QM, $|FC| \subset \mathcal{d}_F$ ($\mathcal{d}_F$ fiind semiplanul din (VFC) limitat de QM care conţine pe F).

[VABCDEF] fiind piramidă hexagonală regulată şi VO fiind înălţimea ei, rezultă că O este centrul hexagonului regulat [ABCDEF] şi în consecinţă FC fiind diametru în cercul circumscris hexagonului, $O \in |FC|$.

$O \in |FC|$ şi $|FC| \subset \mathcal{d}_F \Rightarrow O \in \mathcal{d}_F$

$Q \in |VF|$, $Q \in QM = d \Rightarrow QM \cap |VF| \neq \phi \Rightarrow V$ şi F separate de QM şi deci $V \notin \mathcal{d}_F$

Cum $O \in \mathcal{d}_F$ şi $V \notin \mathcal{d}_F$ rezultă că $|VO| \cap d \neq \phi$ (teorema de separare cls.a IX-a).

Fie $\{R\} = |VO| \cap QM$. Deci $R \in QM$ şi cum $QM \subset \pi$, rezultă că $R \in \pi$. Dar $R \in |VO|$, $O \in |AD|$, $|AD| \subset (VAD)$ şi deci $O \in (VAD)$.

In consecinţă $VO \subset (VAD)$ şi deci şi $R \in (VAD)$, $R \in \pi$ şi $R \in (VAD)$; $A \in \pi$ şi $A \in (VAD)$ rezultă $\pi \cap (VAD) = AR$.

In planul (VAD), $R \in |VO|$. Dar $O \in |AD|$ şi $|AD| \subset |AD \Rightarrow |VO| \subset int\,\hat{VAD}$.

In consecinţă $R \in int.\,\hat{VAD}$ şi deci $|AR \subset int.\,\hat{VAD}$. Conform teoremei transversalei $|AR \cap |VD| \neq \phi$. Conform ipotezei $\pi \cap |VD| = \{N\}$.

Deci $N \in \pi$ şi $N \in |VD|$. Cum $|VD| \subset (VAD) \Rightarrow N \in (VAD)$

şi în consecinţă $N \in \pi \cap (VAD) = AR$. Deci $N \in AR$, $N \in |VD|$

şi cum $|AR \subset AR \Rightarrow |AR \cap |VO| = \{N\}$. Deci $N \in AR \Rightarrow AR = AN \Rightarrow R \in AN$.

Analog $\pi \cap (VEB) = BR$ şi $BR \cap |VE| = \{M\}$.

Deci $M \in BR \Rightarrow R \in BM$. Aşadar $R \in QM$, $R \in AN$, $R \in BM$, $R \in VO$.

Deci dreptele AN, BM, MQ şi VO sînt concurente.

b) Am arătat la punctul a) că $MQ \parallel AB$. Deci patrulaterul ABMQ este trapez sau paralelogram. (Intr-adevăr ABMQ este patrulater deoarece. $MQ \parallel AB \Rightarrow |MQ| \cap |AB| = \phi$, iar $|AQ| \cap |BM| = \phi$ deoarece $|AQ| \subset [VAF]$, $|BM| \subset [VBC]$, $[VAF] \cap [VBC] = \{V\}$, iar $V \notin |AQ|$ şi $V \notin |BM|$).

Am arătat că $MQ \parallel FC$. Deci $\Delta VMQ \sim \Delta VCF$ şi în consecinţă: $\frac{\|MQ\|}{\|FC\|} = \frac{\|VM\|}{\|VC\|}$

Deoarece $\|FC\| = 2r$, $\|AB\| = r$ (r = raza circumscrisă hexagon ABCDEF) rezultă $\|FC\| = 2\|AB\|$ şi deci: $\frac{\|MQ\|}{2\|AB\|} = \frac{\|VM\|}{\|VC\|}$. Aşadar $\|MQ\| = \|AB\| \Leftrightarrow \frac{\|VM\|}{\|VC\|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\|VM\| = \|VC\| \Leftrightarrow M$ mijlocul lui $[VC]$.

In concluzie, dacă M este mijlocul lui [VC], $\|MQ\| = \|AB\|$ şi deci ABMQ este paralelogram, iar dacă M nu este mijlocul lui [VC], $|MQ| \neq |AB|$ şi deci ABMQ este trapez. [VABCDEF] fiind piramidă hexagonală regulată, $|VC| = |VF|$ deci ΔVCF este isoscel şi cum $\Delta VMQ \sim \Delta VCF \Rightarrow \Delta VMQ$ isoscel, deci $|VM| \equiv |VQ|$. In consecinţă, deoarece $M \in [VC]$, $Q \in [VF]$, rezultă $|MC| \equiv |AF|$.

[VABCDEF] piramidă regulată $\Rightarrow \Delta VAF \equiv \Delta VCB \Rightarrow \widehat{VCB} \equiv \widehat{VFA}$
Cum $M \in |VC|, |VC| \subset |CV \Rightarrow |CV| = |CM \Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{VCA}$ Analog $\widehat{QFA} = \widehat{VFA}$ şi deci $\widehat{MCB} \equiv \widehat{QFA}$.
Aşadar, avînd $\widehat{MCB} \equiv \widehat{QFA}$, $|MC| \equiv |AF|$ şi $|BC| \equiv |AF|$, rezultă că $\Delta MCB \equiv \Delta QFA$ şi deci $|MB| \equiv |FA|$.
Deci în cazul în care ABMQ este trapez, cum $|MB| \equiv |FA|$, rezultă ABMQ trapez isoscel.
ABCDEF fiind hexagon regulat $\Rightarrow ED \parallel AB$ şi cum $AB \subset \mathcal{T}$ rezultă $ED \parallel \mathcal{T}$. $ED \subset (VED)$, iar $(VED) \cap \mathcal{T} = PN$. In consecinţă, cum $ED \parallel \mathcal{T}$, rezultă $PN \parallel ED$. $PN \parallel ED, ED \parallel AB, AB \parallel MQ \Rightarrow PN \parallel MQ$ (deoarece $PN \neq MQ$). In consecinţă $|PN| \cap |MQ| = \phi$.
Cum $[PQ] \subset [VEF]$, $[MN] \subset [VDC]$, iar $[VEF] \cap [VCD] = \{V\}$, rezultă că $[PQ] \cap [MN] \neq \phi \Leftrightarrow [PQ] \cap [MN] = \{V\}$ $P = N = V$
Cum $P \in \mathcal{T}$, $P = V \Leftrightarrow V \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{T} = (VAB)$. In acest caz problema nu mai are sens
Deci $[PQ] \cap [MN] = \phi$ şi cum $[MQ] \cap [PN] = \phi$ rezultă MNPQ patrulater. Cum $PN \parallel MQ$ rezultă MNPQ paralelogram sau trapez.

$$PN \parallel ED \Rightarrow \Delta VPN \sim \Delta VED \Rightarrow \frac{\|PN\|}{\|ED\|} = \frac{\|VN\|}{\|VD\|} \Rightarrow \|PN\| = \frac{\|VN\| \cdot \|ED\|}{\|VD\|} = \frac{\|VN\| \cdot \|AB\|}{\|VD\|}$$

$(|AB| = |ED|)$

Am arătat că $\frac{\|MQ\|}{2\|AB\|} = \frac{\|VM\|}{\|VC\|} \Rightarrow \|MQ\| = \frac{2\|AB\| \cdot \|VM\|}{\|VC\|}$.

Aşadar $|PN| \equiv |MQ| \Leftrightarrow \frac{\|VN\| \cdot \|AB\|}{\|VD\|} = \frac{2\|AB\| \cdot \|VM\|}{\|VC\|}$ şi cum $|VD| \equiv |VC|$, obţinem $|PN| \equiv |MQ| \Leftrightarrow \|VN\| = 2\|VM\|$.
Vom arăta însă, că această relaţie nu este posibilă.
Să considerăm $N' = pr_{(ABC)} N$ şi $M' = pr_{(ABC)} M$.
Deoarece $O = pr_{(ABC)} V$, $D \in (ABC) \Rightarrow |DO| = pr_{(ABC)} |VD|$; $|CO| = pr_{(ABC)} |VC|$ şi cum $M \in |VC|$, $N \in |VD| \Rightarrow N' \in |OD|$, $M' \in |OC|$.
$NN' \perp (ABC)$, $MM' \perp (ABC)$, $VO \perp (ABC) \Rightarrow MM' \parallel VO \parallel NN'$ şi deci $\Delta VOC \sim \Delta MM'C$, $\Delta VOD \sim \Delta NN'D$
Deci:

$$\frac{\|NN'\|}{\|VO\|} = \frac{\|ND\|}{\|VD\|} = 1 - \frac{\|VN\|}{\|VD\|}$$

$$\frac{\|MM'\|}{\|VO\|} = \frac{\|MC\|}{\|VC\|} = 1 - \frac{\|VM\|}{\|VC\|}$$

In planul (VFC), $MQ \parallel FC$, $MM' \perp FC$, $RO \perp FC \Rightarrow \|MM'\| = \|RO\|$
In planul (VAD), $NN' \perp AD$, $RO \perp AD \Rightarrow NN' \parallel RO \Rightarrow \Delta ARO \sim \Delta ANN' \Rightarrow \frac{\|NN'\|}{\|RO\|} = \frac{\|AN'\|}{\|AO\|}$
Cum $N' \in |OD|$ şi $D \in |AD| \Rightarrow O \in |AN'|$ şi deci $\|AO\| < \|AN'\|$.
In consecinţă $\|NN'\| > \|RO\|$. Aşadar $\|NN'\| > \|MM'\|$
şi deci $1 - \frac{\|VN\|}{\|VD\|} > 1 - \frac{\|MV\|}{\|VC\|}$ şi cum $\|VD\| = \|VC\| \Rightarrow \|VN\| < \|VM\|$, deci $\|VN\| \neq 2\|VM\|$.
Aşadar $|PN| \not\equiv |MQ|$ şi deci MNPQ este trapez.
$PN \parallel ED \Rightarrow \Delta VPN \sim \Delta VED$ şi cum VED este isoscel $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ VPN isoscel $\Rightarrow |VP| \equiv |VN|$
Am arătat că $|VM| \equiv |VQ|$ şi cum şi $\Delta VDC \equiv \Delta VEF$ avem

$\widehat{NVM} \equiv \widehat{PVQ}$ ($\widehat{NVM} = \widehat{DVC}$ şi $\widehat{PVQ} = \widehat{EVF}$).

In consecinţă: $\Delta NVM \equiv PVQ$ şi deci $|MN| \equiv |PQ|$.

Rezultă deci că MNPQ este trapez isoscel.

c) $AM \subset (VAC)$ şi $BP \subset (VBE)$

Fie $\{I\} = AM \cap BP$. In consecinţă $I \in (VAC) \cap (VBE) = VL$, unde $\{L\} = AC \cap BE$

In planul (VAC), $M \in |VC| \Rightarrow |AM \subset int.\widehat{VAC}$ şi conform teoremei transversale

$$\left.\begin{array}{l} (L \in |AC|) \Rightarrow |AM \cap |VL| \neq \phi \\ I \in AM,\ I \in VL \Rightarrow AM \cap VL = \{I\} \\ |AM \subset AM,\ |VL| \subset VL \end{array}\right| \Rightarrow |AM \cap |VL| = \{I\} \Rightarrow I \in |VL|$$

Aşadar $\forall$ punct I al locului geometric aparţine segmentului $|VI|$.

Reciproc, fie $\forall I_1 \in |VL|$ cum $|VL| \subset int.\widehat{VAC} \Rightarrow |AI_1 \subset int\,\widehat{VAC}$

şi conform teoremei transversalei $|AI_1 \cap |VC| \neq \phi$. Fie $\{M_1\} = |AI_1 \cap |VC|$.

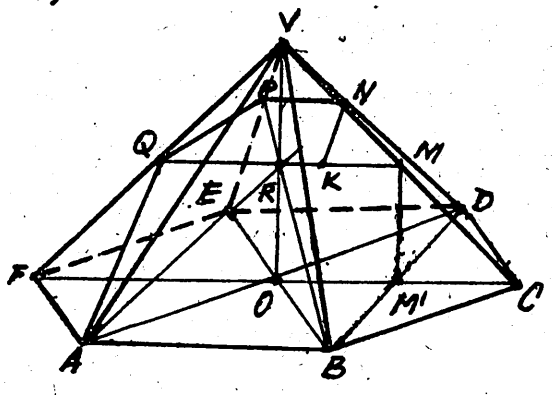
Considerînd planul de secţiune $\widetilde{\pi}_1 = (ABM_1)$ obţinem $\{P_1\} = \widetilde{\pi}_1 \cap |VE|$, deci $|BP_1 \subset int.\widehat{VBE}$ şi conform aceleiaşi teoreme $|BP_1 \cap |VL| \neq \phi$ ($L \in |BE| \subset |BE$. Cum $I_1 \in AM_1 \subset \widetilde{\pi}_1$ şi $I_1 \in |VL| \Rightarrow |VL| \cap \widetilde{\pi}_1 = \{I_1\}$

şi deoarece $|BP_1 \subset \widetilde{\pi}_1$ rezultă $|BP_1 \cap |VL| = \{I_1\}$.

Deci $I_1 \in B\widetilde{\pi}_1$, $I_1 \in AM_1$ şi deci $\{I_1\} = AM_1 \cap BP_1$; aşadar I_1 este punct al locului geometric, $\forall I_1 \in |VL|$.

In consecinţă locul geometric este segmentul $|VL|$.

d)



$M' \in pr_{(ABC)}M \Rightarrow MM' \parallel VO$ şi cum M este mijlocul lui $|VC|$ rezultă că M' este mijlocul lui $|OC|$. ABCDEF fiind hexagon regulat, rezultă că $M' \in BD$ şi cum $BD \perp AB \Rightarrow$ $\Rightarrow M'B \perp AB$. Deci $MM' \perp (ABC)$, $M' \in (ABC)$, $MB \perp AB$ şi $AB \subset (ABC) \Rightarrow MB \perp AB$ (conform teoremei celor trei perpendiculare)

Am arătat la punctul b) că în cazul în care M este mijlocul lui $|VC|$, ABMQ este paralelogram şi cum $MB \perp AB$, rezultă că, ABMQ este dreptunghic. Deci $\mathcal{G}[ABMQ] = \|AB\| \cdot \|MB\| = a \cdot \|AQ\|$.

Fie $NK \perp QM$, $K \in QM$. Cum $MNPQ$ este trapez, avem:

$$\mathcal{G}[MNPQ] = \frac{1}{2}(\|MQ\| + \|PN\|) \cdot \|NK\| = \frac{1}{2}(a + \|PN\|) \cdot \|NK\|$$

Aşadar $$\frac{\mathcal{G}[MNPQ]}{\mathcal{G}[ABMQ]} = \frac{\frac{1}{2}(a + \|PN\|) \cdot \|NK\|}{a \cdot \|AQ\|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\|NK\|}{\|AQ\|} \cdot \left(1 + \frac{\|PN\|}{a}\right)$$

In planul $\widetilde{\pi} = (ABM)$, $AQ \perp QM$, $NK \perp QM \Rightarrow NK \parallel AQ$ şi deci:

$$\Delta AQR \sim \Delta NKR \Rightarrow \frac{\|NK\|}{\|AQ\|} = \frac{\|NR\|}{\|AR\|}$$

Deoarece ΔVAD este isoscel ($|VA| \equiv |VD|$ şi O este mijlocul lui $|AD| \Rightarrow$ $[VO$ este bisectoarea lui $\widehat{AVD}$ şi deci a lui $\widehat{AVN}$ ($\widehat{AVN} = \widehat{AVD}$)

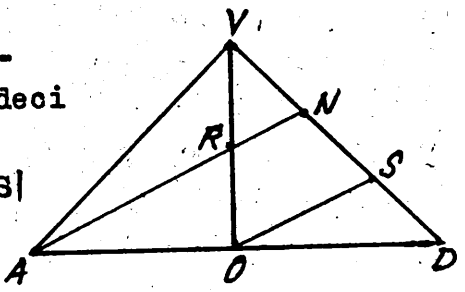
Conform teoremei bisectoarei în ΔAVN:

$$\frac{\|NR\|}{\|AQ\|}=\frac{\|VN\|}{\|VA\|}=\frac{\|VN\|}{\|VD\|}\ (|VA|\equiv|VD|).\ Deci\ \frac{\|NK\|}{\|AQ\|}=\frac{\|VN\|}{\|VD\|}$$

Cum $PN \| ED$, $\Delta VPN \sim \Delta VED$ şi deci: $\frac{\|VN\|}{\|VD\|}=\frac{\|PN\|}{\|ED\|}=\frac{\|PN\|}{a}$

Aşadar : $\frac{\|NK\|}{\|AQ\|}=\frac{\|PN\|}{a}=\frac{\|VN\|}{\|VD\|}$

In triunghiul AVD, fie $OS \| AN$, $S \in VD$.



Cum R este mijlocul lui $|VO|$ (MQ linie mijlocie în VFC) rezultă N mijlocul lui $|VS|$, deci $|NV|\equiv|NS|$.

Cum O este mijlocul lui $|AD|$, $OS \| AN$, rezultă $|OS|$ linie mijlocie în AND şi deci S mijlocul lui $|ND|$. Aşadar $|NS|\equiv|SD|$.

In consecinţă $\|VN\|=\frac{1}{3}\|VD\|$ şi deci

$\frac{\|NK\|}{\|AQ\|}=\frac{\|PN\|}{a}=\frac{1}{3}$

In final:

$$\frac{\mathcal{A}[MNPQ]}{\mathcal{A}[ABMQ]}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}$$

10.

Se consideră cubul $[ABCDA'B'C'D']$ cu latura de lungime $3a$. Se împarte fiecare latură a cubului în cîte trei segmente congruiente. Fie M,N,P punctele de diviziune cele mai apropiate de a, aflate respectiv pe muchiile AB , AD, AA'. Se secţionează cubul cu planul (MNP) şi se îndepărtează piramida $[AMNP]$. Se procedează la fel cu toate celelalte 7 vîrfuri ale cubului. Se cere:

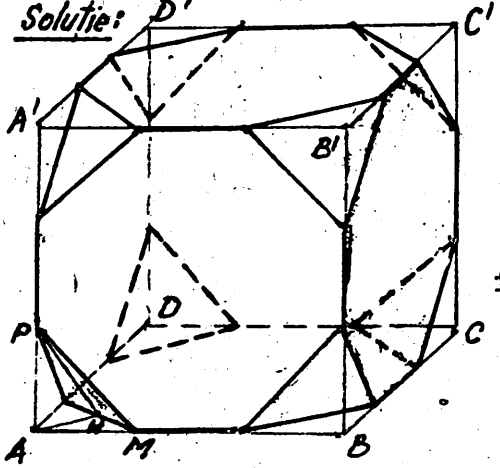
a) Să se verifice relaţia $f+v=m+2$ (f, v, m - reprezintă respectiv numărul feţelor, vîrfurilor şi muchiilor poliedrului rămas)

b) Să se calculeze aria poliedrului obţinut.

c) Să se afle măsura unghiului plan corespunzător unghiului diedru format de planul (MNP) cu planul bazei cubului.

d) Să se determine distanţa de la vîrful A la planul (MNP).

Soluţie:



a) Prin secţionările făcute, în locul fiecărui vîrf al cubului apar trei vîrfuri ale poliedrului obţinut.

Deci : $V = 3 \cdot 8 = 24$

Poliedrul obţinut are şase feţe conţinute în feţele cubului şi încă opt feţe conţinute în cele opt plane de secţiune. Deci:

$$f = 6+8 = 14$$

De asemenea, poliedrul obţinut are 12 muchii conţinute în muchiile cubului şi încă 8 . 3 = 24 muchii conţinute în planele de secţiune.
Deci: $m = 12+24 = 36$
Aşadar: $m+2 = 38$ şi $f+v = 14+24 = 38$
Si deci: $m+2 = f+v$.

b) Aria $\mathcal{A}[P]$ a poliedrului obţinut se poate calcula prin:

$$\mathcal{A}[P] = \mathcal{A}_t[ABCDA'B'C'D'] - 8\mathcal{A}_\ell[AMNP] + 8\mathcal{A}[MNP],$$

deoarece cele opt tetraedre înlăturate sînt congruiente. Deoarece $AMN \equiv ANP \equiv APN$ (triunghiuri dreptunchice isoscele cu $\|AM\| = \|AN\| = \|AP\| = a$), $\mathcal{A}_\ell[AMNP] = 3\mathcal{A}[AMN] = 3\cdot\frac{1}{2}\|AM\|\cdot\|AN\| = \frac{3}{2}a^2$
Tot din congruienţa acestor triunghiuri rezultă: $\|MN\| = \|NP\| = \|PM\| = a\sqrt{2}$ şi deci, triunghiul MNP fiind echilateral,

$$\mathcal{A}[MNP] = \frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Aşadar:

$$\mathcal{A}[P] = 6\cdot 9a^2 - 8\cdot\frac{3}{2}a^2 + 8\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 42a^2 + a^2\sqrt{3}$$

c) Fie H mijlocul lui $|MN|$. Cum AMN este triunghi isoscel, rezultă că $AH \perp MN$. Cum MNP este triunghi echilateral, rezultă că $PH \perp MN$ .Deoarece $H \in |MN|$ şi $|MN| \subset (ABC)$, rezultă $H \in (ABC)$ şi deci $AH \subset (ABC)$.
Analog $PH \subset (MNP)$ şi cum $(ABC) \cap (MNP) = MN$, rezultă că unghiul plan corespunzător, unghiului diedru format de planurile (MNP) cu planul bazei cubului este $\widehat{AHP}$.
Deoarece $AP \perp (ABC)$, $(AP = AA')$ şi $AH \subset (ABC)$, rezultă că $AP \perp AH$, deci APH este triunghi dreptunghic în A.

Cum AH este înălţime în triunghiul dreptunghic isoscel AMN rezultă că $\|AH\| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Aşadar, notînd $\theta = m(\widehat{AHP})$ avem:

$$tg\,\theta = \frac{\|AP\|}{\|AH\|}\,\frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

Deci: $\theta = arctg\sqrt{2}$ (deoarece $tg\,\theta > 0, \Rightarrow \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$
d) Fie $AO \perp PH$, $O \in PH$.
Deoarece $PH \perp MN$, $PH \subset (MNP)$, $AH \perp MN$, $MN \subset (MNP)$, $H \in MN$, conf. reciprocei a 2 a a teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că $AO \perp (MNP)$ şi deci $d(A,(MNP)) = \|AO\|$ Cum AO este înălţime în triunghiul dreptunghic APH, avem: $\|AO\| = \frac{\|AP\|\cdot\|AH\|}{\|PH\|} = \frac{a\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Deci: $d(A,(MNP)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Observaţie: $d(A,(MNP))$ este egală cu h, înălţimea tetraiedrului $[AMNP]$ considerat cu baza $[MNP]$. Deci $V[AMNP] = \frac{1}{3}\mathcal{A}[MNP] \cdot h$

Dar $AP \perp (AMN)$ putem exprima: $V[AMNP] = \frac{1}{3}\mathcal{A}[AMN] \cdot \|AP\|$

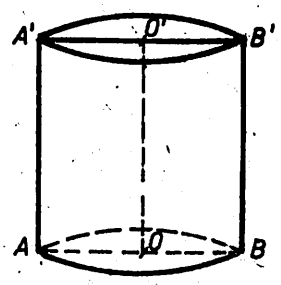
Din cele două relaţii rezultă că:

$$h = \frac{\mathcal{A}[AMN] \cdot \|AP\|}{\mathcal{A}[MNP]} = \frac{\frac{1}{2}a^2 \cdot a}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

CAPITOLUL VII
CORPURI ROTUNDE

Pag.115 **§1. Cilindrul**

1. Secţiunea axială a unui cilindru este un pătrat de arie a. Să se afle volumul cilindrului.



Soluţie:

$l = \|AA'\|$

$l = 2R$

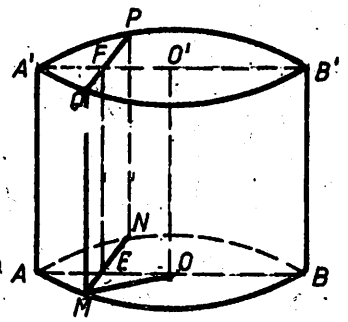
$l^2 = a$

$l = \sqrt{a}$

$R = \frac{\sqrt{a}}{2}$

$V(c) = \pi R^2 l = \frac{a\sqrt{a}}{4}\pi$

2. Înălţimea unui cilindru circular drept este de 8 iar raza 5. La ce distanţă de axa cilindrului trebuie dus un plan paralel cu ea, astfel încît secţiunea obţinută să fie un pătrat?



Soluţie:

Fie $MN \perp OA$, $M,N \in C(O,R)$

şi $PQ \perp O'A'$, $P,Q \in C(O',R)$

$\{E\} = |MN| \cap |AO|$ şi $\{F\} = |PQ| \cap |A'O'|$

$|FE| \parallel |O'O|$

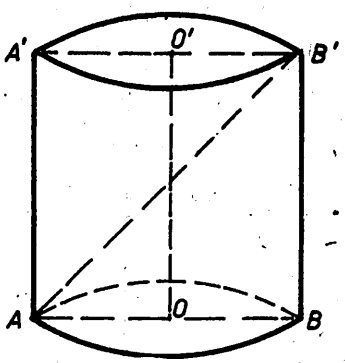
Considerînd $[MNPQ]$ pătrat, distanţa căutată este $\|OE\|$

$l = \|OO'\| = \|EF\| = \|MQ\| = \|MN\| = 8$, deci $\|ME\| = 4$

$R = \|OM\| = 5$

Aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MEO se obţine $\|EO\| = \sqrt{\|MO\|^2 - \|ME\|^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

3. Secţiunea axială a unui cilindru de rot. e este o suprafaţă pătratică cu diagonala egală cu 4. Să se afle aria totală şi volumul cilindrului.



Soluţia:

$[ABA'B']$ pătrat, deci,

$l = \|AA'\| = \|AB\| = \frac{\|AB\|\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$G = 2\sqrt{2}$; $R = \frac{\|AB\|}{2} = \sqrt{2}$

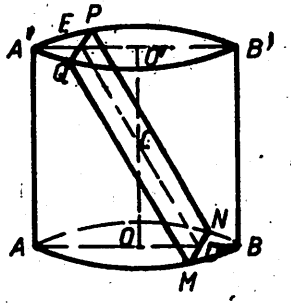
$\mathcal{G}_t(c) = 2\pi R \cdot (R + G) =$

$= 2\pi\sqrt{2}(\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) =$

$= 12\pi$

$V(c) = \pi R^2 l = 4\sqrt{2}\,\pi$

4. Intr-un cilindru circular drept cu raza 7 şi înălţimea 2 este înscris un pătrat oblic faţă de axa cilindrului, astfel încît două vîrfuri ale sale sînt pe cercul unei baze, iar celelalte două pe cercul celeilalte baze. Să se afle: a) Latura pătratului b) aria laterală a cilindrului.



Soluţie:

a) In C(O.R) construim coarda $[MN] \perp [OB]$ cu $\{D\} = [MN] \cap [OB]$ iar în $C(O',R)$ coarda $[PO] \perp [O'A]$ cu $\{E\} = [PQ] \cap [O'A']$ astfel încît $\|OD\| = \|O'E\|$

Cum bazele cilindrului sînt paralele şi congruiente rezultă că $[PQ] \parallel [MN]$ şi $\|PQ\| = \|MN\|$

Din construcţie rezultă că $(\exists)\ \{C\} = [OO'] \cap [ED]$

Conform teoremei celor trei perpendiculare, dacă $[OO'] \perp C(O,R)$, $[OD] \perp [MN]$ atunci $[CD] \perp [MN]$

Impunînd condiţia ca [MNPQ] să fie pătrat rezultă că C este centrul de simetrie al pătratului şi $\|CD\| = \frac{\|MN\|}{2}$

Obţinem

$$\|OD\|^2 = \|ON\|^2 - \frac{\|MN\|^2}{4} = 49 - \frac{\|MN\|^2}{4}$$

Din triunghiul dreptunghic COD rezultă că

$$\|OD\|^2 = \|CD\|^2 - \|CO\|^2 = \frac{\|MN\|^2}{4} - \frac{\|OO'\|^2}{4} = \frac{\|MN\|^2}{4} - 1$$

Din ultimile 2 relaţii se obţine egalitatea

$$49 - \frac{\|MN\|^2}{4} = \frac{\|MN\|^2}{4} - 1, \text{ deci } \frac{2\|MN\|^2}{4} = 50 \Rightarrow \|MN\|^2 = 100$$

Deci latura pătratului [MNPQ] este de lungime $\|MN\| = 10$

b) $\mathcal{G}_\ell(C) = 2\pi RG = 2\pi \cdot 7 \cdot 2 = 28\pi$

5. Un cilindru circular drept are raza bazei a şi înălţimea egală cu lungimea cercului de bază. Să se afle aria totală şi volumul cilindrului.

Soluţie:

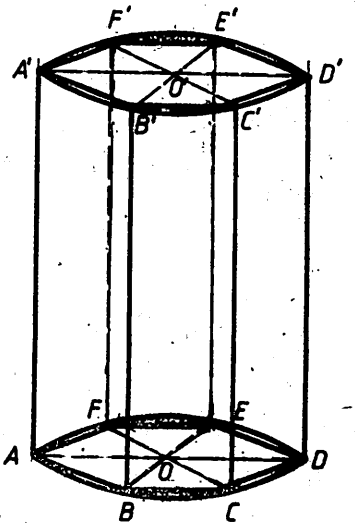
$R = a$

$2\pi R = I$; deci $I = G = 2a\pi$

$\mathcal{G}_t(C) = 2\pi R(R+G) = 2a\pi(a + 2a\pi) = 2a^2(1+2\pi)\pi$

$V(C) = \pi R^2 I = \pi a^2 \cdot 2a\pi = 2a^3\pi^2$

6. Aria totală a unui cilindru de rotaţie este de 90π, iar înălţimea de 4. Să se calculeze volumul prismei hexagonale regulate înscrise în cilindru.



Soluţie:

Prisma înscrisă fiind regulată este deci dreaptă şi putem considera cilindrul drept.

$\mathcal{G}_t(c) = 2\pi R\,(G+R)$

$G = I = 4$

$\mathcal{G}_t(c) = 2\pi R\,(R+4)$

Deci $90\pi = 2\pi R\,(R+4)$ de unde

$R^2 + 4R - 45 = 0$ şi $R = 5$

$[ABCDEF]$ hexagon regulat deci

$\|AB\| = R = 5$

Cum $\mathcal{G}[ABCDEF] = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$ atunci

$V(P) = \mathcal{G}[ABCDEF]\cdot I = \frac{75\sqrt{3}}{2}\cdot 4^2 = 150\sqrt{3}$

7. Să se arate că oricare ar fi cilindrul de rotaţie, raportul dintre aria laterală a cilindrului şi aria laterală a prismei triunghiulare regulate înscrise în cilindru este $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ iar raportul volumelor este $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

Soluţie:

Fie raza R a cercului de bază a cilindrului circular drept $\mathcal{G}_e(c) = 2\pi RI$

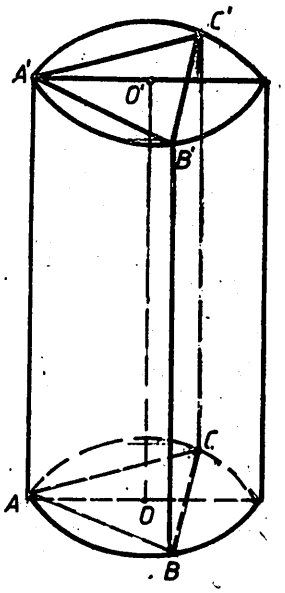
$\mathcal{G}_e(P)$ perimetrul bazei X I

(ABC) triunghi echilateral

deci $\|AB\| = R\sqrt{3}$

$\mathcal{G}_e(P) = 3\sqrt{3}\,RI$

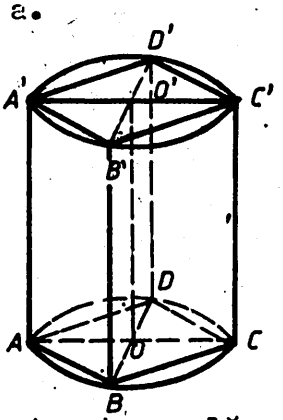
$\frac{\mathcal{G}_e(c)}{\mathcal{G}_e(P)} = \frac{2\pi RI}{3\sqrt{3}RI} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$



$V(C) = \pi R^2 I$

$V(P) = \frac{\|AB\|^2\sqrt{3}}{4} I$ $\Rightarrow$ $\frac{V(C)}{V(P)} = \frac{\pi R^2 I}{\frac{3R^2\sqrt{3}}{4} I} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

8. Să se calculeze aria totală şi volumul cilindrului circular drept circumscris unui cub cu muchia a.



Soluţie:

$I = G = a$

$2R = \|AB\| \sqrt{2}$ unde $\|AB\|$ este muchia cubului.

