А.В. Самусенко
В.В. Казаченок

МАТЕМАТИКА

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ АБИТУРИЕНТОВ

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1991

ББК 22.1я2
С17
УДК 51 (035.5) (075.4)

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры высшей математики Минского радиотехнического институт
А. А. Карпук

Самусенко А. В., Казаченок В. В.
С17 Математика: Типич. ошибки абитуриентов: Справ. пособие.—Ми.: Выш. шк., 1991.—189 с.: ил.
ISBN 5-339-00585-2.

Анализируются наиболее часто встречающиеся ошибки абитуриентов на вступительных экзаменах по математике, приводятся характерные конкурсные задачи с решениями. Даются образцы билетов устных и письменных экзаменов, варианты заданий для приема вступительных экзаменов с помощью ЭВМ.

Для абитуриентов, слушателей подготовительных отделений вузов, учащихся старших классов и учителей средней школы.

$$\text{С}\ \frac{4306020500-050}{\text{М}304(03)-91}\ 87-91$$

ББК 22.1я2

ISBN 5-339-00585-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Известно, что для успешной сдачи вступительных экзаменов никаких дополнительных (по сравнению со школьным курсом математики) знаний не требуется. Однако не следует думать, что достаточно еще раз прочесть школьные учебники! Необходимо внимательно разобрать и глубоко усвоить теоретический материал, получить твердые и прочные навыки в решении задач. Залог успеха на экзаменах — систематическая самостоятельная работа в течение всего оставшегося до экзаменов времени. Математику нельзя выучить за день или за неделю — только планомерные длительные занятия сделают экзаменационные задачи и вопросы простыми и легкими. И хотя предлагаемая вниманию читателя книга не может заменить учебник или сборник конкурсных задач, она должна помочь будущему абитуриенту устранить некоторые пробелы в знаниях и предостеречь его от возможных ошибок.

Данное пособие содержит решения наиболее распространенных задач из вариантов приемных экзаменов в вузы. При этом указываются типичные ошибки абитуриентов, дается разъяснение отдельных теоретических вопросов школьного курса математики.

Пособие состоит из 200 пунктов, объединенных в параграфы. В пределах параграфа, где это возможно, изложение ведется в такой последовательности: построение графиков; решение уравнений; решение неравенств. Каждый пункт включает:

1) теоретические положения или ссылку на те из них, при использовании которых допускались ошибки; указанные положения применяются при решении одного из примеров пункта;

2) пример с типичным неправильным решением. Здесь же дается одно или несколько правильных решений; если решение примера в большинстве случаев не было доведено до конца абитуриентами или трудно

было выделить наиболее типичную ошибку, то неправильное решение опускается (*вариант «а»*);

3) пример с правильным ответом (*вариант «б»*). К некоторым примерам даны указания.

Ошибки в цепочке логических рассуждений при неправильном решении примеров (вариант «а») подчеркнуты (~~~).

Напомним еще раз, что самостоятельное решение одной задачи часто приносит больше пользы, чем разбор готовых решений нескольких задач. Поэтому рекомендуется следующий порядок работы: попытаться решить пример самостоятельно; объяснить ошибки в приведенном неправильном решении (если оно имеется); разобрать правильное решение или воспользоваться указанием (при этом не исключается возможность того, что читатели предложат свое решение, которое может оказаться лучше).

Если при решении примера (вариант «б») не получается требуемый ответ, то рекомендуется вернуться к нему после разбора нескольких предшествующих и последующих пунктов, которые, как правило, подскажут один из приемов решения этого примера.

В приложениях содержатся образцы билетов устных и письменных экзаменов, варианты заданий для приема вступительных экзаменов с помощью ЭВМ. Это даст возможность будущим абитуриентам конкретно представить себе, что такое экзамен по математике в университетах, технических и педагогических вузах, и заранее попробовать свои силы в решении определенного набора задач за фиксированное время. Кроме того, приводится классификация примеров с решениями (вариант «а») по степени типичности ошибок абитуриентов. Несмотря на то что эта классификация является в некотором смысле условной, так как чёткие границы провести практически невозможно, она позволяет выбирать для решения те задачи, которые соответствуют уровню подготовки читателя. Наличие указанной классификации при относительно небольшом количестве примеров выгодно отличает данное пособие от подобных изданий.

Авторы выражают благодарность рецензенту — кандидату физико-математических наук, доценту кафедры высшей математики МРТИ А. А. Карпуку — за ценные советы и замечания.

Авторы

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\Rightarrow$ — знак логического следования
$\Leftrightarrow$ — знак логической равносильности
$\in$ — знак принадлежности
$\{a;\ b;\ c;\ \ldots\}$ — множество, состоящее из элементов $a, b, c, \ldots$
$\varnothing$ — пустое множество
$A \cup B$ — объединение множеств A и B
$A \cap B$ — пересечение множеств A и B
$\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел
$\mathbf{Z}$ — множество всех целых чисел
$\mathbf{Z}_0$ — множество всех неотрицательных целых чисел
$\mathbf{R}$ — множество всех действительных (вещественных) чисел
$\{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant a\}$ — множество, содержащее все элементы $x \in \mathbf{R}$, удовлетворяющие условию $x \leqslant a$ (и только ему)
$[a;\ b]$ — замкнутый промежуток (отрезок)
$(a;\ b)$ — открытый промежуток (интервал)
$(a;\ b]$, $[a;\ b)$ — полуоткрытые промежутки
$(-\infty;\ a]$, $(a;\ +\infty)$ — бесконечные промежутки
$(-\infty;\ +\infty) = \mathbf{R}$ — числовая прямая
AB — отрезок прямой с концами в точках A и B
$|AB|$ — длина отрезка AB
$\parallel$ — знак параллельности
$\perp$ — знак перпендикулярности
$\angle ABC$ — угол ABC
$\triangle ABC$ — треугольник ABC
$S_{\triangle ABC}$ — площадь треугольника ABC
$\vec{a} = (a_x;\ a_y)$ — вектор с координатами a_x, a_y
$|\vec{a}|$ $(|\overrightarrow{AB}|)$ — длина вектора $\vec{a}$ $(\overrightarrow{AB})$
$\smile AB$ — дуга окружности
S_{OA} — осевая симметрия (симметрия относительно оси — прямой OA)

I. ОШИБКИ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

1. Функции $y=ax+b$, $y=k/x$, $y=ax^2+bx+c$

1. При решении уравнений и неравенств полезно (а иногда просто необходимо) устанавливать их области определения (мы здесь исключаем случаи, когда нахождение области определения вызывает большие затруднения).

Пример 1а. Решите уравнение $\frac{m}{\sqrt{x}+7}=\sqrt{x}-7$.

Неправильное решение. Преобразуем уравнение:

$$\left(\frac{m}{\sqrt{x}+7}=\sqrt{x}-7\right)\Leftrightarrow(m=x-49)\Leftrightarrow(x=m+49).$$

Неправильный ответ: $\{m+49\}$.

Правильное решение. Область определения: $x\geqslant 0$. Решаем уравнение:

$$\left(\frac{m}{\sqrt{x}+7}=\sqrt{x}-7\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\geqslant 0,\\ m=x-49\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x=m+49\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}m+49\geqslant 0,\\ x=m+49\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}m\geqslant -49,\\ x=m+49\end{cases}\right).$$

Правильный ответ: $\{m+49\mid m\in[-49;\ +\infty)\}$.

Пример 1б. Решите уравнение $\frac{a-2}{x+4}=1$. (*Ответ*: $\{a-6\mid a\neq 2\}$.)

2. При умножении и делении уравнения на выражение, содержащее неизвестную величину или параметр, необходимо отдельно исследовать случай, когда это выражение равно нулю.

Пример 2а. Решите уравнение $ax-2b=bx$.
Неправильное решение. Имеем:

$$(ax-2b=bx)\Leftrightarrow((a-b)x=2b)\underset{\text{---}}{\Leftrightarrow}\left(\begin{cases}a\neq b,\\ x=\dfrac{2b}{a-b}\end{cases}\right).$$

Неправильный ответ: $\left\{\dfrac{2b}{a-b}\,\middle|\, a\neq b\right\}$.

Правильное решение. Имеем:

$$(ax-2b=bx)\Leftrightarrow((a-b)x=2b)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}a-b\neq 0,\\ x=\dfrac{2b}{a-b},\end{cases}\text{ или }\begin{cases}a-b=0,\\ 2b=0,\\ x\in(-\infty,\ +\infty),\end{cases}\right.$$

$$\left.\text{или }\begin{cases}a-b=0,\\ 2b\neq 0,\\ x\in\varnothing\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}a\neq b,\\ x=\dfrac{2b}{a-b},\end{cases}\right.$$

$$\left.\text{или }\begin{cases}a=b=0,\\ x\in(-\infty;\ +\infty),\end{cases}\text{ или }\begin{cases}a=b,\\ b\neq 0,\\ x\in\varnothing\end{cases}\right).$$

Правильный ответ: $\left\{\dfrac{2b}{a-b}\middle| a\neq b;\ (-\infty;\ +\infty)|a=\right.$ $\left.=b=0;\ \varnothing\,|a=b \text{ и } b\neq 0.\right\}$.

Пример 2б. Решите уравнение $(a^2-9)x=(a-$ $-1)(a+3)$. $\left(\textit{Ответ: } \left\{\dfrac{a-1}{a-3}\middle| a\neq\pm 3;\ (-\infty;\ +\infty)|a=\right.\right.$ $\left.\left.=-3;\ \varnothing\,|a=3\right\}.\right)$

3. Повторите п. 2.

Пример 3а. Решите уравнение $ax=a^2$.

Неправильное решение. Преобразуем уравнение:

$$(ax=a^2)\underset{\text{---}}{\Leftrightarrow}\left(\begin{cases}a\neq 0,\\ x=a\end{cases}\right).$$

Неправильный ответ: $\{a|a\neq 0\}$.

Правильное решение. Решим уравнение:

$$(ax=a^2)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}a\neq 0,\\ x=a\end{cases}\text{ или }\begin{cases}a=0,\\ x=c\in\mathbf{R}\end{cases}\right).$$

Правильный ответ: $\{a|a\neq 0;\ (-\infty;\ +\infty)|a=0\}$.

Пример 3б. Решите уравнение $(a-2)x=a^2-4$. (*Ответ:* $\{a+2|a\neq 2;\ (-\infty;\ +\infty)|a=2\}$.)

4. Определение модуля (абсолютной величины):

$$|x|=\begin{cases} x & \text{при } x\geqslant 0,\\ -x & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Тогда

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & \text{п р и } f(x)\geqslant 0,\\ -f(x) & \text{п р и } f(x)<0,\end{cases}$$

$$f(|x|)=\begin{cases} f(x) & \text{п р и } x\geqslant 0,\\ f(-x) & \text{п р и } x<0.\end{cases}$$

Определение арифметического корня:

$$\sqrt{x^2}=|x|,\ \sqrt{f^2(x)}=\sqrt{(f(x))^2}=|f(x)|.$$

Таким образом, $\sqrt{b^2}$ в с е г д а является неотрицательной величиной (не следует путать арифметический корень $\sqrt{b^2}$ с корнями уравнения $x^2-b^2=0$: $x_{1,2}=$ $=\pm\sqrt{b^2}=\pm|b|$).

Пример 4а. Упростите выражение

$$\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}+\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}.$$

Неправильное решение. Имеем:

$$\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}+\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=(\sqrt{2}-1)+(1-\sqrt{2})=0.$$

Неправильный ответ: 0.

Правильное решение. Вычислим

$$\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}+\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=|\sqrt{2}-1|+|1-\sqrt{2}|=$$
$$=2(\sqrt{2}-1).$$

Правильный ответ: $2(\sqrt{2}-1)$.

Пример 4б. Упростите выражение

$$\sqrt{(m+n)^2-4mn}+n-m.$$

$\left(\text{Ответ: } \begin{cases} 0 & \text{при } m\geqslant n,\\ 2(n-m) & \text{при } m<n.\end{cases}\right)$

5. Повторите п. 4.

Пример 5а. Решите уравнение $\sqrt{(x-1)^2}=1-x$.

Неправильное решение. Преобразуем уравнение:

$$(\sqrt{(x-1)^2}=1-x)\underset{\approx}{\Leftrightarrow}((x-1)=1-x)\Leftrightarrow(x=1).$$

Неправильный ответ: $\{1\}$.

Правильное решение. Область определения: $x\in(-\infty;\ +\infty)$.

Решаем уравнение:

$$(\sqrt{(x-1)^2}=1-x)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\x-1=1-x\end{cases}\right.$$

$$\left.\text{или }\begin{cases}x-1<0,\\1-x=1-x\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\geqslant 1,\\x=1\end{cases}\right.$$

$$\left.\text{или }\begin{cases}x<1,\\0=0\ \text{(тождество)}\end{cases}\right)\Leftrightarrow(x=1\ \text{ или }\ x<1).$$

(Ср. с решениями примера 74а).

Правильный ответ: $(-\infty;\ 1]$.

Пример 5б. Решите уравнение $|x+1|=1+x$. (*Ответ:* $[-1;\ +\infty)$.)

6. Повторите п. 4.

Пример 6а. Решите уравнение $|3-x|=a$.

Правильное решение. Рассмотрим возможные знаки (плюс и минус) выражения, стоящего под знаком модуля:

$$(|3-x|=a)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}3-x\geqslant 0,\\3-x=a\end{cases}\text{ или }\begin{cases}3-x<0,\\-3+x=a\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\leqslant 3,\\x=3-a\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x>3,\\x=3+a\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}3-a\leqslant 3,\\x=3-a\end{cases}\text{ или }\begin{cases}3+a>3,\\x=3+a\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}a\geqslant 0,\\x=3-a\end{cases}\text{ или }\begin{cases}a>0,\\x=3+a\end{cases}\right).$$

Заметим, что полученные решения совпадают при $a=0$.

Правильный ответ: $\{3\pm a\,|\,a\in[0;\ +\infty);\ \varnothing\,|\,a\in\in(-\infty;\ 0)\}$.

Пример 6б. Решите уравнение $|x-a|=6$. (*Ответ:* $\{a\pm 6\,|\,a\in(-\infty;\ +\infty)\}$.)

7. Сумма двух неотрицательных выражений равна нулю тогда и только тогда, когда **каждое** из них равно нулю.

Пример 7а. Решите уравнение

$$|x-1|+|x-3|=2.$$

Неправильное решение. Рассмотрим всевозможные комбинации знаков (плюс и минус) выражений, стоящих под знаком модуля:

$$(|x-1|+|x-3|=2)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ x-3\geqslant 0,\\ x-1+x-3=2,\end{cases}\text{ или}\right.$$

$$\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ x-3<0,\\ x-1-x+3=2,\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x-1<0,\\ x-3\geqslant 0,\\ -x+1+x-3=2,\end{cases}$$

$$\left.\text{или }\begin{cases}x-1<0,\\ x-3<0,\\ -x+1-x+3=2\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\geqslant 3\\ x=3,\end{cases}\text{ или }\begin{cases}1\leqslant x<3,\\ 2=2,\end{cases}\right.$$

$$\left.\text{или }\begin{cases}x\in\varnothing,\\ -2=2,\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x<1,\\ x=1\end{cases}\right).$$

Неправильный ответ: $\{1;\ 3\}$.

Правильное решение. *I способ.* Рассмотрим всевозможные комбинации знаков (плюс и минус) выражений, стоящих под знаком модуля:

$$(|x-1|+|x-3|=2)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ x-3\geqslant 0,\\ x-1+x-3=2,\end{cases}\text{ или}\right.$$

$$\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ x-3<0,\\ x-1-x+3=2,\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x-1<0,\\ x-3\geqslant 0,\\ -x+1+x-3=2,\end{cases}$$

$$\left.\text{или }\begin{cases}x-1<0,\\ x-3<0,\\ -x+1-x+3=2\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\geqslant 3,\\ x=3,\end{cases}\text{ или }\begin{cases}1\leqslant x<3,\\ 2=2,\end{cases}\right.$$

$$\left.\text{или }\begin{cases}x\in\varnothing,\\ -2=2,\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x<1,\\ x=1\end{cases}\right)\Leftrightarrow(x=3,\text{ или } 1\leqslant x<3,$$

$$\text{или } x\in\varnothing,\text{ или } x\in\varnothing)\Leftrightarrow(1\leqslant x\leqslant 3).$$

II способ. Найдем значения x, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль. Упорядочив их, получим $\{1;\ 3\}$. Теперь рассмотрим соответствующие промежутки: $(-\infty;\ 1)$, $[1;\ 3)$, $[3;\ +\infty)$. Преобразуем уравнение:

$$(|x-1|+|x-3|=2)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x<1,\\ -x+1-x+3=2,\end{cases}\text{ или}\right.$$

$$\begin{cases}1\leqslant x<3,\\x-1-x+3=2,\end{cases} \text{или } \begin{cases}x\geqslant 3,\\x-1+x-3=2\end{cases}\Bigg)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x<1,\\x=1,\end{cases} \text{или } \begin{cases}1\leqslant x<3,\\2=2,\end{cases} \text{или } \begin{cases}x\geqslant 3,\\x=3\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x\in\varnothing, \text{ или } 1\leqslant x<3, \text{ или } x=3)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(1\leqslant x\leqslant 3).$$

Правильный ответ: [1; 3].

Пример 7б. Решите уравнение $|x-3|+|y-2x|=0$. (*Ответ:* {(3; 6)}.)

8. Повторите п. 4.

Пример 8а. При каких значениях a уравнение

$$|2x+3|+|2x-3|=ax+6$$

имеет более двух корней?