Deci $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\mathcal{G}_t(C) = 2\pi R(R+G) = 2\pi \frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} + a\right) = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}(2+\sqrt{2})\pi = a^2(1+\sqrt{2})\pi$

$V(C) = \pi R^2 I = \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{2}\pi$

9. Aria laterală a unui cilindru circular drept este egală cu suma ariilor bazelor. Stiind că volumul cilindrului este 1000 să se calculeze raza şi generatoarea cilindrului.

Soluţie:

$\mathcal{G}_l(C) = 2\pi RG = 2\pi R^2 \Rightarrow R = G$

$V(C) = \pi R^2 G = 1000\pi \Rightarrow R^3 = 1000 \Rightarrow R = 10$

$G = 10$

10. Aria laterală a unui cilindru de rotaţie este 160 , iar volumul 640 . Să se calculeze aria secţiunii axiale.

Soluţie:

Secţiunea axială a unui cilindru de rotaţie este un dreptunghi de bază 2 R şi înălţime I = G.

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{G}_l(C) &= 2\pi RG = 160\pi \\ V(C) &= \pi R^2 G = 640\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} RG = 80 \\ R^2 G = 640 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 8 \\ G = 10 \end{cases}$$

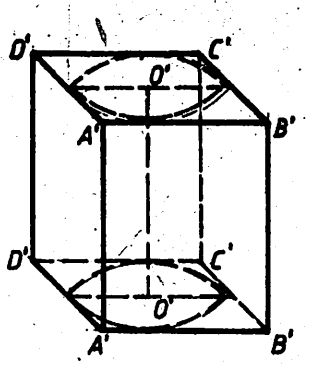
Deci aria dreptunghiului este 2RG = 160.

11. Dintr-o piesă de oţel avînd forma unei prisme patrulatere regulate drepte, cu latura bazei de 10 cm. şi înălţimea de 12 cm., să strunzeşte o piesă cilindrică cu minimum de material pierdut. Să se afle aria laterală şi volumul piesei obţinute.

Soluţie:

$R = \frac{\|AB\|}{2} = \frac{10}{2} = 5$

$I = G = 12$



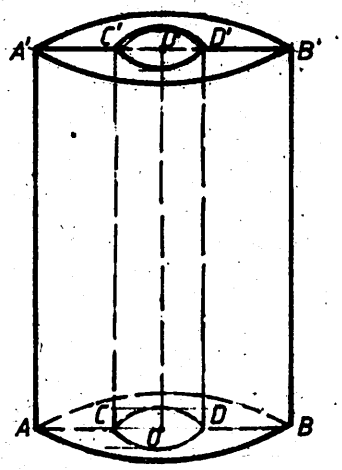
$\mathcal{G}_e(C) = 2\pi RG = 2 \cdot 5 \cdot 12\pi$

$\mathcal{G}_e(C) = 120\pi\ cm^2$

$V(C) = \pi R^2 I = \pi\ 25 \cdot 12 \Rightarrow$

$V(C) = 300\pi\ c.m^2$

12. Să se afle masa unei ţevi de plumb lungă de 5 m. cu grosimea de 4 cm. şi diametrul interior de 3 cm., densitatea plumbului fiind de 11,3.

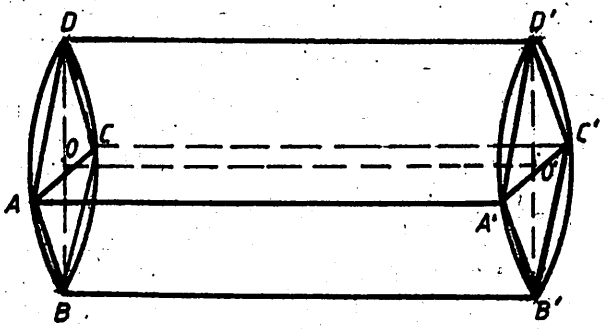


Soluţie:

$\rho_{Pb} = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho_{Pb} \cdot V$

$V = V(C_1) - V(C_2) =$
$= \pi \| OB \|^2 I - \pi \| OD \|^2 I =$
$= \pi I (\| OB \|^2 - \| OD \|^2) =$
$= \| I (\| OB \| - \| OD \|) (\| OB \| + \| OD \|)$
$I = 500\ cm$
$\| DB \| = \| OB \| - \| OD \| = 4$
$\| CD \| = 3 \Rightarrow \| OD \| = 1,5$
$\| OD \| + \| OB \| = 2 \| OD \| + \| DB \| = 7$
$V = \pi 500 \cdot 4 \cdot 7\ cm^3 = \pi\ 14000\ cm^3 \approx 43,96\ dm^3$
$m \approx 11,3 \cdot 43,96\ kg \approx 496,75\ kg$

13. Dintr-un trunchi de arbore lung de 6 m., de formă cilindrică avînd lungimea cercului de bază 125,6 cm.se cioplește o grindă cu secţiunea pătrată. Să se calculeze masa acestei grinzi, ştiind că densitatea lemnului este 0,8.



Soluţie:

$m = \rho \cdot V = \rho V(P)$

$2\pi R = 125,6 \Rightarrow R = \frac{125,6}{2 \cdot 3,14} = \frac{125,6}{6,28} \approx 20\ cm$

$I = 6\ m = 600\ cm$

$\| AB \| = R\sqrt{2} \Rightarrow \| AB \| = 20\sqrt{2}$

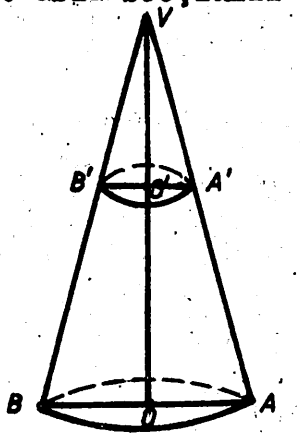
$V(P) = \| AB \|^2 \cdot I = 800 \cdot 600\ cm^3$
$= 480\ dm^3$

$m = 480 \cdot 0,8\ kg = 384\ kg$

§2. Conul

Pag. 120

1. Un con circular drept cu raza bazei R şi înălţimea h este intersectat cu un plan paralel cu baza. La ce distanţă de vîrf trebuie dus planul astfel încît aria secţiunii să fie egală cu jumătatea ariei bazei?



Soluţie:

Fie S aria bazei conului dat şi S' aria secţiunii. Deci S = 2S'

Conform formulei

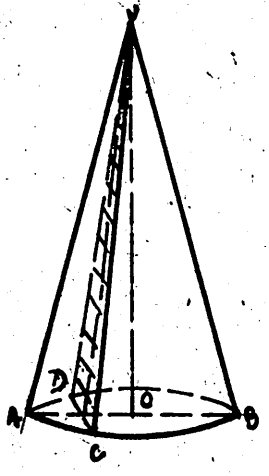
$\frac{S'}{S} = \left(\frac{\|VO'\|}{h}\right)^2$ rezultă

$\frac{S'}{2S'} = \frac{\|VO\|^2}{h^2}$ Deci $\|VO\|^2 = \frac{h^2}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|VO\| = \frac{h\sqrt{2}}{2}$

2. Un con circular drept are generatoarea egală cu 13 şi raza bazei 5.

Să se calculeze aria secţiunii duse prin vîrful conului, care determină pe bază o coardă egală cu latura unui hexagon regulat înscris în cercul bazei.



Soluţie:

Fie [CD] coarda determinată pe bază de secţiunea unui con. Cum latura hexagonului regulat înscris în cerc este egală cu raza cercului rezultă că $\|CD\| = 5$

Se poate calcula aria secţiunii [VCD] care este un triunghi isoscel cu formula lui Heron, unde $p = \frac{5+13+13}{2} = \frac{31}{2}$

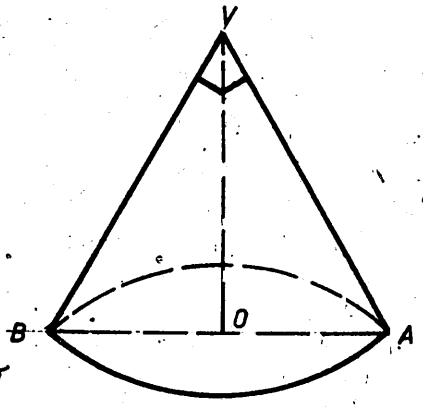
$\mathcal{G}[VCD] = \sqrt{\frac{31}{2}\cdot\frac{21}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}} = \frac{5}{4}\sqrt{651}$

3. Secţiunea axială a unui con de rotaţie este un triunghi dreptunghic isoscel a cărui arie este 9. Să se afle aria totală şi volumul conului.

$|VA| \perp |VB|$

$\|VA\| = \|VB\| = G$

$\mathcal{G}[VAB] = \frac{G^2}{2} = 9$



Deci $G = 3\sqrt{2}$

Cum $|VO| \perp |AB|$ şi VAB este dreptunghic isoscel rezultă că $\|OA\| = \|VO\|$ deci I = R

Din triunghiul VOA $2R^2 = G^2$

Deci $R^2 = 9$ $R = 3$ $G = 3\sqrt{2}$ $I = 3$

Deci $\mathcal{G}_l(C) = \pi R(R+G) = \pi 3(3+3\sqrt{2}) = 9(1+\sqrt{2})\pi$

$$V(C) = \frac{\pi R^2 I}{3} = \frac{\pi \cdot 9 \cdot 3}{3} = 9\pi$$

4. Aria bazei unui con de rotaţie este egală cu 36π, iar aria totală cu 96π. Să se afle volumul conului.

Soluţie:

$\pi R^2 = 36\pi \Rightarrow R^2 = 36 \Rightarrow R = 6$

$\mathcal{G}_l(C) = \pi R(R+G) = 6\pi(6+G) = 96\pi$

$6 + G = 16 \Rightarrow G = 10$

$I^2 = G^2 - R^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow I = 8$

$$V(C) = \frac{\pi R^2 I}{3} = \frac{\pi \cdot 36 \cdot 8}{3} = 96\pi$$

5. Aria laterală a unui con de rotaţie este 320π, iar raza conului este $\frac{4}{5}$ din generatoare. Să se calculeze volumul conului.

Soluţie:

$\mathcal{G}_l(C) = \pi RG = 320\pi \Rightarrow RG = 320$

$R = \frac{4}{5}G \Rightarrow \frac{4}{5}G^2 = 320 \Rightarrow G^2 = 400 \Rightarrow G = 20 \Rightarrow R = 16$

$I = G^2 - R^2 = 400 - 256 = 144 \Rightarrow I = 12$

$$V(C) = \frac{\pi R^2 I}{3} = \frac{\pi \cdot 256 \cdot 12}{3} = 1024\pi$$

6. Înălţimea unui con de rotaţie este egală cu 15, iar suma dintre generatoare şi rază este 25. Să se calculeze aria laterală şi volumul conului.

Soluţie:

$I = 15$

$R + G = 25$

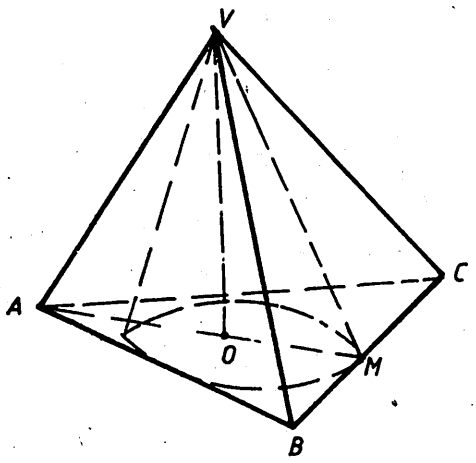
$G^2 - R^2 = I^2 \Rightarrow (G+R)(G-R) = 225$

$$\Rightarrow \begin{cases} R+G = 25 \\ -R+G = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} G = 17 \\ R = 8 \end{matrix}$$

$\mathcal{G}_l(C) = \pi RG = 136\pi$

$$V(C) = \frac{\pi R^2 I}{3} = \frac{\pi \cdot 64 \cdot 15}{3} = 320\pi$$

7. Să se calculeze volumul conului înscris într-un tetraedru regulat de muchie a.



Soluţie:

$\mathcal{A}(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Raza conului este raza cercului înscris în triunghiul echilateral ABC, deci conform formulei

$S = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2}{3a} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

[VM] este apotema tetraedrului regulat deci $\|VM\|^2 = \frac{3a^2}{4}$

Din triunghiul dreptunghic VOM, conform teoremei lui Pitagora rezultă că $I^2 = \|VO\|^2 = \|VM\|^2 - \|OM\|^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36} = \frac{2a^2}{3}$

Deci: $I = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$V(C) = \frac{\pi R^2 I}{3} = \frac{\pi \frac{a^2}{12} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{3} = \frac{a^3\sqrt{6}}{108}\pi$

8. Un cort conic are înălţimea de 3 m şi diametrul bazei de 8 m.

Câţi metri pătraţi de pînză au fost folosiţi pentru confecţionarea cortului ?

Soluţie:

$I = 3$

$2R = 8 \Rightarrow R = 4$

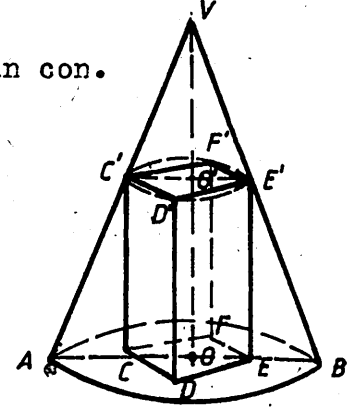
$G^2 = R^2 + I^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow G = 5$

$\mathcal{A}_l = \pi R(R+G) = 36\pi\ m^2 \approx 113\ m^2$

$\mathcal{A}_l = \pi RG \approx 62{,}80\ m^2$

9. Într-un con circular drept se dă raza bazei R şi înălţimea h.

Să se determine muchia cubului înscris în con.



Soluţie.

Se notează cu l muchia cubului înscris în con $\|VO'\| = h - l$

$\frac{S}{S'} = \left(\frac{h}{h-l}\right)^2$

$\frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{h^2}{(h-l)^2}$

In $C(O', r)$ s-a înscris pătratul $[C'D'E'F']$ de latură l, deci

$l = r\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{l\sqrt{2}}{2}$

$\frac{2R^2}{l^2} = \frac{h^2}{(h-l)^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}R}{l} = \frac{h}{h-l} \Rightarrow \sqrt{2}Rh = \sqrt{2}Rl + lh$

$l = \frac{\sqrt{2}hR}{h+\sqrt{2}R} = \frac{2hR}{\sqrt{2}h+2R}$

10. Într-un con circular drept cu raza R și înălțimea h se înscrie o prismă triunghiulară regulată, ale cărei fețe laterale sînt pătrate. Să se determine muchia laterală a prismei.

Soluție:

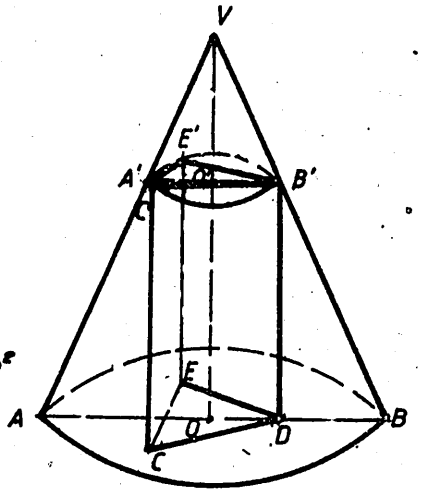
Se notează cu l muchia prismei.

$\|VO'\| = h - l$

$\frac{S}{S'} = \left(\frac{h}{h-l}\right)^2$

$\frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{h^2}{(h-l)^2}$

$r^2 = \frac{R^2(h-l)^2}{h^2}$



Latura triunghiului echilateral este $\sqrt{3}$ raza cercului circumscris triunghiului, deci $l = r\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{l\sqrt{3}}{3}$

$\frac{l^2}{3} = \frac{R^2(h^2 - 2hl + l^2)}{h^2} \Rightarrow l^2h^2 = 3R^2h^2 - 6hlR^2 + 3l^2R^2$

$lh^2 - 3R^2l^2 + 6hR^2l - 3R^2h^2 = 0$

$\Delta' = 9h^2R^4 + 3R^2h^4 - 9R^4h^2 = 3R^2h^4$

$l = \frac{3hR^2 + \sqrt{3}h^2R}{h^2 - 3R^2} = \frac{\sqrt{3}hR(h-\sqrt{3}R)}{h^2-3R^2} = \frac{\sqrt{3}hR(h-\sqrt{3}R)}{(h-\sqrt{3}R)(h+\sqrt{3}R)}$

$l = \frac{\sqrt{3}hR}{h+\sqrt{3}R} = \frac{3hR}{\sqrt{3}h+3R}$

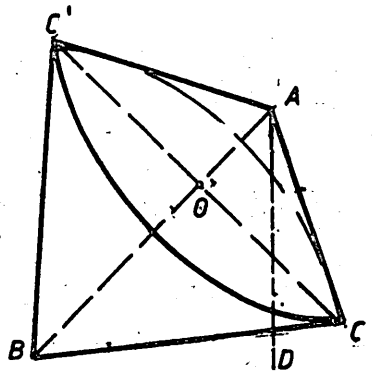
11. Să se afle volumul și aria corpului obținut prin rotația unei suprafețe triunghiulare isoscele [ABC] în jurul lui AB, știind că

$\|AB\| = \|AC\| = 25$ și $\|BC\| = 30$

Soluție:

$CC' \perp AB$; $|CO| = |OC'|$

$V_{corp} = V_{con\,BCC'} + V_{con\,ACC'} =$



$$= \frac{\pi \cdot \|CO\|^2 \cdot \|AO\|}{3} + \frac{\pi \cdot \|CO\|^2 \cdot \|BO\|}{3} =$$

$$= \frac{\pi \cdot \|CO\|^2}{3} (\|AO\| + \|BO\|) =$$

$$= \frac{\pi \cdot \|CO\|^2 \cdot \|AB\|}{3}$$

Conform formulei lui Heron

$\mathcal{G}[ABC] = \sqrt{40 \cdot 10 \cdot 15^2} = 20 \cdot 15 = 300$

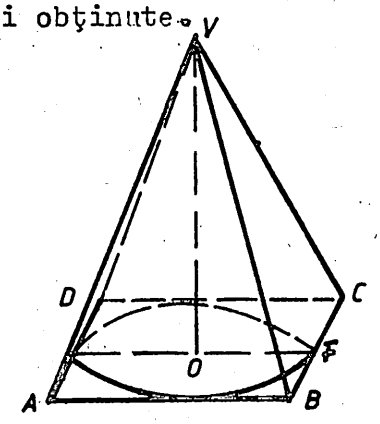
Dar $300 = \frac{\|AB\| \cdot \|CO\|}{2} \Rightarrow \|CO\| = \frac{600}{25} = 24$

Deci $V_{corp} = \frac{\pi \cdot 576 \cdot 25}{3} = 4800\pi$

$\mathcal{G}_{corp} = \mathcal{G}_{\ell con\ BCC'} + \mathcal{G}_{\ell con\ ACC'} = \pi \cdot \|CO\| \cdot \|AC\| + \pi \cdot \|CO\| \cdot \|BC\| =$

$= \pi \cdot \|CO\| (\|AC\| + \|BC\|) = \pi \cdot 24 \cdot 55 = 1320\pi$

12. Dintr-o piesă de oţel avînd forma unei piramide regulate cu baza un pătrat de latură 10 cm. şi înălţimea 12 cm. se strunjeşte o piesă conică cu minimum de material pierdut. Să se afle aria laterală şi volumul piesei obţinute.



Soluţie:

$\|OF\| = \frac{\|AB\|}{2} = 5 = R$

$I = \|VO\| = 12 \Rightarrow G^2 = I^2 + R^2 = 169 \Rightarrow G = 13$

$\mathcal{G}_\ell(C) = \pi RG = 65\pi\ cm^2$

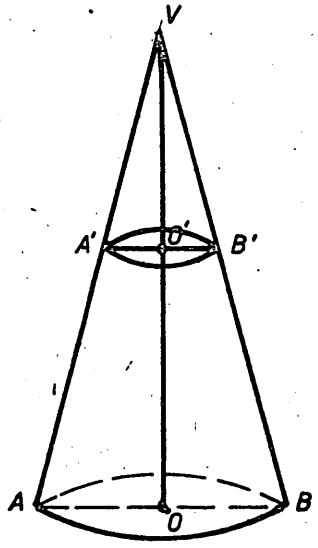
$V(C) = \frac{\pi R^2 I}{3} = 100\pi\ cm^3$

§ 3. Trunchiul de con

Pag. 121

1. Arătaţi că un trunchi de con circular este drept dacă şi numai dacă dreapta ce uneşte centrele bazelor este perpendiculară pe planele bazelor.

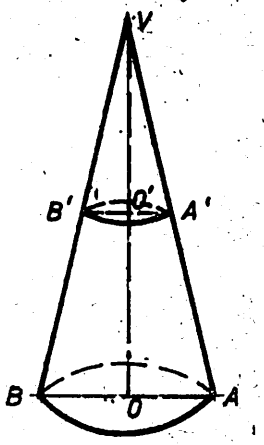
Soluţie:



Dacă trunchiul de con este circular drept el provine dintr-un con circular drept prin secţionarea cu un plan paralel cu baza. Dreapta ce uneşte centrele bazelor trunchiului de con este înălţimea conului, deci este perpendiculară pe baze. Dacă dreapta ce uneşte centrele bazelor este perpendiculară pe planele bazelor în secţiunea axială, conform fig. ABA'B'

este trapez isoscel, deci trunchiul de con este circular drept.

2. Să se arate că într-un trunchi de con circular drept, avînd centrele bazelor O, O' dacă $[AA']$ este o generatoare, atunci patrulaterul $[OAA'O']$ este trapez dreptunghic cu bazele $[OA]$, $[O'A']$ şi cu înălţimea $[OO']$.



Soluţie:

Dacă trunchiul de con este circular drept, el provine dintr-un con circular drept, prin secţionarea cu un plan paralel cu baza şi $[OO']$ va fi perpendiculară pe baza conului şi pe planul de secţiune care este un cerc de centru O'. Deci

$[OO'] \perp [OA]$ şi $[OO'] \perp [O'A'] \Rightarrow [O'A'] \parallel [OA]$

deci $[OAO'A']$ este un trapez deptunghic.

3. Într-un trunchi de con circular drept, generatoarele sînt congruente.

Soluţie:

Conul de provenienţă este circular drept, deci $OO' \perp AB$ şi $OO' \perp A'B'$ deci

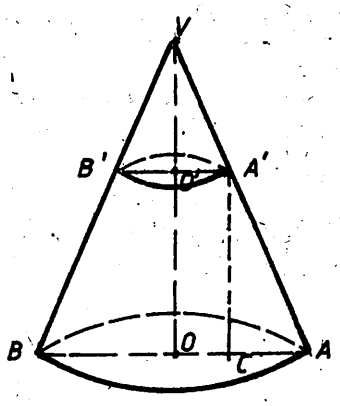
$AB \parallel A'B'$

$\|OB\| = \|OA\|$ şi $\|O'A'\| = \|O'B'\|$

Deci $[VAB]$ triunghi isoscel şi $[ABA'B']$ trapez isoscel, de unde rezultă că generatoarele $\|AA'\| = \|BB'\|$

Pag. 123

4. Aria laterală a unui trunchi de con circular drept este egală cu 225π, generatoarea 25, iar înălţimea 24. Să se calculeze volumul trunchiului de con.



Soluţie.

$\pi G(R+r) = 225\pi$

$25(R+r) = 225$

$R+r = 9$

$A'C \perp AB$

$[O'A'OA]$ trapez dreptunghic, deci

$\|OA\| - \|O'A'\| = R-r$

Aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiul [A'CA:]

$(R-r)^2 = \|AA'\|^2 - \|A'C\|^2 = 25^2 - 24^2 = 49$

$\left.\begin{matrix} R-r=7 \\ R+r=9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} R=8 \\ r=1 \end{matrix}$

$V(T) = \frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr) = 8\pi(64+1+8) = 584\pi$

Pag. 124

5. Un trunchi de con circular drept are razele bazelor 9 şi 15, iar generatoarea 10. Să se afle aria laterală şi volumul conului din care provine triunchiul de con.

Soluţie:

$A'C \perp AB$

$[OO'A'A]$ trapez dreptunghic deci:

$\|O'A'\| = \|OC\| = r = 9$

$\|AC\| = \|OA\| - \|OC\| = R - r = 6$

din triunghiul dreptunghic [A'CA]

$\|A'C\|^2 = \|AA'\|^2 - \|AC\|^2 = 10^2 - 6^2 = 64$

Deci $\|A'C\| = 8$ şi este chiar înălţimea triunchiului de con $= \|OO'\|$

Dacă notăm $\|VO'\| = l'$, $\|VO\| = l$ şi cu S' respectiv S ariile bazelor triunchiului de con conform formulei $\left(\frac{l'}{l}\right)^2 = \frac{S'}{S}$ vom obţine $\left(\frac{l-\|OO'\|}{l}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$

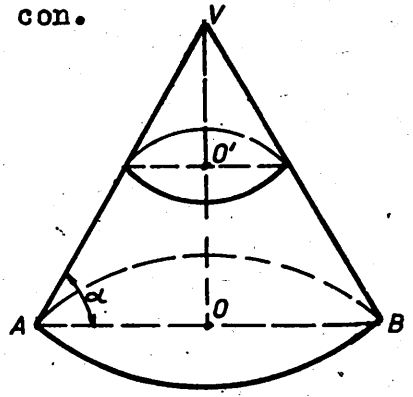
$\Rightarrow \frac{l-8}{l} = \frac{9}{15} \Rightarrow 3l = 5l - 40 \Rightarrow l = 20$

Generatoarea conului $G = \sqrt{l^2+R^2} = \sqrt{625} = 25$

$\mathcal{A}_l(C) = \pi RG = 375\pi$

$V(C) = \frac{\pi R^2 l}{3} = 1500\pi$

6. Intr-un trunchi de con circular drept, raportul ariilor bazelor este egal cu 4. Generatoarea are lungimea egală cu a şi este înclinată faţă de planul bazei cu unghiul $\alpha \in 45°$ Să se calculeze volumul trunchiului de con.



Soluţie:

Dacă $\alpha \in 45°$ atunci secţiunea axială [VAB] este un triunghi dreptunghic isoscel cu $m(\widehat{AVB}) = 90$

Notînd $\|VO\| = l$

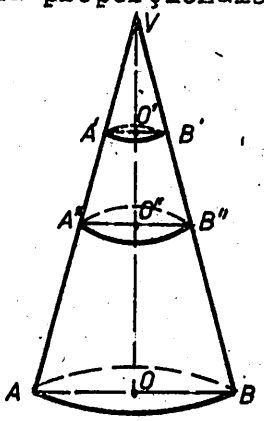
$\|VO'\| = l'$

S = aria bazei mari
S'= aria bazei mici
Deducem din formula $\left(\frac{l'}{l}\right)^2 = \frac{S'}{S} = \frac{1}{4}$

ca $\frac{l'}{l} = \frac{r}{R} = \frac{1}{2}$

Deci [A'O'] este linia mijlocie în triunghiul [VAO] dreptunghic isoscel. Deci $l = R$, $r = \frac{R}{2}$ şi $\|VA\| = 2a$
Dacă $\alpha \in 45 \Rightarrow 2R^2 = 4a^2 \Rightarrow R = a\sqrt{2}$, $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ şi
înălţimea trunchiului de con $h = \|OO'\| = \frac{l}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
$V(T) = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{a\sqrt{2}}{6}(2a^2 + \frac{a^2}{2} + a^2)\pi$
$V(T) = \frac{7a^3\sqrt{2}\,\pi}{12}$

7. Un trunchi de con circular drept are înălţimea egală cu 10, iar razele bazelor 8 şi 18. La ce distanţă de baza mică trebuie făcută o secţiune printr-un plan paralel cu bazele astfel încît secţiunea făcută să aibă aria media proporţională între ariile bazelor ?



Soluţie:
$\|OO'\| = 10$
$\|OA\| = R = 18$
$\|O'A'\| = r = 8$
Notînd cu S aria bazei mari
S'aria bazei mici
S"aria secţiunii
sînt valabile formulele
(1) $\frac{S'}{S''} = \left(\frac{\|VO'\|}{\|VO''\|}\right)^2$; (2) $\frac{S''}{S} = \left(\frac{\|VO''\|}{\|VO\|}\right)^2$

Ştiind că $(S'')^2 = S \cdot S'$ şi împărţind relaţia (1) la (2) se obţine
$\frac{SS'}{(S'')^2} = \left(\frac{\|VO\| \cdot \|VO'\|}{\|VO''\|^2}\right)^2 = 1$ deci $\|VO''\|^2 = \|VO\| \cdot \|VO'\|$
dar $\frac{S'}{S} = \left(\frac{\|VO'\|}{\|VO\|}\right)^2 \Rightarrow \frac{8}{18} = \frac{\|VO'\|}{\|VO\|} \Rightarrow \frac{8}{10} = \frac{\|VO'\|}{\|VO\| - \|VO'\|} \Rightarrow \frac{8}{10} = \frac{\|VO'\|}{10}$

deci $\|VO'\| = 8$, $\|VO\| = \|VO'\| + \|OO'\| = 18 \Rightarrow \|VO''\|^2 = 144 \Rightarrow$
$\|VO''\| = 12$

$\|O'O''\| = \|VO''\| - \|VO'\| = 12 - 8 = 4$

8. Intr-un con de rotaţie cu raza R=5 şi înălţimea I=12 se face o secţiune paralelă cu baza avînd aria egală cu 4π. Să se calculeze aria laterală şi volumul trunchiului de con format.

Soluţie:
Conform formulei $\frac{S'}{S} = \left(\frac{l'}{l}\right)^2$, unde S este aria bazei conului S'

aria secţiunii şi l' distanţa, de la vîrful conului la planul secţiunii, rezultă $\frac{4\pi}{25\pi}=\frac{l'^2}{12^2}$

deci $l'=\frac{24}{5}$.

Înălţimea trunchiului de con $h=l-l'$

deci $h=\frac{36}{5}$ Cum $S'=4\pi\Rightarrow r=2$

$V(T)=\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)=$

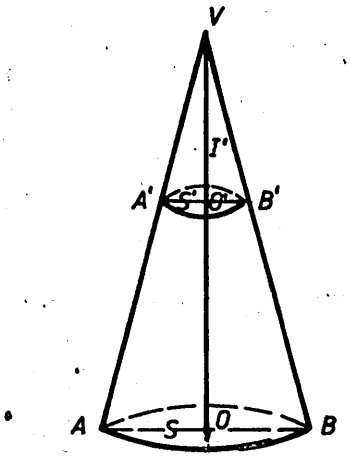
$=\frac{12\pi}{5}(25+4+10)=\frac{468}{5}\pi=93{,}6\pi$

$G_e(T)=\pi g(R+r)$

Dar $g^2=(R-r)^2+h^2=g+\frac{1296}{25}=\frac{1521}{25}$

$g=\frac{39}{5}$

$G_e(T)=\frac{39\pi}{5}(5+2)=\frac{273}{5}\pi=54{,}6\pi$



9. Razele bazelor unui trunchi de con sînt R şi r; generatoarea formează cu planul bazei un unghi $\alpha\in 45°$. Să se afle aria laterală şi volumul trunchiului de con.

Soluţie:

Triunghiurile [VOA] şi [VO'A'] sînt dreptunghice isoscele, deci:

$\|VO\|=R$

$\|VO'\|=r$

$\|OO'\|=\|VO\|-\|VO'\|=R-r$

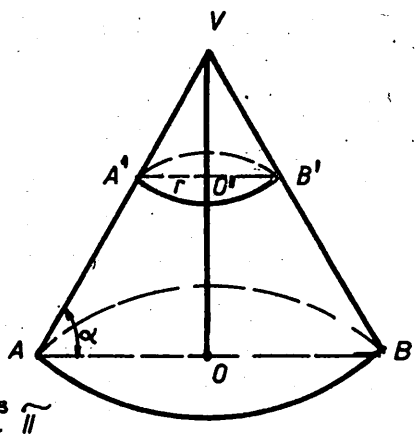
$\|VA\|^2=2R^2\Rightarrow\|VA\|=R\sqrt{2}$

$\|VA\|^2=2r^2\Rightarrow\|VA'\|=r\sqrt{2}$

Deci: $g=\|VA\|-\|VA\|=(R-r)\sqrt{2}$

$G_e(T)=\pi g(R+r)=(R^2-r^2)\sqrt{2}\pi$

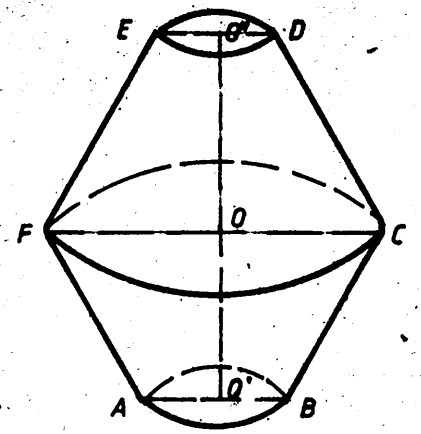
$V(T)=\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)=\frac{(R-r)(R^2+r^2+Rr)\pi}{3}=\frac{R^3-r^3}{3}\pi$



lo. Se dă un hexagon regulat cu latura de 4. Să se calculeze aria şi volumul corpului rezultat prin rotirea suprafeţei hexagonale în jurul exei de simetrie ce trece prin mijlocul unui laturi.

Soluţie:

Corpul obţinut prin rotirea hexagonalui în jurul axei de simetrie ce trece prin mijlocul O' al laturii [AB] este format din două trunchiuri de con cu aceiaşi arie şi volum.



Cum $\|FA\| = \|FO\| = R = 4$

$\|AO'\| = \frac{\|AB\|}{2} = r = 2$

$\|FA\| = g = 4$

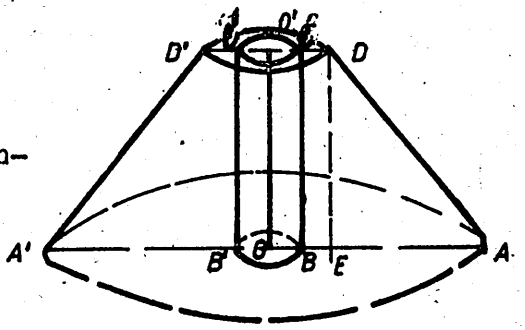
iar $\|OO'\| = \frac{\|FA\|\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

ca apotemă a hexagonului, rezultă că:

$\mathcal{G}_{(corp)} = 2\mathcal{G}_e(T) + 2\pi \|AO'\|^2 = 2\pi g(R+r) + 8\pi = 56\pi$

$V_{(corp)} = 2V(T) = 2\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr) = \frac{4\sqrt{3}}{3}(16+4+8)\pi = \frac{112\sqrt{3}}{3}\pi$

11. O suprafaţă trapezoidală dreptunghică ABCD (BC⊥AB) se roteşte în jurul unei axe paralele cu BC, la distanţa 3 de la BC, axa fiind în afara trapezului. Dacă $\|AB\|=5$ $\|AD\|=5$ şi $\|CD\|=2$ să se afle aria şi volumul corpului de rotaţie.



Soluţie:

Corpul de rotaţie este format dintr-un trunchi de con din care se scoate un cilindru. Razele trunchiului de con sînt respectiv

$R = \|OA\| = \|OB\| + \|AB\| = 3+5 = 8$

$r = \|O'D\| = \|O'C\| + \|CD\| = 3+2 = 5$

Raza cilindrului $r' = \|O'C\| = 3$

Generatoarea trunchiului de con este $g = \|AD\| = 5$

Fie $DE \perp AB$ · deci $\|AE\| = \|AB\| - \|CD\| = 5-2 = 3$

Din triunghiul dreptunghic [DEA], aplicînd teorema lui Pitagora se obţine înălţimea cilindrului ca şi a trunchiului de con

$h = \|BC\| = \|DE\| = \sqrt{\|AD\|^2 - \|AE\|^2} = \sqrt{5^2-3^2} = 4$

$\mathcal{G}_{(corp)} = \mathcal{G}_l(T) + \mathcal{G}_e(C) + 2\pi r'^2 = \pi g(R+r) + 2\pi r'h = 2\pi r'^2 + \pi(R^2+r^2) =$

$= \pi(65+24-18+64+25) = 160\pi$

$V_{(corp)}\ V(T) - V(C) = \frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr) - \pi r'^2 h = \frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr-3r'^2) =$

$= \frac{4\pi}{3}(64+25+40-27) = 136\pi$

§ 4. Sfera

Pag. 126

1. Să se arate că un corp sferic este o mulţime convexă iar exteriorul unei sfere nu este o mulţime convexă.

Soluţie:

Fie $M,N \in [S(O,r)]$

dar $(M,NP) \cap [S(O,r)] \Rightarrow$ disc - care este mulţime convexă

$\Rightarrow [MN] \subset disc \subset [S(O,r)]$

Exteriorul nu este mulţime convexă. Nu am decît să iau pe un diametru al sferei, în afara sa, punctele M şi N. $\Rightarrow [MN] \not\subset [S(O,r)]$

2. Să se arate că simetricul oricărui punct al sferei S'(O,r) faţă de centrul O apaţine deasemenea sferei S (O,r)

Soluţie:

Fie $A \in S(O,r) \Rightarrow \|OA\| = r$

fie A' simetricul lui A faţă de O $\Rightarrow A' \in [AO]$ şi $\|OA'\| = \|OA\|$

$\Rightarrow \|OA'\| = r \rightarrow A' \in S(O,r)$

3. Să se arate că suportul oricărui diametru al sferei este axă de simetrie a sferei.

Soluţie:

Fie d un diametru al sferei S(O,r)

Fie $M \in S(O,r) \Rightarrow \|OM\| = r$

Fie N simetricul lui M faţă de diametrul d.

Atunci dacă P este intersecţia segmentului MN cu diametrul d avem

$(MN) \perp d$ şi $\|MP\| = \|PN\|$

$\Rightarrow \Delta OMN$ isoscel $\rightarrow \|ON\| = \|OM\| = r \rightarrow N \in S(O,r)$

4. Dacă două cercuri din spaţiu neaşezate în acelaşi plan au două puncte comune există o sferă şi numai una, care conţine cele două cercuri.

Soluţie:

Fie $C_1(O_1, r_1, \alpha_1)$ şi $C_2(O_2, r_2, \alpha_2)$. Fie A,B punctele de intersecţie ale cercurilor.

Duc d_1, dreaptă perpendiculară pe planul α_1 în O_1

Duc d_2, dreaptă perpendiculară pe planul α_2 în O_2

$\Rightarrow d_1 \cap d_2 = O$ atunci $O \in d_1 \rightarrow$ este egal depărtat de orice punct de pe cercul $C_1 \Rightarrow \|OA\| = \|OB\| = R$

$O \in d_2 \Rightarrow$ este egal depărtat de orice punct de pe cercul $O_2 \Rightarrow \|OA\| = \|OB\| = R$

$\Rightarrow \exists S(O,R)$ unic prin determinare.

5. Prin două puncte distincte de pe sferă, care nu sînt colinare cu centrul sferei trece un singur cerc mare al sferei

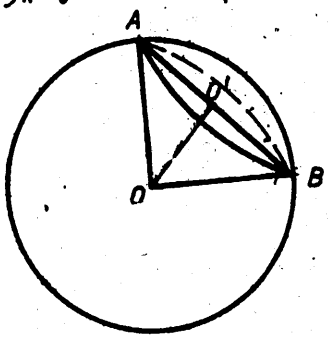
Soluţie:

Fie $A,B \in S(O,r)$ şi A,O,B necoliniare $\Rightarrow \exists (A,O,B)$ notat $\alpha \rightarrow$

$\alpha \cap S(O,r) =$ cerc mare, unic prin determinare.

Pag. 132

6. Un corp sferic de rază 6 se secţionează cu un plan α. La ce distanţă de centrul sferei trebuie dus planul α pentru ca aria discului de secţiune să fie egală cu 9π.



Soluţie:

Fie $A, B \in S(O,6) \Rightarrow \|OA\| = \|OB\| = 6$

Fie $[OO'] \perp [AB] \Rightarrow \|AO'\| = \|O'B\|$

$\Rightarrow 9\pi = \pi \cdot \|O'A\|^2 \Rightarrow \|O'A\| = 3$

$\triangle OO'B$ [(m)] $= 90^\circ$

$\|OO'\|^2 = \|OB\|^2 - \|O'B\|^2$

$\|OO'\|^2 = 27 \Rightarrow \|OO'\| = 3\sqrt{3}$

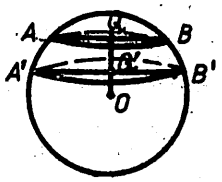
7. Să se afle raza unei sfere ştiind că aria sa şi volumul corpului sferic se exprimă prin acelaşi număr.

Soluţie:

$4\pi R^2 = \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow 12\pi R^2 = 4\pi R^3$

$R \neq 0 \Rightarrow 12\pi = 4R\pi \Rightarrow R = 3$

8. O zonă sferică are razele bazelor de 15 şi 8, iar raza sferei de 17. Să se afle aria zonei sferice.



Soluţie:

a) cazul I $O \in [QQ']$ ($[OQ'] < [OQ]$)

$QQ' \perp AB$

$\triangle OQ'B$ ($m(Q') = 90^\circ$)

$\|OQ'\|^2 = \|OB'\|^2 - \|Q'B'\|^2$

$\Rightarrow \|OQ'\|^2 = 289 - 225 \Rightarrow \|OQ'\|^2 = 64 \Rightarrow \|OQ'\| = 8$

$\triangle QOB$ ($m(Q) = 90^\circ$)

$\|QO\|^2 = \|OB\|^2 - \|BQ\|^2$

$\|QO\|^2 = 225 \Rightarrow \|QO\| = 15$

$\Rightarrow \|QQ'\| = \|OQ\| - \|OQ'\| = 15 - 8 = 7$

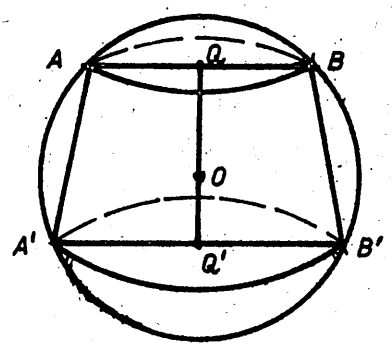
$\Rightarrow \mathcal{C}(Z) = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 17 \cdot 7 = 238\pi$

b) cazul II $O \in [QQ']$

$\|OQ'\| = 8$ şi $\|QO\| = 15$

$\Rightarrow \|QQ'\| = \|OQ\| + \|OQ'\| = 15 + 8 = 23$

$\Rightarrow \mathcal{C}(Z) = 2\pi Rh = 782\pi$



9. Să se afle muchia unui tetraedru regulat înscris în sfera de rază R.

Soluţie:

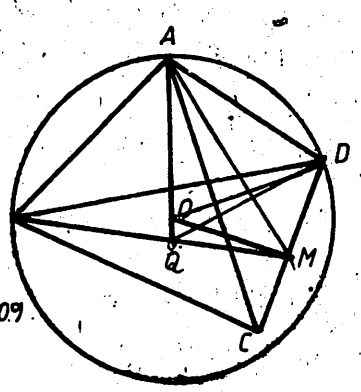
Notez lungimea muchiei cu x

$\triangle BCD$ echilateral $\Rightarrow \|QD\| = \frac{2}{3}h$

h înălţimea dată $h = x \sin 60^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|QD\| = \frac{x\sqrt{3}}{3}$

$\triangle AMQ$ ($m(Q) = 90^\circ$)



avem:

$\|AM\| = h = \frac{x\sqrt{3}}{3}$; $\|QM\| = \frac{1}{3}h = \frac{x\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow \|AQ\|^2 = \|AM\|^2 - \|QM\|^2 = \frac{6x^2}{9} \Rightarrow \|AQ\| = \frac{x\sqrt{6}}{3}$

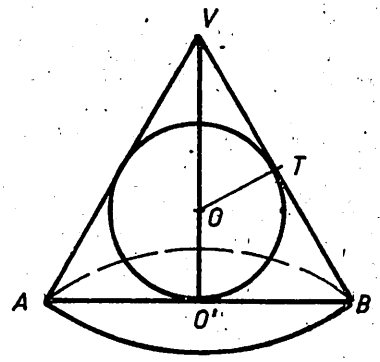
ABCD tetraedru regulat $\Rightarrow O \in |AQ| \Rightarrow \triangle AQD\ (m(Q) = 90°)$

cunoaștem că $O \in |AQ| \Rightarrow \|OD\|^2 = \|OQ\|^2 + \|QD\|^2$

$\Rightarrow R^2 = \left(\frac{x\sqrt{6}}{3} - R\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$\Rightarrow x^2 = \frac{2Rx\sqrt{6}}{3}$ $\quad x \neq 0 \longrightarrow x = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$

10. Raza bazei unui con circular drept este egală cu 4 și înălțimea cu 3. Să se afle volumul corpului sferic înscris în con.



Soluție:

$\triangle VOT \sim \triangle VO'B$

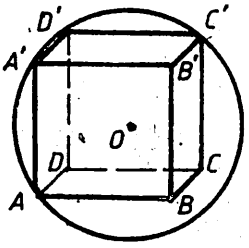
$\Rightarrow \frac{\|VO\|}{\|VB\|} = \frac{\|OT\|}{\|O'B\|}$

$\Rightarrow \frac{3-R}{5} = \frac{R}{4} \Rightarrow R = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow V(S) = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{256\pi}{81}$

11. Să se afle muchia unui cub înscris în sfera de rază R.

Soluție:



Fie $\|AB\| = x$

$\triangle ABC\ (m(B) = 90°)$

$\|A'C'\| = x\sqrt{2}$

$\Rightarrow \triangle A'C'\ (m(A') = 90°)$

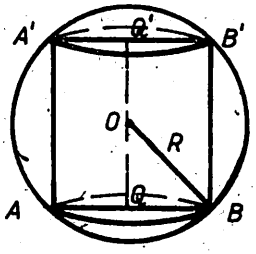
$\|AC'\|^2 = \|A'C'\|^2 + \|AA'\|^2$

$\|AC'\|^2 = 2x^2 + x^2$

$\Rightarrow 4R^2 = 3x^2 \Rightarrow x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

12. Într-o sferă de rază 10 se înscrie un cilindru de înălțime 12. Să se calculeze aria laterală și volumul cilindrului.

Soluție:



$\mathcal{A}(C) = 2\pi RG = 192\pi$

$V(C) = \pi R^2 I = 768\pi$

13. Baza unui prisme drepte este un triunghi cu laturile 6,8 și 10, iar înălțimea prismei este egală cu 24. Să se afle aria și volumul sferei circumscrise prismei.

Solutie:

Laturile fiind 6,8,10 $\Rightarrow \triangle ABC\ (m(\hat{B}) = 90^\circ)$

$\Rightarrow O \in (AA'C')$

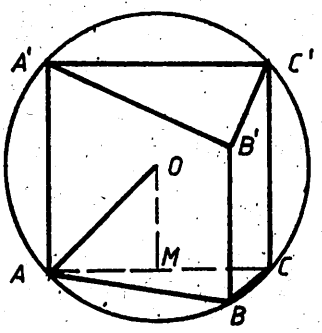
$\Rightarrow \underline{\triangle OAM}\ (|OM| \perp |AC|)$

$\|OA\|^2 = \|AM\|^2 + \|OM\|^2 \Rightarrow$

$R^2 = 169 \Rightarrow R = 13$

$\Rightarrow \mathcal{G}(S) = 4\pi R^2 = 676\pi$

$V(S) = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{8788\pi}{3}$



14. Unei sfere de rază R i se circumscrie un trunchi de con. Stiind că raza bazei mici este de patru ori mai mică decît raza bazei mari, să se afle aria totală şi volumul trunchiului de con.

Solutie:

Fie $b = \|QB'\| \Rightarrow \|QB\| = 4b$

$\Rightarrow \|BB'\| = 5b$

$\underline{\triangle B'B''B}\ (m(B'') = 90^\circ)$

$(|BB''|)^2 = \|B'B\|^2 - \|B'B''\|^2$

$\|BB''\|^2 = 25b^2 - 9b^2 = 16b^2$

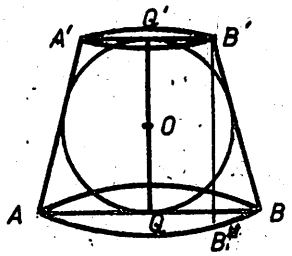
$\Rightarrow 4R^2 = 16b^2 \Rightarrow b = \sqrt{\frac{4R^2}{16}} = \frac{R}{2}$

$\mathcal{G}_l(C) = \pi G(R + r) = \frac{25R^2\pi}{4}$

$\mathcal{G}_t(C) = \frac{25R^2\pi}{4} + \frac{\pi R^2}{4} + \frac{25\pi R^2}{4} = \frac{21\pi R^2}{2}$

$V(C) = \frac{\pi I}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{2\pi R}{3}\left(\frac{16R^2}{4} + \frac{R^2}{4} + \frac{4R^2}{4}\right)$

$\Rightarrow V(C) = \frac{7R^3}{2}\pi$



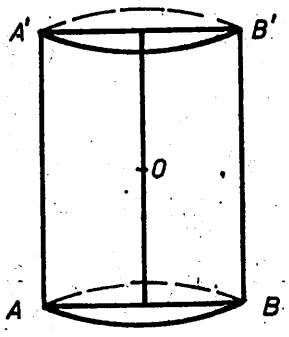
15. Dintr-un cilindru de metal în care înălţimea şi lungimea diametrului bazei sînt egale cu 20 cm. se strunjeşte un corp sferic de volum maxim. Să se afle volumul materialului perdut .

Solutie:

$V(C) = \pi R^2 I = 2 \cdot 10^3\pi$

$V(S) = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi}{3} \cdot 10^3$

$\Rightarrow V = V(C) - V(S) = \frac{2\pi}{3} \cdot 10^3$



16. Un con circular drept are înălţimea egală cu h şi este înscris într-o sferă S de rază R. a) Să se calculeze în funcţie de R şi h volumul V şi aria laterală S a conului. b) Să se arate că V/S^2 nu depinde de h. c) Să considerăm calota sferei S, care are aceeaşi bază ca şi conul şi nu conţine vîrful conului. Să se calculeze aria calotei şi să se determine h a.î. aria laterală a conului să fie egală cu aria calotei.

Soluţie:

a) $\Delta OQB\ (m(Q)=90°)$

$\|QB\|^2=\|OB\|^2-\|OQ\|^2$

$\|QB\|^2=R^2-(h-R)^2=2hR-h^2$

$\Rightarrow V(C)=\frac{\pi R^2 I}{3}=\frac{h^2(2R-h)\pi}{3}$

$\mathcal{C}_l(C)=\pi RG=\pi\sqrt{2hR-h^2}\cdot\sqrt{2hR}=$

$=\pi h\sqrt{2R(2R-h)}$

b) $\frac{V}{S^2}\ \frac{\pi h^2(2R-h)}{3}\cdot\frac{1}{\pi^2h^2(2R-h)2R}=\frac{1}{6R\pi}$

c) $\mathcal{C}(C)=2\pi Rh=2\pi R(2R-h)$

$\mathcal{C}(C)=\mathcal{C}(C)\Rightarrow\pi h\sqrt{2R(2R-h)}=2\pi R(2R-h)$

$\Rightarrow h^2+2Rh-4R^2=0$

$\Rightarrow h_{1,2}=(1\pm\sqrt{5})R\Rightarrow h=R(\sqrt{5}-1)$.

Pag. 133 Exerciţii recapitulative

Diagonala secţiunii axiale a unui cilindru echilateral este egală cu a. Să se afle volumul prismei octogonale regulate înscrise în acest cilindru

Soluţie:

Fie R - raza cilindrului

$\Delta AA'B\ (m(A)=90°),\ \|AA'\|=|AB|)$

$2\|AB\|^2=\|A'B\|^2\Rightarrow 8R^2=a^2$

$\Rightarrow R=\frac{a\sqrt{8}}{8}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$

Fie $|AD|=\ell_8$

$\Rightarrow \Delta AQD\ m(AQD)=\frac{360°}{8}=45°$

$\Rightarrow \mathcal{C}\Delta AQD=\frac{R^2\sin 45}{2}=\frac{R^2\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow \mathcal{C}_b$ (aria bazei) $=2R^2\sqrt{2}\Rightarrow V=2R^2\sqrt{2}\cdot 2R=\frac{a^3}{4}$

2. Într-un cilindru circular drept de rază a şi generatoare b este înscrisă o prismă triunghiulară regulată, iar în prismă este înscris un cilindru. Să se afle raportul volumelor celor doi cilindri.

Soluţie:

Fie $V(C_1)$ = vol. cilindrului înscris

$V(C_2)$ = vol. cilindrului ~~ex~~înscris.

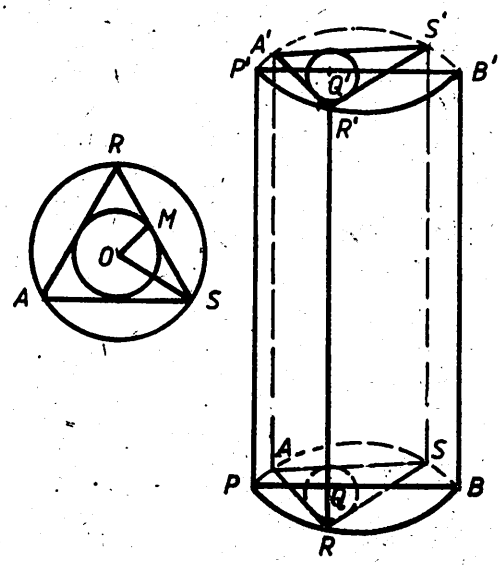
$$\Rightarrow \frac{V(C_1)}{V(C_2)} = \frac{\pi r_1^2 \cdot b}{\pi r_2^2 \cdot b} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$$

fie ΔOSM ($m(\hat{M}) = 90°$)

$r_2 = \|OS\| = a$

$r_1 = \|DM\| = \frac{a}{2}$

$$\Rightarrow \frac{V(C_1)}{V(C_2)} = \left(\frac{a}{2a}\right)^2 = \frac{1}{4}$$



3. Să se calculeze raza cercului de bază şi generatoarea cilindrului circular drept a cărui arie totală este jumătate din aria sferei în care poate fi înscris.

Soluţie:

Fie R raza sferei

r raza cilindrului

g generatoarea cilindrului

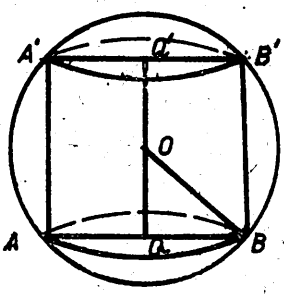
ΔOQB ($\hat{Q} \in 90°$)

$R^2 = r^2 + \frac{g^2}{4}$

$\mathcal{A}_t = \frac{\mathcal{A}(S)}{2} \Rightarrow 2\pi r(r+g) = 2\pi R^2$

$\Rightarrow r(r+g) = R^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} R^2 = r^2 + \frac{g^2}{4} \\ r^2 = rg = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^2 = r^2 + \frac{g^2}{4} \\ g = \frac{R^2 - r^2}{r} \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} g = \frac{R^2 - r^2}{r} \\ 5r^4 - 6r^2R^2 + R^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g = \frac{R^2 - r^2}{r} \\ r = \frac{R\sqrt{5}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{R\sqrt{5}}{5} \\ g = \frac{4R\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

4. Să se afle la ce distanţă de vîrful unui con, cu raza bazei 4 şi înălţimea 5, trebuie să ducem un plan paralel cu baza pentru ca acest con să fie împărţit în două părţi de acelaşi volum.

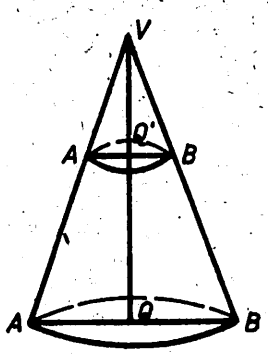
Soluţie:

Fie V volumul conului mic format

V_1 volumul conului dat

V_2 restul volumului pînă la vol.conului mare dat.

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = 1 \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{2} \Longrightarrow$$



Notez x raza conului mic
y înălţimea sa.

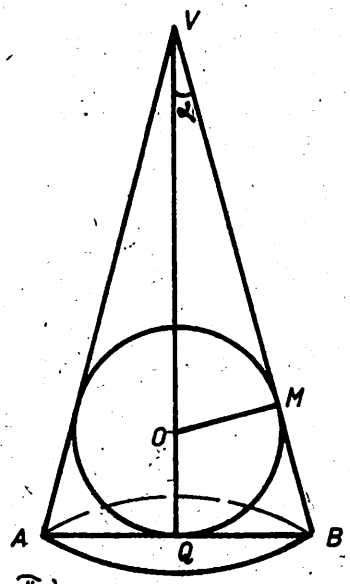
$\Rightarrow \frac{2\pi x^2 y}{3} = \frac{\pi \cdot 16 \cdot 5}{3} \Rightarrow x^2 y = 40$

$\Delta VQ'B' \sim \Delta VQB \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = \frac{4y}{5}$

$\Rightarrow y^3 = \frac{250}{4} \Rightarrow y = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$

5. Se dă un con circular drept în care α este măsura unghiului format de înălţime cu generatoarea, iar r este raza sferei înscrise în con. a) Să se exprime în funcţie de α şi r aria laterală a conului. b) Să se determine α astfel încît această arie să fie egală cu $3\pi r^2 (\sin\alpha)^{-1}$.

Soluţie:



$\triangle VOM \ (m(\hat{O}) = 90°)$

$\sin\alpha = \frac{\|OM\|}{\|VO\|} \Rightarrow \|VO\| = \frac{r}{\sin\alpha}$

$\Rightarrow VQ = r + \frac{r}{\sin\alpha} = r\left(\frac{\sin\alpha + 1}{\sin\alpha}\right)$

$\triangle VQB \ (\measuredangle Q \in 90°)$

$tg\alpha = \frac{\|QB\|}{\|VQ\|} \Rightarrow \|QB\| = \frac{r(\sin\alpha+1)}{\cos\alpha}$

$\sin\alpha = \frac{\|QB\|}{\|VB\|} \Rightarrow \|VB\| = \frac{r(\sin\alpha+1)}{\sin\alpha\cos\alpha}$

a) $\mathcal{L} = \pi RG = \frac{\pi r^2(\sin\alpha+1)^2}{\sin\alpha\cos^2\alpha}$

b) $\frac{\pi r^2(\sin\alpha+1)^2}{\sin\alpha\cos^2\alpha} = 3\pi r^2(\sin\alpha)^{-1}$

$= \frac{(\sin\alpha+1)^2}{\cos^2\alpha} = 3 \Leftrightarrow 4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 2 = 0$

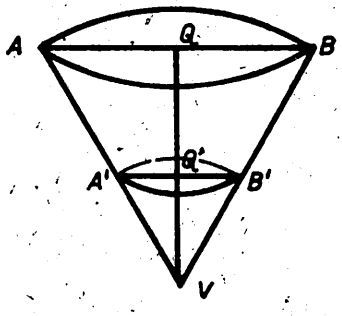
$\Rightarrow 2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0 \Rightarrow$

$\sin\alpha_1 = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2}$ nu poate fi soluţie $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

6. Intr-un vas în formă de con circular drept cu înălţimea de 6 dm. cu vîrful în jos, se toarnă 150,72 l de apă. Apa se urcă în vas pînă la 4 dm. Să se afle capacitatea vasului întreg.

Soluţie:



Fie $V_1 = 150,72$ l.
V = vol. conului dat.

$\Rightarrow \frac{V_1}{V} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{150,72}{V} = \frac{8}{27}$

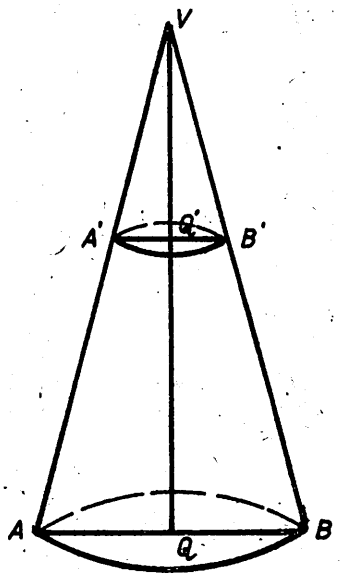
$\Rightarrow V = \frac{27 \cdot 150,72}{8} = 162\pi\ell$

Un con circular drept, care are raza bazei R şi înălţimea I = 2R se taie cu un plan paralel cu planul bazei determinind astfel un trunchi de con de înălţime d. a) Să se calculeze volumul trunchiului de con în fucnţie de R şi d. b) Să se determine d în funcţie de R astfel ca în acest trunchi de con să se poată înscrie o sferă.

Soluţie:

Fie V_1 = vol con mic.

V_2 = vol con dat.



$\triangle VQ'B' \sim \triangle VQB$

$$\Longrightarrow \frac{\|VQ'\|}{\|VQ\|} = \frac{\|Q'B'\|}{\|QB\|} \longrightarrow \frac{2R-d}{2R} = \frac{\|Q'B'\|}{R} \longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \|Q'B'\| = R - \frac{d}{2}$$

$$\Longrightarrow V = V_2 - V_1 = \frac{2\pi R}{3} - \frac{\pi(2R-d)(2R-d)^2}{R}$$

$$= \frac{d\pi}{12}(d^2 - 6Rd + 12R^2)$$

b) $\|B'B\|^2 = d^2 + (R-r)^2 = d^2 + \frac{d^2}{4} - \frac{5d^2}{4}$

$$\Longrightarrow \|B'B\| = \frac{d\sqrt{5}}{2}$$

$$R + r = \|B'B\| \longrightarrow 2R - \frac{d}{2} = \frac{d\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow d = \frac{4R}{1+\sqrt{5}} = \frac{4R(1-\sqrt{5})}{1-5} = R(\sqrt{5}-1)$$

8. Să se afle aria totală şi volumul corpului obţinut prin rotaţia unei suprafeţe hexagonale regulate în jurul supertului unei laturi, ştiind că latura hexagonului este egală cu a.