Правильное решение. Рассмотрим всевозможные комбинации знаков (плюс и минус) выражений, стоящих под знаком модуля:

$$(|2x+3|+|2x-3|=ax+6)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}2x+3\geqslant 0,\\2x-3\geqslant 0,\\2x+3+2x-3=ax+6,\end{cases}\right.$$

$$\text{или } \begin{cases}2x+3\geqslant 0,\\2x-3<0,\\2x+3-2x+3=ax+6,\end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases}2x+3<0,\\2x-3\geqslant 0,\\-2x-3+2x-3=ax+6,\end{cases}$$

$$\left.\text{или } \begin{cases}2x+3<0,\\2x-3<0,\\-2x-3-2x+3=ax+6\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\geqslant 3/2,\\(4-a)x=6,\end{cases} \text{или } \begin{cases}-3/2\leqslant x<3/2,\\ax=0,\end{cases} \text{или}\right.$$

$$\left.\begin{cases}x\in\varnothing,\\ax=-12,\end{cases} \text{или } \begin{cases}x<-3/2,\\(a+4)x=-6\end{cases}\right).$$

Проведем анализ полученных четырех систем уравнений. В каждой из них содержится уравнение вида $cx=d$, имеющее единственное решение при $c\neq 0$ и любом d. При $c=0$ и $d\neq 0$ это уравнение решений не имеет, а при $c=0$ и $d=0$ существует бесконечное множество решений (ср. с примером 2а). Следовательно. более двух решений может иметь вторая из полученных выше систем при $a=0$.

Правильный ответ: $a\in\{0\}$.

Пример 8б. Решите уравнение $|x-5|=x$. (*Ответ:* $\{2{,}5\}$.)

9. При сокращении дробно-рациональной функции на выражение, содержащее неизвестную величину или параметр, как правило, происходит расширение ее области определения: к ней могут добавляться значения, при которых указанное выражение равно нулю. (Ср. с п. 2).

Пример 9а. Постройте график функции $y=|x|/x$.

Неправильное решение. Имеем:

$$(y=|x|/x)\Leftrightarrow\left(y=\begin{cases}+1 & \text{при } x>0,\\ -1 & \text{при } x<0\end{cases}\right).$$

Неправильный ответ: см. рис. 1.

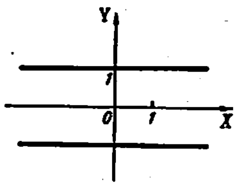

Рис. 1

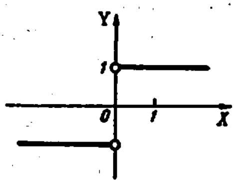

Рис. 2

Правильное решение. Область определения: $x\in(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.

Выполним преобразования:

$$(y=|x|/x)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x>0,\\ y=1\end{cases}\text{или }\begin{cases}x<0,\\ y=-1\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(y=\begin{cases}+1 & \text{при } x>0,\\ -1 & \text{при } x<0\end{cases}\right).$$

Правильный ответ: см. рис. 2.

Пример 9б. Постройте график уравнения $|y|+|x|=0$. (*Ответ:* см. рис. 3 (уравнению удовлетворяет одна точка координатной плоскости $(0;\ 0)$).)

10. При построении на координатной плоскости графика уравнения, содержащего неизвестные величины под знаком модуля, необходимо исследовать все точки плоскости.

Пример 10а. Постройте график уравнения $|x|+|y|=1$.

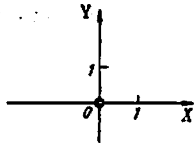

Рис. 3

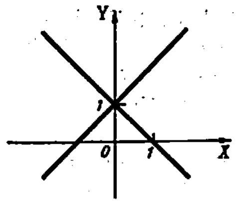

Рис. 4

Неправильное решение. Преобразуем уравнение:

$$(|x|+|y|=1) \Leftrightarrow (y=\pm x+1).$$

Неправильный ответ: см. рис. 4.

Правильное решение. Найдем значения неизвестных x и y, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль: $x=0$, $y=0$. Для того чтобы рассмотреть все точки плоскости XOY, исследуем любые возможные комбинации знаков (плюс, минус) переменных x и y. Получим четыре четверти координатной плоскости: $I - x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; $II - x<0$, $y \geqslant 0$; $III - x<0$, $y<0$; $IV - x \geqslant 0$, $y<0$. Преобразуем уравнение:

$$(|x|+|y|=1) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ x+y=1, \end{cases} \text{или} \begin{cases} x<0, \\ y \geqslant 0, \\ -x+y=1, \end{cases} \text{или} \right.$$

$$\left. \begin{cases} x<0, \\ y<0, \\ -x-y=1, \end{cases} \text{или} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ y<0, \\ x-y=1 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ y=-x+1, \end{cases} \text{или} \right.$$

$$\left. \begin{cases} x<0, \\ y \geqslant 0, \\ y=x+1, \end{cases} \text{или} \begin{cases} x<0, \\ y<0, \\ y=-x-1, \end{cases} \text{или} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ y<0, \\ y=x-1 \end{cases} \right).$$

Каждое из четырех полученных уравнений задает часть соответствующей прямой (рис. 5, *а—г* соответственно). Объединение всех этих частей прямых и будет искомым графиком. (Ср. с решением примера 54а).

Правильный ответ: см. рис. 6.

Пример 10б. Постройте график уравнения $|x|-|y|=1$. (*Ответ:* см. рис. 7.)

11. Повторите п. 4.

Пример 11а. Постройте график уравнения $y^2=4x^2$.

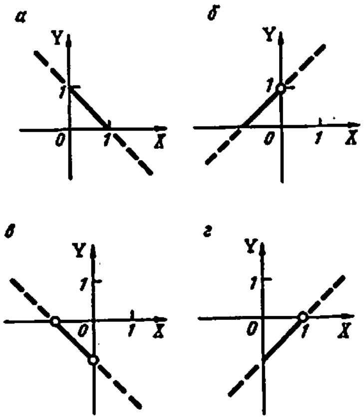

Рис. 5

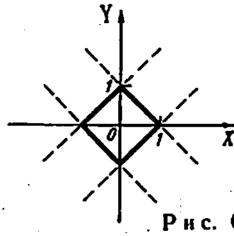

Рис. 6

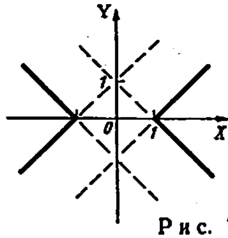

Рис. 7

Неправильное решение. Преобразуем уравнение:

$$(y^2=4x^2)\underset{\sim}{\Leftrightarrow}(y=\sqrt{4x^2})\underset{\sim}{\Leftrightarrow}(y=2x).$$

Неправильный ответ: см. рис. 8.

Правильное решение. *I способ.* Извлечем квадратный корень из левой и правой частей уравнения. Тогда

$$(y^2=4x^2)\Leftrightarrow(|y|=2|x|)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}y\geqslant 0,\\ x\geqslant 0,\\ y=2x,\end{cases}\text{ или }\begin{cases}y\geqslant 0,\\ x<0,\\ y=-2x,\end{cases}\text{ или}\right.$$

$$\left.\begin{cases}y<0,\\ x<0,\\ -y=-2x,\end{cases}\text{ или }\begin{cases}y<0,\\ x\geqslant 0,\\ -y=2x\end{cases}\right).$$

Каждое из четырех полученных уравнений задает часть соответствующей прямой (рис. 9, *а*—*г* соответственно). Объединение всех этих частей представляет собой искомый график (рис. 10).

II способ. Имеем:

$$(y^2=4x^2)\Leftrightarrow(y^2-4x^2=0)\Leftrightarrow((y-2x)(y+2x)=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(y-2x=0\text{ или }y+2x=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(y=2x\text{ или }y=-2x).$$

Правильный ответ: см. рис. 10.

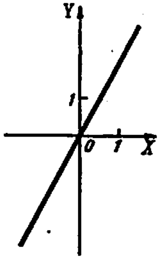

Рис. 8

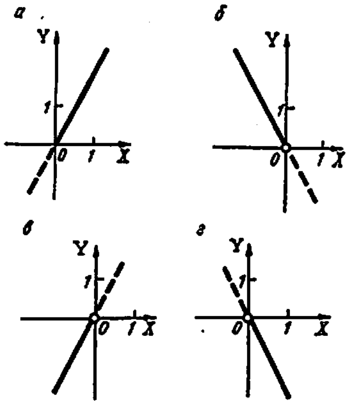

Рис. 9

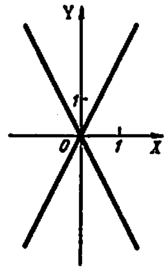

Рис. 10

Пример 11б. Постройте график уравнения $x = y^2$. (*Ответ:* см. рис. 11.)

12. Произведение двух сомножителей равно нулю, если один из них равен нулю, а для другого **определены** все заданные операции.

Пример 12а. Постройте график уравнения $x\sqrt{y} = 0$.

Неправильное решение. Имеем:

$$(x\sqrt{y} = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ или } y = 0.)$$

Неправильный ответ: см. рис. 12 (графиком являются оси OX и OY).

Правильное решение. *I способ.* Преобразуем уравнение:

$$(x\sqrt{y} = 0) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = 0, \\ y \geqslant 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = 0, \\ x \in (-\infty;\ +\infty) \end{cases}\right).$$

Каждое из двух полученных уравнений задает часть

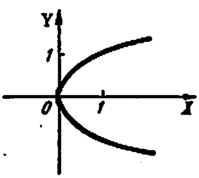

Рис. 11

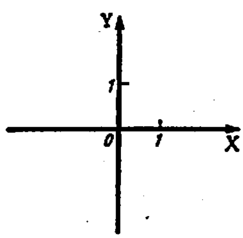

Рис. 12

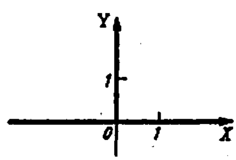

Рис. 13

соответствующей прямой. Объединение этих частей и будет искомым графиком (рис. 13).

II способ. Область определения:

$$\begin{cases} x\in(-\infty;\ +\infty), \\ y\in[0;\ +\infty). \end{cases}$$

Выполним преобразования:

$$(x\sqrt{y}=0)\Leftrightarrow\left(\begin{cases} y\geqslant 0, \\ x=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sqrt{y}=0, \\ x\in(-\infty;\ +\infty) \end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} y\geqslant 0, \\ x=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y=0, \\ x\in(-\infty;\ +\infty) \end{cases}\right).$$

Правильный ответ: см. рис. 13.

Пример 12б. Постройте график функции

$$y=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(3-x)^2}.$$

$$\left(\textit{Ответ:}\text{ см. рис. 14}\left(y=\begin{cases} -2x+4 & \text{при } x<1, \\ 2 & \text{при } 1\leqslant x\leqslant 3 \\ 2x-4 & \text{при } x>3 \end{cases}\right).\right)$$

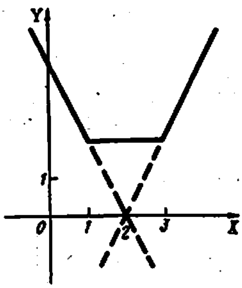

Рис. 14

13. Рассмотрим преобразование графиков функций. Пусть дан график функции $y=f(x)$.

1. График функции $y=f(x)+a$ получается путем параллельного переноса графика функции $y=f(x)$ по оси OY на $|a|$ вверх, если $a>0$, и вниз, если $a<0$.

2. График функции $y=f(x+a)$ получается путем параллельного переноса графика функции $y=f(x)$ по оси OX на $|a|$ вправо, если $a<0$, и влево, если $a>0$.

3. График функции $y=af(x)$ $(a>0)$ получается путем равномерного растяжения в a раз (при $a>1$) или сжатия в $1/a$ раз (при $a<1$) графика функции $y=f(x)$ по оси OY.

4. График функции $y=-f(x)=-1\cdot f(x)$ симметричен графику функции $y=f(x)$ относительно оси OX.

5. График функции $y=f(ax)$ $(a>0)$ получается путем равномерного сжатия в a раз (при $a>1$) или растяжения в $1/a$ раз (при $a<1$) графика функции $y=f(x)$ по оси OX.

6. График функции $y=f(-x)$ симметричен графику функции $y=f(x)$ относительно оси OY.

7. График функции $y=|f(x)|$ получается из графика функции $y=f(x)$ путем зеркального отражения относительно оси OX его части, расположенной под осью OX, при условии, что часть графика, расположенная над осью OX, не изменяется.

8. График функции $y=f(|x|)$ получается из графика функции $y=f(x)$ для $x\geqslant 0$ путем зеркального отражения относительно оси OY его части, расположенной правее оси OY при условии, что сама эта часть графика не изменяется.

9. График четной функции симметричен относительно оси OY, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пример 13а. Постройте график функции $y=||x-1|-1|$.

Правильное решение. Последовательно строим графики функций: $y=x-1$, $y=|x-1|$, $y=|x-1|-1$, $y=||x-1|-1|$ (рис. 15, *а—г* соответственно).

Правильный ответ: см. рис. 15, *г*.

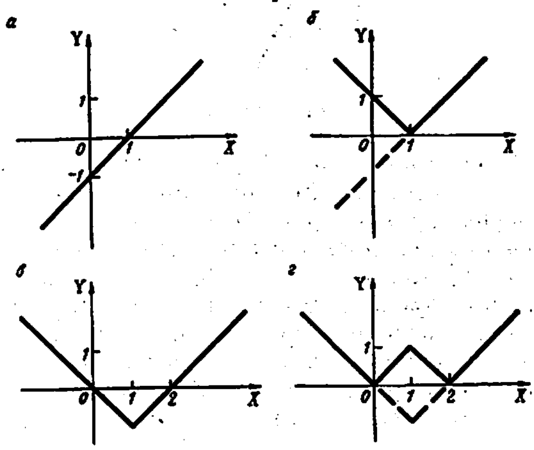

Рис. 15

Пример 13б. Постройте на координатной плоскости XOY график уравнения $|x|=2$. (*Ответ:* см. рис. 16.)

14. Графиком функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола при $a\neq 0$.

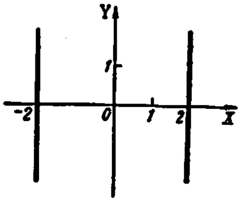

Рис. 16

Пример 14а. При каком β уравнение $(\beta-1)x^2-2(\beta+1)x+\beta-2=0$ имеет один корень?

Неправильное решение. Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет один корень, если его дискриминант b^2-4ac равен нулю. Вычислим

$$D=b^2-4ac=4(\beta+1)^2-4(\beta-1)(\beta-2)=4(5\beta-1).$$

При $D=0$ получим, что $\beta=1/5$.

Неправильный ответ: $\{1/5\}$.

Правильное решение. Заданное уравнение является квадратным при $\beta-1\neq 0$. При $\beta-1=0$ оно превращается в линейное. Следовательно, возможны два случая:

1) $\beta\neq 1$. Вычислим дискриминант:

$$D=4(\beta+1)^2-4(\beta-1)(\beta-2)=4(5\beta-1).$$

Поскольку $D=0$, имеем $\beta=1/5$;

2) $\beta=1$. Подставим $\beta=1$ в исходное уравнение. Получим уравнение $-4x-1=0$, которое имеет один корень.

Правильный ответ: $\{1/5;\ 1\}$.

Пример 14б. Чему равна сумма всех корней любого биквадратного уравнения $x^4+px^2+q=0$, имеющего корни? (*Ответ:* 0.)

15. Повторите пп. 1, 12.

Пример 15а. Решите уравнение $\sqrt{x}(x^2-1)=0$.

Неправильное решение. Имеем:

$$(\sqrt{x}(x^2-1)=0)\Leftrightarrow(x=0 \text{ или } x^2-1=0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \text{ или } x=1 \text{ или } x=-1).$$

Неправильный ответ: $\{0;\ -1;\ +1\}$.

Правильное решение. *I способ.* Преобразуем уравнение:

$$(\sqrt{x}(x^2-1)=0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases}\sqrt{x}=0, \\ x^2-1 \text{ имеет смысл}\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x^2-1=0, \\ \sqrt{x} \text{ имеет смысл}\end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases}x=0, \\ -\infty<x<+\infty\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x=\pm 1, \\ x\geqslant 0\end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \text{ или } x=+1).$$

II способ. Область определения: $x\geqslant 0$.

Выполним следующие преобразования:

$$(\sqrt{x}(x^2-1)=0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases}x\geqslant 0, \\ \sqrt{x}=0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x\geqslant 0, \\ x^2-1=0\end{cases}\right) \Leftrightarrow (x=0 \text{ или } x=1).$$

(Ср. с решением примера 12а.)

Правильный ответ: $\{0;\ 1\}$.

Пример 15б. Решите уравнение $\sqrt{(x+5)^2}=x+5$. (*Ответ:* $[-5;\ +\infty)$.)

16. При возведении в квадрат уравнений вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$, как правило, появляются *посторонние* корни, которые могут принадлежать области определения. Их можно выявить проверкой полученных результатов: подставить поочередно все корни в заданное уравнение.

При возведении в квадрат уравнений вида $\sqrt{f(x)}= g(x)$ посторонние корни, принадлежащие области определения, не появляются, если наложить дополнительное условие: $g(x)\geqslant 0$, т. е.

$$(\sqrt{f(x)}=g(x)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases}f(x)\geqslant 0, \\ g(x)\geqslant 0, \\ f(x)=g^2(x)\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}g(x)\geqslant 0, \\ f(x)=g^2(x)\end{cases}\right).$$

Пример 16а. Решите уравнение

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1.$$

Неправильное решение. Найдем область определения:

$$\left(\begin{cases} x+1\geqslant 0, \\ 2x+3\geqslant 0 \end{cases}\right)\Leftrightarrow(x\geqslant -1).$$

Преобразуем уравнение:

$$(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1)\Leftrightarrow(\sqrt{2x+3}=1-\sqrt{x+1})\underset{\sim}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{\sim}{\Leftrightarrow}\left(\begin{cases} x\geqslant -1, \\ 2x+3=1-2\sqrt{x+1}+x+1 \end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} x\geqslant -1, \\ x+1=-2\sqrt{x+1} \end{cases}\right)\underset{\sim}{\Leftrightarrow}\left(\begin{cases} x\geqslant -1, \\ x^2-2x-3=0 \end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x=3 \text{ или } x=-1).$$

Неправильный ответ: $\{-1;\ 3\}$.

Правильное решение. *I способ.* Область определения: $x\in[-1;\ +\infty)$.

Имеем:

$$(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1)\Leftrightarrow(\sqrt{2x+3}=1-\sqrt{x+1})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{cases} x\geqslant -1, \\ 2x+3=1-2\sqrt{x+1}+x+1) \end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} x\geqslant -1, \\ x+1=-2\sqrt{x+1} \end{cases}\right)\Rightarrow\left(\begin{cases} x\geqslant -1, \\ x^2-2x-3=0 \end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x=3 \text{ или } x=-1).$$

Поскольку уравнение возводилось в четную степень, выполним проверку полученных решений, подставив их в исходное уравнение. Убеждаемся, что корень $x=3$ не удовлетворяет уравнению.

II способ. Выполним преобразования:

$$(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} x+1\geqslant 0, \\ 2x+3\geqslant 0, \\ x+1+2x+3+2\sqrt{(x+1)(2x+3)}=1 \end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} x\geqslant -1, \\ 2\sqrt{2x^2+5x+3}=-3x-3 \end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\geqslant -1,\\ -3x-3\geqslant 0,\\ \left(2\sqrt{2x^2+5x+3}\right)^2=(-3x-3)^2\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\geqslant -1,\\ x\leqslant -1,\\ x^2-2x-3=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x=-1,\\ x=-1\end{cases}\text{ или } x=3\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x=-1).$$

(Ср. с решениями примеров 74а, 123а.)

Правильный ответ: $\{-1\}$.

Пример 16б. Определите коэффициенты квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ так, чтобы и его корни были равны p и q. (*Ответ:* $\{(0;\ 0),\ (1;\ -2)\}$.)

17. Повторите пп. 4, 16.

Пример 17а. Решите уравнение

$$(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=4.$$

Неправильное решение. Имеем:

$$\left((x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=4\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left((x-3)(x+1)+3\sqrt{(x-3)(x+1)}=4\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(y^2+3y-4=0\,|\,y=\sqrt{(x-3)(x+1)}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(y=1\text{ или } y=-4\,|\,y=\sqrt{(x-3)(x+1)}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{(x-3)(x+1)}=1\text{ или } x\in\varnothing\right)\Leftrightarrow\left(x=1\pm\sqrt{5}\right).$$

Проверкой убеждаемся, что корень $x=1-\sqrt{5}$ не удовлетворяет уравнению.

Неправильный ответ: $\{1+\sqrt{5}\}$.

Правильное решение. Найдем область определения:

$$\left(\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ x-3>0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x+1\leqslant 0,\\ x-3<0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x>3\text{ или } x\leqslant -1)\Leftrightarrow(x\in(-\infty;\ -1]\cup(3;\ +\infty)).$$

Преобразуем уравнение:

$$\left((x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=4\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x-3>0,\\(x-3)(x+1)+3\sqrt{(x-3)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=4\end{cases}\text{ или}\right.$$

$$\left.\begin{cases}x-3<0,\\(x-3)(x+1)-3\sqrt{(x-3)^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=4\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x>3,\\y^2+3y-4=0\end{cases}\Big|y=\sqrt{(x-3)(x+1)}\text{ или}\right.$$

$$\left.\begin{cases}x<3,\\y^2-3y-4=0\end{cases}\Big|y=\sqrt{(x-3)(x+1)}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x>3,\\y=1\text{ или }y=-4\end{cases}\Big|y=\sqrt{(x-3)(x+1)}\text{ или}\right.$$

$$\left.\begin{cases}x<3,\\y=-1\text{ или }y=4\end{cases}\Big|y=\sqrt{(x-3)(x+1)}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x>3,\\\sqrt{(x-3)(x+1)}=1\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x<3,\\\sqrt{(x-3)(x+1)}=4\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x=1+\sqrt{5}\text{ или }x=1-2\sqrt{5}).$$

Правильный ответ: $\{1+\sqrt{5};\ 1-2\sqrt{5}\}$.

Пример 17б. Найдите ошибку: $-4\sqrt{5}=\sqrt{(-4)^2}\sqrt{5}=\sqrt{80}$. (*Ответ:* $-4\sqrt{5}=-\sqrt{4^2}\cdot\sqrt{5}=-\sqrt{80}$ или $-4\sqrt{5}=-\sqrt{(-4)^2}\cdot\sqrt{5}=-\sqrt{80}$.)

18. Повторите пп. 4, 16.

Пример 18а. Решите уравнение $\sqrt[5]{x-1}+\sqrt{x+2}=3$.

Правильное решение. Заметим, что левая часть данного уравнения монотонно возрастает по x. Значит, уравнение не может иметь более одного корня. Подбором найдем, что $x=2$. Следовательно, других корней быть не может.

Правильный ответ: $\{2\}$.

Пример 18б. Решите уравнение $\sqrt{12-x}=x$. (*Ответ:* $\{3\}$.)

19. Повторите пп. 4, 16.

Пример 19а. Решите уравнение

$$||||x-1|+2|-1|+1|=2.$$

Правильное решение. Последовательно избавимся от модулей, начиная с внешних. При этом учтем, что модуль любого выражения не может быть равен отрицательному числу.

Преобразуем уравнение:

$$(||||x-1|+2|-1|+1|=2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(|||x-1|+2|-1|+1=2 \text{ или }$$
$$|||x-1|+2|-1|+1=-2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(|||x-1|+2|-1|=1 \text{ или } |||x-1|+2|-1|=$$
$$=-3)\Leftrightarrow(||x-1|+2|=2 \text{ или } ||x-1|+2|=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(|x-1|=0, \text{ или } |x-1|=-4,$$
$$\text{или } |x-1|=-2)\Leftrightarrow(x=1).$$

Правильный ответ: $\{1\}$.

Пример 19б. Решите уравнение $x\sqrt{(x+1)/x}=$ $=a$. (*Ответ:* $\{-1/2+\sqrt{1/4+a^2}\,|\,a>0,\ -1/2-$ $-\sqrt{1/4+a^2}\,|\,a\leqslant 0\}$.)

20. Повторите п. 2.

Пример 20а. Дана линейная функция $f(x)$. Докажите, что функция $\varphi(x)=f(f(x))$ также является линейной.

Правильное решение. Так как $f(x)$ — линейная функция, то:

$$f(x)=kx+b,\ \varphi(x)=f(f(x))=k(kx+b)+b=$$
$$=k^2x+(kb+b)=k_1x+b_1,$$

где $k_1=k^2$, $b_1=kb+b$, что и требовалось доказать.

Пример 20б. При каких значениях a уравнение

$$(a^2-3a+2)x^2-(a^2-5a+4)x+a-a^2=0$$

имеет более двух корней? (*Ответ:* $a\in\{1\}$.)

21. Повторите п. 14.

Пример 21а. При каких значениях параметра k сумма квадратов корней уравнения $4x^2-28x+k=0$ равна 22,5?

Неправильное решение. Если x_1, x_2 — корни заданного уравнения, то выполняются следующие равенства:

$$\begin{cases} x_1+x_2=7, \\ x_1x_2=k/4, \end{cases}$$

Заметим, что

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2,$$

откуда получим $22{,}5=7^2-2k/4$ или $k=53$.

Неправильный ответ: $k\in\{53\}$.

Правильное решение. Заданное уравнение имеет решение, если дискриминант $D=28^2-16k\geqslant 0$, т. е. при $k \leqslant 49$. Если x_1, x_2 — корни заданного уравнения, то выполняются следующие равенства:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7, \\ x_1 x_2 = k/4. \end{cases}$$

Заметим, что

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2,$$

откуда получим $22{,}5 = 7^2 - 2k/4$ или $k = 53$. Однако при $k = 53$ заданное квадратное уравнение не имеет корней, так как его дискриминант отрицателен.

Правильный ответ: $k \in \varnothing$.

Пример 21б. Составьте уравнение с целыми коэффициентами, если известно, что один из его корней равен $2 + \sqrt{3}$. (*Ответ:* например, $x^2 - 4x + 1 = 0$ или $4x^2 - 16x + 4 = 0$.)

22. Повторите пп. 4, 13.

Пример 22а. Постройте график функции $y = (x+1)/|x|$.

Неправильное решение. Построим график функции $y = 1 + 1/x$ (рис. 17). Зеркально отразим часть полученного графика, лежащую ниже оси OX, относительно этой же оси.

Неправильный ответ: см. рис. 18.

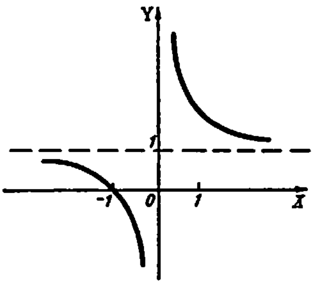

Рис. 17

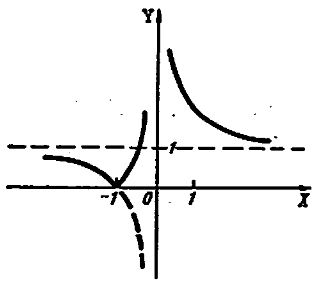

Рис. 18

Правильное решение. Область определения: $x \neq 0$.

Имеем

$$\left(y = \frac{x+1}{|x|}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x > 0, \\ y = 1 + 1/x \end{cases} \text{или} \begin{cases} x < 0, \\ y = -1 - 1/x = -1(1 + 1/x) \end{cases}\right).$$

Каждая из полученных функций задает часть соответствующей кривой (рис. 19). (При построении графика функции $y = -1(1/x + 1)$ для случая $x < 0$ вначале строим график функции $y = 1/x$, поднимаем его на единицу вверх и затем зеркально отражаем относительно оси OX.)

Правильный ответ: см. рис. 20.

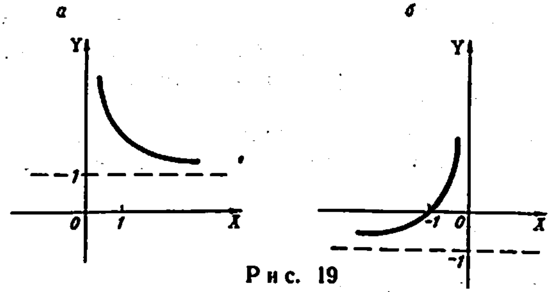

Рис. 19

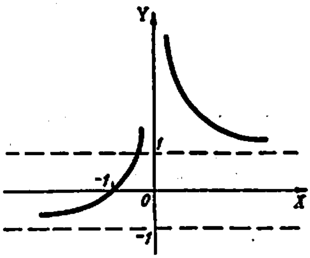

Рис. 20

Пример 22б. Постройте график функции

$$y = 1/(|x| - 1).$$

Ответ: см. рис. 21

$$\left(y = \begin{cases} 1/(x-1) & \text{при } x \geqslant 0, \quad x \neq 1, \\ -1/(x+1) & \text{при } x < 0, \quad x \neq -1 \end{cases} \right).$$

Указание. Достаточно построить график функции для случая $x \geqslant 0$, затем зеркально отразить его относительно оси OY, так как исходная функция является четной.

23. Повторите пп. 4, 13.

Пример 23а. Постройте график функции $y = |x^2 - 3x + 2|$.

Неправильное решение. Построим график функции $y = x^2 - 3x + 2$. Графиком функции $y = |x^2 -$

$-3x+2|$ будет только та часть построенного графика, которая лежит выше оси OX, поскольку $y \geqslant 0$.

Неправильный ответ: см. рис. 22.

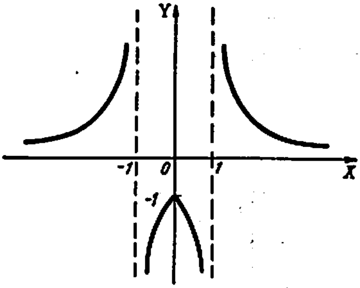

Рис. 21

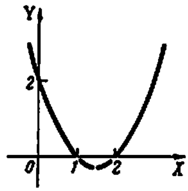

Рис. 22

Правильное решение. Построим вначале график функции $y=x^2-3x+2$. Затем часть этого графика, лежащую ниже оси OX, зеркально отразим относительно этой же оси.

Правильный ответ: см. рис. 23.

Пример 23б. Постройте график функции

$$y=x^2-x|x|+1.$$

$\left(\textit{Ответ: } \text{см. рис. } 24 \left(y=\begin{cases}1 & \text{при } x\geqslant 0,\\ 2x^2+1 & \text{при } x<0\end{cases}\right).\right)$

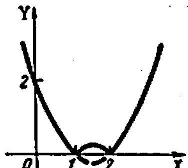

Рис. 23

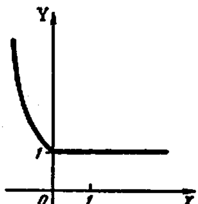

Рис. 24

24. Повторите пп. 4, 13.

Пример 24а. Постройте график функции

$$y=|x-2|(x+2).$$

Правильное решение. Выражение, стоящее под знаком модуля, обращается в нуль при $x=2$. Следовательно,

$$(y=|x-2|(x+2)) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}x-2\geqslant 0,\\ y=(x-2)(x+2)\end{cases} \text{ или}\right.$$

$$\begin{cases} x-2<0, \\ y=(-x+2)(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \geqslant 2, \\ y=x^2-4 \end{cases} \text{ или } \right.$$

$$\left. \begin{cases} x<2, \\ y=-1(x^2-4) \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(y = \begin{cases} x^2-4 & \text{при } x \geqslant 2, \\ -1(x^2-4) & \text{при } x<2 \end{cases} \right).$$

Правильный ответ: см. рис. 25.

Пример 24б. Постройте график функции

$$y=|2/(x-1)-1|.$$

(*Ответ:* см. рис. 26.)

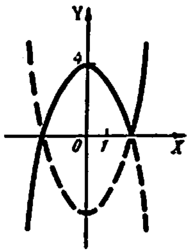

Рис. 25

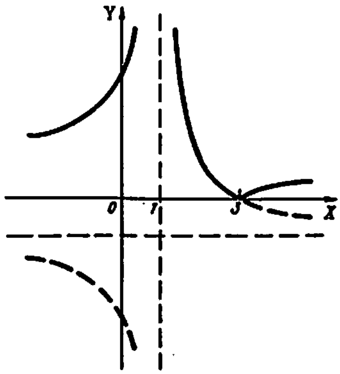

Рис. 26

Указание. Часть графика функции $y=2/(x-1)-1$, лежащую ниже оси OX, зеркально отразите относительно этой же оси.

25. Повторите пп. 4, 13.

Пример 25а. Постройте на координатной плоскости XOY график уравнения $y=|y-x^2|$.

Правильное решение. Преобразуем уравнение:

$$(y=|y-x^2|) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} y-x^2 \geqslant 0, \\ y=y-x^2 \end{cases} \text{или } \begin{cases} y-x^2<0, \\ y=-y+x^2 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} y \geqslant x^2, \\ x=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y<x^2, \\ y=x^2/2 \end{cases} \right).$$

Таким образом, получили, что координатная плоскость разбивается параболой $y=x^2$ на две полуплоскости, причем в одной полуплоскости $y \geqslant x^2$, а в другой — $y<x^2$ (рис. 27). В полуплоскости, где $y \geqslant x^2$, графиком исходного уравнения является прямая, которая задается уравнением $x=0$, а в полуплоскости, где $y<x^2$,

графиком является парабола $y=\frac{1}{2}x^2$. (Ср. с решением примера 106а).

Правильный ответ: см. рис. 28.

Пример 25б. Постройте график функции $y=\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$. (*Ответ:* см. рис. 29.)

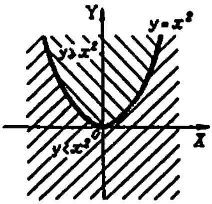

Рис. 27

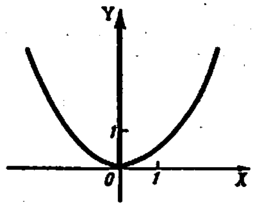

Рис. 28

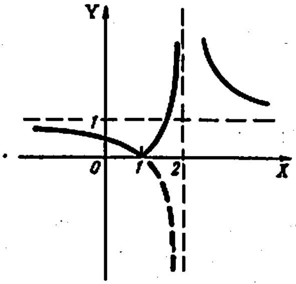

Рис. 29

Указание. Выражение, стоящее под знаком модуля, предварительно следует преобразовать к более удобному виду:

$$\frac{x-1}{x-2}=\frac{x-2+1}{x-2}=\frac{x-2}{x-2}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-2}+1.$$

26. Приведем важные неравенства:

$$a^2+b^2\geqslant 2ab,\ a+1/a\geqslant 2\ (a>0),$$
$$a/b+b/a\geqslant 2\ (ab>0).$$

Пример 26а. Докажите, что $a^2+b^2\geqslant 2ab$.

Правильное решение. Действительно,

$$(a^2+b^2\geqslant 2ab)\Leftrightarrow(a^2-2ab+b^2\geqslant 0)\Leftrightarrow((a-b)^2\geqslant 0).$$

Пример 26б. Докажите, что $a/b+b/a\geqslant 2$, если $ab>0$.

27. При умножении неравенства на отрицательное число знак неравенства **изменяется** на противоположный.

Пример 27а. Решите неравенство $1/x<1/3$.

Неправильное решение. Умножим левую и правую части неравенства на $3x$. Получим $\underset{\sim\sim\sim}{3<x}$.

Неправильный ответ: $(3;\ +\infty)$.

Правильное решение. *I способ.* Область определения: $x\neq 0$.