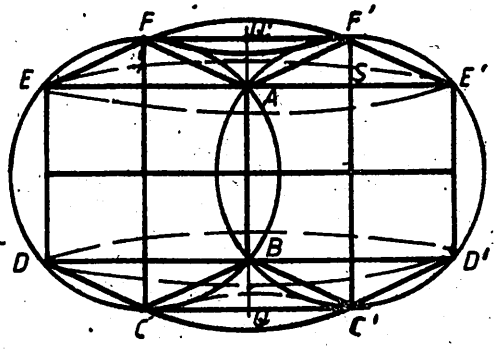
Soluţie:

$V_{corp} = V_{cil} + (2V_{tr.con} - 2V_{con})$

$\triangle F'SE'$ ($\sphericalangle S \in 90°$)

$$\|SE'\|^2 = \|F'E'\|^2 - \|F'S\|^2 = \frac{3d^2}{4}$$

$$\Longrightarrow \|SE'\| = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \|AE'\| = a\sqrt{3}$$



$$V_{cil} = 3a^3\pi$$

$$V_{tr.con} = \frac{\pi a}{6}\left(3a + \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{2}\right) = \frac{7a^3\pi}{8}$$

$$V_{con} = \frac{a^3\pi}{8}$$

$$V_{corp} = 3a^3\pi + 2\left(\frac{7a^3\pi}{8} - \frac{a^3\pi}{8}\right) = \frac{9a^3\pi}{2}$$

9 Să se calculeze aria laterală şi volumul unui trunchi de con ştiind că raza bazei mari este egală cu $R\sqrt{3}$ şi că în trunchiul respectiv se poate înscrie o sferă de rază R.

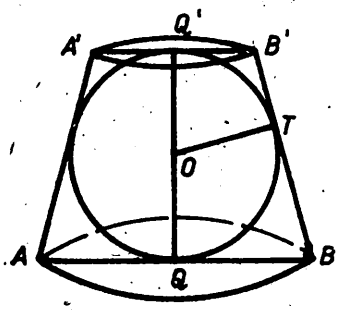
Soluţie:

Fie r - raza bazei mici

$\Rightarrow \|B'B\|^2 = \|Q'Q\|^2 + (R\sqrt{3} - r)^2$

$\Rightarrow (R\sqrt{3}+r)^2 = 4R^2 + (R\sqrt{3}-r)^2$

$\Rightarrow r = \frac{R\sqrt{3}}{3}$

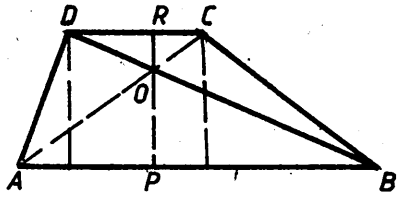


$\mathcal{A}_l = \pi \cdot \|G\| \cdot (R+r) = \pi \cdot \frac{4R\sqrt{3}}{3} \cdot (R\sqrt{3} + \frac{R\sqrt{3}}{3}) = \frac{16\pi R^2}{3}$

$V = \pi \cdot \frac{2R}{3} \cdot (3R^2 + \frac{R^2}{3} + R^2) = \frac{26R^2\pi}{9}$

10. In trapezul ABCD cu bazele AB şi DC, diagonalele AC şi BD se intersectează în O 1) Cunoscînd $\|AB\| = a$, $\|DC\| = b$ $(a > b)$ şi înălţimea h a trapezului, să se calculeze distanţele de la punctul O la cele două baze. 2) Fie V_1 şi V_2 volumele corpurilor obţinute prin rotaţia suprafeţei trapezoidale ABCD în jurul bazelor DC respectiv AB. Care dintre cele două volume este mai mare ?

Soluţie:



Fie $\|OP\| = x$, $\|OR\| = y$

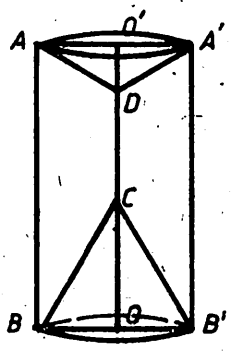
$\Rightarrow \begin{cases} x + y = h \\ \frac{x}{y} = \frac{b}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{bh}{a+b} \\ y = \frac{ah}{a+b} \end{cases}$

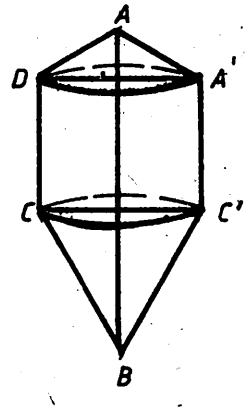
$\Rightarrow V_1 = V_{cil} - (V_{con1} + V_{con2})$

$V_{cil} = ah^2\pi$

$V_{con1} + V_{con2} = \frac{\pi h(a-b)}{3}$

$\Rightarrow V_1 = ah^2\pi - \frac{\pi h^2(a-b)}{3} = \frac{h^2\pi(2a+b)}{3}$





$V_2 = V_{cil} + V_{con1} + V_{con2}$

$V_{cil} = bh^2\pi$

$V_{con1} = \frac{\pi h^2 \|OB\|}{3}$ $\frac{\pi h^2 \|O'A\|}{3}$ $\frac{\pi h^2(a-b)}{3}$

$V = bh^2\pi + \frac{\pi h^2(a-b)}{3} = \frac{\pi h^2(a+2b)}{3}$

dar $2a+b > a+b+b = a+2b \Rightarrow V_1 > V_2$

11. O sferă de centrul O şi de rază R este secţionată de două plane paralele α şi β situate la distanţă h unul de altul. Să se afle distanţa de la centrul sferei la planul α astfel încît aria zonei sferice dintre cele două plane să fie egală

cu suma ariilor secţiunilor plane. Discuţie:

Soluţie:

Fie $x \in d\ (0, \alpha)$

cazul I . O se află între plane

$\Rightarrow h - x < x \Rightarrow x \in \left[\frac{h}{2}, R\right]$

$\sigma(S) - S_1 - S_2 = \pi(r_1^2 + r_2^2)$

$S_1 = 2\pi R^2 I = 2\pi a_1 R^2$

$S_2 = 2\pi R^2 I = 2\pi a_2 R^2$

$\Rightarrow S_1 + S_2 = 2\pi R^2 (2R - h)$

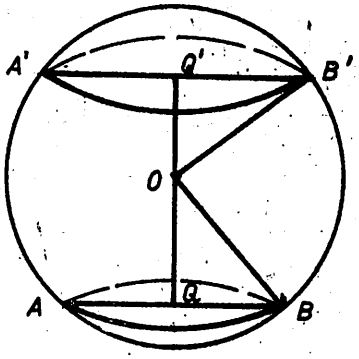
$\Rightarrow 2hR^2 - \frac{8R^3}{3} = \frac{6hR^2 - 8R^3}{3}$

$\Rightarrow 2Rh = r_1^2 + r_2^2 \Rightarrow r_2^2 = R^2 - (h-x)^2 \Rightarrow$

$\varphi(x) = 2x^2 - 2hx + h^2 + 2Rh - 2R^2$

$x_m = \frac{h}{2} \Rightarrow \varphi\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}(h^2 + 4Rh - 4R^2)$

$\Rightarrow$ solutie $x = \frac{1}{2}\left(d + \sqrt{4R^2 - 4Rh - h^2}\right)$



Pag. 134

12. La ce distanţă de centrul unei sfere S de rază R trebuie dus un plan astfel ca aria calotei mici, formate, să fie egală cu aria laterală a conului circular drept avînd ca bază cercul de intersecţie al planului cu sfera şi vîrful pe calota mare?

b) Să se afle raportul dintre volumul conului şi volumul corpului sferic (S)

Soluţie:

Fie x distanţa căutată

$\sigma_c = 2\pi R I = 2\pi R (R - x)$

$\sigma_l = \pi R G = \pi\sqrt{R^2 - x^2}\, G = \pi\sqrt{2R(R^2 - x^2)(R + x)}$

$4\pi^2 R^2 (R-x)^2 = \pi^2 \cdot 2R \cdot (R^2 - x^2)(R + x)$

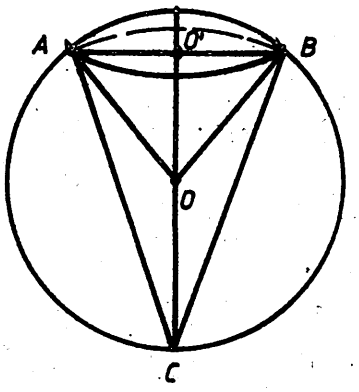
$\Rightarrow x^2 + 4Rx - R^2 = 0$

a) $\Rightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5R^2} \Rightarrow x = R(\sqrt{5} - 2)$

b) $r = R^2 - x^2 = 4R^2(\sqrt{5} - 2)$

$V_{(con)} = \frac{4\pi R^3}{3}(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} - 1)$

$V(S) = \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow \frac{V(C)}{V(S)} = \frac{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} - 1)}{1} = 7 - 3\sqrt{5}$



13. Intr-un trapez isoscel ABCD un unghi ascuţit este $\alpha \in 45°$

iar latura oblică este congruientă cu baza mică [CD].

a) Dacă $\|AD\|=10$ să se afle lungimea diagonalei [BD].

b) Să se afle volumul corpului obţinut prin rotaţia suprafeţei trapezoidale [ABCD] în jurul dreptei AB

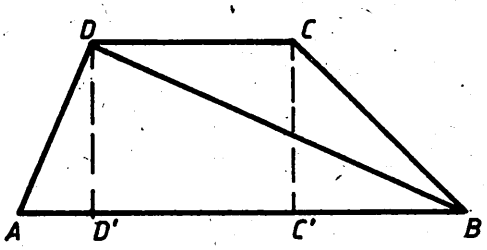
Soluţie:

$\|CD\| = \|BC\|$

$\|AD\| = 10$

$\triangle ADD' (D \in 90°)$

$\sin 45° = \frac{\|DD'\|}{10} \Rightarrow \|DD'\| = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$



$\Rightarrow \|AD'\| = 5\sqrt{2} \Rightarrow AB = 10(1+\sqrt{2})$

$\triangle DD'B \ (\hat{D} \in 90°) \ \|DB\|^2 = \|DB'\|^2 + \|D'B\|^2 =$

$= 50 + (10+5\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow \|DD'\|^2 = 100(2+\sqrt{2})$

$\Rightarrow \|BD\| = 10\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$V = V_{cil} + 2V_{con} = \frac{2\pi \cdot 50 \cdot 5\sqrt{2}}{3} + 50\pi \cdot 10 = \frac{500\pi(\sqrt{2}+3)}{3}$

Pag. 135

PROBLEME RECAPITULATIVE

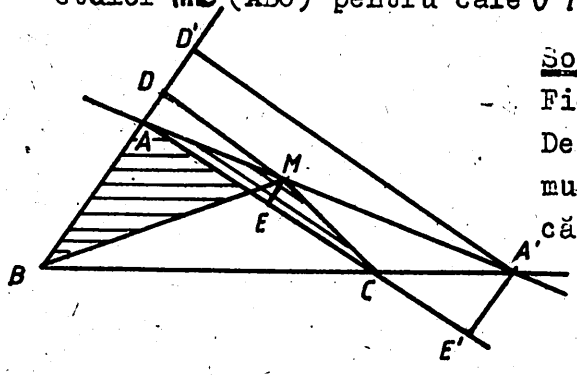
1. Să se arate că un poligon convex nu poate avea mai mult de trei unghiuri ascuţite.

Soluţie:

Conform ex. 3 cap.I §1, suma măsurilor unghiurilor experioare ale unui poligon convex este egală cu 360.

Dacă un poligon convex ar avea cel puţin 4 unghiuri ascuţite, atunci ar exista cel puţin patru unghiuri exterioare optuze. Deci suma unghiurilor exterioare ar fi mai mare decît 360, concluzie ce contrazice rezultatul.

2. Fie ABC un triunghi. Să se găsească locul geometric al punctelor $M \in (ABC)$ pentru care $\mathcal{A}[ABM] = \mathcal{A}[ACM]$

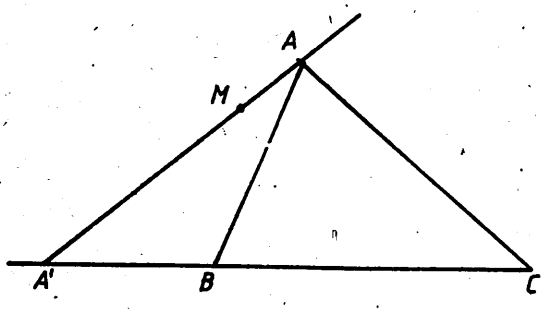


Soluţie:

Fie $M \in (ABC)$; Dacă $AM \| BC \Rightarrow \mathcal{A}[ABM] = \mathcal{A}[ACM]$

Deci paralele prin A la BC este o mulţime inclusă în locul geometric căutat.

Fie $M \in (ABC)$ cu proprietatea din enunţ. Presupunem



$AM \nparallel BC \Rightarrow AM \cap BC = \{A'\}$

Din $\mathcal{G}[ABM] = \mathcal{G}[ACM] \Rightarrow \|AB\| \cdot d(M,AB) = \|AC\| \cdot d(M,AC) \Rightarrow \frac{d(M,AB)}{d(M,AC)} = \frac{\|AC\|}{\|AB\|}$;

$d(M,AB) = \|MD\|$ $d(A',AB) = \|A'D'\|$ $d(A',AC) = \|A'E'\|$

$d(M,AC) = \|ME\|$

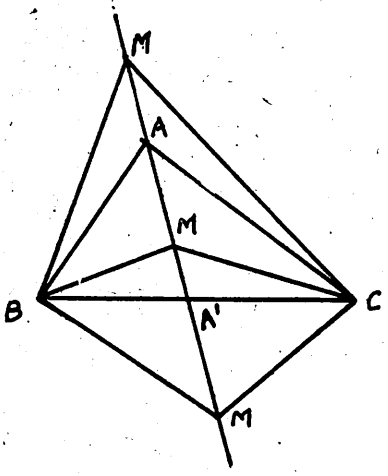
$\frac{\|MD\|}{\|A'D'\|} = \frac{\|ME\|}{\|A'E'\|} \Rightarrow \frac{\|MD\|}{\|ME\|} = \frac{\|A'D'\|}{\|A'E'\|}$

Rezultă $\frac{\|AC\|}{\|AB\|} = \frac{\|A'D'\|}{\|A'E'\|}$ de unde $\|AC\| \cdot \|A'E'\| = \|AB\| \cdot \|A'D'\|$ adică $\mathcal{G}[ACA'] = \mathcal{G}[ABA']$

Dacă $C \in (BA')$ $\Rightarrow \mathcal{G}[ABA'] = \mathcal{G}[ABC] + \mathcal{G}[ACA'] \neq \mathcal{G}[ACA']$

Dacă $B \in (A'C)$ $\Rightarrow \mathcal{G}[ACA'] = \mathcal{G}[ABC] + \mathcal{G}[ABA'] \neq \mathcal{G}[ABA']$

Rămâne $A' \in (BC)$; cum $\mathcal{G}[ABA'] = \mathcal{G}[AA'C] \Rightarrow \|BA'\| = \|A'C\| \Rightarrow A'$ mijlocul segmentului (BC)



Deci, dacă $M \in (ABC)$ cu $AM \nparallel BC$ şi cu $\mathcal{G}[ABM] = \mathcal{G}[ACM]$ atunci M aparţine dreptei AA' unde A' mijlocul segmentului (BC)

Reciproc: Fie $M \in AA' \Rightarrow \mathcal{G}[BMA'] = \mathcal{G}[MA'C] = \frac{1}{2} \frac{\|BC\|}{2} \cdot d(M,BC)$

$\mathcal{G}[BAA'] = \mathcal{G}[AA'C] = \frac{1}{2} \frac{\|BC\|}{2} \cdot d(A,BC)$

Dacă $A \in (MA') \Rightarrow$

$\mathcal{G}[ABM] = \mathcal{G}[MBA'] - \mathcal{G}[ABA'] =$

$= \mathcal{G}[A'MC] - \mathcal{G}[A'AC] =$

$= \mathcal{G}[AMC]$

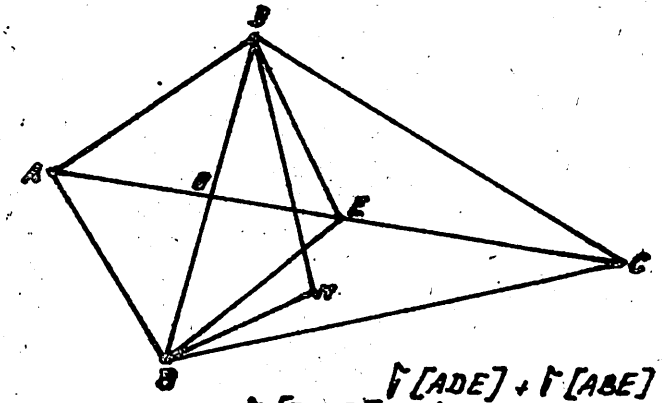
Dacă $M \in |AA'| \Rightarrow \mathcal{A}[ABM] = \mathcal{A}[ABA'] - \mathcal{A}[BMA'] =$

$= \mathcal{A}[AA'C] - \mathcal{A}[MA'C] = \mathcal{A}[AMC]$

Dacă $A' \in |AM| \Rightarrow \mathcal{A}[ABM] = \mathcal{A}[ABA'] + \mathcal{A}[BA'M] = \mathcal{A}[AA'C] + \mathcal{A}[A'MC] = \mathcal{A}[AMC]$

In concluzie locul geometric căutat este reuniunea dreptei AA' (A' mijlocul lui $|BC|$) cu paralela prin A la BC.,

3. Se dă un patrulater convex ABCD. Să se afle locul geometric al punctelor $M \in$ Interior ABCD pentru care $\mathcal{A}[MBCD] = \mathcal{A}[MBAD]$



Soluție

Fie $\{O\} = |AC| \cap |BD|$

Considerăm $|AO| < |OC|$ și fie E mijlocul lui $|AC|$.

Avem $\mathcal{A}[ADE] = \mathcal{A}[DEC] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\|AC\|}{2} d(D, AC)$ (1)

și $\mathcal{A}[ABE] = \mathcal{A}[BEC] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\|AC\|}{2} d(B, AC)$ (2)

Din (1) și (2) rezultă

$\mathcal{A}[ADE] + \mathcal{A}[ABE] = \mathcal{A}[DEC] + \mathcal{A}[BEC] = \frac{1}{2} \mathcal{A}[ABCD]$,

adică $\mathcal{A}[EBAD] = \mathcal{A}[EBCD]$. Atunci E este un punct al locului geometric și $\mathcal{A}[EBD] = \frac{1}{2} \mathcal{A}[ABCD] - \mathcal{A}[ABD]$ pentru că A și E sînt în semiplanele opuse limitate de BD.

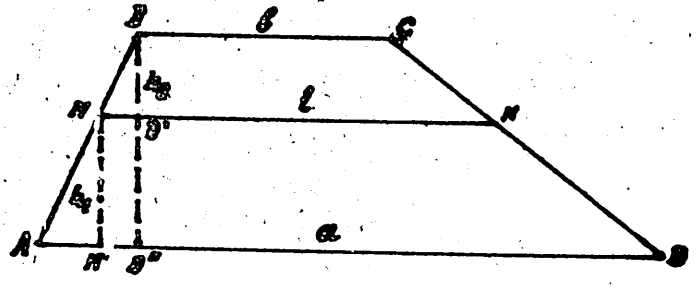
Fie $M \in$ Int ABCD astfel încît $\mathcal{A}[MBCD] = \mathcal{A}[MBAD]$

Din $\mathcal{A}[MBCD] = \mathcal{A}[MBAD]$ rezultă că A și M sînt în semiplanele opuse limitate de BD. Deci $\mathcal{A}[MBD] = \frac{1}{2} \mathcal{A}[ABCD] - \mathcal{A}[ABD] = \mathcal{A}[EBD] =$

$=$ constant de unde rezultă că locul geometric este intersecția Int ABCD cu o paralelă la BD ce trece prin E (vezi aplicația 3 pag.14).

Dacă $|AO| \equiv |OC|$ atunci locul geometric este $|BD|$.

4. Să se determine o dreaptă MN, paralelă cu bazele unui trapez ABCD ($M \in |AD|$, $N \in |BC|$) astfel încît diferența ariilor lui [ABNM] și [MNCD] să fie egală cu un număr dat.



Soluție

Fie $\frac{\|AM\|}{\|MD\|} = x$, $\|MN\| = l$,

$\|AB\| = a$, $\|CD\| = b$, $d(D, AB) = h$,

$d(A, MN) = h_1$, $d(M, CD) = h_2$

Din $\Delta AMM' \sim \Delta MDD'$ rezultă $\frac{\|AM\|}{\|MD\|} = \frac{h_1}{h_2} = x$ de unde

$$\frac{h_1}{h_1+h_2} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow h_1 = \frac{hx}{x+1} \text{ şi } \frac{h_1+h_2}{h_2} = x+1 \Rightarrow h_2 = \frac{h}{x+1}$$

Condiţia $\mathcal{A}[ABNM] - \mathcal{A}[MNCD] = k$ devine $\frac{a+l}{2} \cdot \frac{hx}{x+1} - \frac{b+l}{2} \cdot \frac{h}{x+1} = k$ şi ţinînd cont că $\frac{a+l}{2} \cdot \frac{hx}{x+1} + \frac{b+l}{2} \cdot \frac{h}{x+1} = S$ unde $S = \mathcal{A}[ABCD]$ obţinem $(a+l)\frac{hx}{x+1} = S+k$ şi $(b+l)\frac{h}{x+1} = S-k$

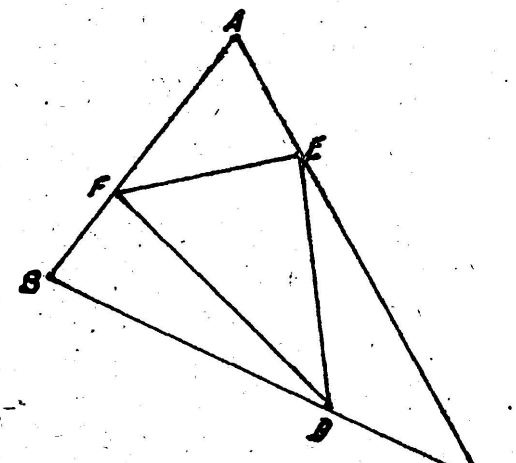
Eliminînd pe l între cele două relaţii obţinem:

$$(S-k)x^2 - (2k-ah+bh)x - S - k = 0$$

Cum x este unic, $\Delta = 0$ şi $x = \frac{2k-ah+bh}{2(S-k)}$ pt. $k \neq S$

Dacă $K = S$ atunci MN = DC

'5. Pe laturile triunghiului ABC se iau punctele D,E,F, astfel ca $\frac{\|BD\|}{\|DC\|} = \frac{\|CE\|}{\|EA\|} = \frac{\|AF\|}{\|FB\|} = 2$ • Să se afle raportul ariilor triunghiurilor DEF şi ABC.



Soluţie:

I Fie $\|AE\| = b$; $\|AC\| = 3b$; $\|CD\| = a$; $\|BC\| = 3a$; $\|BF\| = c$; $\|AB\| = 3c$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}[ABC] = \frac{3a \cdot 3b \cdot 3c}{4R} = \frac{27}{4} \cdot \frac{abc}{R}$$

$$\mathcal{A}[DEF] = \mathcal{A}[ABC] - \mathcal{A}[CED] - \mathcal{A}[AEF] - \mathcal{A}[BFD]$$

$$= \frac{27}{4}\frac{abc}{R} - \frac{2ab\sin C}{2} - \frac{2bc\sin A}{2} - \frac{2ac\sin B}{2}$$

In triunghiul ABC avem

$$\frac{3a}{\sin A} = \frac{3b}{\sin B} = \frac{3c}{\sin C} = 2R \Rightarrow$$

$$\sin A = \frac{3a}{2R};\ \sin B = \frac{3b}{2R};\ \sin C = \frac{3c}{2R}$$

$$\mathcal{A}[DEF] = \frac{27}{4} \cdot \frac{abc}{R} - \frac{3abc}{2R} - \frac{3abc}{2R} - \frac{3abc}{2R} =$$

$$= \frac{27abc}{4R} - \frac{9abc}{2R} = \frac{9abc}{4R}$$

$$\frac{\mathcal{A}[DEF]}{\mathcal{A}[ABC]} = \frac{9abc}{4R} \cdot \frac{4R}{27abc} = \frac{1}{3}$$

II

$$\mathcal{A}[BDF] = \frac{\|BF\| d(D,AB)}{2} = \frac{\frac{\|AB\|}{3} d(D,AB)}{2} = \frac{1}{3}\mathcal{A}[ABD] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\|BD\| d(A,BC)}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{2}{3}\|BC\| d(A,BC)}{2} = \frac{2}{9} \cdot \frac{\|BC\| d(A,BC)}{2} = \frac{2}{9}\mathcal{A}[ABC]$$

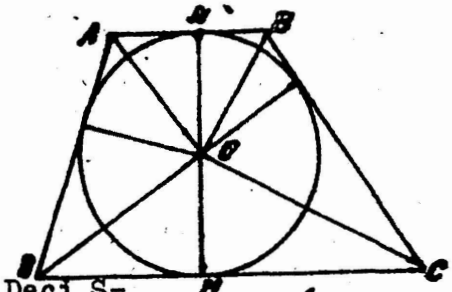
Analog $\mathcal{A}[AEF] = \frac{2}{9}\mathcal{A}[ABC] = \mathcal{A}[CDE]$

$$\mathcal{A}[DEF] = \mathcal{A}[ABC] - \mathcal{A}[BDF] - \mathcal{A}[AEF] - \mathcal{A}[CDE] = \frac{1}{3}\mathcal{A}[ABC]$$

Deci $\frac{\mathcal{A}[DEF]}{\mathcal{A}[ABC]} = \frac{1}{3}$

6. Laturile neparalele ale unui trapez circumscris unui cerc care formează cu baza mare unghiuri de măsură α şi respectiv β. Să se afle raza cercului ştiind că aria trapezului este S.

Soluţie:



Fie R raza cercului înscris trapezului

$S = \frac{(\|AB\| + \|DC\|) \cdot \|AA'\|}{2}$, dar $\|AA'\| = 2R$

$OM \perp DC$; $ON \perp AB$

$\|DM\| = R \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $\|MC\| = R \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|DC\| = R\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)$

$\|AN\| = R \operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{2}$; $\|NB\| = R \operatorname{tg}\frac{\pi-\beta}{2} \Rightarrow \|AB\| =$

$= R\left(\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\pi-\beta}{2}\right) = R\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)$

Deci $S = \frac{R\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right) \cdot 2R}{2} =$

$= R^2\left(\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} + \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}\right) = R^2\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\right) =$

$= 2R^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right) = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha \sin\beta} \cdot 2R^2$

Rezultă $R = \sqrt{\frac{S \sin\alpha \sin\beta}{2(\sin\alpha + \sin\beta)}}$

7. Se consideră un triunghi echilateral ABC şi discul $[C(O, \frac{a}{3})]$ unde O este ortocentrul triunghiului şi $a = \|AB\|$

Să se determine aria suprafeţei $[ABC] - [C(O, \frac{a}{3})]$

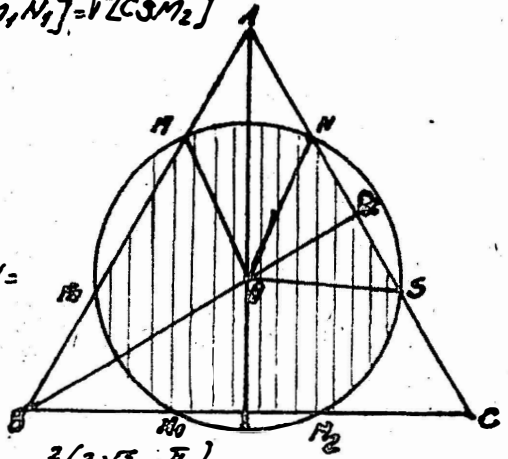
Soluţie: Aria cerută este diferenţa dintre aria triunghiului şi aria mulţimii plane haşurate. Vom arăta că această arie este de trei ori aria mulţimii $[\widehat{AMN}]$, adică determinată de punctul A şi arcul $\widehat{MN}$. căci $\mathcal{A}[AMN] = \mathcal{A}[BM_1N_1] = \mathcal{A}[CM_2N_2]$

Avem $\|ON\| = \frac{a}{3}$, $\|OQ\| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

folosind teorema lui Pitagora în $\triangle NOQ$ avem că $\|NQ\| = \frac{a}{6}$

Deci $\|NS\| = \frac{a}{3}$ şi $\|AN\| = \frac{a}{3}$,

rezultă că $\triangle AMN$ este echilateral. Deci $\|AM\| = \|BM_1\| = \|BN_1\| = \|M_2C\| = \|SC\| = \frac{a}{3}$



$\mathcal{A}[\widehat{AMN}] = \mathcal{A}[OMAN] - \mathcal{A}[\widehat{OMN}] =$

$= 2\mathcal{A}[AMN] - \mathcal{A}[\widehat{OMN}] =$

$= 2\frac{\frac{a^2}{9}\sqrt{3}}{4} - \pi\frac{\frac{a^2}{9}60^\circ}{360^\circ} = \frac{a^2\sqrt{3}}{18} - \frac{\pi a^2}{54} = \frac{a^2(3\sqrt{3}-\pi)}{54}$

Deci $\mathcal{A}[\widehat{AMN}] + \mathcal{A}[\widehat{BM_1N_1}] + \mathcal{A}[M_2SC] = 3\mathcal{A}[\widehat{AMN}] = 3\frac{a^2(3\sqrt{3}-\pi)}{54}$

şi $\mathcal{A}[ABC] - \mathcal{A}[C(O, \frac{a}{3})] = \frac{a^2(3\sqrt{3}-\pi)}{18}$

8. Să se arate că în orice triunghi ABC:

a) $1 + \cos A \cos(B-C) = \frac{b^2+c^2}{4R^2}$

Soluție:

$\cos A \cos(B-C) = \frac{1}{2}[\cos(A+B-C) + \cos(A-B+C)] =$

$= \frac{1}{2}[\cos(180-2C) + \cos(180-2B)] = -\frac{1}{2}[\cos 2C + \cos 2B] =$

$= -\frac{1}{2}(1-2\sin^2 C + 1 - 2\sin^2 B) = -1 + \sin^2 C + \sin^2 B$

$1 + \cos A \cos(B-C) = 1 - 1 + \sin^2 C + \sin^2 B = \sin^2 C + \sin^2 B =$

$= \frac{c^2}{4R^2} + \frac{b^2}{4R^2} = \frac{b^2+c^2}{4R^2}$

b) $(b^2+c^2-a^2)\operatorname{tg} A = 4S$

Soluție:

$$(b^2+c^2-a^2)\frac{\sin A}{\cos A} = (b^2+c^2-a^2)\frac{\frac{2S}{bc}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} = 4S$$

c) $\frac{b+c}{2c\cos\frac{A}{2}} = \frac{\sin(\frac{A}{2}+C)}{\sin(A+B)}$

Soluție:

$$\frac{b+c}{2c\cos\frac{A}{2}} = \frac{c\frac{\sin B}{\sin C}+c}{2c\cos\frac{A}{2}} = \frac{c(\sin B+\sin C)}{2c\cos\frac{A}{2}\sin C} = \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\sin C} =$$

$$= \frac{\sin(90-\frac{A}{2})\cos\frac{B-C}{2}}{\sin C\cos\frac{A}{2}} = \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin(180-(A+B))} = \frac{\sin(90-\frac{B-C}{2})}{\sin(A+B)} =$$

$$= \frac{\sin\frac{180-B+C}{2}}{\sin(A+B)} \quad \frac{\sin\left(\frac{A+B+C-B+C}{2}\right)}{\sin(A+B)} = \frac{\sin(\frac{A}{2}+C)}{\sin(A+B)}$$

d) $\rho = r\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)$

Solutie:

$$ctg\frac{A}{2} = \frac{p-a}{r}$$

$$r(ctg\frac{A}{2}+ctg\frac{B}{2}+ctg\frac{C}{2}) = r\left(\frac{p-a}{r}+\frac{p-b}{r}+\frac{p-c}{r}\right) = \frac{r(3p-a-b-c)}{r} =$$

$$= 3p-2p = p$$

e) $ctg.\frac{A}{2}\cdot ctg\frac{B}{2}\cdot ctg\frac{C}{2} = \frac{p}{r}$

Solutie:

$$ctg\frac{A}{2} = \frac{p-a}{r}$$

$$\frac{p-a}{r}\cdot\frac{p-b}{r}\cdot\frac{p-c}{r} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{pr^3} =$$

$$= \frac{S^2}{pr^3} = \frac{(pr)^2}{pr^3} = \frac{p^2r^2}{pr^3} = \frac{p}{r}$$

Pag. 136

9. Să se arate că în orice triunghi ABC avem:

a) $a\,ctg.\,A + b\,ctg\,B + c\,ctg\,C = 2(R+r)$

Solutie: $a\,ctg\,A + b\,ctg\,B + c\,ctg\,C = a\cdot\frac{\cos A}{\sin A} + b\frac{\cos B}{\sin B} + c\frac{\cos C}{\sin C} =$

$$= 2R\cos A + 2R\cos B + 2R\cos C = 2R(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$\cos A+\cos B+\cos C = (\cos A+\cos C)+\cos(180^\circ-(A+B)) =$$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - \cos(A+B) = 2\cos\frac{180-C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos^2\frac{A+B}{2}+1 =$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin^2\frac{C}{2}+1 = 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)+1 =$$

$$= 2\cdot 2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}+1 = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1$$

Deci:

$$a\,ctg\,A + b\,ctg\,B + c\,ctg\,C = 2R\left(4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1\right) =$$

$$= 2R\left[4\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}\cdot\frac{(p-a)(p-c)}{ac}\cdot\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}+1\right] =$$

$$= 2R\left[4\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}+1\right] = 2R\left[4\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc}+1\right] =$$

$$= 2R\left(4\frac{S^2R}{abc\cdot p\cdot R}+1\right) = 2R\left(\frac{S}{pR}+1\right) = 2R\left(\frac{pr}{pR}+1\right) = 2R\,\frac{r+R}{R} =$$

$$= 2(r+R)$$

b) $$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C} = \frac{p}{R+r}$$

Solutie:

$$\sin A+\sin B+\sin C = \frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R} = \frac{a+b+c}{2R} = \frac{2p}{2R} = \frac{p}{R}$$

$$\cos A+\cos B+\cos C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1 =$$

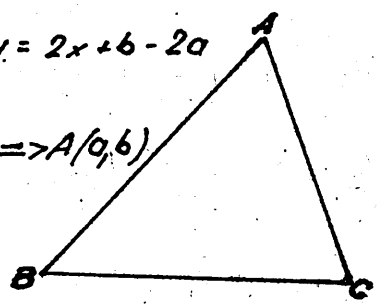
$$= 4\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}+1 = 4\frac{S^2}{p\cdot abc}+1 = \frac{4R\cdot S^2}{pR\cdot abc}+1 =$$

$$\frac{S}{pR}+1=\frac{pr}{pR}+1=\frac{r}{R}+1=\frac{r+R}{R}$$

Deci :

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}=\frac{\frac{p}{R}}{\frac{r+R}{R}}=\frac{p}{R+r}$$

10. Să dau dreptele de ecuaţii $y=x+b-a$, $y=2x+b-2a$ şi $y=3x+b-3a-2$, unde $a,b\in R$. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului determinat de punctele lor de intersecţie.