Умножим исходное неравенство на $3x$, учитывая при этом его знак:

$$\left(\frac{1}{x}<\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}3x>0,\\3<x\end{cases}\text{ или }\begin{cases}3x<0,\\3>x\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x>3\text{ или }x<0).$$

II способ. Преобразуем неравенство:

$$\left(\frac{1}{x}<\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3}<0\right)\Leftrightarrow\left(\frac{3-x}{3x}<0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}3-x<0,\\3x>0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}3-x>0,\\3x<0\end{cases}\right)\Leftrightarrow(x>3\text{ или }x<0).$$

Правильный ответ: $(-\infty;\ 0)\cup(3;\ +\infty)$.

Пример 27б. Решите неравенство $1/x\geqslant 5$. (*Ответ:* $(0;\ 1/5]$.)

28. Повторите п. 27.

Пример 28а. Решите неравенство $x>1/x$.

Неправильное решение. Умножим левую и правую части неравенства на x. Получим $\underset{\sim\sim\sim}{x^2>1}$. Отсюда следует, что $x>1$ или $x<-1$.

Неправильный ответ: $(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$.

Правильное решение. *I способ.* Область определения: $x\neq 0$.

Преобразуем неравенство:

$$\left(x>\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{x}>0\right)\Leftrightarrow\left(\frac{x^2-1}{x}>0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x^2-1>0,\\x>0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x^2-1<0,\\x<0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x>1\text{ или }-1<x<0).$$

II способ. Область определения: $x\neq 0$.

Умножаем исходное неравенство на x, учитывая при этом его знак:

$$\left(x>\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x>0,\\x^2>1\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x<0,\\x^2<1\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x > 1 \text{ или } -1 < x < 0).$$

Правильный ответ: $(-1;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$.

Пример 28б. Решите неравенство $1/x \geqslant x$. (*Ответ:* $(-\infty;\ -1] \cup (0;\ 1]$.)

29. При умножении и делении неравенства на выражение, содержащее неизвестную величину или параметр, необходимо отдельно исследовать каждый из трех случаев:

1) выражение равно нулю;
2) выражение меньше нуля;
3) выражение больше нуля (ср. с пп. 2, 27).

Пример 29а. Решите неравенство $ax < 1$.

Неправильное решение. Имеем:

$$(ax < 1) \underset{\sim}{\Leftrightarrow} (x < 1/a).$$

Неправильный ответ: $(-\infty;\ 1/a)$ при $a \neq 0$.

Правильное решение. Преобразуем неравенство:

$$(ax < 1) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} a > 0, \\ x < 1/a, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a < 0, \\ x > 1/a, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a = 0, \\ 0 \cdot x < 1 \end{cases}\right).$$

Правильный ответ: $(-\infty;\ 1/a)$ при $a > 0$, $(1/a;\ +\infty)$ при $a < 0$, $(-\infty;\ +\infty)$ при $a = 0$.

Пример 29б. Решите неравенство

$$(a+2)x - b^2 + 1 > 0.$$

$\left(\textit{Ответ: } \left(\frac{b^2-1}{a+2};\ +\infty\right)\right.$ при $a > -2$, $\left(-\infty;\ \frac{b^2-1}{a+2}\right)$ при $a < -2$, $(-\infty;\ +\infty)$ при $a = -2$ и $-1 < b < 1$, $\varnothing$ при $a = -2$ и $\left.(b \leqslant -1 \text{ или } b \geqslant 1).\right)$

30. Повторите п. 29.

Пример 30а. При каких значениях b следующая система неравенств не имеет решения:

$$\begin{cases} 0{,}5(2x+5) < 2(x-2)+5, \\ 2(bx-1) < 3? \end{cases}$$

Неправильное решение. Имеем:

$$\left(\begin{cases} 0{,}5(2x+5) < 2(x-2)+5, \\ 2(bx-1) < 3 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x > 1{,}5, \\ 2bx < 5 \end{cases}\right) \underset{\sim}{\Leftrightarrow}$$

$$\underset{\sim}{\Leftrightarrow} \left(\begin{cases} x > 1{,}5, \\ x < 5/(2b) \end{cases}\right).$$

Последняя система не имеет решения, если $\frac{5}{2b} < 1,5$. Следовательно, $b > 5/3$.

Неправильный ответ: $(5/3;\ +\infty)$.

Правильное решение. Преобразуем систему неравенств:

$$\left(\begin{cases}0,5(2x+5) < 2(x-2)+5,\\ 2(bx-1) < 3\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}x > 1,5,\\ 2bx < 5\end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases}x > 1,5,\\ -\infty < x < +\infty\end{cases} \text{при } b=0, \text{ или}\right.$$

$$\left.\begin{cases}x > 1,5,\\ x > \frac{5}{2b}\end{cases} \text{при } b < 0, \text{ или } \begin{cases}x > 1,5,\\ x < \frac{5}{2b}\end{cases} \text{при } b > 0\right).$$

Проведем анализ полученных трех систем неравенств. Решением первой системы будет любое $x > 1,5$. Следовательно, $b=0$ не удовлетворяет условию примера. Решением второй системы будет также любое $x > 1,5$, поскольку $\frac{5}{2b} < 0$ при $b < 0$. Значит, $b < 0$ также не удовлетворяет условию примера. Третья система неравенств $(b > 0)$ имеет решение $1,5 < x < \frac{5}{2b}$ при условии, что $1,5 < \frac{5}{2b}$. При $1,5 \geqslant \frac{5}{2b}$ эта система решений не имеет, откуда $b \geqslant 5/3$.

Правильный ответ: $b \in [5/3;\ +\infty)$.

Пример 30б. Решите неравенство $\frac{1}{3x+5} < \frac{x}{3x+5}$. (*Ответ:* $(-\infty;\ -5/3) \cup (1;\ +\infty)$.)

31. Повторите п. 4.

Пример 31а. Решите неравенство $|x| > |x+1|$.

Неправильное решение. Имеем:

$$(|x| > |x+1|) \overset{?}{\Leftrightarrow} (x > x+1) \Leftrightarrow (0 > 1).$$

Неправильный ответ: $\varnothing$.

Правильное решение. Выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль при $x=-1$ и $x=0$. Рассмотрим промежутки $(-\infty;\ -1)$, $[-1;\ 0)$, $[0;\ +\infty)$:

$$(|x| > |x+1|) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}x < -1,\\ -x > -x-1,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}-1 \leqslant x < 0,\\ -x > x+1,\end{cases}\right.$$

$$\left.\text{или } \begin{cases}x \geqslant 0,\\ x > x+1\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}x < -1,\\ 0 > -1,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}-1 \leqslant x < 0,\\ x < -1/2,\end{cases}\right.$$

$$\text{или } \begin{cases} x \geqslant 0, \\ 0 > 1 \end{cases} \Bigg) \Leftrightarrow (x < -1, \text{ или } -1 \leqslant x < -1/2,$$
$$\text{или } x \in \varnothing) \Leftrightarrow (x < -1/2).$$

Правильный ответ: $(-\infty;\ -1/2)$.

Пример 31б. Найдите область определения функции $y=\sqrt{5-x-6/x}$. (*Ответ:* $(-\infty;\ 0) \cup [2;\ 3]$.)

32. Повторите п. 14.

Пример 32а. При каком n функция

$$y = nx^2 + (n-x)x + n - 1$$

отрицательна для любого x?

Неправильное решение. Преобразуем исходное выражение:

$$y = nx^2 + (n-x)x + n - 1 = (n-1)x^2 + nx + n - 1.$$

Функция $y = ax^2 + bx + c$ отрицательна для всех x, если ее график — парабола — лежит строго ниже оси OX:

$$\left(\begin{cases} a = n - 1 < 0, \\ D = b^2 - 4ac = n^2 - 4(n-1)(n-1) < 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} n < 1, \\ 3n^2 - 8n + 4 > 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} n < 1, \\ n < 2/3 \text{ или } n > 2 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n < 2/3).$$

Правильный ответ при неправильном решении: $(-\infty;\ 2/3)$.

Правильное решение. Приведенное выше решение является правильным, если график данной функции — парабола. Однако при $n-1=0$ график данной функции не является параболой. Следовательно, необходимо дополнительно рассмотреть случай $n=1$. Проверкой убеждаемся, что при $n=1$ существуют значения x, при которых исходная функция принимает положительные значения. (Ср. с решением примера 14а.)

Правильный ответ: $(-\infty;\ 2/3)$.

Пример 32б. Решите неравенство $x^2 - 2x + a < 0$. (*Ответ:* $(1-\sqrt{1-a};\ 1+\sqrt{1-a})$ при $a \in (-\infty;\ 1)$.)

33. Повторите п. 4.

Пример 33а. При каких m данная система неравенств выполняется для всех x:

$$-6 < \frac{2x^2+mx-4}{x^2-x+1} < 4?$$

Правильное решение. Преобразуем систему неравенств:

$$\left(-6 < \frac{2x^2+mx-4}{x^2-x+1} < 4\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \dfrac{2x^2+mx-4}{x^2-x+1} < 4, \\ \dfrac{2x^2+mx-4}{x^2-x+1} > -6 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} \dfrac{-2x^2+(m+4)x-8}{x^2-x+1} < 0, \\ \dfrac{8x^2+(m-6)x+2}{x^2-x+1} > 0 \end{cases}\right).$$

Вычислим дискриминант квадратной функции, стоящей в знаменателе: $D_3 = -3 < 0$. Следовательно, знаменатель является положительным при любом x, и последняя система неравенств эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} -2x^2+(m+4)x-8 < 0, \\ 8x^2+(m-6)x+2 > 0. \end{cases}$$

Чтобы полученные неравенства выполнялись для всех x, необходимо, чтобы

$$\left(\begin{cases} (m+4)^2-64 < 0, \\ (m-6)^2-64 < 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} -12 < m < 4, \\ -2 < m < 14 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2 < m < 4).$$

Правильный ответ: $(-2;\ 4)$.

Пример 33б. На каком множестве определено выражение $\sqrt{|x|-4}$. (*Ответ:* $(-\infty;\ -4] \cup [4;\ +\infty)$.)

34. Повторите пп. 4, 29.

Пример 34а. Решите неравенство $x^2-|x|-$ $-2<0$.

Неправильное решение. Имеем:

$$(x^2-|x|-2<0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x<0, \\ x^2+x-2<0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2-x-2<0 \end{cases}\right).$$

Решив неравенство $x^2+x-2<0$, получим $-2<$ $<x<1$. Решение неравенства $x^2-x-2<0$ имеет вид $-1<x<2$. Общим решением этих неравенств является $\underline{-1<x<1}$.

Неправильный ответ: $(-1;\ 1)$.

Правильное решение: Преобразуем неравенство:

$$(x^2-|x|-2<0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x^2-x-2<0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x<0,\\ x^2+x-2<0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\geqslant 0,\\ -1<x<2\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x<0,\\ -2<x<1\end{cases}\right)\Leftrightarrow(-2<x<2).$$

Правильный ответ: $(-2;\ 2)$.

Пример 34б. Решите неравенство $\frac{4}{x+2}>3-x$. (*Ответ:* $(-2;\ -1)\cup(2;\ +\infty)$.)

35. Повторите пп. 1, 4, 29.

Пример 35а. Решите неравенство $\left|\frac{x+2}{x-1}\right|>3$.

Правильное решение. *I способ.* Имеем:

$$\left(\left|\frac{x+2}{x-1}\right|>3\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\frac{x+2}{x-1}\geqslant 0,\\ \frac{x+2}{x-1}>3\end{cases}\text{ или }\begin{cases}\frac{x+2}{x-1}<0,\\ -\frac{x+2}{x-1}>3\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x+2}{x-1}>3\text{ или }\frac{x+2}{x-1}<-3\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{-2x+5}{x-1}>0\text{ или }\frac{4x-1}{x-1}<0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(1<x<5/2\text{ или }1/4<x<1).$$

II способ. Выполним преобразования:

$$\left(\left|\frac{x+2}{x-1}\right|>3\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}|x+2|>3|x-1|,\\ x\neq 1\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}(x+2)^2>(3(x-1))^2,\\ x\neq 1\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x^2+4x+4>9x^2-18x+9,\\ x\neq 1\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}8x^2-22x+5<0,\\ x\neq 1\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}1/4<x<5/2,\\ x\neq 1\end{cases}\right).$$

Правильный ответ: $(1/4;\ 1)\cup(1;\ 5/2)$.

Пример 35б. Решите неравенство $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}}<1$. (*Ответ:* $[1/3;\ 3/4)$.)

36. Иррациональное неравенство, содержащее квадратный корень, целесообразно возводить в квадрат, если обе его части одного знака (плюс или минус). С учетом п. 4 имеем:

$$(\sqrt{f(x)} > g(x)) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \right),$$

$$(\sqrt{f(x)} \leqslant g(x)) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ f(x) \leqslant g^2(x) \end{cases} \right).$$

Пример 36а. Решите неравенство $\sqrt{x+2} > -2$.

Неправильное решение. Область определения: $x \geqslant -2$.

Имеем:

$$(\sqrt{x+2} > -2) \stackrel{\Leftrightarrow}{-} ((x+2) > (-2)^2) \Leftrightarrow (x > 2).$$

Неправильный ответ: $(2;\ +\infty)$.

Правильное решение. Область определения: $x \geqslant -2$.

Так как любое положительное число всегда больше отрицательного (-2), то данное неравенство является истинным для всех x, принадлежащих области определения.

Правильный ответ: $[-2;\ +\infty)$.

Пример 36б. Решите неравенство $\sqrt{x+1} > -2x$. (*Ответ:* $((1-\sqrt{17})/8;\ +\infty)$.)

37. Повторите п. 36.

Пример 37а. Решите неравенство $\sqrt{1-x^2} > x$.

Неправильное решение. Область определения: $x \in [-1;\ 1]$.

Возведем в квадрат данное неравенство:

$$(\sqrt{1-x^2} > x) \stackrel{\Leftrightarrow}{-} (1-x^2 > x^2) \Leftrightarrow (x^2 < 1/2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (-\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2).$$

Неправильный ответ: $(-\sqrt{2}/2;\ \sqrt{2}/2)$.

Правильное решение. Область определения: $x \in [-1;\ 1]$.

Преобразуем неравенство:

$$(\sqrt{1-x^2} > x) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \geqslant 0, \\ 1-x^2 > x^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x < 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x^2<1/2\end{cases}\text{ или }-1\leqslant x<0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(0\leqslant x<\sqrt{2}/2\text{ или }-1\leqslant x<0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(-1\leqslant x<\sqrt{2}/2).$$

Правильный ответ: $[-1;\ \sqrt{2}/2)$.

Пример 37б. Решите неравенство $\sqrt{x^2-4x}-x>-3$. (*Ответ:* $(-\infty;\ 0]\cup(4{,}5;\ +\infty)$.)

38. Повторите пп. 36, 29.

Пример 38а. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{6}{x-4}+1}.$$

Неправильное решение. Так как подкоренное выражение должно быть неотрицательным, то решим следующее неравенство:

$$\left(\frac{6}{x-4}+1\geqslant 0\right)\Leftrightarrow\left(\frac{x+2}{x-4}\geqslant 0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x+2\geqslant 0,\\ x-4>0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x+2<0,\\ x-4<0\end{cases}\right)\Leftrightarrow(x>4\text{ или }x<-2).$$

Неправильный ответ: $(-\infty;\ -2)\cup(4;\ +\infty)$.

Правильное решение. Поскольку выражение, стоящее под знаком корня, должно быть больше либо равно 0, то:

$$\left(\frac{6}{x-4}+1\geqslant 0\right)\Leftrightarrow\left(\frac{x+2}{x-4}\geqslant 0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x+2\geqslant 0,\\ x-4>0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x+2\leqslant 0,\\ x-4<0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x>4\text{ или }x\leqslant -2).$$

Правильный ответ: $(-\infty;\ -2]\cup(4;\ +\infty)$.

Пример 38б. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}>0.$$

(*Ответ:* $(-3;\ 1)$.)

39. Повторите пп. 36, 29.

Пример 39а. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{3x^2+4}}{x-1}\leqslant -4.$$

Неправильное решение. Область определения: $x \neq 1$ (так как $3x^2+4>0$ для всех x).

Преобразуем неравенство:

$$\left(\frac{\sqrt{3x^2+4}}{x-1} \leqslant -4\right) \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} x \neq 1, \\ \sqrt{3x^2+4} \leqslant -4(x-1) \end{matrix}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \neq 1, \\ 3x^2+4 \leqslant 16x^2-32x+16 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \neq 1, \\ 13x^2-32x+12 \geqslant 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \neq 1, \\ x \leqslant 6/13 \text{ или } x \geqslant 2 \end{cases}\right).$$

Неправильный ответ: $(-\infty;\ 6/13] \cup (2;\ +\infty)$.

Правильное решение. Область определения: $x \neq 1$ (так как $3x^2+4>0$ для всех x).

Имеем:

$$\left(\frac{\sqrt{3x^2+4}}{x-1} \leqslant -4\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x-1>0, \\ \sqrt{3x^2+4} \leqslant -4(x-1) \end{cases} \text{или} \begin{cases} x-1<0, \\ \sqrt{3x^2+4} \geqslant -4(x-1) \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x \in \varnothing \text{ или } \begin{cases} x<1, \\ 3x^2+4 \leqslant 16x^2-32x+16 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x<1, \\ 13x^2-32x+12 \leqslant 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x<1, \\ 6/13 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (6/13 \leqslant x < 1).$$

Правильный ответ: $[6/13;\ 1)$.

Пример 39б. Решите систему неравенств:

$$\sqrt{x^2-9x+20} \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant \sqrt{x^2-13}.$$

(*Ответ:* $[5;\ 7] \cup \{4\}$.)

40. Повторите пп. 4, 12.

Пример 40а. Решите неравенство

$$(x+5)\sqrt{x+8} \geqslant 0.$$

Неправильное решение. Область определения: $x \geqslant -8$.

Так как $\sqrt{x+8}$ является неотрицательным числом, то произведение $(x+5)\sqrt{x+8}$ также будет неотрицательным числом, если $\underline{(x+5) \geqslant 0}$, т. е. $x \geqslant -5$. Полученное решение принадлежит области определения.

Неправильный ответ: $[-5;\ +\infty)$.

Правильное решение. Область определения: $x \geqslant -8$.

Преобразуем неравенство:

$$((x+5)\sqrt{x+8} \geqslant 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \geqslant -8, \\ x+5>0, \\ \sqrt{x+8}>0, \end{cases} \text{или} \begin{cases} x \geqslant -8, \\ x+5=0, \\ \sqrt{x+8} \text{ имеет смысл,} \end{cases} \text{или} \right.$$

$$\left. \begin{cases} x \geqslant -8, \\ \sqrt{x+8}=0, \\ x+5 \text{ имеет смысл} \end{cases} \right) \Leftrightarrow (x>-5, \text{ или } x=-5, \text{ или }$$

$$x=-8) \Leftrightarrow (x \geqslant -5 \text{ или } x=-8).$$

Правильный ответ: $[-5;\ +\infty) \cup \{-8\}$.

Пример 40б. Решите уравнение $|2x^2-1| = |x^2-2x-3|$. (*Ответ:* $\{(1-\sqrt{13})/3;\ (1+\sqrt{13})/3\}$.)

41. Повторите п. 4.

Пример 41а. Решите неравенство

$$8x^2+|-x|+1>0.$$

Правильное решение. *I способ.* Область определения: $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Первые два слагаемые при любых x не могут быть отрицательными; третье слагаемое всегда больше нуля. Следовательно, данное неравенство выполняется для всех x.

II способ. Область определения: $x \in (-\infty;\ +\infty)$. Имеем:

$$(8x^2+|-x|+1>0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} -x \geqslant 0, \\ 8x^2-x+1>0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} -x<0, \\ 8x^2+x+1>0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \leqslant 0, \\ x \in (-\infty;\ +\infty) \end{cases} \text{или} \begin{cases} x>0, \\ x \in (-\infty;\ +\infty) \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-\infty < x < +\infty).$$

Правильный ответ: $(-\infty;\ +\infty)$.

Пример 41б. Докажите, что функция $f(x)=ax^2+bx+c$, $a \neq 0$, не является периодической. Будет ли она периодической при $a=0$? (*Ответ:* функция $f(x)$ будет периодической при $a=b=0$.)

42. Повторите п. 12.

Пример 42а. Найдите все значения m, при которых любое решение неравенства $1 \leqslant x \leqslant 2$ является решением неравенства $x^2 - mx + 1 < 0$.

Правильное решение. По условию отрезок $[1; 2]$ должен принадлежать интервалу $(x_1; x_2)$, где x_1, x_2 — корни уравнения $f(x) = x^2 - mx + 1 = 0$ (рис. 30).

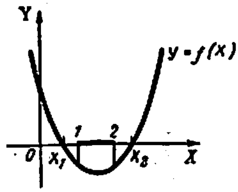

Рис. 30

Так как ветви параболы $y = f(x) = x^2 - mx + 1$ направлены вверх, то, согласно условию, должны быть выполнены соотношения:

$$\left(\begin{cases} D = m^2 - 4 > 0, \\ f(1) = 2 - m < 0, \\ f(2) = 5 - 2m < 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(m > \frac{5}{2}\right).$$

Правильный ответ: $(2{,}5; +\infty)$.

Пример 42б. Решите неравенство

$$(x-8)\sqrt{x^2 - 3x + 2} \geqslant 0.$$

(*Ответ:* $[8; +\infty) \cup \{1; 2\}$.)

43. Повторите пп. 4, 29, 36.

Пример 43а. Решите неравенство $|x^2 - |x|| < 1/4$.

Правильное решение. Учитывая, что $x^2 = |x|^2$, получаем:

$$(|x^2 - |x|| < 1/4) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} |x|^2 - |x| < 1/4, \\ |x|^2 - |x| > -1/4 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} 4|x|^2 - 4|x| - 1 < 0, \\ 4|x|^2 - 4|x| + 1 > 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} \frac{1-\sqrt{2}}{2} < |x| < \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \\ (2|x| - 1)^2 > 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} |x| < \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \\ |x| \neq 1/2 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \frac{-1-\sqrt{2}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \\ x \neq 1/2 \text{ или } x \neq -1/2 \end{cases}\right).$$

Правильный ответ: $\left(\frac{-\sqrt{2}-1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$.)

Пример 43б. Решите неравенство $x\sqrt{3-2x}+$ $+1>0$. (*Ответ:* $(-1/2;\ 3/2]$.)

44. Повторите пп. 4, 29, 36.

Пример 44а. Решите неравенство $a\sqrt{x+1}<1$.

Правильное решение. Область определения: $x\geqslant -1$.

Имеем:

$$(a\sqrt{x+1}<1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}a>0,\\ \sqrt{x+1}<1/a,\end{cases}\text{или}\begin{cases}a<0,\\ \sqrt{x+1}>1/a,\end{cases}\text{или}\begin{cases}a=0,\\ x\geqslant -1\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}a>0,\\ x\geqslant -1,\\ x+1<1/a^2,\end{cases}\text{или}\begin{cases}a<0,\\ x\geqslant -1,\end{cases}\text{или}\begin{cases}a=0,\\ x\geqslant -1\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}a>0,\\ -1\leqslant x<-1+1/a^2\end{cases}\text{или}\begin{cases}a\leqslant 0,\\ x\geqslant -1\end{cases}\right).$$

Правильный ответ: $[-1;\ +\infty)$ при $a\leqslant 0$, $[-1;$ $-1+1/a^2)$ при $a>0$.

Пример 44б. Решите неравенство $2/|x+2|\leqslant 1$. (*Ответ:* $(-\infty;\ -4]\cup[0;\ +\infty)$.)

45. Повторите пп. 36, 4.

Пример 45а. Решите неравенство

$$\sqrt{5x^2+a^2}\geqslant -3x.$$

Правильное решение. Преобразуем неравенство:

$$(\sqrt{5x^2+a^2}\geqslant -3x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x<0,\\ 5x^2+a^2\geqslant 9x^2\end{cases}\text{или}\ x\geqslant 0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x<0,\\ x^2\leqslant a^2/4\end{cases}\text{или}\ x\geqslant 0\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x>0,\\ |x|\leqslant |a|/2\end{cases}\text{или}\ x\geqslant 0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(-|a|/2\leqslant x<0\ \text{или}\ x\geqslant 0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(-|a|/2\leqslant x<+\infty).$$

Правильный ответ: $(a/2;\ +\infty)$ при $a<0$, $(-a/2;\ +\infty)$ при $a\geqslant 0$.

Пример 45б. Решите неравенство $\sqrt{x^2}<x+1$. (*Ответ:* $(-1/2;\ +\infty)$.)

46. Повторите пп. 36, 4, 1.

Пример 46а. Решите неравенство

$$\sqrt{4-x^2}+|x|/x\geqslant 0.$$

Правильное решение. Область определения: $x\in[-2;\ 0)\cup(0;\ +2]$.

Выполним преобразования:

$$(\sqrt{4-x^2}+|x|/x\geqslant 0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x>0,\\ \sqrt{4-x^2}\geqslant -1\end{cases}\text{или}\begin{cases}x<0,\\ \sqrt{4-x^2}\geqslant 1\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(0<x\leqslant 2\ \text{или}\ \begin{cases}x<0,\\ 4-x^2\geqslant 1\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(0<x\leqslant 2\ \text{или}\ \begin{cases}x<0,\\ x^2-3\leqslant 0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(0<x\leqslant 2\ \text{или}\ -\sqrt{3}\leqslant x<0).$$

Правильный ответ: $[-\sqrt{3};\ 0)\cup(0;\ 2]$.

Пример 46б. Решите неравенство $\sqrt{x+2}\geqslant\sqrt{x-a}$. (*Ответ:* $[a;\ +\infty)$ при $a\in[-2;\ +\infty)$, $\varnothing$ при $a\in(-\infty;\ -2)$.)

47. Повторите пп. 36, 4.

Пример 47а. Решите неравенство $x-\sqrt{1-|x|}<0$.

Правильное решение. Область определения: $-1\leqslant x\leqslant 1$.

Преобразуем неравенство:

$$(x-\sqrt{1-|x|}<0)\Leftrightarrow(\sqrt{1-|x|}>x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\geqslant 0,\\ 1-x>x^2\end{cases}\text{или}\begin{cases}x<0,\\ 1+x\geqslant 0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x^2+x-1<0\end{cases}\text{или}\ -1\leqslant x<0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(0\leqslant x<(\sqrt{5}-1)/2\ \text{или}\ -1\leqslant x<0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(-1 \leqslant x < (\sqrt{5}-1)/2).$$

Правильный ответ: $[-1; (\sqrt{5}-1)/2)$.

Пример 47б. Решите неравенство

$$\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0.$$

(*Ответ:* $((\sqrt{13}-5)/2;\ 1]$.)

48. Повторите п. 29.

Пример 48а. Докажите неравенство

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1>0.$$

Правильное решение. Заметим, что при отрицательных x все слагаемые суммы $x^{12}+(-x^9)+x^4+(-x)+1$ положительны. Если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$(1-x)+(x^4-x^9)+x^{12}>0.$$

Для $x>1$

$$x^9(x^3-1)+x(x^3-1)+1>0.$$

Неравенство доказано.

Пример 48б. Найдите все такие a, что для любых $x \leqslant -2$ $ax^2-x \leqslant 0$. (*Ответ:* $a \in (-\infty;\ -1/2]$.)

49. Повторите п. 4.

Пример 49а. Найдите целое число

$$\sqrt{40\sqrt{2}+57}-4\sqrt{2}.$$

Правильное решение. Выполним преобразования:

$$\sqrt{40\sqrt{2}+57}-4\sqrt{2}=\sqrt{32+40\sqrt{2}+25}-4\sqrt{2}=$$
$$=\sqrt{(4\sqrt{2}+5)^2}-4\sqrt{2}=(4\sqrt{2}+5)-4\sqrt{2}=5.$$

Правильный ответ: 5.

Пример 49б. Упростите выражение $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}$.

(*Ответ:* $4\sqrt{2}-5$.)

50. Если натуральное число m делится без остатка на другое натуральное число l, то $m=kl$, где $k \in \mathbf{N}$.

Пример 50а. Число m^2+n^2 делится на 3. Докажите, что n и m делятся на 3.

Правильное решение. Предположим, что m делится на 3, а n не делится на 3. Тогда $m=3k$, $n=3l+1$ или $n=3l+2$, где $k, l \in \mathbf{Z}$. В первом случае

$$m^2+n^2=9k^2+9l^2+6l+1=$$
$$=3(3k^2+3l^2+2l)+1=3t+1,\ t \in \mathbf{Z},$$

а во втором случае

$$m^2+n^2=9k^2+9l^2+12l+4=$$
$$=3(3k^2+3l^2+4l+1)+1=3s+1,\ s \in \mathbf{Z}.$$

Итак, в обоих случаях получили, что m^2+n^2 не делится на 3. Аналогично можно показать, что m^2+n^2 не делится на 3, если m и n не делятся на 3. Если же $m=3k$ и $n=3l$, то

$$m^2+n^2=9k^2+9l^2=3(3k^2+3l^2)=3t,\ t \in \mathbf{Z},$$

и m^2+n^2 делится на 3.

Таким образом, для того чтобы m^2+n^2 делилось на 3, необходимо, чтобы m и n делились на 3.

Пример 50б. Найдите двузначное число, если известно, что две последние цифры его квадрата совпадают с этим числом. (*Ответ:* {25; 76}.)

2. Логарифмическая и показательная функции

51. Повторите пп. 4, 13.

Пример 51а. Постройте график функции $y=|\lg x|$.

Правильное решение. Строим график функции $y=\lg x$ (рис. 31). Часть этого графика, лежащую ниже оси OX, зеркально отражаем относительно этой же оси. (Ср. с решением примера 101а.)

Правильный ответ: см. рис. 32.

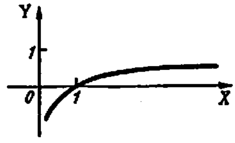

Рис. 31

Рис. 32

Пример 51б. Постройте график функции $y=\lg(-x)$. (*Ответ:* см. рис. 33.)

52. Повторите пп. 4, 13.

Пример 52а. Постройте график функции $y = \log_{0,5}|x|$.

Правильное решение. Строим график функции $y = \log_{0,5} x$ (рис. 34). Так как функция $y = \log_{0,5}|x|$ является четной, то часть графика функции $y = \log_{0,5} x$, лежащую правее оси OY (в данном случае это весь график), зеркально отражаем относительно оси OY при условии, что сама эта часть не изменяется. (Ср. с решением примера 102а.)

Правильный ответ: см. рис. 35.

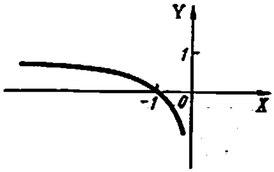

Рис. 33

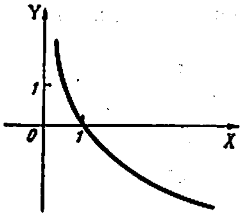

Рис. 34

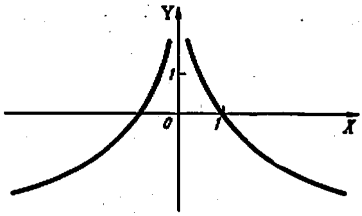

Рис. 35

Пример 52б. Постройте график функции $y = ||\log_{0,5}|x||$. (*Ответ:* см. рис. 36.)

53. Повторите пп. 1, 4.

Пример 53а. Постройте график функции $y = 2^{1/\log_x 2}$.

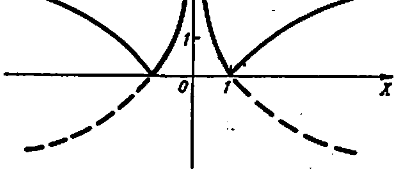

Рис. 36

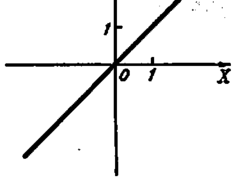

Рис. 37

Неправильное решение. Имеем

$$y=2^{1/\log_x 2}=2^{\log_2 x}=x.$$

Неправильный ответ: см. рис. 37.

Правильное решение. Область определения: $x>0$, $x\neq 1$.

Выполним преобразования:

$$(y=2^{1/\log_x 2})\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\neq 1,\\ y=2^{\log_2 x}\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\neq 1,\\ x>0,\\ y=x\end{cases}\right).$$

Правильный ответ: см. рис. 38.

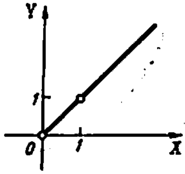

Рис. 38

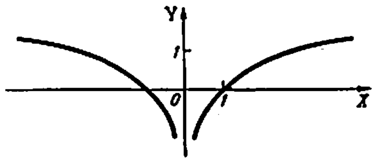

Рис. 39

Пример 53б. Постройте график функции $y=\lg x^2$.

$\left(\textit{Ответ:}\text{ см. рис. } 39\left(y=\begin{cases}2\lg x & \text{при } x>0,\\ 2\lg(-x) & \text{при } x<0\end{cases}\right).\right)$

54. Повторите пп. 4, 10.

Пример 54а. Постройте график уравнения $|y|=\log_{0.5}|x|$.

Правильное решение. Заметим, что уравнение не изменяется после замены x на $-x$. Следовательно, график будет симметричен относительно оси OY. Уравнение также не изменяется после замены y на $-y$. Значит, график будет симметричен относительно оси OX. Таким образом, достаточно рассмотреть случай $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. При этом исходное уравнение принимает вид $y=\log_{0.5} x$. Последнее уравнение задает график (рис. 40), который необходимо зеркально отразить относительно координатных осей. (Ср. с решением примера 10а.)

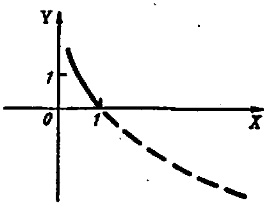

Рис. 40

Правильный ответ: см. рис. 41.

Пример 54б. Постройте график уравнения $|y| = \lg|x|$. (*Ответ:* см. рис. 42.)

55. Повторите пп. 4, 13.

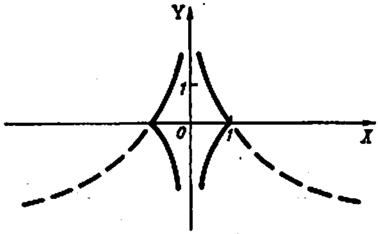

Рис. 41

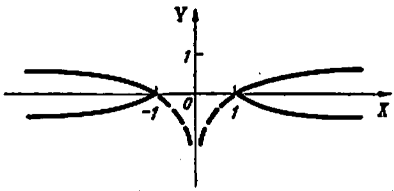

Рис. 42

Пример 55а. Постройте график функции $y = \log_2(|x| - 1)$.

Неправильное решение. Последовательно строим графики функций: $y = \log_2 x$, $y = \log_2|x|$, $y = \log_2(|x| - 1)$ (рис. 43, *а—в* соответственно).

Неправильный ответ: см. рис. 43, *в*.

Правильное решение. Так как заданная функция является четной, достаточно построить ее график для $x \geqslant 0$. Другую часть графика получим из построенной части путем зеркального отражения относительно оси OY. Последовательно строим графики функций: $y = \log_2 x$, $y = \log_2(x - 1)$, $y = \log_2(|x| - 1)$ (рис. 44, *а—в* соответственно).

Правильный ответ: см. рис. 44, *в*.

Пример 55б. Постройте график функции $y = ||\log_2|x - 3||$. (*Ответ:* см. рис. 45.)

56. Повторите пп. 4, 13.