Soluţie: Fie $AB: y=x+b-a$; $AC: y=2x+b-2a$
$BC: y=3x+b-3a-2$ şi

$$\{A\}=AB\cap AC \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+b-a=0 \\ 2x-y+b-2a=0 \end{cases} \Rightarrow A(a,b)$$

$$\{B\}=AB\cap BC \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+b-a \\ y=3x+b-3a-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(a+1,\ b+1) \text{ şi}$$

$$\{C\}=AC\cap BC \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+b-2a \\ y=3x+b-3a-2 \end{cases} \Rightarrow C(a+2,\ b+4)$$

Se calculează: $\|AB\|=\sqrt{(a-a-1)^2+(b-b-1)^2}=\sqrt{2}$,
$\|BC\|=\sqrt{(a+1-a-2)^2+(b+1-b-4)^2}=10$
şi $\|AC\|=2\sqrt{5}$

Aplicînd teorema cosinusurilor în triunghiul ABC avem :

$$\cos A=\frac{\|AC\|^2+\|AB\|^2-\|BC\|^2}{2\|AC\|\cdot\|AB\|}=\frac{3\sqrt{10}}{10}, \text{ deci } m(\hat{A})=\arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

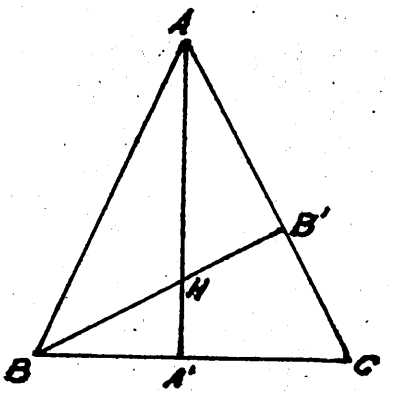
$$\cos B=\frac{\|BA\|^2+\|BC\|^2-\|AC\|^2}{2\|AB\|\cdot\|BC\|}=-\frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ deci } m(\hat{B})=\pi-\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos C=\frac{\|AC\|^2+\|BC\|^2-\|AB\|^2}{2\|AC\|\cdot\|BC\|}=\frac{7}{5\sqrt{2}}, \text{ deci } m(\hat{C})=\arccos\frac{7}{5\sqrt{2}}$$

11. Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC, să se arate că:

a) $\|AH\| = 2R\cos A$,

b) $a\|AH\| + b\|BH\| + c\|CH\| = 4S$



Soluție: a) Fie $AA' \perp BC$, $A' \in |BC|$ și $BB' \perp AC$, $B' \in |AC|$.

Patrulaterul $HB'CA'$ este inscriptibil ($m(\widehat{BB'C}) + m(\widehat{HA'C}) = \pi$), Deci $m(\hat{C}) + m(\widehat{A'HB'}) = \pi$ și pe de altă parte $m(\widehat{A'HB'}) + m(\widehat{B'HA}) = \pi$, deci $m(\widehat{AHB'}) = m(\hat{C})$.

În triunghiul dreptunghic ABB', $\cos A = \frac{\|AB'\|}{\|AB\|}$, deci $\|AB'\| = \|AB\|\cos A$; în triunghiul dreptunghic AHB' avem $\sin(\widehat{AHB'}) = \frac{\|AB'\|}{\|AH\|}$. Avem $\|AH\| = \frac{\|AB'\|}{\sin(\widehat{AHB'})} = \frac{\|AB\|\cos A}{\sin C} = 2R\cos A$ — căci $\frac{\|AB\|}{\sin C} = 2R$

b) Avem:

$a\|AH\| + b\|BH\| + c\|CH\| = 2R(a\cos A + b\cos B + c\cos C)$,

ținînd cont de relația stabilită la punctul a) și folosind teorema sinusurilor:

$2R(a\cos A + b\cos B + c\cos C) = 2R(2R\sin A\cos A + 2R\sin B\cos B + 2R\sin C\cos C) =$

$= 2R^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4R^2(\sin(A+B)\cdot\cos(A-B) + \sin C\cos C) =$

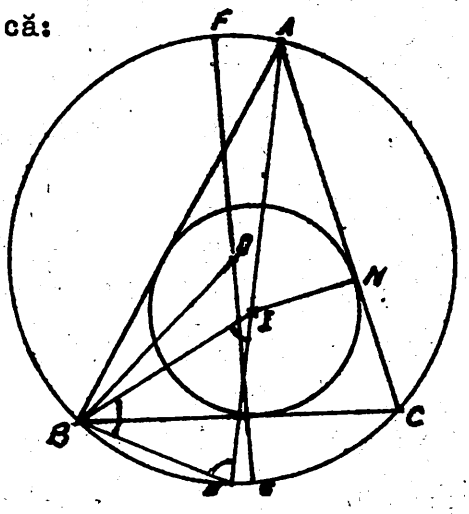
$= 4R^2\sin C(\cos(A-B) + \cos C) = 4R^2\sin C \cdot 2\cos\frac{A-B+C}{2}\cos\frac{A-B-C}{2} =$

$= 8R^2\sin C\sin B\sin A = 8\frac{a^2b^2c^2}{16S^2}\sin C\sin B\sin A = \frac{ab\sin C \cdot ac\sin B \cdot bc\sin A}{2S^2} =$

$= \frac{(2S)^3}{2S^2} = 4S.$

12. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, iar I centrul cercului înscris, Să se arate că:

$$\|OI\|^2 = R(R-2R).$$



Soluție: Fie $\{D, A\} = AI \cap C(O,R)$ și $\{F, G\} = OI \cap C(O,R)$.

Conform puterii punctului I față de cerc avem:

$\|IA\| \cdot \|ID\| = \|IG\| \cdot \|IF\|$

Dar
$\|IG\|\cdot\|IF\| = (R-\|OI\|)(R+\|OI\|) = R^2 - \|OI\|^2$
Deci
$$\|OI\|^2 = R^2 - \|IG\|\cdot\|IF\|.$$
Pe de altă parte $m(\widehat{DIB}) = \frac{m(\hat{A})+m(\hat{B})}{2} = m(\widehat{DBI})$
şi triunghiul BID fiind isoscel avem $\|BD\| = \|DI\|$
Cum $\|AI\| = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}$, iar $\|DI\| = \|BD\| = 2R\sin\frac{A}{2}$ rezultă că:
$\|OI\|^2 = R^2 - \|IG\|\cdot\|IF\| = R^2 - 2R\sin\frac{A}{2}\cdot\frac{R}{\sin\frac{A}{2}} = R^2 - 2Rr$ şi $\|OI\|^2 = R(R-2r)$

13. Să se arate că în orice triunghi ABC, avem:
$$\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right) \geq \frac{2r}{R}$$
Soluţie: Se ştie că $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (vezi pag. 32) şi deci:
$r = 2R\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right) = 2R\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \sin\frac{A}{2}\right) =$
$= -2R\sin^2\frac{A}{2} + 2R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}.$
Deci
$$2R\sin^2\frac{A}{2} - 2R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} + r = 0$$
Ecuaţia în $\sin\frac{A}{2}$ având soluţii reale, rezultă că discriminantul este mai mare sau egal decît 0, adică $R^2\cos^2\frac{B-C}{2} - 2Rr \geq 0$,
adică $\cos^2\frac{B-C}{2} \geq \frac{2r}{R}$

14. Să se calculeze $z^n + \frac{1}{z^n}$, ştiind că $z + \frac{1}{z} = 2\sin a$.
Soluţie: Avem $z^2 - 2\sin a\, z + 1 = 0$ şi
$$z_{1,2} = \sin a \pm \sqrt{\sin^2 a - 1} = \sin a \pm i\cos a$$
Deci $z_1 = \sin a + i\cos a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$
$$z_1^n = \cos n\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + i\sin n\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$
Deci $z^n + \frac{1}{z^n} = \cos n\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + i\sin n\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + \frac{1}{\cos n\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + i\sin n\left(\frac{\pi}{2} - a\right)} =$
$= \cos n\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + i\sin n\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + \cos n\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - i\sin n\left(\frac{\pi}{2} - a\right) =$
$= 2\cos n\left(\frac{\pi}{2} - a\right).$
Din $z_2 = \sin a - i\cos a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right)$
$$z_2^n = \cos n\left(a - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin n\left(a - \frac{\pi}{2}\right).$$

Deci: $z^n + \frac{1}{z^n} = \cos n\left(a-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin n\left(a-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\cos n\left(a-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin n\left(a-\frac{\pi}{2}\right)} =$

$= \cos n\left(a-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin n\left(a-\frac{\pi}{2}\right) + \cos n\left(a-\frac{\pi}{2}\right) - i \sin n\left(a-\frac{\pi}{2}\right) =$

$= \cos n\left(a-\frac{\pi}{2}\right) + \cos n\left(a-\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos n\left(a-\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos n\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$

Deci:

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$$

15. Să se rezolve ecuaţia:

$$z^n + z^{n-1} + \ldots + z + 1 = 0$$

Soluţie: Avem $z^n + z^{n-1} + \ldots + z + 1 = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$

Deci ecuaţia dată este echivalentă cu ecuaţia:

$$z^{n+1} - 1 = 0 \quad \text{cu} \quad z - 1 \neq 0$$

Rezultă

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n+1} + i \sin\frac{2k\pi}{n+1}, \quad k \in \overline{1,n}$$

16. Să se rezolve ecuaţia:

$$(z+1)^n - (z-1)^n = 0$$

Soluţie:

$$(z+1)^n - (z-1)^n = 0 \qquad (z-1)^n \neq 0$$

$$(z+1)^n = (z-1)^n$$

Deoarece z=1 nu verifică ecuaţia, putem scrie:

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$$

cu soluţiile: $\frac{z_k+1}{z_k-1} = \varepsilon_k$,

$$k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$$

Deci:

$$z_k = \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_{k-1}} = \frac{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} + 1}{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} - 1} = \frac{2\cos^2\frac{k\pi}{n} + i\,2\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\cos\frac{k\pi}{n}}{-2\sin^2\frac{k\pi}{n} + i\,2\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\cos\frac{k\pi}{n}} =$$

$$= \frac{2\cos\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}\right)}{2\sin\frac{k\pi}{n}\left(-\sin\frac{k\pi}{n} + i\cos\frac{k\pi}{n}\right)} = \operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n} \cdot \frac{\cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}}{-\frac{1}{i}\left(\cos\frac{k\pi}{n} - i\sin\frac{k\pi}{n}\right)} =$$

$$= -i \operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}$$

$$z_k = -i \cdot \operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}$$

17. Să se demonstreze că dacă $|z| < \frac{1}{2}$, atunci

$$|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}$$

Soluţie:

a) Se aplică proprietăţile modulului

$|a+b| \leq |a|+|b|$; $|a.b| \leq |a|.|b|$

$|(1+i)z^3+iz| \leq |(1+i)z^3+|iz| \leq |1+i|.|z|^3 + |i|.|z| <$

$< \sqrt{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+4}{8} < \frac{2+4}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

sau :

b) $|z\,[z^2(1+i)+i]| = |z|.|z^2+z^2i+i|$

$|z||z^2+z^2i+i| < \frac{1}{2}\left[|z|^2+|z|^2.|i|+|i|\right]$

pentru $|z| < \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\left[|z|^2+|z|^2.|i|+|i|\right] < \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1\right] = \frac{3}{4}$$

18. Se dau dreptele d şi d'. Să se arate că prin fiecare punct al spaţiului trece o dreaptă perpendiculară pe d şi d'

Soluţie:

a) Fie d şi d' două drepte oarecare.

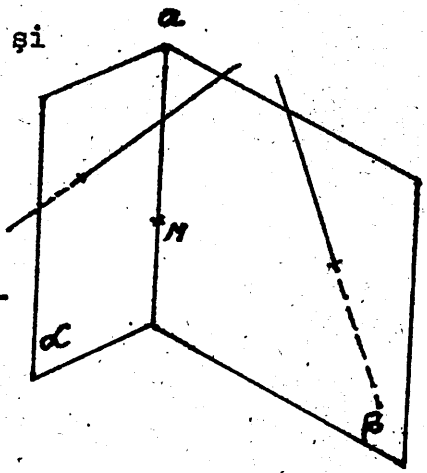
Considerăm un punct M al spaţiului.

Ducem prin M un plan perpendicular pe d şi tot prin M ducem un plan perpendicular pe d'.

Fie a dreapta lor de intersecţie

$d \perp \alpha$ şi $a \subset \alpha \Rightarrow d \perp a$

$d' \perp \beta$ şi $a \subset \beta \Rightarrow d' \perp a$



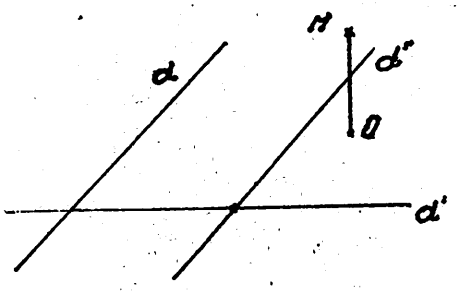
Cum punctul M l-am ales arbitrar rezultă că prin orice punct al spaţiului se poate duce o dreaptă perpendiculară pe alte două drepte.

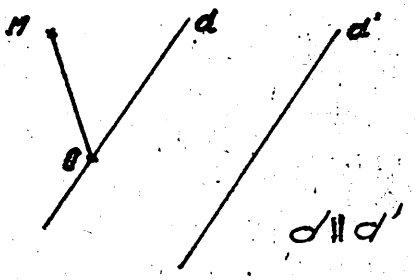
sau

b) Fie $M \in \mathcal{P}$. Dacă $d \parallel d'$, atunci ducem din M perpendiculara pe d - deci pe d' - în planul (M,d).

Dacă $d \cap d' \neq \emptyset$, atunci ducem d" perpendiculara din M pe planul (d,d'). Evident $d'' \perp d'$ şi $d'' \perp d$.

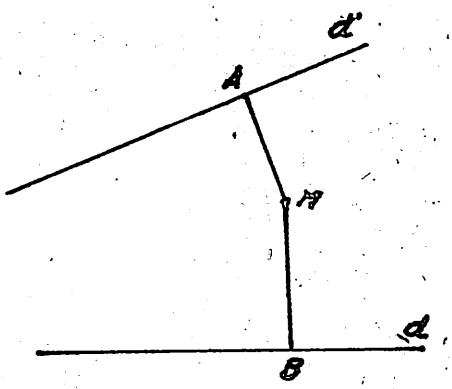
- Dacă $d \cap d' = \emptyset$, d' şi d oarecare, fie $N \in d'$ şi $d'' \parallel d$ cu $N \in d''$. Ducem d_2 perpendiculară pe dreptele date, din $M \in \mathcal{P}$ pe planul (d', d")





$d \cap d' = \emptyset$ şi d şi d' necoplanare.

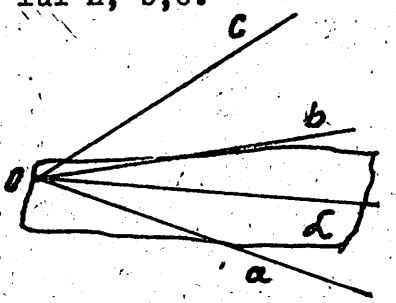
19. Se dau dreptele d,d' nesituate în acelaşi plan şi punctele $A \in d$, $B \in d'$. Să se afle locul geometric al punctelor M pentru care $pr_d M = A$ şi $pr_{d'} M = B$.



Soluţie: Dacă punctul M aparţine locului geometric cerut, atunci $MA \perp d$ şi $MB \perp d'$, deci MA şi MB sînt în plane perpendiculare pe d respectiv d', în A şi respectiv B. Aşadar punctul M aparţine intersecţiei celor două plane, care reprezintă o dreaptă.

Reciproc, orice punct M din intersecţia planelor perpendiculare în A, respectiv B pe d respectiv d', are proprietăţile: A pe d şi respectiv B pe d'.

20. Să se găsească locul geometric al punctelor din interiorul unui unghi triedru abc egal depărtat de muchiile lui a, b, c.



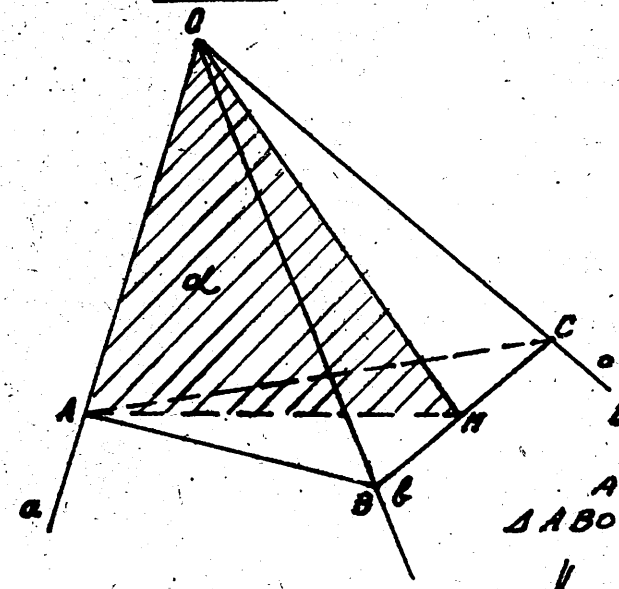
Soluţie:

Locul geometric al punctelor M egal depărtate de muchiile a,b este format din planul α perpendicular pe planul (a,b) ce conţine bisectoarea unghiului $\hat{ab}$. Aşadar punctele egal depărtate de a,b,c vor fi la intersecţia celor trei plane α, β, γ (β referitor la (bc), iar γ la (ac) care trec prin o, o fiind punctul comun al dreptelor a,b,c. Locul geometric se compune dintr-o semidreaptă cu originea în o situată în Int abc.

Reciproc, orice punct ce aparţine semidreptei respective se găseşte în interiorul triedrului şi este egal depărtat de muchiile abc.

21. Fie $\widehat{abc}$ un unghi triedru cu $ab \equiv ac$. Să se arate că planul bisector al unghiului diedru determinat de feţele care conţin muchia a este perpendicular pe planul feţei opuse.

Soluţie:



Fie un plan $\beta \perp \alpha$

notăm $\beta \cap \alpha = [A]$

$\beta \cap b = [B]$

$\beta \cap c = [C]$

deci $\beta = (ABC)$

$OA \perp \beta$ şi $ABC\beta \Rightarrow OA \perp AB \Rightarrow \widehat{BAO} \in 90°$

$OA \perp \beta$ şi $ACC\beta \Rightarrow OA \perp AC \Rightarrow \widehat{CAO} \in 90°$

$\triangle ABO = \triangle ACO$ $\begin{cases} |OA| \equiv |OA| \text{ latură comună} \\ \widehat{AOB} \equiv \widehat{AOC} \text{ (din ip. } ab \equiv ac) \\ \widehat{BAO} \equiv \widehat{CAO} \in 90° \end{cases}$

$\Downarrow$

$|AB| \equiv |AC|$ şi $|OB| \equiv |OC|$

Fie α planul bisector al unghiului diedru determinat de feţele ABO şi ACO. Notăm $\alpha \cap BC = \{M\}$

$\triangle ABC$ fiind isoscel şi $\widehat{BAM} \equiv \widehat{CAM} \Rightarrow \begin{cases} |BM| \equiv |MC| \\ \text{şi} \\ AM \perp BC \end{cases}$

$\triangle BOC$ fiind isoscel şi $|BM| \equiv |MC| \Rightarrow OM \perp BC$

Deoarece $\left.\begin{matrix} BC \perp AM \\ \text{şi} \\ BC \perp OM \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} BC \perp (AOM) = \alpha \\ BC \subset (OBC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (AOM) \perp (OBC)$

22. Să se construiască o dreaptă care să intersecteze două drepte date şi să fie perpendiculară pe o altă dreaptă dată.

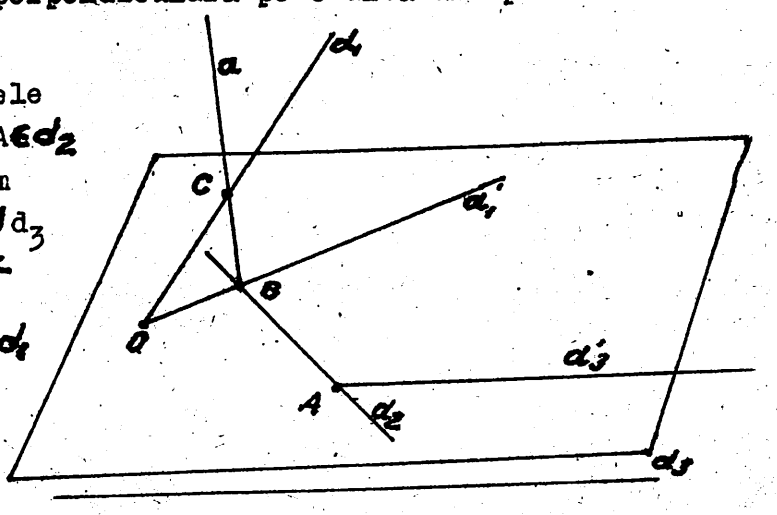
Soluţie:

Fie d_1, d_2, d_3 dreptele date. Luăm punctul $A \in d_2$ aparţinînd d_2, ducem prin A dreapta $d_3' \parallel d_3$ rezultă $(d_2 d_3') = \alpha$

Notăm $d_1 \cap \alpha = O$

construim $d_4 = pr_{\alpha} d_1$

notăm $d' \cap d_2 = \{B\}$

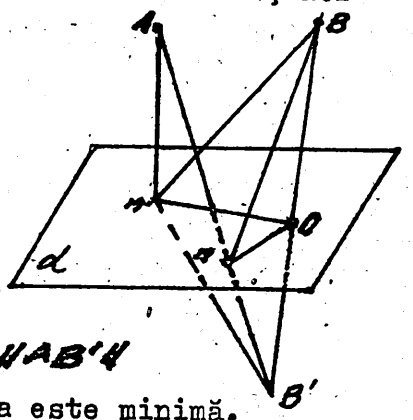


In punctul B ducem dreapta a $\perp \alpha$ şi notăm

$$a \cap d_1 = \{C\} \quad a \cap d_2 = \{B\}$$
$$a \perp \alpha \Rightarrow \left.\begin{matrix} a \perp d_3' \\ \alpha_3 \parallel d_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \perp d_3$$

Deci a este dreapta căutată.

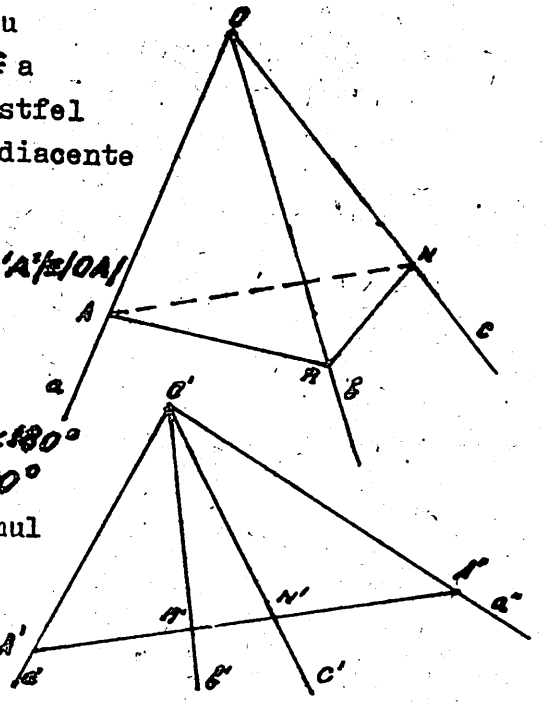
23. Fiind date punctele A,B situată de aceeaşi parte a unui plan, să se afle în acet plan punctul pentru care suma distanţelor sale la A şi B este minimă.



Soluţie:
Fie B' simetricul lui B faţă de planul α, notăm $BB' \cap \alpha = \{O\}$
α separă B şi B' α nu separă A şi B rezultă α separă A şi B' $\Rightarrow$
$AB' \cap \alpha = \{M\} \Rightarrow \|MB\| = \|MB'\|$

Deci $\|AM\|+\|BM\| = \|AM\|+\|B'M\| = \|AB'\|$
Pentru că A,M,B' sînt coliniare distanţa este minimă.
Oricare ar fi $M' \in \alpha \Rightarrow \|AM'\|+\|BM'\| = \|AM'\|+\|B'M'\| < \|AB'\|$
Deci punctul căutat se află la intersecţia dreptei determinate de unul din punctele date şi simetricul celuilalt punct dat faţă de planul α.

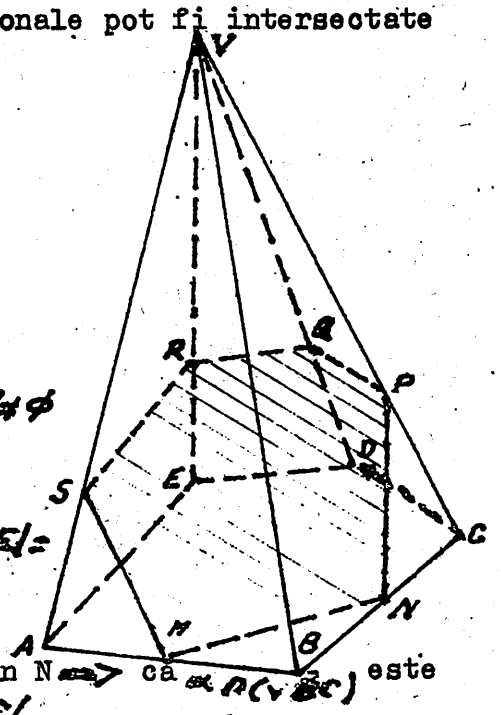
Pe una din muchiile unui unghi triedru se dă punctul A. Să se construiască pe celelalte muchii cîte un punct M,N astfel încît suma $\|AM\|+\|MN\|+\|NA\|$ să fie minimă.



Soluţie: Fie $\hat{abc}$ unghiul triedru şi O vîrful său. Luăm punctul $A \in a$
Desfăşurăm triedrul pe un plan astfel luăm un punct O' şi unghiurile adiacente
$a'\hat{O}b' \equiv \hat{aOb}, \; b'\hat{O}c' \equiv \hat{bOc}, \; c'\hat{O}a'' \equiv \hat{cOa}$
şi punctul $A'' \in a''$ astfel încît $|O'A''| \equiv |OA|$
Pentru că la triedru a' şi a" coincid, luăm $A'' \in a''$ astfel $|O'A''| \equiv |OA|$
a) Dacă $m(\hat{aOb})+m(\hat{bOc})+m(\hat{cOa}) < 180°$
$\Rightarrow m(\hat{a'Ob'})+m(\hat{b'Oc'})+m(\hat{c'Oa'}) < 180°$
problema se reduce la a găsi drumul cel mai scurt între A' şi A".

Acesta este segmentul /A'A"/ care intersectează pe b' şi c' respectiv în M' şi N'. Deci $b' \cap A'A'' = \{M'\}$, $c' \cap A'A'' = \{N'\}$
Luăm pe triedru $M \in b$ astfel ca $|OM| \equiv |O'M'|$ şi $N \in c$ astfel ca $|ON| \equiv |O'N'|$
Deci $\|AM\| + \|MN\| + \|NA\| = \|AM'\| + \|M'N'\| + \|N'A''\| = \|A'A''\|$.
drumul cel mai scurt.
b) Dacă $m(\hat{ab}) + m(\hat{bc}) + m(\hat{ca}) = 180$, atunci drumul cel mai scurt dintre A' şi A" care să intersecteze pe b' şi c' este A'-O'-A". Deci M = N = O.

25. Cîte muchii ale unei piramide pentagonale pot fi intersectate de un plan ?



Soluţie:
Considerăm punctele : $S \in |VA|$, $M \in |AB|$, $N \in |BC|$ fixate puncte necoliniare determină un plan $(MNS) = \alpha$
deci $\alpha \cap |AB| = \{M\}$, $\alpha \cap |BC| = \{N\}$
$\alpha \cap |VA| = \{S\}$

Pentru că $MN \cap |AB| \neq \phi$ şi $MN \cap |BC| \neq \phi$
$\Rightarrow MN \cap |AC| = \phi$

Baza fiind un pentagon convex $MN \cap |AE| = \phi$, $|MN| \cap |CD| = \phi$ şi
$MN \cap |DE| = \phi$
Planele α şi (VBC) având punctul comun N $\Rightarrow$ că $\alpha \cap (VBC)$ este o dreaptă NP, $P \in |VB| \Rightarrow PE \in |VC|$

(dacă $P \in |VB| \Rightarrow P \in |VB|$ şi $P \in \alpha$
$M \in |AB|$ şi $M \in \alpha$
$S \in |VA|$ şi $S \in \alpha$ $\Rightarrow \alpha = (VAB)$ contradicţie

$N \in \alpha$ şi $N \in VAB$.) deci $\alpha \cap |VC| = \{P\}$

In mod analog rezultă $\alpha \cap |VD| = \{Q\}$, $\alpha \cap |VE| = \{R\}$
Deci un plan (care nu trece printr-un vîrf al piramidei) intersectează cel mult şase muchii ale unei piramide pentagonale.