Пример 56а. Постройте график функции

$$y = \lg\left|1 - \frac{1}{2}|x|\right|.$$

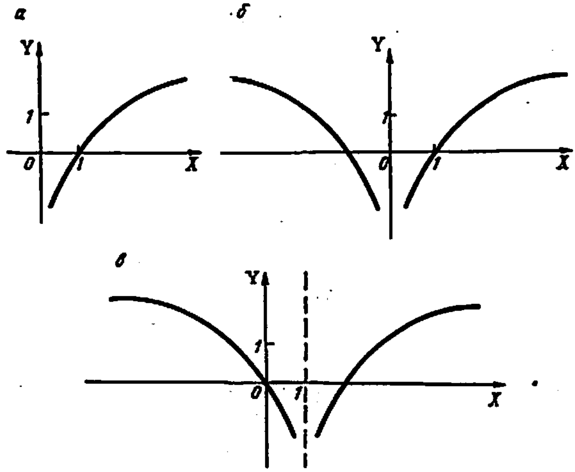

Рис. 43

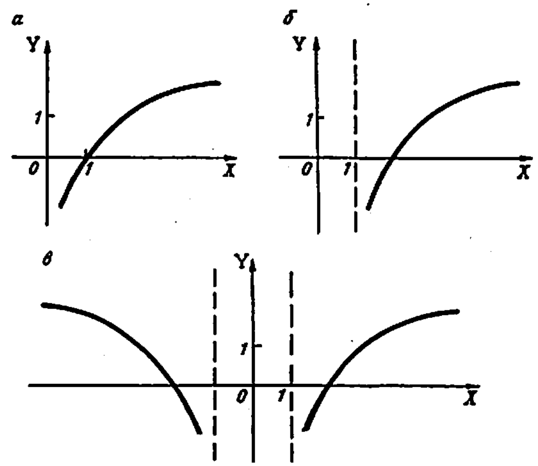

Рис. 44

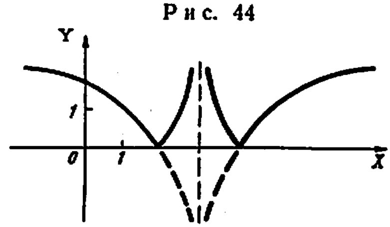

Рис. 45

Правильное решение. Область определения: $x \neq \pm 2$.

Так как заданная функция является четной, достаточно построить ее график для $x \geqslant 0$. Другую часть графика получим из построенной части путем зеркального отражения относительно оси OY.

Последовательно строим графики функций: $y = \lg x$, $y = \lg \frac{1}{2} x$, $y = \lg \frac{1}{2}(x-2)$, $x > 2$, $y = \lg \frac{1}{2}(2-x)$, $0 \leqslant x < 2$ (рис. 46, *а*—*г* соответственно).

Объединяя графики, изображенные на рис. 46, *в* и *г*, и учитывая четность данной функции, получаем требуемый результат.

Правильный ответ: см. рис. 47.

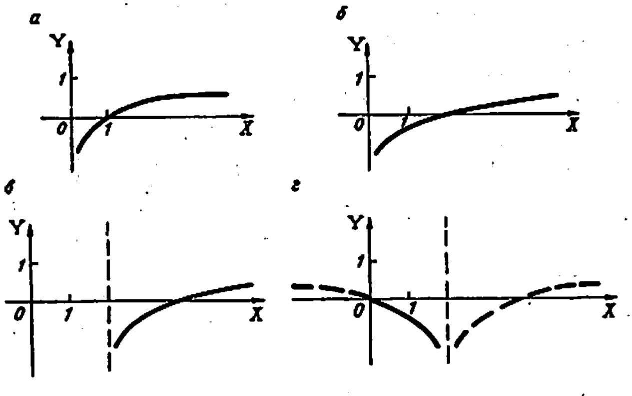

Рис. 46

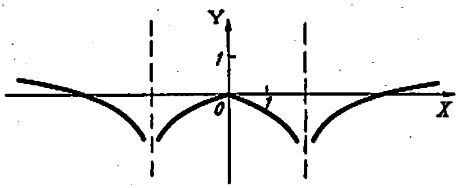

Рис. 47

Пример 56б. Постройте график функции $y = \lg \pi$ (*Ответ:* см. рис. 48.)

57. Повторите п. 4.

Пример 57а. Постройте график функции $y = 2^{|x|}$.

Неправильное решение. Строим график функции $y = 2^x$ (рис. 49). Затем зеркально отражаем его относительно оси OY.

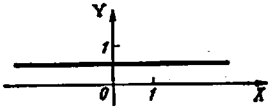

Рис. 48

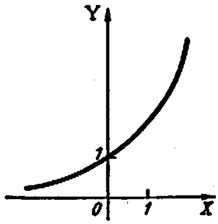

Рис. 49

Неправильный ответ: см. рис. 50.

Правильное решение. Так как заданная функция является четной, достаточно построить часть графика для случая $x \geqslant 0$. Другую часть графика (для $x < 0$) получим зеркальным отражением уже построенной его части относительно оси OY. При $x \geqslant 0$ $y = 2^x$ (рис. 51).

Правильный ответ: см. рис. 52.

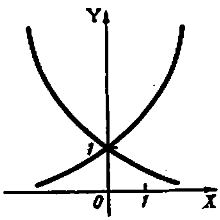

Рис. 50

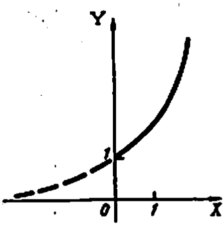

Рис. 51

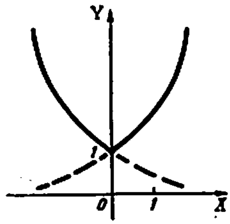

Рис. 52

Пример 57б. Постройте график функции $y = 2^x \times$ $\times 2^{|x|}$.

$\left(\text{\textit{Ответ:} см. рис. 53 } \left(y = \begin{cases} 2^{2x} & \text{при } x \geqslant 0, \\ 1 & \text{при } x < 0 \end{cases}\right).\right)$

58. Повторите п. 4.

Пример 58а. Постройте график функции $y = |(1/2)^x|$.

Правильное решение. Строим график функции $y = (1/2)^x$ (рис. 54). Так как при всех x график функции $y = (1/2)^x$ лежит выше оси OX, то он также является и графиком функции $y = |(1/2)^x|$.

Правильный ответ: см. рис. 54.

Пример 58б. Постройте график функции $y = (1/2)^{-|x|}$. (*Ответ:* см. рис. 52.)

59. Повторите пп. 1, 2.

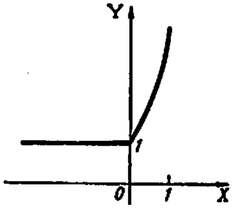

Рис. 53

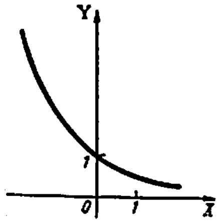

Рис. 54

Пример 59а. Решите графически уравнение $x\times$ $\times 4^x=4$.

Правильное решение. Область определения: $x\in(-\infty;\ +\infty)$.

Имеем:

$$(x\cdot 4^x=4)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\neq 0,\\ 4^x=4/x\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x=0,\\ x\cdot 4^x=4\end{cases}\right).$$

Строим графики функций $y=4^x$ и $y=4/x$. Решением будет абсцисса точки пересечения этих графиков: $x=1$ (рис. 55).

Подстановкой проверяем, что значение $x=0$ не удовлетворяет данному уравнению.

Правильный ответ: $\{1\}$.

Пример 59б. Постройте график функции $y=$ $=x^{\log_x 2}$. (*Ответ:* см. рис. 56.)

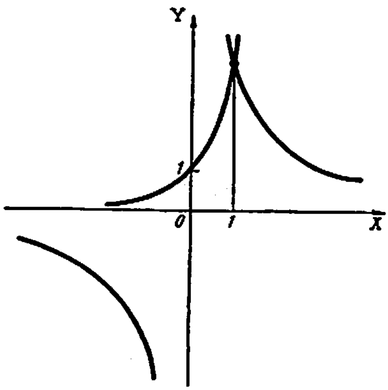

Рис. 55

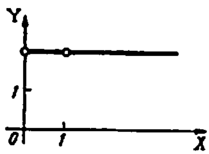

Рис. 56

60. Для $a>0$, $a\neq 1$.

$$\log_a xy=\begin{cases}\log_a x+\log_a y & \text{при } x>0 \text{ и } y>0,\\ \log_a(-x)+\log_a(-y) & \text{при } x<0 \text{ и } y<0;\end{cases}$$

$$\log_a x^2 = 2\log_a |x| = \begin{cases} 2\log_a x & \text{при} \quad x > 0, \\ 2\log_a(-x) & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

При любых положительных a, b и любых действительных x, y верны следующие формулы:

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad a^x b^x = (ab)^x,$$
$$a^x / a^y = a^{x-y}, \quad a^x / b^x = (a/b)^x,$$
$$(a^x)^y = a^{xy}, \quad (a^x)^x = a^{(x^2)} = a^{x^2}.$$

Перечислим основные методы решения логарифмических уравнений и неравенств: потенцирование; сведение к квадратному уравнению или неравенству относительно логарифма; логарифмирование.

Перечислим основные методы решения показательных уравнений и неравенств: сведение к квадратному уравнению или неравенству относительно показательной функции; логарифмирование.

Пример 60а. Решите уравнение $\log_4 x^2 = 2$.

Неправильное решение. Имеем:

$$(\log_4 x^2 = 2) \Leftrightarrow (2\log_4 x = 2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\log_4 x = 1) \Leftrightarrow (x = 4).$$

Неправильный ответ: $\{4\}$.

Правильное решение. *I способ.* Область определения: $x \neq 0$.

Выполним преобразования:

$$(\log_4 x^2) = 2) \Leftrightarrow (\log_4 x^2 = 2\log_4 4) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\log_4 x^2 = \log_4 16) \Leftrightarrow (x^2 = 16) \Leftrightarrow (x = \pm 4).$$

II способ. Область определения: $x \neq 0$.

Преобразуем уравнение:

$$(\log_4 x^2 = 2) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x > 0, \\ 2\log_4 x = 2 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x < 0, \\ 2\log_4(-x) = 2 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x = 4 \text{ или } (-x) = 4) \Leftrightarrow (x = \pm 4).$$

Правильный ответ: $\{-4;\ 4\}$.

Пример 60б. Решите уравнение $\sqrt{2\lg(-x)} = \lg\sqrt{x^2}$. (*Ответ:* $\{-1;\ -100\}$.)

61. Повторите п. 60.

Пример 61а. Решите уравнение $\log_5^2 x - \log_5 4 = 0$.

Правильное решение. Область определения: $x > 0$.

Имеем:

$$(\log_5^2 x - \log_5 4 = 0) \Leftrightarrow \left(\log_5 x = \pm\sqrt{\log_5 4}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x = 5^{\pm\sqrt{\log_5 4}}).$$

Правильный ответ: $\{5 \pm \sqrt{\log_6 4}\}$.

Пример 61б. Определите целое x, если $x = 100^{1/2 - \lg \sqrt[4]{4}}$. (*Ответ:* $\{5\}$.)

62. Повторите п. 60.

Пример 62а. Вычислите $\log_5 9{,}8$, если $\lg 2 = a$, $\lg 7 = b$.

Правильное решение. Выполним преобразования:

$$\log_5 9{,}8 = \frac{\lg 9{,}8}{\lg 5} = \frac{\lg(98/10)}{\lg(10/2)} = \frac{\lg 2 + 2\lg 7 - \lg 10}{\lg 10 - \lg 2} = \frac{a + 2b - 1}{1 - a}.$$

Правильный ответ: $(a + 2b - 1)/(1 - a)$.

Пример 62б. При каких a уравнение

$$3x \lg x = 1 + a \lg x$$

имеет: одно решение; два решения? (*Ответ:* при всех $a \in (-\infty;\ 0]$; при всех $a \in (0;\ +\infty)$.)

Указание. Пример легко решается графически (после преобразования данного уравнения).

63. Следует различать логарифмирование уравнений и домножение одного из членов уравнения на единицу, представленную в виде $\log_a a$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

Пример 63а. Решите уравнение

$$\log_2 \log_3 \log_4 x = 0.$$

Правильное решение. Область определения: $x > 0$, $\log_4 x > 0$, $\log_3 \log_4 x > 0$.

Имеем:

$$(\log_2 \log_3 \log_4 x = 0) \Leftrightarrow (\log_2 \log_3 \log_4 x = \log_2 1) \Leftrightarrow (\log_3 \log_4 x = 1) \Leftrightarrow (\log_3 \log_4 x = \log_3 3) \Leftrightarrow (\log_4 x = 3) \Leftrightarrow (x = 4^3).$$

Правильный ответ: $\{64\}$.

Пример 63б. Решите уравнение $\lg^2 x^2 = 1$. (*Ответ:* $\{-\sqrt{0{,}1};\ +\sqrt{0{,}1};\ -\sqrt{10};\ +\sqrt{10}\}$.)

64. Повторите пп. 60, 16.

Пример 64а. Решите уравнение

$$\frac{1}{5 + \lg x} + \frac{2}{1 - \lg x} = 1.$$

Неправильное решение. Преобразуем уравнение:

$$\left(\frac{1}{5+\lg x}+\frac{2}{1-\lg x}=1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}5+\lg x\neq 0,\\ 1-\lg x\neq 0,\\ 1-\lg x+10+2\lg x=(5+\lg x)(1-\lg x)\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\lg^2 x+5\lg x+6=0)\Leftrightarrow(\lg x=-2 \text{ или } \lg x=-3).$$

Неправильный ответ: $\varnothing$.

Правильное решение. Область определения: $x>0$, $x\neq 10$, $x\neq 10^{-5}$.

Выполним преобразования:

$$\left(\frac{1}{5+\lg x}+\frac{2}{1-\lg x}=1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}5+\lg x\neq 0,\\ 1-\lg x\neq 0,\\ 1-\lg x+10+2\lg x=(5+\lg x)(1-\lg x)\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}5+\lg x\neq 0,\\ 1-\lg x\neq 0,\\ \lg^2 x+5\lg x+6=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\lg x=-2 \text{ или } \lg x=-3)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x=10^{-2} \text{ или } x=10^{-3}).$$

Правильный ответ: $\{0{,}01;\ 0{,}001\}$.

Пример 64б. Решите уравнение $\lg\sqrt{2x-1}=1-\frac{1}{2}\lg(x-9)$. (*Ответ:* $\{13\}$.)

65. Повторите пп. 60, 63.

Пример 65а. Решите уравнение

$$2\lg x^2-\lg^2(-x)=4.$$

Правильное решение. Область определения: $x<0$.

Имеем:

$$(2\lg x^2-\lg^2(-x)=4)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x<0,\\ \lg^2(-x)-4\lg(-x)+4=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x<0,\\ \lg(-x)=2\end{cases}\right)\Leftrightarrow(x=-100).$$

Правильный ответ: $\{-100\}$.

Пример 65б. Решите уравнение $27x^{\log_{27} x} = x^{10/3}$. (*Ответ:* $\{3;\ 27^3\}$.)

Указание. Исходное уравнение логарифмируем по основанию 27.

66. Повторите пп. 60, 63.

Пример 66а. Решите уравнение

$$3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162.$$

Неправильное решение. Выполним преобразования:

$$(3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162) \underline{\Leftrightarrow} (x^2 + x^{\log_3 x} = 162).$$

Замечание. Решение полученного уравнения методами, изучаемыми в средней школе, не приводит к требуемому ответу.

Правильное решение. Область определения: $x > 0$.

Имеем:

$$(3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162) \Leftrightarrow ((3^{\log_3 x})^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162) \Leftrightarrow (x^{\log_3 x} = 81) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 81) \Leftrightarrow (\log_3 x \cdot \log_3 x = \log_3 3^4) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\log_3^2 x = 4) \Leftrightarrow (\log_3 x = \pm 2) \Leftrightarrow (x = 3^2 \text{ или } x = 3^{-2}).$$

Правильный ответ: $\{9;\ 1/9\}$.

Пример 66б. Упростите выражение

$$49^{1/\log_7 7} - \log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}. \text{ (\textit{Ответ:} 67.)}$$

67. Повторите пп. 16, 60, 63.

Пример 67а. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_{0.04} x + 1} + \sqrt{\log_{0.2} x + 3} = 1.$$

Правильное решение. Найдем область определения:

$$\left(\begin{cases} \log_{0.04} x + 1 \geqslant 0, \\ \log_{0.2} x + 3 \geqslant 0, \\ x > 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \leqslant 25, \\ x \leqslant 125, \\ x > 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow (0 < x \leqslant 25).$$

Выполним преобразования:

$$(\sqrt{\log_{0.04} x + 1} + \sqrt{\log_{0.2} x + 3} = 1) \Rightarrow (\log_{0.04} x + 1 =$$
$$= \log_{0.2} x + 3 - 2\sqrt{\log_{0.2} x + 3} + 1) \Leftrightarrow (6 + \log_{0.2} x =$$
$$= 4\sqrt{\log_{0.2} x + 3}) \Rightarrow (\log_{0.2}^2 x - 4 \log_{0.2} x - 12 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\log_{0.2} x = 6 \text{ или } \log_{0.2} x = -2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x=(1/5)^6 \text{ или } x=25).$$

Подставляя полученные решения в заданное уравнение, убеждаемся, что первый корень — посторонний. (Ср. с решением примера 16а).

Правильный ответ: $\{25\}$.

Пример 67б. Решите уравнение $\log_{3/x} x - \log_x(3/x)=8/3$. (*Ответ:* $\{3^{-1/2};\ 3^{3/4}\}$.)

68. Повторите п. 60.

Пример 68а. Докажите, что $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ при $a>0$, $b>0$, $c>0$, $c\neq 1$.

Правильное решение. Имеем:

$$(a^{\log_c b}=b^{\log_c a})\Leftrightarrow(\log_c a^{\log_c b}=\log_c b^{\log_c a})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\log_c b\cdot\log_c a=\log_c a\cdot\log_c b)\Leftrightarrow(0=0).$$

Полученное тождество доказывает верность исходного равенства.

Пример 68б. Решите уравнение $25^{\lg x}=5+4x^{\lg 5}$. (*Ответ:* $\{10\}$.)

Указание. При решении можно использовать доказанную формулу из примера 68а.

69. Повторите пп. 60, 63, 16.

Пример 69а. Решите уравнение $x^{\lg 2}\cdot 2^{-\lg x}=1$.

Неправильное решение. Область определения: $x>0$.

Преобразуем уравнение:

$$(x^{\lg 2}\cdot 2^{-\lg x}=1)\Leftrightarrow(\lg(x^{\lg 2}\cdot 2^{-\lg x})=\lg 1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\lg 2\cdot\lg x-\lg x\cdot\lg 2=0)\underline{\Leftrightarrow}(0=0).$$

Неправильный ответ: $\underline{\varnothing}$.

Правильное решение. Область определения: $x>0$.

Имеем:

$$(x^{\lg 2}\cdot 2^{-\lg x}=1)\Leftrightarrow(\lg(x^{\lg 2}\cdot 2^{-\lg x})=\lg 1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\lg 2\cdot\lg x-\lg x\cdot\lg 2=0)\Rightarrow(0=0).$$

Правильный ответ: $(0;\ +\infty)$.

Пример 69б. Решите уравнение $x^{\log_{x^2}(x^2-1)}=5$. (*Ответ:* $\{+\sqrt{26}\}$.)

70. Повторите пп. 60, 63.

Пример 70а. Упростите выражение

$$a^{\sqrt{\log_a b}}-b^{\sqrt{\log_b a}}.$$

Правильное решение. Выполним преобразования:

$$a^{\sqrt{\log_a b}}=(a^{\log_a b})^{1/\sqrt{\log_a b}}=b^{1/\sqrt{\log_a b}}=b^{\sqrt{\log_b a}}.$$

Следовательно, $a^{\sqrt{\log_a b}}-b^{\sqrt{\log_b a}}=0$.

Правильный ответ: 0.

Пример 70б. Упростите выражение $\sqrt{\log^2_{0,5} 4}$. (*Ответ:* 2.)

71. Повторите п. 60.

Пример 71а. Решите уравнение $2^{x+1}\cdot 5^x=200$.

Правильное решение. *I способ.* Преобразуем уравнение:

$$(2^{x+1}\cdot 5^x=200)\Leftrightarrow(2\cdot 2^x\cdot 5^x=200)\Leftrightarrow(2\cdot 10^x=200)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(10^x=100)\Leftrightarrow(10^x=10^2)\Leftrightarrow(x=2).$$

II способ. Имеем:

$$(2^{x+1}\cdot 5^x=200)\Leftrightarrow(\lg(2^{x+1}\cdot 5^x)=\lg 200)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\lg(2\cdot 10^x)=\lg(2\cdot 100))\Leftrightarrow(\lg 2+x=\lg 2+2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x=2).$$

Правильный ответ: $\{2\}$.

Пример 71б. Решите уравнение $4^{1/x-2}=(\lg\sqrt{10})/2$. (*Ответ:* $\{1\}$.)

72. Повторите пп. 60, 14.

Пример 72а. При каком значении p уравнение $p\cdot 2^x+2^{-x}=5$ имеет единственное решение?

Неправильное решение. Выполним преобразование:

$$(p\cdot 2^x+2^{-x}=5)\Leftrightarrow(p\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x+1=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(p\cdot y^2-5y+1=0\,|\,y=2^x).$$

Отметим, что каждому значению x соответствует одно значение y. Полученное квадратное уравнение имеет единственное решение, если дискриминант $D=25-4p=0$, т. е. $p=25/4$. Кроме того, необходимо учесть, что при $p=0$ квадратное уравнение превращается в линейное, которое также имеет единственное решение.

Неправильный ответ: $\{0;\ 25/4\}$.

Правильное решение. Преобразуем данное уравнение:

$$(p\cdot 2^x+2^{-x}=5)\Leftrightarrow(p\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x+1=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(p\cdot y^2-5y+1=0\,|\,y=2^x).$$

Отметим, что каждому положительному значению y соответствует одно значение x: $x=\log_2 y$.

Рассмотрим два случая.

1. $p=0$. Соответствующее уравнение $-5y+1=0$ имеет один положительный корень.

2. $p\neq 0$. Тогда квадратное уравнение имеет корни

$$y_{1;2}=(5\pm\sqrt{25-4p})/(2p).$$

При $p=25/4$ дискриминант $D=25-4p=0$, и уравнение имеет один положительный корень. Кроме этого, необходимо исследовать значения p, удовлетворяющие системам неравенств:

$$\begin{cases}\dfrac{5-\sqrt{25-4p}}{2p}<0,\\ \dfrac{5+\sqrt{25-4p}}{2p}>0,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{5+\sqrt{25-4p}}{2p}<0,\\ \dfrac{5-\sqrt{25-4p}}{2p}>0.\end{cases}$$

При $0<p<25/4$ получаем $\sqrt{25-4p}<5$. Отсюда следует, что приведенные системы неравенств решений не имеют. При любых $p<0$ $\sqrt{25-4p}>5$, и вторая система неравенств имеет решение.

Правильный ответ: $p\in(-\infty;\ 0]\cup\{25/4\}$.

Пример 72б. Решите уравнение $2^{\sqrt{\log_2 x}}=x^{\sqrt{\log_x 2}}$. (*Ответ:* $(1;\ +\infty)$.)

73. Повторите п. 60.

Пример 73а. Решите уравнение

$$(x+1)^{\lg(x+1)}=100(x+1).$$

Правильное решение. Область определения: $x>-1$.

Преобразуем уравнение:

$$((x+1)^{\lg(x+1)}=100(x+1))\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow((\lg(x+1)^{\lg(x+1)}=\lg(100(x+1)))\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\lg^2(x+1)-\lg(x+1)-2=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\lg(x+1)=-1 \text{ или } \lg(x+1)=2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x+1=1/10 \text{ или } x+1=100)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x=-9/10 \text{ или } x=99).$$

Правильный ответ: $\{-9/10;\ 99\}$.

Пример 73б. Решите уравнение $\sqrt{\log_2 x}-0{,}5=\log_2\sqrt{x}$. (*Ответ:* $\{2\}$.)

74. Повторите пп. 16, 4, 63.

Пример 74а. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5.$$

Неправильное решение. Область определения:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \log_x \sqrt{5x} \geqslant 0. \end{cases}$$

Имеем:

$$(\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5) \Leftrightarrow (\log_x (5x)^{1/2} = \log_x^2 5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \log_x 5 + \frac{1}{2} = \log_x^2 5\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_x^2 5 - \frac{1}{2} \log_x 5 - \frac{1}{2} = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_x 5 = 1 \text{ или } \log_x 5 = -1/2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = 5 \text{ или } x^{-1/2} = 5) \Leftrightarrow (x = 5 \text{ или } x = 1/25).$$

Проверкой убеждаемся, что оба корня принадлежат области определения.

Неправильный ответ: $\{1/25;\ 5\}$.

Правильное решение. *I способ.* Область определения:

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \log_x \sqrt{5x} \geqslant 0. \end{cases}$$

Заметим, что левая часть заданного уравнения всегда больше либо равна нулю. Следовательно, этому условию должна удовлетворять и правая часть уравнения:

$$(\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} -\log_x 5 \geqslant 0, \\ \log_x \sqrt{5x} = \log_x^2 5 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} \log_x 5 \leqslant 0, \\ \frac{1}{2} \log_x 5 + \frac{1}{2} = \log_x^2 5 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} \log_x 5 \leqslant 0 \cdot \log_x x, \\ \log_x^2 5 - \frac{1}{2} \log_x 5 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\log_x 5\leqslant \log_x x^{\circ},\\ \log_x 5=1 \text{ или } \log_x 5=-1/2\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\log_x 5\leqslant \log_x 1,\\ x=5 \text{ или } x^{-1/2}=5\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}0<x<1,\\ x=5 \text{ или } x=1/25\end{cases}\right)\Leftrightarrow(x=1/25).$$

II способ. Область определения:

$$\begin{cases}x>0,\\ x\neq 1,\\ \log_x\sqrt{5x}\geqslant 0.\end{cases}$$

Выполним преобразования:

$$(\sqrt{\log_x\sqrt{5x}}=-\log_x 5)\Rightarrow(\log_x(5x)^{1/2}=\log_x^2 5)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\log_x 5+\frac{1}{2}=\log_x^2 5\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\log_x^2 5-\frac{1}{2}\log_x 5-\frac{1}{2}=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\log_x 5=1 \text{ или } \log_x 5=-1/2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x=5 \text{ или } x^{-1/2}=5)\Leftrightarrow(x=5 \text{ или } x=1/25).$$

Подставляя полученные корни в исходное уравнение, устанавливаем, что $x=5$ не удовлетворяет уравнению. (Ср. с решениями примеров 123а, 16а.)

Правильный ответ: $\{1/25\}$.

Пример 74б. Решите уравнение $\log_x 9+\log_{x^2} 729=$ $=10$. (*Ответ:* $\{\sqrt{3}\}$.)

75. Повторите пп. 60, 63.

Пример 75а. Решите уравнение $4^x-2^{x+1}-8=0$.

Правильное решение. Преобразуем уравнение:

$$(4^x-2^{x+1}-8=0)\Leftrightarrow(2^{2x}-2\cdot 2^x-8=0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2^x=4 \text{ или } 2^x=-2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x=2 \text{ или } x\in\varnothing)\Leftrightarrow(x=2).$$

Правильный ответ: $\{2\}$.

Пример 75б. Решите уравнение

$$\frac{\log_2(9-2^x)}{3-x}=1. \quad (\textit{Ответ: } \{0\}.)$$

76. Повторите п. 60.

Пример 76а. Решите уравнение

$$\log_2(2^x-1)\cdot\log_2\frac{1}{2^{x+1}-2}=-2.$$

Правильное решение. Найдем область определения:

$$\left(\begin{cases}2^x-1>0,\\2^{x+1}-2>0\end{cases}\right)\Leftrightarrow(2^x>1)\Leftrightarrow(x>0).$$

Имеем:

$$\left(\log_2(2^x-1)\cdot\log_2\frac{1}{2^{x+1}-2}=-2\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\log_2(2^x-1)\cdot\log_2(2(2^x-1))^{-1}=-2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\log_2(2^x-1)\cdot(\log_2 2+\log_2(2^x-1))=2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\log_2^2(2^x-1)+\log_2(2^x-1)-2=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\log_2(2^x-1)=-2 \text{ или } \log_2(2^x-1)=1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(2^x-1=1/4 \text{ или } 2^x-1=2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(2^x=5/4 \text{ или } 2^x=3)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\log_2 2^x=\log_2(5/4) \text{ или } \log_2 2^x=\log_2 3)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x=\log_2(5/4) \text{ или } x=\log_2 3).$$

Правильный ответ: $\{\log_2(5/4);\ \log_2 3\}$.

Пример 76б. Найдите абсциссу той точки графика функции $y=\log_2\log_6\left(2^{\sqrt{x+1}}+4\right)$, ордината которой равна 1. (*Ответ:* $\{16\}$.)

77. Уравнение вида

$$a_1u+a_2v=0 \text{ или } a_1u^2+a_2uv+a_3v^2=0$$

называется *однородным* относительно u и v первой или второй степени соответственно. Такое уравнение делением обеих его частей на v или v^2 сводится к уравнению

$$a_1t+a_2=0 \text{ или } a_1t^2+a_2t+a_3=0$$

относительно $t=u/v$. Аналогичное преобразование можно применить и для решения однородных уравнений более высоких степеней. (См. п. 2.)

Пример 77а. Решите уравнение

$$2^{2x+2}-6^x-2\cdot 3^{2x+2}=0.$$

Правильное решение. Имеем:

$$(2^{2x+2}-6^x-2\cdot 3^{2x+2}=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(4\cdot 2^{2x}-3^x\cdot 2^x-18\cdot 3^{2x}=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(4\cdot(2/3)^{2x}-(2/3)^x-18=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow((2/3)^x=-2 \text{ или } (2/3)^x=9/4=(2/3)^{-2})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x=-2).$$

(Ср. с решениями примеров 116а (I способ) и 161а).
Правильный ответ: $\{-2\}$.

Пример 77б. Решите уравнение

$$\log_{\sqrt{2}}(5^x-1)\cdot\log_{\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{5^x-1}=2.$$

(*Ответ:* $\{\log_5 3;\ \log_5(\sqrt{2}+1)\}$.)

78. Для оперативного нахождения ошибок при решении задач рекомендуется выполнять проверку полученных ответов. Если непосредственная подстановка найденных значений приводит к громоздким вычислениям, следует хотя бы приблизительно **оценить**, реален ли полученный ответ.

Пример 78а. Решите уравнение $4^{\sqrt{x+1}}=64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$.

Неправильное решение. Область определения: $x\geqslant -1$.

Имеем:

$$(4^{\sqrt{x+1}}=64\cdot 2^{\sqrt{x+1}})\Leftrightarrow(4^{(x+1)^{1/2}}=64\cdot 2^{(x+1)^{1/2}})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(4^{x+1}=64^2\cdot 2^{x+1})\Leftrightarrow(2^{x+1}=(2^6)^2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(2^{x+1}=2^{12})\Leftrightarrow(x=11).$$

Неправильный ответ: $\{11\}$.

Правильное решение. *I способ.* Область определения: $x\geqslant -1$.

Преобразуем уравнение:

$$(4^{\sqrt{x+1}}=64\cdot 2^{\sqrt{x+1}})\Leftrightarrow((2^2)^{\sqrt{x+1}}=64\cdot 2^{\sqrt{x+1}})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(2^{2\sqrt{x+1}}-64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}=0)\Leftrightarrow((2^{\sqrt{x+1}})^2-64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(2^{\sqrt{x+1}}=0 \text{ или } 2^{\sqrt{x+1}}=64=2^6)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\sqrt{x+1}=6)\Leftrightarrow(x=35).$$

II способ. Область определения: $x\geqslant -1$.

Прологарифмируем уравнение:

$$(4^{\sqrt{x+1}}=64\cdot 2^{\sqrt{x+1}})\Leftrightarrow(\log_2 4^{\sqrt{x+1}}=\log_2(64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}))\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(2\cdot\sqrt{x+1}=6+\sqrt{x+1})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\sqrt{x+1}=6)\Leftrightarrow(x=35).$$

Правильный ответ: $\{35\}$.

Пример 78б. Решите уравнение $12\cdot 3^{1/(2x)}-3^{1/x}=27$. (*Ответ:* $\{1/4;\ 1/2\}$.)

79. Повторите пп. 60, 63.

Пример 79а. Решите уравнение

$$x+\log_2(9-2^x)=3.$$

Правильное решение. Область определения ограничивается неравенством: $2^x<9$.

Выполним преобразования:

$$(x+\log_2(9-2^x)=3)\Leftrightarrow(\log_2(9-2^x)=3-x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}9-2^x=2^{3-x},\\9-2^x>0\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}9-2^x=8\cdot\frac{1}{2^x}\\2^x<9\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}2^{2x}-9\cdot2^x+8=0,\\2^x<9\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}2^x=8,\\2^x<9\end{cases}\text{ или }\begin{cases}2^x=1,\\2^x<9\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x=3\text{ или }x=0).$$

Правильный ответ: $\{0;\ 3\}$.

Пример 79б. Решите уравнение $\log_2^2(4x)-4\log_4 x=15$. (*Ответ:* $\{2^{-2\sqrt{3}-1};\ 2^{2\sqrt{3}-1}\}$.)

80. Повторите пп. 60, 77.

Пример 80а. Решите уравнение $5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}$.

Правильное решение. Область определения: $x>0$.

Воспользуемся формулой $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0,\ c\neq1)$, доказанной в п. 68:

$$(5^{\lg x}=50-x^{\lg 5})\Leftrightarrow(5^{\lg x}=50-5^{\lg x})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(5^{\lg x}=5^2)\Leftrightarrow(\lg x=2)\Leftrightarrow(x=100).$$

Правильный ответ: $\{100\}$.

Пример 80б. Решите уравнение $4^{x+1,5}+9^x=6^{x+1}$. $\left(\textit{Ответ: } \left\{\frac{1}{\log_2 3-1};\ \frac{2}{\log_2 3-1}\right\}.\right)$

81. Уравнения $a^{f(x)}=a^{\varphi(x)}$ $(a>0)$ и $f(x)=\varphi(x)$ равносильны при $a\neq1$.

Пример 81а. Решите уравнение $(x+5)^{x^2+x-2}=1$.

Неправильное решение. Имеем:

$$((x+5)^{x^2+x-2}=1)\Leftrightarrow((x+5)^{x^2+x-2}=(x+5)^0)\underset{\sim}{\Leftrightarrow}$$
$$\underset{\sim}{\Leftrightarrow}(x^2+x-2=0)\Leftrightarrow(x=1\text{ или }x=-2).$$

Неправильный ответ: $\{-2;\ 1\}$.

Правильное решение. Рассмотрим возможные случаи:

$$((x+5)^{x^2+x-2}=1)\Leftrightarrow((x+5)^{x^2+x-2}=(x+5)^0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x+5>0,\\x^2+x-2=0,\end{cases}\text{ или }x+5=1,\right.$$

или $\begin{cases} x+5=-1, \\ x^2+x-2 \text{ — четное, натуральное}\end{cases}\Bigg) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} x>-5, \\ x=1 \text{ или } x=-2, \end{cases} \text{ или } x=-4,\right.$$

или $\left.\begin{cases} x=-6, \\ x^2+x-2=28\end{cases}\right) \Leftrightarrow (x \in \{1;\ -2;\ -4;\ -6\})$.

Правильный ответ: $\{-6;\ -4;\ -2;\ 1\}$.