Pag. 137

26. Printr-o dreaptă dată să se ducă un plan pe care proiecţiile a două drepte date să fie paralele.

Soluţie:
Fie a,b,c dreptele date şi planul α care trece prin a ($a \subset \alpha$)

Notăm $b' = pr_\alpha b$ și $c' = pr_\alpha c$

dacă:

a) $b \parallel c \Rightarrow \forall \alpha, \alpha \subset \alpha, \alpha \parallel b$ și $\alpha \parallel c$

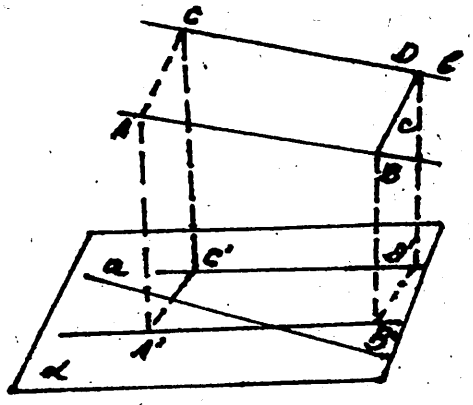
este soluție, deci problema are o infinitate de soluții

$A'B' \parallel AB, C'D' \parallel CD, AB \parallel CD \Rightarrow$

$A'B' \parallel C'D' \Rightarrow b' \parallel c'$

($A' = pr_\alpha A$, $B' = pr_\alpha B$,

$C' = pr_\alpha C$, $D' = pr_\alpha D$)



b) $b \cap c = \{M\}$ și $M' = pr_\alpha M$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} M \in b' \\ M \in d \end{matrix}\right\} \Rightarrow M \in b' \cap c' = \{M'\}$

$\Rightarrow b' \not\parallel c'$

problema nu are soluție.

c) b și c necoplanare și d perpendiculara comună a dreptelor b și c. Ducem prin a un plan $\alpha \perp d$ luînd $A \in \alpha$ și ducem prin A dreapta $d' \parallel d \Rightarrow \alpha = (a, d')$

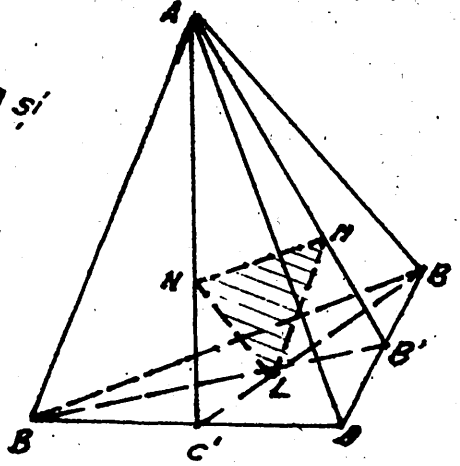
Dreptele b și c fiind $\perp d$ iar $d \parallel \alpha \Rightarrow b$ și c' vor fi $\perp d' = pr_\alpha d$.

Deci b' și c' sînt paralele.

27. Se consideră un tetraedru [ABCD] și centrele de greutate L, M, N ale triunghiurilor BCD, CAD, ABD

a) Să se arate că (ABC) // (LMN)

b) Să se afle raportul dintre $V[ABC]$ și $V[LMN]$.



<u>Soluție:</u>

a) Centrul de greutate se află la o treime de bază și două treimi de vîrf.

În $\Delta AC'B' \Rightarrow \frac{\|AN\|}{\|AM\|} = \frac{\|AN\|}{\|AC\|} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow MN \parallel BC$

$B'C' \parallel BC$ (linie mijlocie în ΔBCD) $\Rightarrow MN \parallel BC$ (1)

În $\Delta ABB' \Rightarrow \frac{\|MB'\|}{\|AB'\|} = \frac{\|LB'\|}{\|BB'\|} = \frac{1}{3} \Rightarrow LM \parallel AB$ (2)

În $\Delta ACC' \Rightarrow \frac{\|LC'\|}{\|CC'\|} = \frac{\|NC'\|}{\|AC'\|} = \frac{1}{3} \Rightarrow LN \parallel AC$ (3)

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow (MNL) \parallel (ABC)$ și

$\triangle LMN \sim \triangle ABC \begin{cases} \hat{N} \equiv \hat{B} \ (\text{∠ cu lot. } \parallel) \\ \hat{M} \equiv \hat{A} \ (\text{" " " "}) \end{cases}$

$\triangle AB'C' \Rightarrow \frac{\|NM\|}{\|B'C'\|} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\|NM\|}{\frac{\|BC\|}{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\|NM\|}{\|BC\|} = \frac{1}{3}$

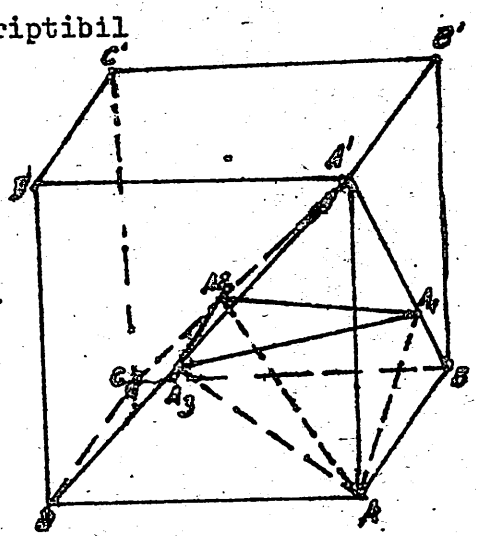
Deci $\frac{\mathcal{V}[ABC]}{\mathcal{V}[LMN]} = (3)^2 = 9$

28. Se consideră un cub $[ABCDA'B'C'D']$. Punctul A se proiectează pe A'B, A'C, A'D respectiv în A_1, A_2, A_3. Să se arate:

a) $A'C \perp (A_1A_2A_3)$

b) $AA_1 \perp A_1A_2$, $AA_3 \perp A_2A_3$

c) $AA_1A_2A_3$ este un patrulater inscriptibil



Soluție:

a) $\left.\begin{matrix} BC \perp (A'AB) \\ AA_1 \subset (A'AB) \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp AA_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} AA_1 \perp BC \\ AA_1 \perp A'B \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} AA_1 \perp (A'BC) \\ A'C \subset (A'BC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AA_1 \perp A'C \left.\begin{matrix} \\ AA_2 \perp A'C \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} A'C \perp (AA_1A_2) \\ A_1A_2 \subset (AA_1A_2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'C \perp A_1A_2$

Analog se arată că $A'C \perp A_1A_3$

Deci $A'C \perp (A_1A_2A_3)$

b) $\left.\begin{matrix} AA_1 \perp (A'BC) \\ A_1A_2 \subset (A'BC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AA_1 \perp A_1A_2$

Analog se arată că $AA_3 \perp A_2A_3$

c) $\left.\begin{matrix} A'C \perp (AA_1A_2) \\ A'C \perp (AA_2A_3) \end{matrix}\right\}$ s.i. $\Rightarrow$ punctele $A, A_1A_2A_3$ sînt coplanare.

Punctele fiind coplanare și $m(A\hat{A}_1A_2) + m(AA_3\hat{A}_2) = 180°$ rezultă că patrulaterul $AA_1A_2A_3$ este inscriptibil.

29. Se consideră triunghiurile dreptunghice BAC și ABD $(m(\hat{ACB}) = m(\hat{ADB}) = 90)$, situate în plane perpendiculare, M, N fiind mijloacele segmentelor $[AB]$ și $[CD]$

Să se arate că $MN \perp CD$

Soluție:

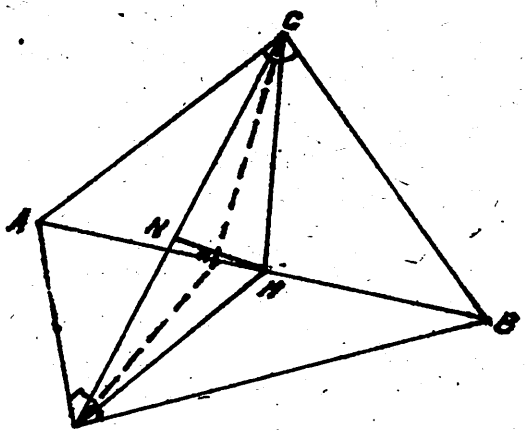
$|AM| \equiv |MB|$ și $|CN| \equiv |ND|$, $m(\hat{ACB}) = m(\hat{ADB}) = 90$

rezultă CM mediană în triunghiul dreptunghic ACB dusă din unghiul drept.Deci:

$$\|CM\| = \frac{\|AB\|}{2} = \|AM\|$$

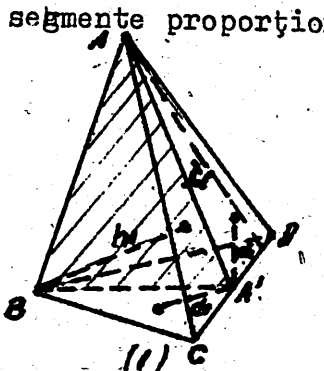
DM este mediană în triunghiul dreptunghic ADB dusă din unghiul drept.Deci:

$$\|DM\| = \frac{\|AB\|}{2} = \|AM\|$$



Din cele două relaţii rezultă că triunghiul CDM este isoscel,cum MN este mediană în triunghi isoscel dusă din vîrful acestuia,este şi înălţime în acest triunghi,deci $MN \perp CD$.

30. Să se demonstreze că semiplanul bisector al unui unghi diedru într-un tetraedru împarte muchia opusă în segmente proporţionale cu ariile feţelor alăturate.



Soluţie:

Planul bisector (ABA') împarte tetraedrul ABCD în două tetraedre ABCA' şi ABDA'.Proiectăm B pe planul (ACD)

Notăm cu h_1 distanţa de la B la planul (ACD)

Notăm $i_1 = d(A, CD)$

Calculăm: $$\frac{V[ABCA']}{V[ABDA']} = \frac{\frac{1}{3} \cdot h_1 \mathcal{A}[ACA']}{\frac{1}{3} h_1 \mathcal{A}[ADA']} = \frac{\mathcal{A}[ACA']}{\mathcal{A}[ADA']} = \frac{\frac{1}{2} i_1 \|A'C\|}{\frac{1}{2} i_1 \|A'D\|} = \frac{\|A'C\|}{\|A'D\|}$$

sau $$\frac{V[ABCA']}{V[ABDA']} = \frac{\frac{1}{3} d_1 \mathcal{A}[ABC]}{\frac{1}{3} d_1 \mathcal{A}[ABD]} = \frac{\mathcal{A}[ABC]}{\mathcal{A}[ABD]} \quad (2)$$

unde d_1 este distanţa punctului A' la planele (ABC) şi (ABD),A' aparţinînd planului bisector,aceste distanţe sînt egale.

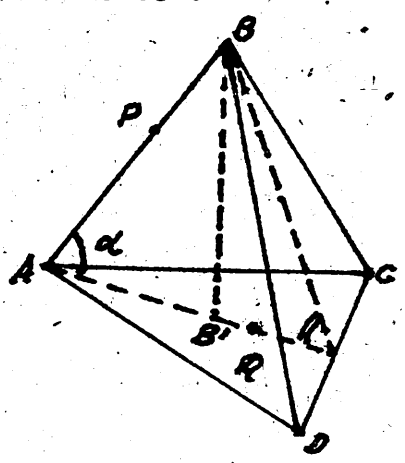
Din (1) şi (2) $\Rightarrow \frac{\|A'C\|}{\|A'D\|} = \frac{\mathcal{A}[ABC]}{\mathcal{A}[ABD]}$.

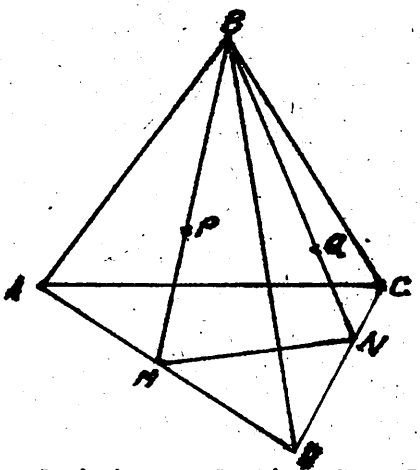
31. Fie A un vîrf al unui tetraedru regulat şi P,Q două puncte pe suprafaţa lui.Să se arate că $m(\widehat{PAQ}) \leq 60°$

Soluţie:

1. Dacă P şi Q se găsesc pe aceeaşi faţă laterală a tetraedrului regulat,problema este evidentă pentru că orice unghi al tetrae-

drului este de 60^0.





2.Fie P pe una din muchiile tetraedrului în unul din planele care sînt înţepate de muchia respectivă.Dacă Q se află pe înălţimea acestor plane (care este în acelaşi timp mediană,mediatoare, bisectoare) rezultă că BB'=înălţimea tetraedrului.Considerăm muchia tetraedrului egală cu unitatea.Atunci $\|BB'\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ iar $\|AB'\| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\cos \angle = \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 60^\circ \Rightarrow \angle < 60^\circ$$

Dacă Q se află în unul din semiplanele din stînga sau din dreapta înălţimii, $(\widehat{PAQ})$ se apropie de 60^0 ea neputînd fi niciodată mai mare de 60^0.

Soluţia II

$P \in Int.\ ABD$; $Q \in Int.\ DAC$. $AP \cap BD = \{M\}$; $AQ \cap DC = \{N\}$

$$\cos(\widehat{PAQ}) = \frac{\|AM\|^2 + \|AN\|^2 - \|MN\|^2}{2\|AM\| \cdot \|AN\|}$$

Dar $\|AN\| < a$ şi $\|AM\| < a$

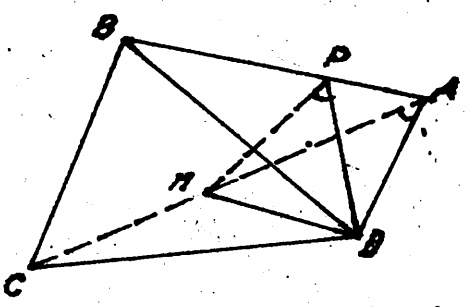
unde $a = \|AB\|$ Rezultă: $\|AN\| > \frac{a\sqrt{3}}{2}$ şi $\|AM\| > \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\cos(\widehat{PAQ}) < \frac{a^2 + a^2 - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot a^2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{8a^2 - 3a^2}{2 \cdot 4a^2 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{5}{6} > \frac{1}{2}$$

$$\cos(\widehat{PAQ}) > \frac{1}{2} \Rightarrow \angle < 60^\circ$$

32. Să se arate că suma măsurilor unghiurilor diedre ale unui tetraedru este mai mare decît 360^0.

Soluţie:



$\widehat{MPD}$ unghiul diedru dintre feţele (BDA) şi (BCA)

Consider unghiurile diedre ale feţelor care trec prin B(din de-

sen, pentru feţele (CBD)/(DBA), (BCA). Notez cu $(\hat{BA})$ unghiul diedru care are muchia AB adică unghiul diedru al feţelor ce se intersectează după dreapta AB (adică (DBA) şi (CBA)). Atunci, din considerenţul că $m(\hat{MPD}) \geq m(\hat{MAD})$: [Pot considera $\hat{MPD}$ ca fiind pr$(\hat{MAD})$ pe planul (MPD), deoarece $AP \perp$ pe planul (MPD), (A şi P fiind vîrfurile triunghiului).

Aceasta este adevărată în cazul în care înălţimea dusă din A în $\triangle ABD$ intersectează segmentul [MD] (în interiorul triunghiului)]

Dacă accept acest considerent (fără demonstraţie) $\Rightarrow$ că voi avea pentru vîrful B inegalităţile: $(\hat{AB}) \geq C\hat{A}D / (B\hat{D}) \geq A\hat{D}C / (B\hat{C}) \geq A\hat{C}D$

Din acestea, cel puţin una din inegalităţi e strictă, deoarece dacă două ar fi nestricte de exemplu primele două, ar rezulta că $AB \perp (CDA)$ şi $BD \perp (CDA) \Rightarrow AB \parallel BD$ şi ABCD nu ar putea fi tetraedru. Deci:

1. $(\hat{AB}) + (B\hat{C}) + (B\hat{D}) > 180 = m(C\hat{A}D) + m(A\hat{D}C) + m(A\hat{C}D)$

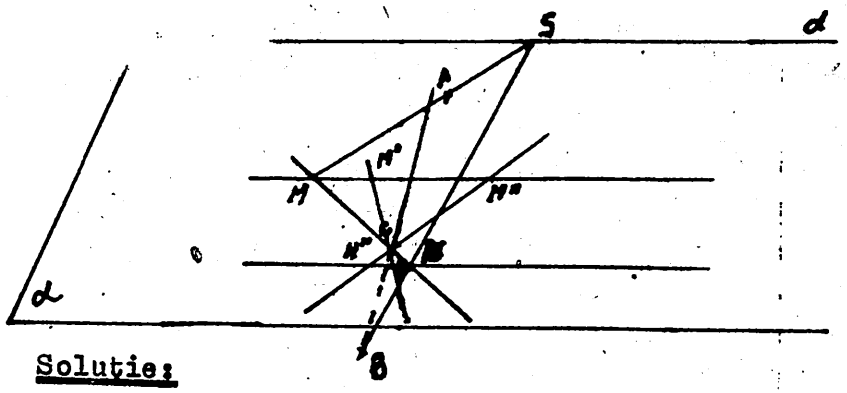
Analog pentru celelalte vîrfuri ale tetraedrului

2. $(\hat{AD}) + (\hat{AC}) + (\hat{AB}) > 180 = m(B\hat{D}C) + m(D\hat{C}B) + m(C\hat{B}D)$
3. $(D\hat{C}) + (D\hat{A}) + (D\hat{B}) > 180$
4. $(\hat{CD}) + (\hat{CA}) + (\hat{CB}) > 180$

$\frac{1}{2}[(\hat{AB}) + (\hat{AC}) + (\hat{AD}) + (\hat{BD}) + (\hat{CD}) + (\hat{BC})] > 2 \cdot 360$

se adună membru cu membru relaţiile şi rezultă că suma unghiurilor este mai mare de 360, unde în membrul stîng am chiar suma măsurilor unghiurilor diedre ale unui tetraedru.

33. Se consideră dreptele paralele d_1 şi d_2 conţinute într-un plan α şi o dreaptă AB care intersectează planul α în C. O dreaptă variabilă inclusă în α şi trecînd prin C, taie d_1 şi d_2 respectiv în M şi N. Să se afle locul geometric al intersecţiei $AM \cap BN$ In ce caz locul geometric este mulţime vidă ?

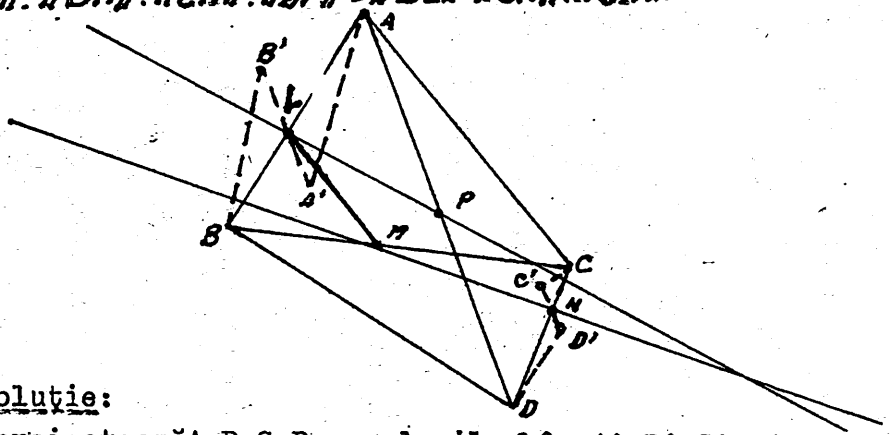


Soluţie:

$AM \cap BN = \{S\}$ Cum M variabil pe d_1 şi N variabil pe $d_2 \Rightarrow$ AM conţinută în planul (Ad_1), iar BN în planul (Bd_2) Deci dreptele AM şi

BN descriu planele(Ad_1) şi (Bd_2).Intersecţia acestor plane va fi mulţimea punctelor $\{S\}$,deci locul geometric cerut.Cum se ştie că două plane se intersectează după o dreaptă $\Rightarrow d \triangleq (Ad_1) \cap (Bd_2)$ Cum $(Ad_1) \cap \alpha = d_1$ şi $(Bd_2) \cap \alpha = d_2$ iar $d_1 \parallel d_2 \Rightarrow d \parallel \alpha$ deci $d \parallel d_1, d \parallel d_2$ .In cazul M care $AM \parallel BN$,locul geometric al lui $AM \cap BN = \phi$.

34. Un plan α intersectează laturile $[AB], [BC], [CD], [DA]$ ale unui tetraedru $[ABCD]$ în L,M,N,P.Să se demonstreze:
$\|AL\| \cdot \|BM\| \cdot \|CN\| \cdot \|DP\| = \|BL\| \cdot \|CM\| \cdot \|DN\| \cdot \|AP\|$



Soluţie:
Se proiectează A,B,C,D pe planul α în A',B',C',D'
Se formează triunghiurile asemenea

$\left.\begin{matrix} AA' \perp \alpha \\ A'L \in \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow AA' \perp A'L \Rightarrow \Delta AA'L$ dreptunghic

$\left.\begin{matrix} BB' \perp \alpha \\ L B' \in \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow LB' \perp BB' \Rightarrow \Delta BB'L$ dreptunghic $\quad \not\triangleleft D_1 \equiv \not\triangleleft A_1 \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} DD' \perp \alpha \\ D'P \in \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow D'P \perp DD' \Rightarrow \Delta DD'P$ dreptunghic $\quad \Delta DD'P \sim \Delta PA'A \Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} AA' \perp \alpha \\ A'P \in \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow AA' \perp A'P \Rightarrow \Delta A'AP$ dreptunghic $\quad \dfrac{\|DD'\|}{\|AA'\|} = \dfrac{\|DP\|}{\|AP\|}$

Analog din triunghiuri asemenea:

$\dfrac{\|BM\|}{\|CM\|} = \dfrac{\|BB'\|}{\|CC'\|}$; $\dfrac{\|CN\|}{\|DN\|} = \dfrac{\|CC'\|}{\|DD'\|}$; $\dfrac{\|AL\|}{\|BL\|} = \dfrac{\|AA'\|}{\|BB'\|}$

Se înmulţesc cele patru relaţii membru cu membru

$\Rightarrow \dfrac{\|AL\|}{\|BL\|} \cdot \dfrac{\|BM\|}{\|CM\|} \cdot \dfrac{\|CN\|}{\|DN\|} \cdot \dfrac{\|DP\|}{\|AP\|} = 1$ de unde rezultă egalitatea cerută

35. Dintr-un punct A exterior unui plan α se duce perpendiculara OA , $O \in \alpha$ şi se iau $B, C \in \alpha$ .Fie H, H_1 respectiv ortocentrele triunghiurilor ABC,OBC,AD şi BE înălţimi în triunghiul ABC,iar BE_1 înălţime în triunghiul OBC.Să se arate:

a) $HH_1 \perp (ABC)$

b) $\dfrac{\|OA\|}{\|AD\|} \cdot \dfrac{\|DH_1\|}{\|H_1B\|} \cdot \dfrac{\|BE\|}{\|EE_1\|} = 1$

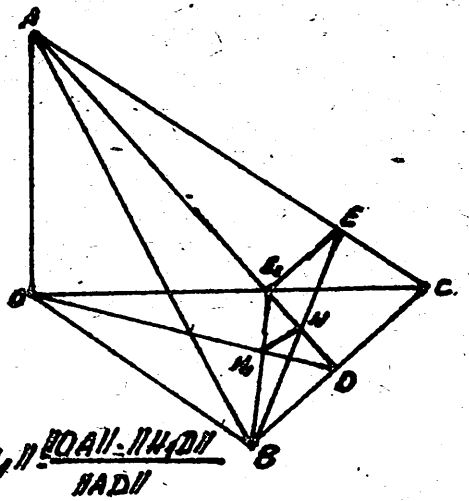
Soluţie:

a) $\left.\begin{matrix} AD \perp BC \\ OD \perp BC \end{matrix}\right\} BC \perp (OAD)$

$(OAD) \perp (ABC)$

$\left.\begin{matrix} H_1 \in OD \\ H \in AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow HH_1 \perp AD \Rightarrow$

$HH_1 \perp (ABC)$



b) $HH_1 \perp AC \Rightarrow \Delta OAD$ și ΔHH_1D sînt asemenea, $A\hat{D}O$ unghi comun

Rezultă: $\frac{\|OA\|}{\|H_1H\|} = \frac{\|AD\|}{\|H_1D\|} = \frac{\|OD\|}{\|HD\|} \Rightarrow \|HH_1\| = \frac{\|OA\| \cdot \|H_1D\|}{\|AD\|}$

$EE_1 \perp AC$

deoarece $BE \perp AC$ și $BE_1 \perp OC \Rightarrow (EE_1B) \perp (AOC)$

Triunghiurile AOC și E_1EC sînt dreptunghice și asemenea, $\hat{OCA}$ - unghi comun. Rezultă:

$\frac{\|EE_1\|}{\|HH_1\|} = \frac{\|BE\|}{\|H_1B\|} = \frac{\|E_1B\|}{\|HB\|} \Rightarrow \|HH_1\| = \frac{\|EE_1\| \cdot \|H_1B\|}{\|BE\|}$

Deci

$$\frac{\|OA\| \cdot \|H_1D\|}{\|AD\|} \cdot \frac{\|BE\|}{\|EE_1\| \cdot \|H_1B\|} = 1$$

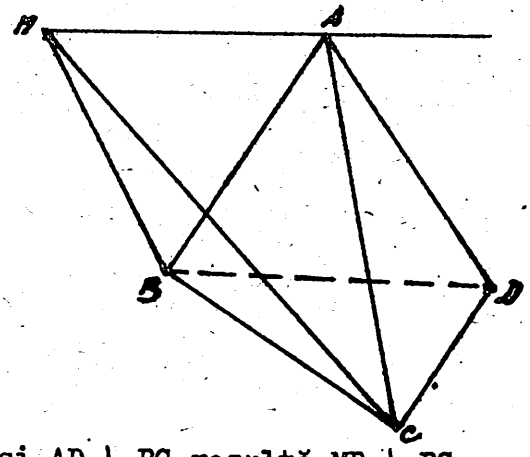
36. Se dă un tetraedru ABCD în care $AB \perp CD$ și $AC \perp BD$. Să se arate:

a) $\|AB\|^2 + \|CD\|^2 = \|BC\|^2 + \|AD\|^2 = \|CA\|^2 + \|BD\|^2$

b) mijloacele celor șase muchii se află pe o sferă

Soluție:

a) Din ex. 26 pag. 73 rezultă că $AD \perp BC$. Fie M punctul de intersecție al paralelei dusă prin A la dreapta BD cu paralela dusă prin B la dreapta AD. Patrulaterul MADB este paralelogram, deci $|MA| \equiv |BD|$ și $|MB| \equiv |AD|$



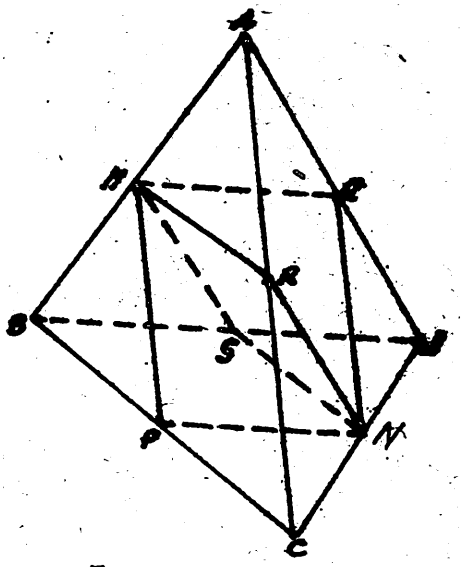
Dreapta MA fiind paralelă cu BD și $BD \perp AC$ rezultă că $MA \perp AC$.

Dreapta MB fiind paralelă cu AD și $AD \perp BC$, rezultă $MB \perp BC$.

Triunghiurile MAC și MBC fiind dreptunghice și avînd aceeași ipotenuză, vom avea $\|MA\|^2 + \|AC\|^2 = \|MB\|^2 + \|BC\|^2$, de unde $\|BD\|^2 + \|AC\|^2 = \|AD\|^2 + \|BC\|^2$. Analog se arată că aceste sume de pătrate sînt egale cu $\|AB\|^2 + \|CD\|^2$

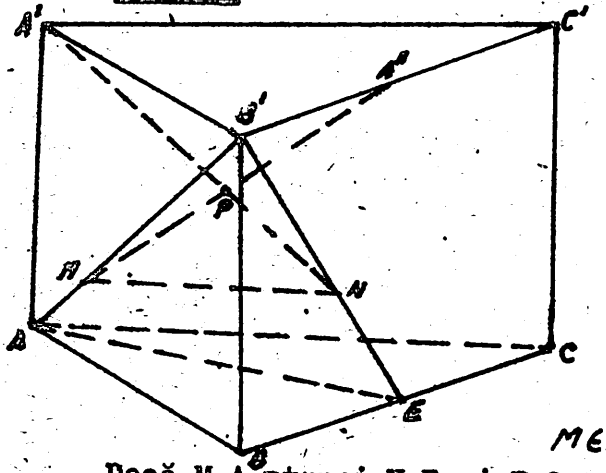
b) Fie M, N, P, Q mijloacele muchiilor $|AB|$, $|CD|$, $|BC|$, $|AD|$. Avem $MP \parallel AC \parallel NQ$ iar $MQ \parallel BD \parallel PN$ de unde rezultă $MQ \perp QN$ și

MP ⊥ PN. Deci M,N,P,Q se găsesc pe o sferă de diametrul [MN] (MNPQ dreptunghi). Analog fie R și S mijloacele muchiilor [AC] și [BD]. Avem MR // BC // SN iar MS // AD // RN de unde rezultă MR ⊥ RN și MS ⊥ SN.
Deci M,S,P,N se găsesc pe o sferă de diametrul [MN] (MSNR dreptunghi.



37. Se dă o prismă triunghiulară [ABCA'B'C'] care are fețele laterale pătrate. Fie M un punct mobil pe [AB'], N proiecția lui M pe (BCC') și A" mijlocul lui [B'C']. Să se arate că A'N și MA" se intersectează într-un punct P și să se afle locul geometric al lui P.

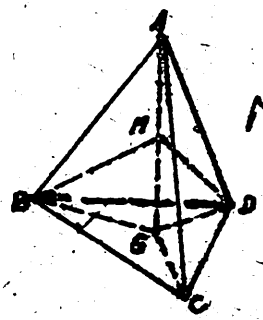
Soluție :



Fețele laterale fiind pătrate rezultă că prisma este triunghiulară regulată dreaptă.
Dreapta MN ⊥ (BCC') și AA" ⊥ (BCC') rezultă A'A" // MN.
Deci A',A",M,N sînt coplanare.
Dreptele MA" și A'N nu sînt paralele, sînt coplanare, deci ele se intersectează într-un punct P. Fie E = $pr_{BC}A$, atunci, dacă $M \in [AB'], N \in [B'E]$ ($pr_{(BCC')}[AB'] = [B'E]$)
Dacă M=A atunci N=E și P=O unde $\{O\} = AA'' \cap A'E$ (A',A",E,A coplanare). Din $P \in A'N \subset (A'B'E)$ și $P \in A''M \subset (A''B'A)$ rezultă $P \in (A'B'E) \cap (A''B'A) = B'O$
Locul geometric al punctului P este $[B'O]$

38. Fie tetraedrul ABCD și G centrul de greutate al triunghiului BCD. Să se arate că dacă $M \in AG$ atunci $v[MGBC] = v[MGCD] = v[MGDB]$

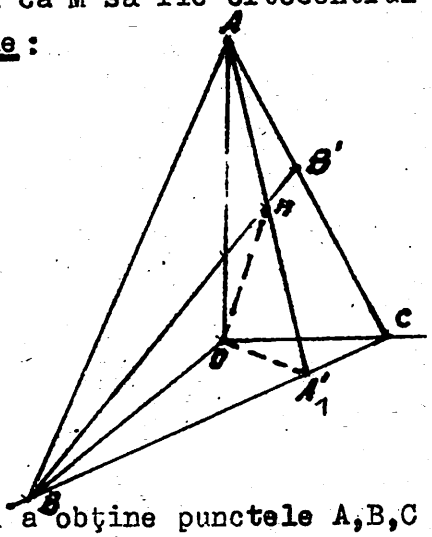
Soluție :



Din ex. 7/15 avem:
$\mathcal{A}[GBC] = \mathcal{A}[GCD] = \mathcal{A}[GDB]$
și cum cele trei tetraedre au aceeași înălțime, anume $d(M,(BCD))$, rezultă egalitatea din enunț.

9 Se consideră punctul M aparţinînd interiorului unui triedru tridreptunghic de vîrf O.Să se ducă prin M un plan care să intersecteze muchiile triedrului respectiv în punctele A,B,C astfel ca M să fie ortocentrul triunghiului ABC.

Soluţie :



1) Presupunem problema rezolvată.Fie AA_1 şi BB_1 înălţimi ale triunghiului ABC,atunci

$\{M\} = AA_1 \cap BB_1$

din $AO \perp (BOC)$ şi $AA_1 \perp BC \subset (BOC)$ rezultă $OA_1 \perp BC$

Deci $BC \perp (AOA_1)$ şi cum $OM \subset (AOA_1)$, avem $OM \perp BC$

Analog $OM \perp AC$ rezultă

$OM \perp (ABC)$

Pentru a obţine punctele A,B,C ducem prin M un plan perpendicular pe OM.

Soluţia 2 :

$AP \perp BC \Rightarrow AB^2 = AP^2 + BP^2$

triedru drept $AP^2 = OA^2 + OP^2$

$\Rightarrow AB^2 = OA^2 + OP^2 + BP^2$

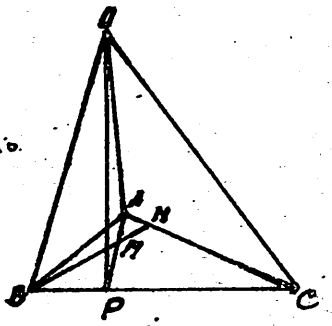
$\underbrace{AB^2 - OA^2}_{OB^2} = OP^2 + BP^2$

Deci $OB^2 = OP^2 + BP^2 \Rightarrow m(\hat{OPB}) = 90°$

$AP \perp BC$

$OP \perp BC$

Planul $OAP \perp (ABC) \Rightarrow m(\hat{OMB}) = 90°$ **



Repet raţionamentul pentru $BN \perp AC \Rightarrow m(\hat{OMA}) = 90°$ **

Din * ∧ ** $\Rightarrow OM \perp (ABC)$

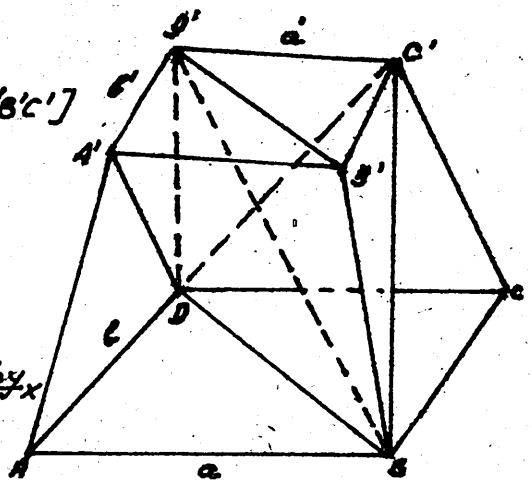
Pag.138

40. O grămadă de nisip are drept bază două dreptunghiuri situate în plane paralele şi feţele laterale trapeze.Să se găsească volumul grămezii cunoscînd dimensiunile a,b ale bazei mari, a',b' ale bazei mici şi h distanţa dintre cele două baze.

Soluţie 1:

Poliedrul [ABCDA'B'C'D'] se descompune în şase piramide triunghiulare: [BADA'] [C'BDC] [BB'A'D'] [BD'B'C'] [BDA'D'] [BDD'C']

$v[BADA'] = \frac{1}{3} \frac{ab}{2} h = \frac{abh}{6} = v[C'BDC]$.



$v[BB'A'D'] = \frac{1}{3}\frac{a'b'}{2}h = \frac{a'b'h}{6} = v[BD'B'C']$

Să calculăm $v[BDA'D']$

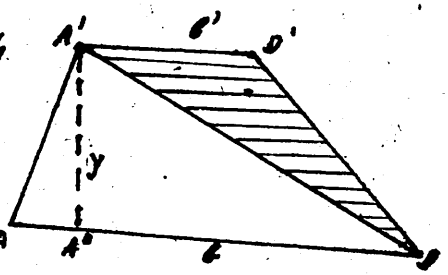
Notăm $x = d(B,(ADD'A'))$

$v[A'BAD] = \frac{1}{3}\mathcal{A}[ADB]\cdot h = \frac{abh}{6}$

$v[A'BAD] = \frac{1}{3}\mathcal{A}[ADA']\cdot x = \frac{1}{3}\frac{by}{2}x = \frac{by}{6}x$

unde $y = d(A',AD)$

din $\frac{abh}{6} = \frac{byx}{6} \Rightarrow x = \frac{ah}{y}$



$v[BDA'D'] = \frac{1}{3}\frac{b'y}{2}x = \frac{1}{3}\frac{b'y}{2}\cdot\frac{ah}{y} = \frac{b'ah}{6}$

Analog $v[BDD'C'] = \frac{a'bh}{6}$

$v[ABCDA'B'C'D'] = 2\frac{abh}{6} + 2\frac{a'b'h}{6} + \frac{ab'h}{6} + \frac{a'bh}{6} =$

$= \frac{h}{6}[ab + a'b' + ab + ab' + a'b' + a'b] =$

$= \frac{h}{6}[ab + a'b' + (a+a')(b+b')]$

<u>Soluţia</u> 2:

Avem un poliedru ale cărui baze sînt situate în plane paralele, iar feţele laterale sînt trapeze, deci pot aplica formula lui Simson:

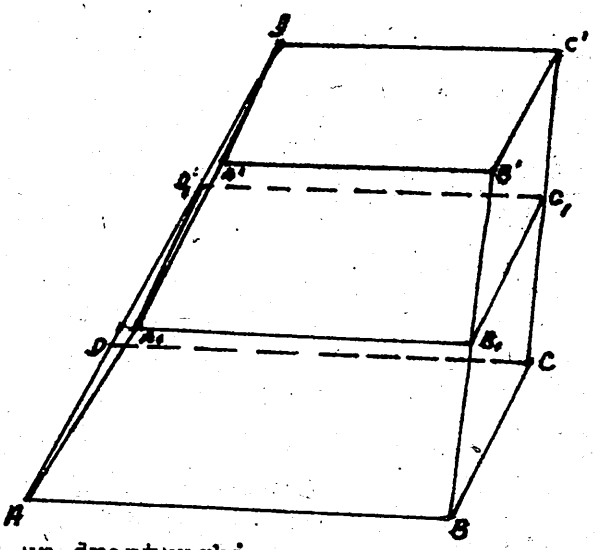
$V = \frac{h}{6}(B + b + 4B')$

unde h e lungimea înălţimii

B aria bazei mari

b aria bazei mici

B' aria $A_1B_1C_1D_1$ cu A_1, B_1, C_1, D_1 mijloacele muchiilor.



$B = a \times b$

$b = a' \times b'$ $A_1B_1C_1D_1$ este tot un dreptunghi.

A_1B_1 linie mijlocie în $ABA'B' \Rightarrow a_1 = \frac{a+a'}{2}$

B_1C_1 linie mijlocie în $BCC'B' \Rightarrow b_1 = \frac{b+b'}{2}$

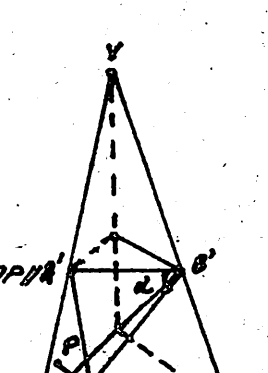
$\Rightarrow B = \frac{(a+a')(b+b')}{4}$

Inlocuind $\Rightarrow V = \frac{h}{6}[ab + a'b' + (a+a')(b+b')]$

41. Se dă un trunchi de piramidă de înălţime h şi ariile bazelor B şi b. Se uneşte un punct oarecare O al bazei mari cu vîrfurile A, B, A', B' ale unei feţe laterale.

a) Să se arate că $v[OA'B'A] = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}} \cdot v[OABB']$. Să se determine cu ajutorul relaţiei de mai sus formula volumului trunchiului de piramidă.

Soluţia 1:



Fie $\alpha = m(\widehat{A'B'A})$ şi $P = pr_{ABA'B'} O$

Avem $v[OA'B'A] = \frac{1}{3} \mathcal{V}[AB'A'] \cdot \|OP\| =$

$= \frac{1}{6} \|A'B\| \cdot \|AB'\| \sin\alpha \|OP\|$

$v[OABB'] = \frac{1}{3} \mathcal{V}[ABB'] \cdot \|OP\| = \frac{1}{6} \|AB\| \cdot \|AB'\| \sin\alpha \|OP\|$

De unde

$$\frac{v[OA'B'A]}{v[OABB']} = \frac{\|A'B'\|}{\|AB\|}$$

Deoarece poligoanele celor două baze sînt asemenea, avem

$$\frac{b}{B} = \frac{\|A'B'\|^2}{\|AB\|^2} \quad \text{şi} \quad \frac{v[OA'B'A]}{v[OABB']} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}}$$

Fie un trunchi de piramidă cu bazele $[A_1, A_2, \ldots A_n]$, $[B_1, B_2 \ldots B_n]$ şi vom nota cu $V_i = v[OA_i, A_{i+1}, B_{i+1}]$ $(A_{n+1} = A_1, B_{n+1} = B_1)$

şi $W_i = v[OA_i B_i B_{i+1}]$

Volumul trunchiului va fi

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i + \sum_{i=1}^{n} W_i + v[OB_1 B_2 \ldots B_n]$$

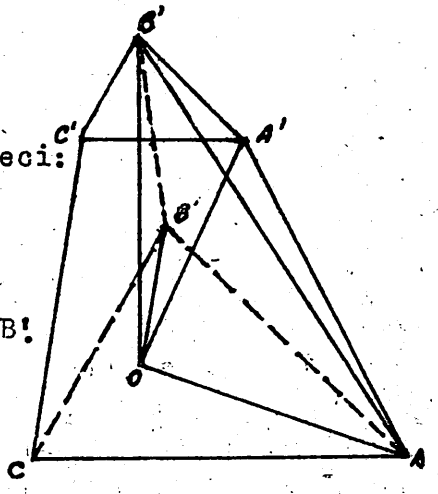
dar $\sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} \mathcal{V}(OA_i' A_{i+1}) h = \frac{Bh}{3}$

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}} \cdot \sum_{i=1}^{n} V_i = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}} \cdot \frac{Bh}{3} = \frac{\sqrt{Bb}\,h}{3}$$

deci $V[OB_1 B_2 \ldots B_n] = \frac{bh}{3}$

$$V = \frac{Bh}{3} + \frac{\sqrt{Bb}h}{3} + \frac{bh}{3} = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{Bb})$$

Soluţia 2:



a) Avem 2 piramide cu vîrf comun şi bazele situate în planul AA' B'B deci:

$$\frac{v[OA'B'A]}{v[OAB'B]} = \frac{S[AA'B']}{S[ABB']}$$

A'B' // AB $\Rightarrow$ Înălţimea dusă din $\hat{B}'$ pe AB e egală cu înălţimea dusă din A pe A'B'

Deci:

$$\frac{S[AA'B']}{S[ABB']} = \frac{[A'B']}{[AB]}$$

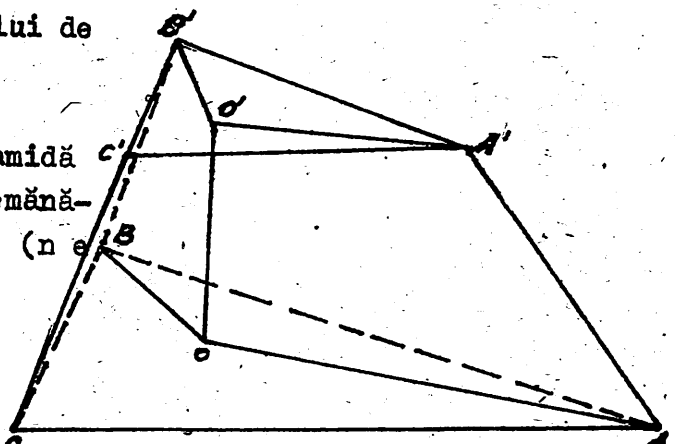
Bazele sînt poligoane asemenea $\Rightarrow$

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}} = \frac{[A'B']}{[AB]} = \frac{S[AA'B']}{S[ABB']} = \frac{v[OA'B'A]}{v[OABB']}$$

b) OO' înălţimea trunchiului de piramidă

$|OO'| = h$.

Volumul trunchiului de piramidă se descompune în n prisme asemănătoare cu $[OO'B'A'AB]$ (n e numărul laturilor bazelor)



Deci: $V = \sum_{i=1}^{n} v_i$

$$v_1 = v[OABB'] + v[OA'B'A] + v[OA'B'] = v[OABB']\left(1 + \frac{v[OA'B'A]}{v[OABB']}\right) + v[OA'B'] = v[OABB'] \cdot \frac{\sqrt{b}+\sqrt{B}}{\sqrt{B}} + v[OA'B']$$

$$\left.\begin{aligned} v[OABB'] &= \tfrac{h}{3} S[OAB] = \tfrac{1}{3} h S_1 \\ v[OA'B'] &= \tfrac{h}{3} [OA'B'] = \tfrac{h}{3} s_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_1 = \frac{\sqrt{B}+\sqrt{b}}{\sqrt{B}} \cdot \frac{h}{3} S_1 + \frac{h}{3} s_1$$

Deci $V = \sum_{i=1}^{n} v_i = \frac{\sqrt{B}+\sqrt{b}}{\sqrt{B}} \cdot \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} S_i + \frac{1}{3} h \sum_{i=1}^{n} s_i =$

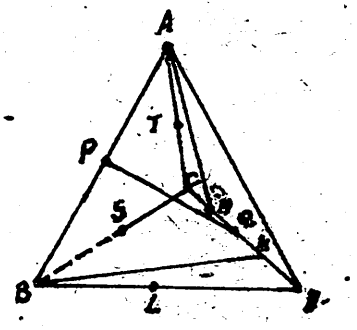
$$= \frac{\sqrt{B}+\sqrt{b}}{\sqrt{B}} \cdot \frac{h}{3} B + \frac{h}{3} b \Rightarrow V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{Bb})$$

42. Să se demonstreze că dacă într-un tetraedru ariile feţelor opuse sînt egale, atunci fiecare muchie este congruentă cu muchia opusă.

Soluţia 1: Fie $M = pr_{CD} A$, $N = pr_{CD} B$, $\|PA\| = \|PB\|$

Avem $pr_{CD} |AB| = |MN|$, iar $Q = pr_{CD} P$, unde $\|MQ\| = \|QN\|$ şi evident $PQ \perp MN$.

Intrucît feţele $[BCD]$ şi $[ACD]$ au ariile egale şi o latură comună, rezultă că $\|AM\| = \|BN\|$.



Deoarece $\|QM\| = \|QN\|$ şi $\|AM\| = \|BN\|$ rezultă că triunghiurile AMQ şi BNQ sînt congruente, deci $|AQ| \equiv |BQ|$, de unde rezultă că în triunghiul isoscel AQB, $QM \perp AB$, deci PQ este perpendiculara comună a dreptelor AB şi CD. Proiectînd acum pe CD pe AB, analog se obţine că perpendiculara comună trece prin mijlocul $|CD|$, dar cum ea este unică, rezultă că şi Q este mijlocul lui $|CD|$.

Fie $S \in |BC|$, $|BS| \equiv |SC|$, $L \in |BD|$, $|BL| \equiv |LD|$ și $T \in |AC|$, $|AT| \equiv |TC|$

Avem: $LT \parallel AB$ deci $PQ \perp LT$, adică $PQ \perp (STL)$
$LS \parallel CD$ $PQ \perp LS$

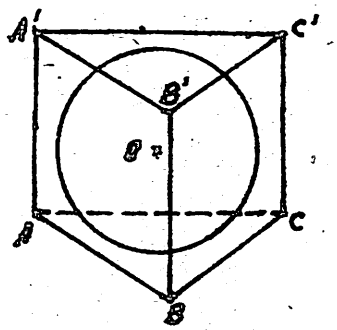
rezultă $PQ \perp ST$.

Deoarece PTQS este paralelogram $PT \parallel BD$, $SQ \parallel BD$, rezultă $PT \parallel SQ$ și deoarece $PQ \perp ST$, paralelogramul este romb, întrucît are diagonalele perpendiculare.

Avem $|PT| \equiv |PS|$, de unde $\|BD\| = \|AC\|$, deci $PS \parallel PQ$

La fel se demonstrează și pentru celelalte perechi de fețe.

43. O prismă triunghiulară regulată e circumscrisă unei sfere de rază R. Să se afle aria și volumul prismei.



Soluție:

Sfera e tangentă la baze în centrul de greutate (care coincide cu ortocentrul, fiind triunghi echilateral).

Înălțimea bazei este:

$h = R + 2R = 3R$

Latura bazei este: $\ell = 2R\sqrt{3}$

$V = S \cdot H$; $H = 2R$; $S = \frac{2R\sqrt{3} \cdot 3R}{2} = 3R^2\sqrt{3}$; $V = 2R \cdot 3R^2\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{V = 6R^3\sqrt{3}}$

$S_\ell = H \cdot P$; $P = 3 \cdot 2R\sqrt{3}$; $S_\ell = 2R \cdot 6R\sqrt{3} = 12R^2\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{S_\ell = 12R^2\sqrt{3}}$

$S_t = S_\ell + 2b$; $b = 2R\sqrt{3} \cdot 2R = 4R^2\sqrt{3}$

$S_t = 12R^2\sqrt{3} + 8R^2\sqrt{3} = 20R^2\sqrt{3} \Rightarrow S_t = \boxed{20R^2\sqrt{3}}$

44. Un triunghi dreptunghic cu catetele b și c, iar ipotenuza a, se rotește pe rînd în jurul ipotenuzei și al celor două catete. V_1, V_2, V_3 și S_1, S_2, S_3 fiind volumele și respectiv ariile laterale ale celor trei corpuri formate, să se arate:

a) $\frac{1}{V_1^2} = \frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_3^2}$ b) $\frac{S_2}{S_3} + \frac{S_3}{S_2} = \frac{S_2 + S_3}{S_1}$

Soluție:

$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{AO \cdot BC}{2} \Rightarrow AO = \frac{bc}{a}$; $OB = \sqrt{b^2 - AO^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2} = \frac{b^2}{a}$

$OC = \sqrt{c^2 - AO^2} = \frac{c^2}{a}$; $V_1 = V_{[A'AB]} + V_{[A'AC]} = \frac{\pi \cdot AO^2}{3}(BO + OC) = \frac{\pi \cdot AO^2}{3} BC =$

$= \pi \frac{b^2c^2}{3a^2} a = \frac{\pi b^2c^2}{3a}$ $\boxed{\frac{1}{V_1^2} = \frac{9a^2}{\pi^2 b^4 c^4}}$

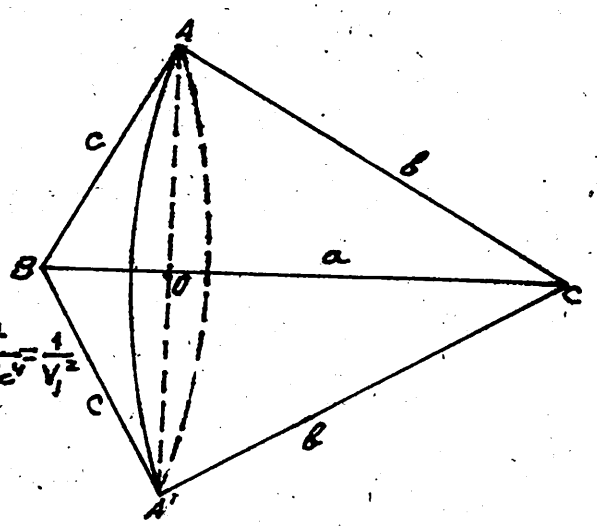
$S_1 = S_{[ABA']} + S_{[ACA']} = \pi AO \cdot AB + \pi AO \cdot AC =$

$= \pi AO[AB + AC] = \boxed{\frac{\pi bc}{a}(b + c) = S_1}$

$V_2 = V_{[CBC']} = \frac{\pi AC^2 \cdot AB}{3} = \boxed{\frac{\pi b^2 c}{3} = V_2}$

$S_2 = S_{[CBC']} = \pi AC \cdot BC = \boxed{\pi ba = S_2}$

Analog $\boxed{V_3 = \frac{\pi bc^2}{3}}$ $\boxed{S_3 = \pi ca}$



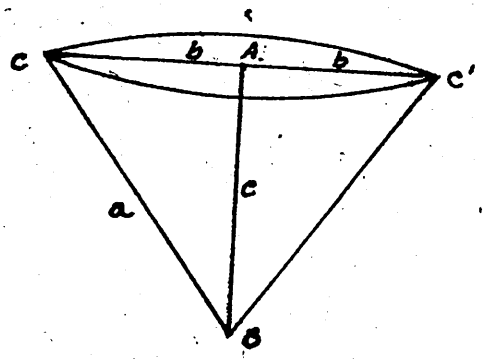
$$\frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_3^2} = \frac{9}{\pi^2 b^4 c^4} + \frac{9}{\pi^2 b^4 c^2} = \frac{9(b^2+c^2)}{\pi^2 b^4 c^4} = \frac{9a^2}{\pi^2 b^4 c^4} = \frac{1}{V_1^2}$$

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{\pi ba}{\pi ca} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{S_2}{S_3} = \frac{c}{b}$$

$$S_2 + S_3 = \pi ba + \pi ca = \pi a(b+c)$$

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} = \frac{\pi a(b+c)}{\frac{\pi bc}{a}(b+c)} \Rightarrow \frac{b^2+c^2}{bc} = \frac{a^2}{bc} \Rightarrow \frac{S_2}{S_3} + \frac{S_3}{S_2} = \frac{S_2+S_3}{S_1}$$

c.c.t.d.



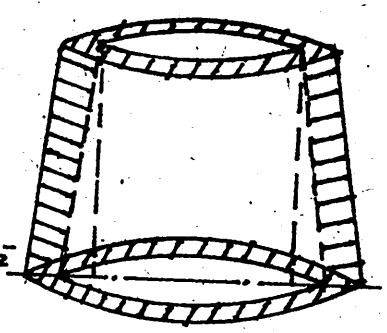
45. Un coş de fabrică are forma unui trunchi de con cu h = 10 cm, cu lungimile exterioare ale bazelor 3,14 m, 1,57 m, Grosimea zidului fiind de 18 cm.

Să se calculele volumul coşului.

<u>Soluţie:</u>

$2\pi R_1 = \pi m \Rightarrow R_1 = \frac{1}{2} m$

$2\pi R_2 = \frac{\pi}{2} m \Rightarrow R_2 = \frac{1}{4} m$; $3,14 \simeq \pi$, $1,57 \simeq \frac{\pi}{2}$



$$V = \frac{\pi h}{3}(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2) - \frac{\pi h}{3}\left[(R_1 - 0,18)^2 + (R_2 - 0,18)^2 + (R_1 - 0,18)(R_2 - 0,18)\right] =$$

$$= \frac{\pi h}{3}\left[R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2 - R_1^2 + 0,36 R_1 - (0,18)^2 - R_2^2 + 0,18 R_2 - (0,18)^2 - R_1 R_2 + 0,18(R_1 + R_2) - (0,18)^2\right] =$$

$$= \frac{\pi h}{3}\left[0,54(R_1 + R_2) - 3(0,18)^2\right]$$

$$= \frac{0,18 \cdot \pi h}{3}\left[3(R_1 + R_2) - 3(0,18)\right] = 0,18\pi h(R_1 + R_2 - 0,18) = 1,8\pi(0,5 + 0,25 - 0,18) =$$

$$= 1,8\pi \cdot 0,57 = 1,026\pi$$

$$\boxed{V = 1,026\pi\ m^3}$$

46. Într-o sferă de rază R se înscrie o piramidă regulată cu baza un pătrat şi cu unghiul de la vîrful unei feţe laterale de măsură α. Să se afle:

a) Volumul piramidei înscrise,

b) aria laterală şi totală a piramidei;

c) valoarea α, cînd înălţimea piramidei este egală cu raza sferei.

Soluţie :

Fie $[VABCD]$ piramida înscrisă şi O centrul sferei,

$M = pr_{VC} O$, $S = pr_{[ABCD]} O$

Din $\triangle VMC$ avem;

$\|MC\| = \|VC\| \sin\frac{\alpha}{2}$, deci

$\|BC\| = 2\|VC\| \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$

Patrulaterul $[ABCD]$ fiind pătrat, avem

$\|SC\| = \sqrt{2}\,\|VC\| \sin\frac{\alpha}{2}$

Din $\triangle VMC$ avem $\|VM\| = \sqrt{\|VC\|^2 - \|MC\|^2}$

$= \sqrt{\|VC\|^2 - \|VC\|^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \|VC\| \cos\frac{\alpha}{2}$;

iar din triunghiul $[VSC]$ avem $\|VS\| =$

$= \sqrt{\|VC\|^2 + \|SC\|^2 - 2\|VC\|^2 \sin\frac{\alpha}{2}} = \|VC\| \sqrt{\cos\alpha}$

Din asemănarea triunghiurilor VOP şi VCS (V comun şi dreptunghice) avem

$$\frac{\|VO\|}{\|VC\|} = \frac{\|VP\|}{\|VS\|}, \quad \frac{R}{\|VC\|} = \frac{\frac{\|VC\|}{2}}{\|VC\|\sqrt{\cos\alpha}}, \quad \|VC\| = 2R\sqrt{\cos\alpha}$$

Prin urmare

$\|BC\| = 4R \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{\cos\alpha}$, $\|VS\| = 2R\cos\alpha$, $\|VM\| = 2R\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$

a) V piramidei $= \frac{1}{3}\|BC\|^2 \|VS\| = \frac{1}{3} 16R^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} \cos\alpha \cdot 2R\cos\alpha = \frac{32}{3} R^3 \sin^2\frac{\alpha}{2} \cos^2\alpha$

b) $\mathcal{L} = 2\|BC\| \cdot \|VM\| = 24R \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha} \cdot 2R\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha} = 8R^2 \sin\alpha \cos\alpha + 4R^2 \sin 2\alpha$

Iar $\mathcal{L}_t = 4R^2 \sin 2\alpha + 16R^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} \cos\alpha = 4R^2(\sin 2\alpha + 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha)$

c) Din $\|VS\| = 2R\cos\alpha$ avem $R = 2R\cos\alpha$,

deci $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ şi $\alpha = \frac{\pi}{3}$

47. Un trunchi de con are aria laterală egală cu $4\pi a^2$ şi înălţimea a, iar generatoarea sa este egală cu suma razelor bazelor. Să se calculeze în funcţie de a razele bazelor şi aria laterală a conului din care face parte trunchiul de con.

Soluţie:

Deci $\nabla_l = \pi G(R+r)$

deci $G = R+r$, avem $G^2 = 4a^2$,

$G = 2a$ şi $R+r = 2a$

Din triunghiul BED avem:

$\|BD\|^2 = \|BE\|^2 + \|ED\|^2$, iar $\|ED\| = R-r$,

avem

$4a^2 = a^2 + (R-r)^2$, $R-r = \sqrt{3}a$

Formăm sistemul:

$$\begin{cases} R+r = 2a \\ R-r = a\sqrt{3} \end{cases}$$

de unde avem $R = \frac{2+\sqrt{3}}{2}a$, $r = \frac{2-\sqrt{3}}{2}a$

Avem $\frac{\nabla[VCD]}{\nabla[VAB]} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$, unde $\nabla[VCD]$ este aria laterală a conului VAB

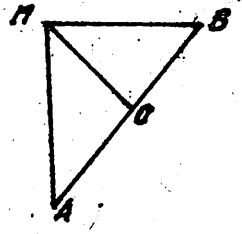
şi

$$\frac{\nabla[VCD]}{\nabla[VCD]-\nabla[VAB]} = \frac{R^2}{R^2-r^2}, \quad \frac{\nabla[VCD]}{\nabla[ABCD]} = \frac{R^2}{R^2-r^2}$$

$$\frac{\nabla[VCD]}{4a^2\pi} = \frac{\frac{(2+\sqrt{3})^2a^2}{4}}{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4}a^2 - \frac{(2-\sqrt{3})^2}{4}a^2}, \quad \nabla[VCD] = \frac{\pi a^2(7\sqrt{3}+12)}{6}$$

48. Fiind date punctele distincte A şi B, să se afle locul geometric al punctelor M din spaţiu pentru care $AM \perp BM$

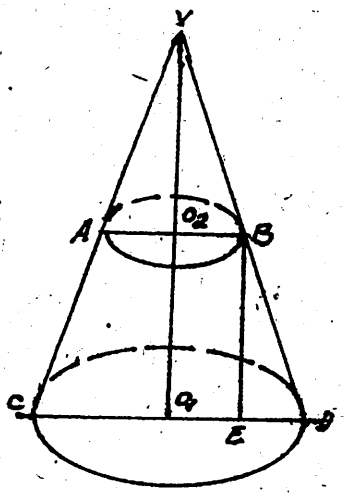
Soluţie. Fie $O \in (AB)$ astfel încît $\|AO\| = \|OB\|$. In planul (MAB), triunghiul AMB este dreptunghic, unind pe M cu O, avem $\|OM\| = \frac{\|AB\|}{2}$ şi notînd $\frac{\|AB\|}{2} = R$ rezultă că M se află pe o sferă de centru O şi raza R, mai puţin punctele A şi B. Reciproc, dacă M se află pe sferă, cercul circumscris triunghiului AMB, este un cerc mare, deoarece $\|AB\| = 2R$, de unde rezultă că triunghiul AMB este dreptunghic în A, deci $AM \perp MB$.



49. Să se arate că dacă trei sfere au un cerc comun, atunci centrele lor sînt coliniare.

Soluţie:

Două sfere de centru O_1 şi O_2 se intersectează după cercul de centru O. Punctul $O \in [O_1O_2]$. Sferele de centre O_1 şi O_3 se



intersectează după cercul de centru O deci $O \in [O_1, O_3]$.
Deci $[O_1,O_2] \cap [O_1,O_3] = \{O\}$,dar $O_1 \in [O_1,O_3]$ și $O_1 \in [O_1,O_2]$.
Cele două segmente au două puncte comune, deci O_1, O_2, O_3, sînt coliniare (prin două puncte trece o singură dreaptă).

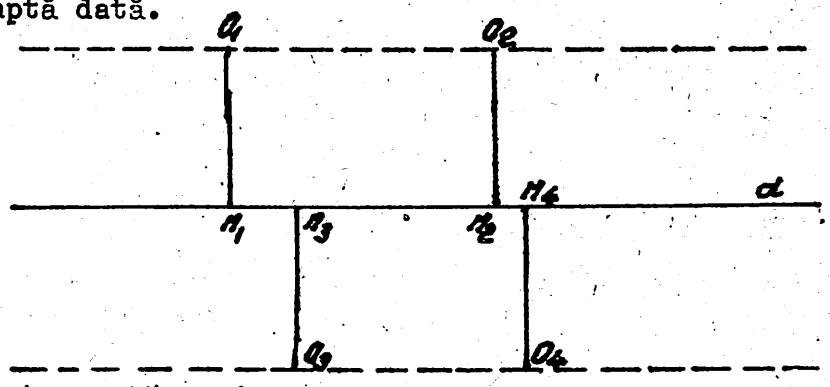
50. Să se găsească locul geometric al centrelor sferelor care trec prin :
a) două puncte date.
b) trei puncte date.

Soluție:

a) Locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de două puncte date este planul mediator al segmentului determinat de cele două puncte.
Deci, locul geometric al centrelor sferelor care trec prin două puncte date este un plan.
b) Prin trei puncte date trece un plan. Locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de două puncte date este planul mediator al segmentului determinat de cele două puncte. Avînd trei puncte, locul geometric se află la intersecția a două plane mediatoare a segmentelor determinate de cele trei puncte. Deci locul geometric căutat este o dreaptă, perpendiculară pe planul determinat de cele trei puncte, în centrul cercului circumscris triunghiului format de punctele date.

51. Să se afle locul geometric al centrelor sferelor de rază dată tangente la o dreaptă dată.

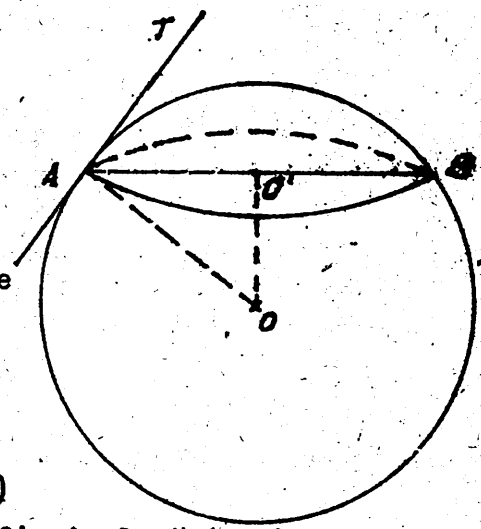
Soluție:



Fie sfera $S(O_1, r)$ tangentă unei drepte d, care aparține unui plan α, tangent la sferă în punctul $M_1 \in d$. Considerăm o altă

sferă $S(O_2,r)$ tangentă aceleiaşi drepte d şi aceluiaşi plan α în punctul $M_2 \in d$. Segmentele $|O_1M_1| \perp \alpha$ şi $|O_2M_2| \perp \alpha$ de unde rezultă că $|O_1M_1| \parallel |O_2M_2|$,deci patrulaterul $O_1M_1M_2O_2$ este un dreptunghi$(|O_1M_1| \equiv |O_2M_2|)$ deci $O_1O_2 \parallel M_1M_2$,Acelaşi lucru-îl putem spune despre $O_3O_4 \parallel M_1M_2$ .Deci locul geometric este reuniunea a două drepte paralele cu dreapta d aflate la distanţa r de dreapta d. Reciproc: orice punct al paralelelor se află la distanţa r de d.

52.Fie C un cerc situat pe sfera S şi $A \in C$. Să se arate că tangenta la cercul C în punctul A este inclusă în planul tangent la sfera S în A.



Soluţie :

Se consideră $S(O,R)$ o sferă şi $C(O',r,\alpha)$ cercul de secţiune făcut de planul α în $S(O,R)$.

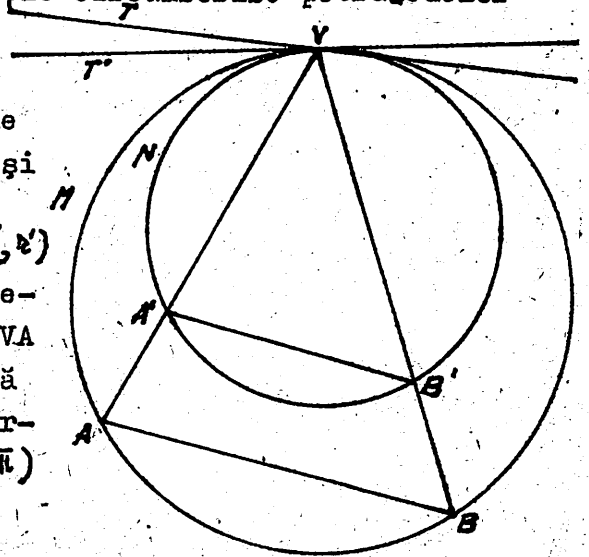
Fie $A \in S(O,R) \cap C(O',r,\alpha)$.

Ducem în A tangenta AT la $C(O',R,\alpha)$, de aici avem că $AO' \perp AT$.

De asemenea $OO' \perp \alpha$, care duce conform teoremei celor trei perpendiculare, la $OA \perp AT$.

Deci AT este tangentă sferei $S(O,R)$ în punctul A, ceea ce face ca ea să fie inclusă în planul tangent sferei $S(O,R)$ dus prin A.

53. Un plan paralel cu baza piramidei,[VABC] taie muchiile laterale în A',B',C', Să se arate că sferele circumscrise tetraedelor [VABC] şi [VA'B'C'] sînt tangente.



Soluţie:

Fie $S(O,r)$ şi $S(O',r')$ sferele circumscrise tetraedrelor [VABC] şi [VA'B'C']. Considerăm α şi β planele tangente sferelor $S(O,r)$ şi $S(O',r')$ în punctul V. Fie π planul determinat de dreptele concurente VA şi VB. El intersectează cele două sfere şi planele α şi β după cercurile $C(O_1,r_1,\pi)$ şi $C(O_2,r_2,\pi)$

respectiv dreptele VT şi VT' care sînt tangente celor două cercuri $C(O_1, r_1, \pi)$ şi $C(O_2, r_2, \pi)$. De aici deducem că:

1) $m(T\hat{V}A) = \frac{1}{2} m(V\hat{N}A)$

2) $m(A\hat{B}V) = \frac{1}{2} m(V\hat{N}A)$

Din(1) şi (2) deducem: (3) $T\hat{V}A \equiv A\hat{B}V$

Din paralelismul dreptelor AB şi A'B' avem: (4) $A\hat{B}V \equiv A'\hat{B}'V$

Din (3) şi (4) deducem că: $T\hat{V}A \equiv A'\hat{B}'V$ (5)

Unghiul A'B'V este înscris în $C(O_2, r_2, \pi)$ deci:

6) $m(A'\hat{B}'V) = \frac{1}{2} m(V\hat{N}A')$,

iar VT' e tangentă lui $C(O_2, r_2, \pi)$ deci:

7) $m(T'\hat{V}A') = \frac{1}{2} m(V\hat{N}A')$

Din(6) şi (7) deducem

$m(A'\hat{B}'V) = m(T'\hat{V}A')$ sau

8) $A'\hat{B}'V \equiv T'\hat{V}A'$

Din(5) şi(8) deducem că: (9) $T\hat{V}A \equiv T'\hat{V}A'$

Deoarece T şi T' sînt de aceiaşi parte a dreptei VA rezultă că VT = VT' de aici găsim că cercurile $C(O_1, r_1, \pi)$ şi $C(O_2, r_2, \pi)$ avînd aceiaşi tangentă în V sînt cercuri tangente. Similar se arată că perechile de cercuri circumscrise triunghiurilor VBC şi VB'C' precum şi VCA şi VC'A' sînt tangente. Tangentele perechilor de cercuri sînt şi tangente celor două sfere (vezi problema 52). Deci ele aparţin planului tangent celor două sfere, deci sferele sînt tangente.

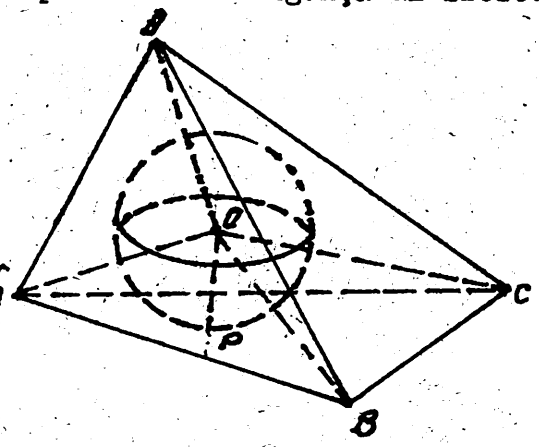
Pag. 139

54. Să se arate că raza sferei înscrise într-un tetraedru se calculează cu formula $\frac{3V}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} = r$

unde S_1, S_2, S_3, S_4 sînt ariile feţelor, iar V volumul tetraedrului

Soluţie:

Fie S (O,r) sfera înscrisă în tetraedrul [DABC] ale cărui feţe sînt tangente sferei. Fie punctul P punctul de tangenţă al sferei cu planul (ABC). Ducînd raza OP, ea este perpendiculară pe planul(ABC) tangent sferei. Unind punctul O cu vîrfurile tetraedrului DABC se găsesc patru tetraedre ale căror volume sînt:



volumul tetraedrului OABC: $\frac{S_1 \cdot r}{3}$

volumul tetraedrului OBCD: $\frac{S_2 \cdot r}{3}$

Volumul tetraedrului OADC: $\frac{S_3 \cdot r}{3}$

volumul tetraedrului OADB: $\frac{S_4 \cdot r}{3}$

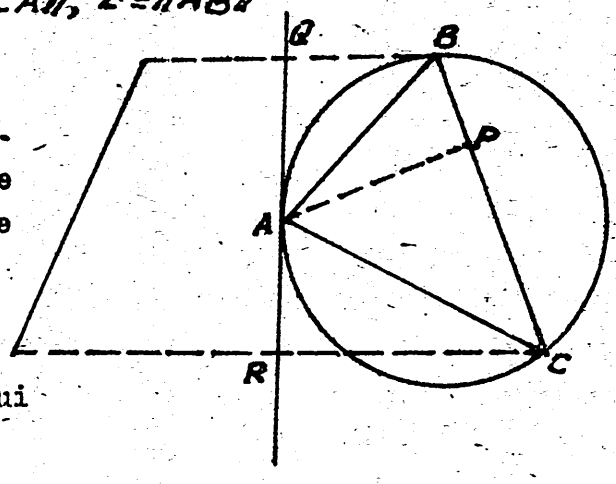
unde S_1, S_2, S_3, S_4 sînt ariile feţelor.
Făcînd suma volumelor găsim volumul tetraedrului DABC.
Voluml tetraedrului[DABC] = Vol.tetr.[OABC] + Vol.tetr.[QBCD] + + Vol.tetr.[OADC] + Vol.tetr.[OADB]

$$V = \frac{S_1 r}{3} + \frac{S_2 r}{3} + \frac{S_3 r}{3} + \frac{S_4 r}{3} \text{ de unde găsim:}$$

$$r = \frac{3V}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}$$

55. Se roteşte un triunghi ABC în jurul tangentei în A la cercul circumscris. Să se exprime aria suprafeţei descrise de [BC] în funcţie de $a = \|BC\|$, $b = \|CA\|$, $c = \|AB\|$

Soluţie:
Corpul care ia naştere prin rotirea lui BC în jurul tangentei AQ este un trunchi de con. Cunoscînd toate laturile triunghiului ABC putem să-i aflăm aria:



$S(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
Fie [AR] înălţimea triunghiului ABC. Cu ajutorul ariei avem:

$$\|AP\| = \frac{2S}{a}$$

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice ABQ şi APB care au

$$\left.\begin{aligned} m(\hat{QAB}) &= \frac{1}{2} m(\hat{AB}) \\ m(\hat{ACP}) &= \frac{1}{2} m(\hat{AB}) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow Q\hat{A}B \equiv A\hat{C}P$$

rezultă:

$$\frac{\|AP\|}{\|QB\|} = \frac{\|AC\|}{\|AB\|} \qquad \frac{\frac{2S}{a}}{\|QB\|} = \frac{b}{c} \Longrightarrow \|QB\| = \frac{2Sc}{ab}$$

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice APB şi ARC care au:

$$\left.\begin{aligned} m(\hat{ABC}) &= \frac{1}{2} m(\hat{AC}) \\ m(\hat{RAC}) &= \frac{1}{2} m(\hat{AC}) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \hat{ABC} \equiv \hat{RAC}.$$

rezultă: $\frac{\|AC\|}{\|AB\|} = \frac{\|RC\|}{\|AP\|}$; $\frac{b}{c} = \frac{\|RC\|}{\frac{2S}{a}}$, $\|RC\| = \frac{2Sb}{ac}$

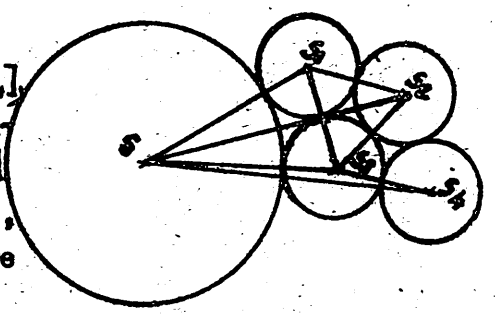
Aria laterală a trunchiului de con = $\pi g(R+r)$
Aria laterală a trunchiului de con = $\pi a\left(\frac{2Sc}{ab} + \frac{2Sb}{ac}\right) =$

$$= \frac{2\pi S(b^2+c^2)}{bc}$$

56. Se dă un corp sferic S care se înconjoară cu bile de raze egale. Să se afle numărul maxim de bile astfel încît ele să fie tangente la S şi fiecare bilă să fie tangentă la alte trei bile ale căror centre sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

Soluţie:

Unind centrele sferelor tangente între ele se formează un poliedru. Dacă unim centrul corpului sferic cu centrele sferelor se obţin piramide regulate $[SS_2S_3S_4]$, deci unghiurile diedre determinate de feţe cu muchia comună $[S_2S_3S_4]$ cu $[S_3S_6S_5]$ etc, sînt congruente, fiind formate din unghiuri diedre ale piramidei ce la rîndul lor sînt congruente. Din fiecare centru al unei sfere, pleacă acelaşi număr de muchii şi anume 3 ($p = 3$), iar feţele poliedrului sînt poligoane regulate. Deci poliedrul convex $S_1, S_2, S_3 \ldots$ este un poliedru regulat.



Cum dintre cele cinci tipuri de poliedre regulate cel cu un număr maxim de vîrfuri care are $p = 3$ (numărul muchiilor care pleacă dintr-un vîrf), conform relaţiei lui Euler, avem $v = 20$ (numărul de vîrfuri), deci poliedrul regulat este un dodecaedru, numărul maxim de bile este 20.

Observaţie: Pentru $p = 3$ mai avem tetraedrul regulat cu $v = 4$ şi hexaedrul cu $v = 8$, cel cu un număr maxim de vîrfuri fiind dodecaedrul.

57. Un con circular drept cu generatoarea a, are trei generatoare perpendiculare două cîte două. Să se afle:

a) Volumul conului,

b) Aria sferei înscrisă în acest con,

c) Raportul ariilor calotelor determinate de cercul de tangenţă al sferei cu conul.

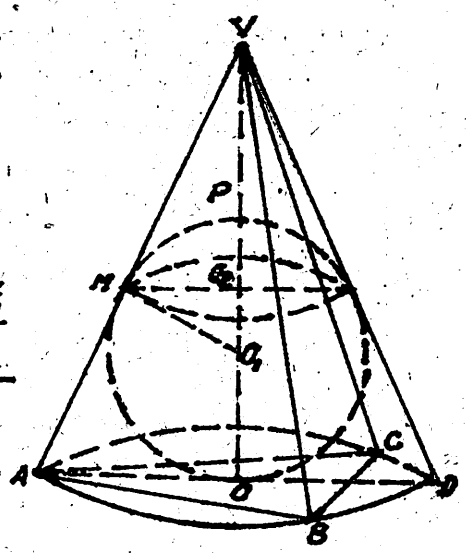
Soluţie:

a) Fie VA, VB, VC cele trei generatoare perpendiculare. Triunghiurile dreptunghice VAB, VBC şi VCA sînt congruente (avînd catetele congruente). De aici avem:

$$|AB| \equiv |BC| \equiv |CA|$$

de unde rezultă că triunghiul ABC este echilateral. Din triunghiul dreptunghic VAB avem: $\|AB\| = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$

Cunoscînd latura triunghiului echilateral putem afla raza cercului circumscris lui $C(O,R)$; $\|AB\| = R\sqrt{3}$; $a\sqrt{2} = R\sqrt{3}$; $R = \frac{a\sqrt{6}}{3}$



Din triunghiul dreptunghic VOA aflăm:

$\|VO\| = \sqrt{a^2 - \frac{6a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Volumul conului

$V_{ABC} = \frac{\pi \cdot \frac{2a^2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{2\pi a^3\sqrt{3}}{27}$

b) Fie sfera $S(O_1, R_1)$ şi VA tangentă sferei în M. Triunghiurile dreptunghice VMO_1 şi VOA sînt asemenea pentru că au $\hat{MVO_1} = \hat{AVO}$

Scriind proporţionalitatea laturilor obţinem: $\frac{\|VM\|}{\|VO\|} = \frac{\|MO_1\|}{\|AO\|}$

$\|VM\| = \|VA\| - \|AM\|$

$\|AM\| = \|AO\|$ (ca tangente duse dintr-un punct exterior),

$\|VM\| = a - \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a(3-\sqrt{6})}{3}$

$\frac{\frac{a(3-\sqrt{6})}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{R_1}{\frac{a\sqrt{6}}{3}}$; $R_1 = \frac{a\sqrt{2}(3-\sqrt{6})}{3}$

Aria sferei $= 4\pi \frac{2a^2(9-6\sqrt{6}+6)}{9} = \frac{8a^2\pi(5-2\sqrt{6})}{3}$

c) Fie calota sferică de înălţime PO_2 şi bază $C(O_2, r, \alpha)$ şi calota sferică de înălţime O_2O şi bază $C(O_2, r, \alpha)$.

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice VMO_2 şi VAO $(\hat{MVO_2} = \hat{AVO})$ avem: $\frac{\|VM\|}{\|VA\|} = \frac{\|MO_2\|}{\|AO\|}$

$\frac{\frac{a(3-\sqrt{6})}{3}}{a} = \frac{r}{\frac{a\sqrt{6}}{3}}$; $r = \frac{a\sqrt{6}\cdot(3-\sqrt{6})}{9}$

Din triunghiul dreptunghic MO_1O_2 avem: $\|O_1O_2\| = \sqrt{R_1^2 - r^2}$

$\|O_1O_2\| = \sqrt{\frac{2a^2(3-\sqrt{6})^2}{9} - \frac{6a^2(3-\sqrt{6})^2}{81}} = \frac{2a\sqrt{3}(3-\sqrt{6})}{9}$

$\|PO_2\| = R_1 - \|O_1O_2\|$; $\|PO_2\| = \frac{a\sqrt{2}(3-\sqrt{6})}{3} - \frac{2a\sqrt{3}(3-\sqrt{6})}{9} = \frac{a(5\sqrt{2}-4\sqrt{3})}{3}$

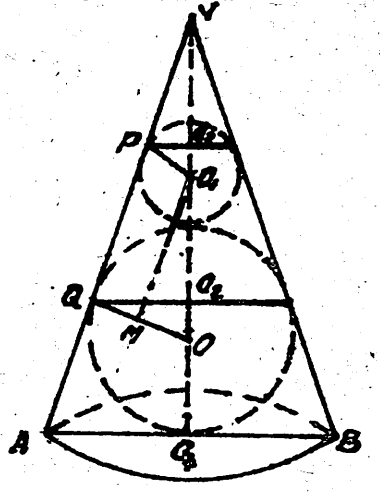
$\|OO_2\| = R_1 + \|O_1O_2\|$; $\|OO_2\| = \frac{a\sqrt{2}(3-\sqrt{6})}{3} + \frac{2a\sqrt{3}(3-\sqrt{6})}{9} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

Aria calotei de înălţime $\|PO_2\| = 2\pi r \cdot \|PO_2\|$

Aria calotei de înălţime $\|OO_2\| = 2\pi r \cdot \|OO_2\|$

$$\frac{\text{Aria calotei de înălțime } \|PO_2\|}{\text{Aria calotei de înălțime } \|OO_2\|} = \frac{2\pi r\,\|PO_2\|}{2\pi r\,\|OO_2\|} = \frac{\|PO_2\|}{\|OO_2\|} = \frac{\frac{a(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{3}}{\frac{a\sqrt{2}}{3}} = 5-2\sqrt{6}$$

58. Două sfere de centre O și O_1 și raze R și R_1 ($R<R_1$) sînt tangente exterior. Să se afle aria laterală a trunchiului de con ce are ca baze cercurile de tangență cu cele două sfere ale conului circumscris sferelor.



Soluție:

Se consideră sferele S(O,R) și $S(O_1,R_1)$ tangente exterior. Fie α planul (VAB). Acest plan taie sferele după cercurile $C(O,R,\alpha)$ și $C(O_1,R_1,\alpha)$. Considerăm punctele O_2 și O_3 centrele cercurilor de tangență cu cele două sfere ale conului circumscris sferelor. Din trapezul dreptunghic $PQOO_1$ (cu $O_1\hat{P}Q = O\hat{Q}P$) considerăm triunghiul dreptunghic O_1MO (unde M este piciorul perpendicularei din O_1 pe QO).

$$\|O_1M\| = \sqrt{\|O_1O\|^2 - \|MO\|^2}\ ;\ \|O_1M\| = \sqrt{(R+R_1)^2-(R-R_1)^2} = 2\sqrt{RR_1}$$

$$\|O_1M\| = \|PQ\| = 2\sqrt{RR_1}$$

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice VPO_1 și VQO (deoarece $PO_1 \| QO$) avem:

$$\frac{\|VP\|}{\|VQ\|} = \frac{\|PO_1\|}{\|QO\|}$$

Notînd $\|VP\| = x$ deducem:

$$\frac{x}{x+2\sqrt{RR_1}} = \frac{R_1}{R}$$

$$x = \|VP\| = \frac{2R_1\sqrt{RR_1}}{R-R_1}$$

Din triunghiul dreptunghic VPO_1 (cu $O_1P \perp VA$) găsim

$$\|VO_1\| = \sqrt{\|VP\|^2 + \|PO_1\|^2}\ ,\ \|VO_1\| = \sqrt{\frac{4R_1^3R}{(R-R_1)^2}+R_1^2} = \frac{R_1(R+R_1)}{R-R_1}$$

Din același triunghi dreptunghic VPO_1 aflăm înălțimea PO_3:

$$\|PO_3\| = \frac{\|VP\|\cdot\|PO_1\|}{\|VO_1\|}$$

$$\|PO_3\| = \frac{\frac{2R_1\sqrt{RR_1}}{R-R_1}\cdot R_1}{\frac{R_1(R+R_1)}{R-R_1}} = \frac{2R_1\sqrt{RR_1}}{R+R_1}$$

Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice VPO_3 și VQO_2 avem: $\frac{\|VP\|}{\|VQ\|} = \frac{\|PO_3\|}{\|QO_2\|}$

$$\frac{\frac{2R_1\cdot\sqrt{RR_1}}{R-R_1}}{2\sqrt{RR_1}+\frac{2R_1\sqrt{RR_1}}{R-R_1}} = \frac{\frac{2R_1\sqrt{RR_1}}{R+R_1}}{\|QO_2\|} \quad \text{de unde}$$

$$\|QO_2\| = \frac{2R\sqrt{RR_1}}{R+R_1}$$

Aria laterală a trunchiului de con $= \pi\cdot\|PQ\|\,[\|PO_3\|+\|QO_2\|]$

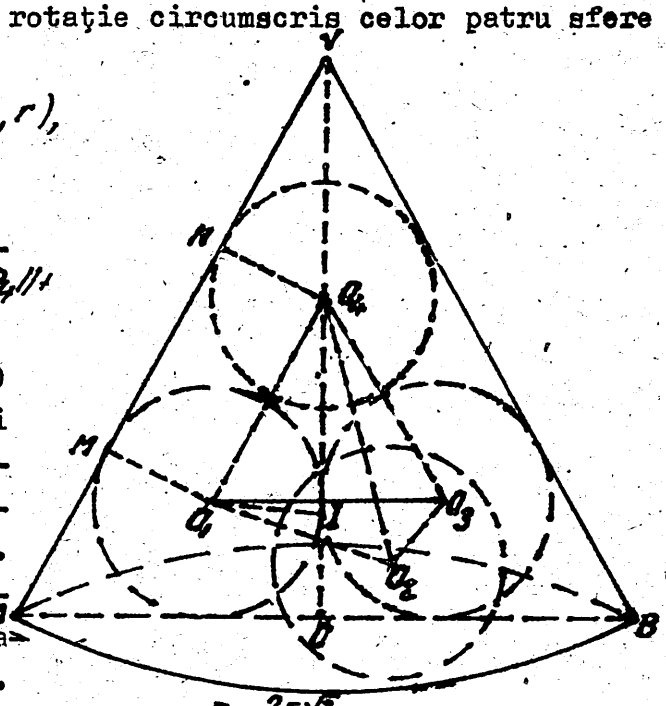
Aria lat. a tr.con $= \pi\cdot 2\sqrt{RR_1}\left(\frac{2R_1\sqrt{RR_1}}{R+R_1}+\frac{2R\sqrt{RR_1}}{R+R_1}\right)$

Aria lat.a tr.con $= 4\pi RR_1$

59. Patru sfere de rază r sînt tangente două cîte două.Să se afle înălțimea h a conului de rotație circumscris celor patru sfere

Soluție:

Fie sferele $S(O_1,r)$, $S(O_2,r)$, $S(O_3,r)$ și $S(O_4,r)$ tangente două cîte două și înscrise în conul VAB.Înălțimea conului este $\|VQ\| = \|OI\| + \|IO_4\| + \|VO_4\|$ unde punctul I aparține planului $(O_1O_2O_3)$ la intersecție cu VO, deci $\|OI\| = r$. Centrele sferelor formează un tetraedru regulat de muchie 2r. Fie C(I,R) cercul circumscris triunghiului echilateral $O_1O_2O_3$ de latură 2r. $\|O_1O_2\| = R\sqrt{3}$ sau $2r = R\sqrt{3}$ de unde $R = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$



Din triunghiul dreptunghic O_1O_4I avem:

$$\|O_4I\| = \sqrt{4r^2-\frac{12r^2}{9}} = \frac{2r\sqrt{6}}{3}$$

Fie M și N punctele de tangență ale generatoarei VA cu $S(O_1,r)$

și $S(O_4, r)$. Patrulaterul O_1O_4 NM este un dreptunghi deoarece $\|O_1M\| = \|O_4N\| = r$ și $O_1M \perp VA$, $O_4N \perp VA$. De aici rezultă că $O_1O_4 \| VA$ deci $\hat{O_1O_4I} \equiv \hat{AVI}$ (ca unghiuri alterne interne). Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice O_1O_4I și VNO_4 (care au $\hat{O_1O_4I} \equiv \hat{AVI}$) rezultă:

$$\frac{\|O_1O_4\|}{\|VO_4\|} = \frac{\|O_1I\|}{\|O_4N\|} \quad \text{de unde}$$

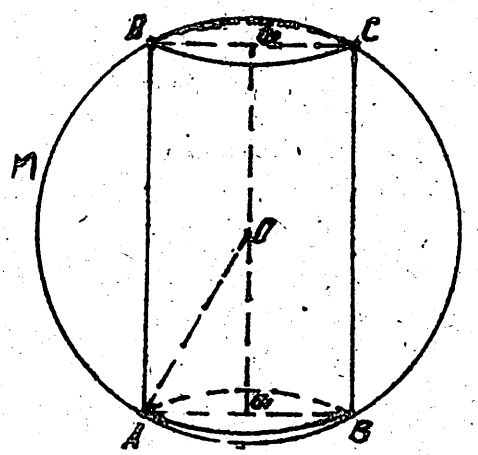
$$\frac{2r}{\|VO_4\|} = \frac{\frac{2r\sqrt{3}}{3}}{r} \; ; \; \|VO_4\| = r\sqrt{3}$$

Deci: $\|VO\| = r + \frac{2r\sqrt{6}}{3} + r\sqrt{3}$

60. O mărgea se obține dintr-un corp sferic prin perforarea cu un burghiu al cărui ax trece prin centrul sferei. Să se afle volumul mărgelei, știind că gaura obținută are lungimea h.

<u>Soluție:</u>

Fie sfera S(O,R) care se perforează cu un burghiu al cărui ax trece prin O. Secțiunea prin sferă este cilindrul ABCD de înălțime $\|AD\| = h$ și rază $\|AO_1\| = r$ Volumul mărgelei = Volumul segmentului sferic AMD − Volumul cilindrului ABCD.



Vol.seg.sferic AMD se află aplicînd formula (9) capit.VII paragraf 4, care devine înlocuind $r_1 = r_2 = r$

Vol seg.sferic AMD $= \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2) = \frac{\pi h}{6}(6r^2 + h^2)$

Din triunghiul dreptunghic AOO_1 deducem:

$$\|AO_1\| = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} = \sqrt{\frac{4R^2 - h^2}{4}} = \frac{\sqrt{4R^2 - h^2}}{2}$$

atunci volumul devine:

Vol.seg.sferic AMD $= \frac{\pi h\left(6 \cdot \frac{4R^2 - h^2}{4} + h^2\right)}{6} = \frac{\pi h(12R^2 - 3h^2 + 2h^2)}{12} = \frac{\pi h(12R^2 - h^2)}{12}$

Vol.cil.ABCD $= \pi h \, \frac{4R^2 - h^2}{4} = \frac{\pi h(4R^2 - h^2)}{4}$

Vol.mărgelei $= \frac{\pi h(12R^2 - h^2)}{12} - \frac{\pi h(4R^2 - h^2)}{4} = \frac{\pi h^3}{6}$

CUPRINS

	Pag.
Cuvînt înainte	3
Cap. I - Suprafeţele poligonale. Arie	
§ 1. Suprafeţe poligonale	5
§ 3. Aria suprafeţelor poligonale	7
§ 4. Suprafeţe măsurabile. Aria discului	12
Exerciţii recapitulative	14
Cap. II - Aplicaţiile trigonometriei în geometrie	
§ 1. Coordonate polare în plan	20
§ 2. Teorema sinusului şi teorema cosinusului	21
§ 3. Rezolvarea triunghiurilor	23
§ 4. Formule pentru aria triunghiului	26
§ 5. Raza cercului circumscris şi raza cercului înscris în triunghi	29
§ 6. Aplicaţii practice	33
Exerciţii recapitulative	34
Cap. III - Aplicaţiile trigonometriei în algebră	
§ 1. Forma trigonometrică a unui număr complex	38
§ 2. Operaţii cu numere complexe scrise sub formă trigonometrică	41
§ 3. Rădăcina de ordinul n dintr-un număr complex	48
§ 4. Ecuaţii binome	53
§ 5. Aplicaţiile numerelor complexe în geometrie	56
Exerciţii recapitulative	60
Cap. IV - Incidenţa, ordonarea şi paralelismul în spaţiu	
§ 1. Axiomele geometriei în spaţiu	72

Pag.

§ 2. Construcţii în spaţiu..... 76
§ 3. Semispaţiu..... 77
§ 4. Mulţimi convexe..... 83
§ 5. Paralelism în spaţiu..... 91

Exerciţii recapitulative..... 100

Cap. V - Perpendicularitate în spaţiu

§ 1. Drepte perpendiculare..... 104
§ 2. Inegalităţi geometrice..... 117
§ 3. Măsura unui unghi diedru..... 120
§ 4. Proiecţii ortogonale..... 126

Exerciţii recapitulative..... 132

Cap. VI - Poliedre

§ 1. Prisma..... 149
§ 2. Piramida..... 166
§ 3. Trunchiul de piramidă..... 182
§ 4. Mulţimi poliedrale..... 188
§ 5. Volumul mulţimilor poliedrale..... 191
§ 6. Mulţimi măsurabile în spaţiu. Exerciţii recapitulative.... 196

Cap. VII - Corpuri rotunde

§ 1. Cilindrul..... 223
§ 2. Conul..... 228
§ 3. Trunchiul de con..... 232
§ 4. Sfera..... 237

Exerciţii recapitulative..... 242

Probleme recapitulative..... 248