Замечание. Данное уравнение может быть решено логарифмированием (см. формулы п. 60).

Пример 81б. Решите уравнение $(3^{\sqrt{0,5x}}+19)^2 = 10\,000$. (*Ответ:* $\{32\}$.)

82. Решение логарифмических и показательных неравенств во многих случаях может быть сведено к решению следующих неравенств:

$$(\log_a f(x) < \log_a \varphi(x)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} f(x)>0, \\ \varphi(x)>0, \\ a>1, \\ f(x)<\varphi(x)\end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x)>0, \\ \varphi(x)>0, \\ 0<a<1, \\ f(x)>\varphi(x)\end{cases}\right),$$

$$\left(\begin{cases} a>0, \\ a^{f(x)}<a^{\varphi(x)}\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} a>1, \\ f(x)<\varphi(x)\end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0<a<1, \\ f(x)>\varphi(x)\end{cases}\right).$$

(При решении неравенств вида $a^{f(x)} \leqslant a^{\varphi(x)}$ дополнительно рассматривается случай $a=1$.)

Пример 82а. Решите неравенство $\log_a x > \log_a 5$.

Неправильное решение. Область определения: $x>0$.

Имеем:

$$(\log_a x > \log_a 5) \Leftrightarrow (x>5).$$

Неправильный ответ: $(5;\ +\infty)$ при $a>0,\ a\neq 1$.

Правильное решение. Область определения: $x>0$.

Выполним преобразование:

$$(\log_a x > \log_a 5) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} a>1, \\ x>5\end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0<a<1, \\ 0<x<5\end{cases}\right).$$

Правильный ответ: $(5;\ +\infty)$ при $a>1$, $(0;\ 5)$ при $0<a<1$.

Пример 82б. Решите неравенство $a^x<a^3$. (*Ответ:* $(-\infty;\ 3)$ при $a>1$, $(3;\ +\infty)$ при $0<a<1$.)

83. Повторите пп. 82, 63, 60.

Пример 83а. Решите неравенство $\log_{0,3}^2(2-5x)>4$.

Правильное решение. Область определения: $x<2/5$.

Преобразуем неравенство:

$$(\log_{0,3}^2(2-5x)>4)\Leftrightarrow((\log_{0,3}(2-5x))^2-4>0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\log_{0,3}(2-5x)<-2 \text{ или } \log_{0,3}(2-5x)>2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\log_{0,3}(2-5x)<\log_{0,3}0{,}3^{-2} \text{ или } \log_{0,3}(2-5x)>$$
$$>\log_{0,3}0{,}3^2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}2-5x>0,\\2-5x>100/9\end{cases} \text{ или } \begin{cases}2-5x>0,\\2-5x<0{,}09\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x<-82/45 \text{ или } 0{,}382<x<0{,}4).$$

Правильный ответ: $(-\infty;\ -82/45)\cup(0{,}382;\ 0{,}4)$.

Пример 83б. Решите неравенство $\log_{1/2}x>\log_{1/3}x$. (*Ответ:* $(0;\ 1)$.)

Замечание. Данный пример просто решается графически.

84. Повторите пп. 82, 63, 60.

Пример 84а. Решите неравенство $\log_{x-2}2<0$.

Правильное решение. *I способ.* Область определения: $x>2$, $x\neq 3$.

Имеем:

$$(\log_{x-2}2<0)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\log_2(x-2)<0,\\x-2\neq 1\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(0<x-2<1)\Leftrightarrow(2<x<3).$$

II способ. Область определения: $x>2$, $x\neq 3$. Выполним эквивалентные преобразования:

$$\log_{x-2}2<0)\Leftrightarrow(\log_{x-2}2<0\cdot\log_{x-2}(x-2))\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\log_{x-2}2<\log_{x-2}1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x-2>1,\\2<1\end{cases} \text{ или } \begin{cases}0<x-2<1,\\2>1\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x>3,\\\text{ложь}\end{cases} \text{ или } \begin{cases}2<x<3,\\\text{истина}\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x>3,\\x\in\varnothing\end{cases} \text{ или } \begin{cases}2<x<3,\\-\infty<x<+\infty\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x\in\varnothing \text{ или } 2<x<3)\Leftrightarrow(2<x<3).$$

Правильный ответ: $(2;\ 3)$.

Пример 84б. Решите неравенство $\log_x(x^2+1)>0$. (*Ответ:* $(1;\ +\infty)$.)

85. Повторите пп. 82, 63, 60, 36.

Пример 85а. Решите неравенство $\log_{x-2}\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$.

Правильное решение. Область определения: $x > 2,\ x \neq 3$.

Преобразуем неравенство:

$$\left(\log_{x-2}\frac{1}{2} > \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\log_{x-2}\frac{1}{2} > \log_{x-2}\sqrt{x-2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x-2 > 1, \\ 1/2 > \sqrt{x-2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < x-2 < 1, \\ 1/2 < \sqrt{x-2} \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x > 3, \\ 1/4 > x-2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2 < x < 3, \\ 1/4 < x-2 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2{,}25 < x < 3).$$

Правильный ответ: $(2{,}25;\ 3)$.

Пример 85б. Докажите неравенство $\log_4 6 > \log_6 8$.

Указание. Введите $\log_6 9$ и докажите, что $\log_6 8 < \log_6 9$ и $\log_4 6 > \log_6 9$ $(\log_4(4 \cdot 1{,}5) > \log_6(6 \cdot 1{,}5))$.

86. Повторите пп. 82, 63, 60, 29.

Пример 86а. Решите неравенство

$$\log_{1/2}\log_2\log_{x-1}9 > 0.$$

Неправильное решение. Область определения: $\underline{x > 1,\ x \neq 2}$.

Имеем:

$$(\log_{1/2}\log_2\log_{x-1}9 > 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_{1/2}\log_2\log_{x-1}9 > \log_{1/2}1) \underline{\underline{\Leftrightarrow}}$$

$$\underline{\underline{\Leftrightarrow}} (\log_2\log_{x-1}9 < 1) \Leftrightarrow (\log_2\log_{x-1}9 < \log_2 2) \underline{\underline{\Leftrightarrow}}$$

$$\underline{\underline{\Leftrightarrow}} (\log_{x-1}9 < 2) \Leftrightarrow (\log_{x-1}9 < \log_{x-1}(x-1)^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x-1 > 1, \\ 9 < (x-1)^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 0 < x-1 < 1, \\ 9 > (x-1)^2 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x > 2, \\ x^2 - 2x - 8 > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 < x < 2, \\ x^2 - 2x - 8 < 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x > 4 \text{ или } 1 < x < 2).$$

Неправильный ответ: $(1;\ 2) \cup (4;\ +\infty)$.

Правильное решение. Область определения:

$$\begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ \log_{x-1}9 > 0, \\ \log_2\log_{x-1}9 > 0, \end{cases}$$

Выполним цепочку преобразований:

$$(\log_{1/2}\log_2\log_{x-1}9>0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\log_{1/2}\log_2\log_{x-1}9>\log_{1/2}1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\log_2\log_{x-1}9>0,\\ \log_2\log_{x-1}9<1\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\log_2\log_{x-1}9>\log_2 1,\\ \log_2\log_{x-1}9<\log_2 2\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\log_{x-1}9>0,\\ \log_{x-1}9>1,\\ \log_{x-1}9<2\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\log_{x-1}9>\log_{x-1}(x-1),\\ \log_{x-1}9<\log_{x-1}(x-1)^2\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x-1>1,\\ 9>x-1,\\ 9<(x-1)^2\end{cases}\text{ или }\begin{cases}0<x-1<1,\\ 9<x-1,\\ 9>(x-1)^2\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x>2,\\ x<10,\\ x^2-2x-8>0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}1<x<2,\\ x>10,\\ x^2-2x-8<0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x>2,\\ x<10,\\ x<-2\text{ или }x>4\end{cases}\text{ или }x\in\varnothing\right)\Leftrightarrow(4<x<10).$$

Правильный ответ: (4; 10).

Пример 86б. Решите неравенство $2^x<3^{1/x}$. (*Ответ:* $(-\infty;\ -\sqrt{\log_2 3})\cup(0;\ \sqrt{\log_2 3})$.)

87. Повторите пп. 82, 63, 60, 29.

Пример 87а. Решите неравенство $(1/2)^{1/x}\geqslant(1/2)^4$.

Неправильное решение. Область определения: $x\neq 0$.

Имеем:

$$((1/2)^{1/x}\geqslant(1/2)^4)\Leftrightarrow(1/x\leqslant 4)\underline{\Leftrightarrow}(x\geqslant 1/4).$$

Неправильный ответ: $[1/4;\ +\infty)$.

Правильное решение. Область определения: $x\neq 0$.

Преобразуем неравенство:

$$((1/2)^{1/x}\geqslant(1/2)^4)\Leftrightarrow(1/4\leqslant 4)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x>0,\\ x\geqslant 1/4\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x<0,\\ x\leqslant 1/4\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x\geqslant 1/4\text{ или }x<0).$$

Правильный ответ: $(-\infty;\ 0)\cup[1/4;\ +\infty)$.

Пример 87б. Решите неравенство $\log_{1/2}\log_3 x>1$. (*Ответ:* $(1;\ \sqrt{3})$.)

88. Повторите пп. 82, 63, 60.

Пример 88а. Решите неравенство $(0{,}5)^{x-2}>6$.

Правильное решение. Прологарифмируем неравенство:

$$((0{,}5)^{x-2}>6)\Leftrightarrow(\log_2(1/2)^{x-2}>\log_2(2\cdot 3))\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(-(x-2)>1+\log_2 3)\Leftrightarrow(x<1-\log_2 3).$$

Правильный ответ: $(-\infty;\ 1-\log_2 3)$.

Пример 88б. Докажите неравенство $\sqrt[4]{5}<\sqrt[3]{4}$.

Указание. Приведите заданные выражения к степеням с одинаковыми показателями.

89. Повторите пп. 82, 63, 60, 29.

Пример 89а. Решите неравенство $2\lg x<\lg^2 x$.

Неправильное решение. Область определения: $x>0$.

Выполним потенцирование данного неравенства:

$$(2\lg x<\lg^2 x)\Leftrightarrow(2<\lg x)\Leftrightarrow(x>100).$$

Неправильный ответ: $(100;\ +\infty)$.

Правильное решение. Область определения: $x>0$.

Имеем:

$$(2\lg x<\lg^2 x)\Leftrightarrow(\lg^2 x-2\lg x>0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\lg x>2 \text{ или } \lg x<0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x>0,\\ x>100\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x>0,\\ x<1\end{cases}\right)\Leftrightarrow(x>100 \text{ или } 0<x<1).$$

Правильный ответ: $(0;\ 1)\cup(100;\ +\infty)$.

Пример 89б. Решите неравенство $x^2\cdot 3^x-3^{x+1}\leqslant 0$. (*Ответ:* $[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}]$.)

90. Повторите пп. 82, 60.

Пример 90а. Что больше: $\log_3 10+4\lg 3$ или 4?

Правильное решение. Предположим, что $\log_3 10+4\lg 3\leqslant 4$. Тогда

$$(\log_3 10+4\lg 3\leqslant 4)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\log_3 10+4/\log_3 10-4\leqslant 0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\log_3^2 10-4\log_3 10+4\leqslant 0).$$

Покажем, что последнее неравенство не выполняется. Оно является квадратным относительно $y=\log_3 10$: $y^2-4y+4\leqslant 0$. Это неравенство ложно для всех y, кроме $y=2$, так как дискриминант $D=16-16=0$. Но $\log_3 10\neq 2$. Следовательно, $\log_3 10+4\lg 3>4$.

Правильный ответ: $\log_3 10 + 4\lg 3 > 4$.

Пример 90б. Может ли логарифм числа быть равен самому числу? (*Ответ:* да, $\log_a b = b$ при $a = b^{1/b}$.)

91. Повторите п. 82.

Пример 91а. Докажите, что при любом натуральном $n > 1$

$$\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2).$$

Правильное решение. Заметим, что

$$\log_n \frac{n+1}{n} > \log_{n+1} \frac{n+1}{n} > \log_{n+1} \frac{n+2}{n+1}.$$

Тогда

$$\log_n \frac{n+1}{n} > \log_{n+1} \frac{n+2}{n+1}$$

и

$$\log_n(n+1) - 1 > \log_{n+1}(n+2) - 1,$$

откуда следует доказываемое неравенство.

Пример 91б. Решите неравенство

$$\log_{\log_2(x/2)}(x^2 - 10x + 22) > 0.$$

(*Ответ:* $(3;\ 5-\sqrt{3}) \cup (7;\ +\infty)$.)

92. Повторите пп. 82, 60.

Пример 92а. Решите неравенство $x^x < x^5$ $(x > 0)$.

Правильное решение. Рассмотрим три случая: $0 < x < 1$, $x > 1$ и $x = 1$. Получим:

$$\left(\begin{cases} x^x < x^5, \\ x > 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x > 5, \\ 0 < x < 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < 5, \\ x > 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 < 1, \\ x = 1 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1 < x < 5).$$

Правильный ответ: (1; 5).

Замечание. Данный пример также решается логарифмированием по основанию x. Однако при этом необходимо учесть, что x может принимать следующие значения: $0 < x < 1$, $x > 1$, $x = 1$.

Пример 92б. Найдите область определения функции $y = \log_3 \log_{1/2} x$. (*Ответ:* (0; 1).)

93. Повторите пп. 82, 60, 63.

Пример 93а. Решите неравенство

$$\log_{2x+3} x^2 < 1.$$

Правильное решение. Найдем область определения:

$$\left(\begin{cases} x^2>0, \\ 2x+3>0, \\ 2x+3\neq 1 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x\neq 0, \\ x>-3/2, \\ x\neq -1 \end{cases}\right).$$

Выполним цепочку преобразований:

$$(\log_{2x+3}x^2<1)\Leftrightarrow(\log_{2x+3}x^2<\log_{2x+3}(2x+3))\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} x^2<2x+3, \\ 2x+3>1, \\ x\neq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2>2x+3, \\ 0<2x+3<1, \\ x\neq 0 \end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} x^2-2x-3<0, \\ x>-1, \\ x\neq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2-2x-3>0, \\ -3/2<x<-1 \end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} -1<x<3, \\ x>-1, \\ x\neq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x<-1 \text{ или } x>3, \\ -3/2<x<-1 \end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(-1<x<0, \text{ или } 0<x<3, \text{ или } -3/2<x<-1).$$

Правильный ответ: $(-3/2;\ -1)\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 3)$.

Пример 93б. Решите неравенство $\log_{1/3}(5x-1)>0$. (*Ответ:* $(1/5;\ 2/5)$.)

94. Повторите пп. 82, 60, 63.

Пример 94а. Решите неравенство $2^x+2^{|x|}\geqslant 2\sqrt{2}$.

Правильное решение. Преобразуем неравенство:

$$(2^x+2^{|x|}\geqslant 2\sqrt{2})\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} x\geqslant 0, \\ 2^x+2^x\geqslant 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x<0, \\ 2^x+2^{-x}\geqslant 2\sqrt{2} \end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} x\geqslant 0, \\ 2^x\geqslant\sqrt{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x<0, \\ 2^{2x}-2\sqrt{2}\cdot 2^x+1>0 \end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} x\geqslant 0, \\ 2^x\geqslant 2^{1/2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x<0, \\ 2^x\leqslant\sqrt{2}-1 \text{ или } 2^x\geqslant\sqrt{2}+1 \end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x\geqslant 1/2 \text{ или} \begin{cases} x<0, \\ x<\log_2(\sqrt{2}-1) \text{ или } x\geqslant\log_2(\sqrt{2}+1) \end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x\geqslant 1/2 \text{ или } x\leqslant\log_2(\sqrt{2}-1)).$$

Правильный ответ: $(-\infty;\ \log_2(\sqrt{2}-1)]\cup[1/2;\ +\infty)$.

Пример 94б. Решите неравенство $2^x+|2^{-x}|\geqslant 2\sqrt{2}$. (*Ответ:* $(-\infty;\ \log_2(\sqrt{2}-1)]\cup[\log_2(\sqrt{2}+1);\ +\infty)$.)

95. Пусть неравенство содержит степень, основание и показатель которой зависят от переменной. Рассмотрим здесь только те значения этой переменной, при которых основание положительно (ср. с п. 81, пример 81а). Повторите п. 82.

Пример 95а. Решите неравенство $x^{3x} \leqslant x^{x^2+2}$.

Неправильное решение. Область определения: $x > 0$.

Имеем:

$$(x^{3x} \leqslant x^{x^2+2}) \underline{\Leftrightarrow}$$

$$\underline{\Leftrightarrow} \left(\begin{cases} x > 1, \\ 3x \leqslant x^2+2 \end{cases} \text{или} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 3x \geqslant x^2+2 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x > 1, \\ x^2-3x+2 \geqslant 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2-3x+2 \leqslant 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x > 1, \\ x \geqslant 2 \end{cases} \text{или } x \leqslant 1 \text{ или} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases} \right) \Leftrightarrow (x \geqslant 2).$$

Неправильный ответ: $[2; +\infty)$.

Правильное решение. Область определения: $x > 0$.

Рассмотрим три случая:

$$(x^{3x} \leqslant x^{x^2+2}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x > 1, \\ 3x \leqslant x^2+2, \end{cases} \text{или} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 3x \geqslant x^2+2, \end{cases} \text{или} \begin{cases} x = 1, \\ 1 \leqslant 1 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x > 1, \\ x^2-3x+2 \geqslant 0, \end{cases} \text{или} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2-3x+2 \leqslant 0, \end{cases} \text{или } x = 1 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x > 1, \\ x \geqslant 2 \text{ или } x \leqslant 1, \end{cases} \text{или} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases} \text{или } x = 1 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \geqslant 2 \text{ или } x = 1).$$

Правильный ответ: $[2; +\infty) \cup \{1\}$.

Пример 95б. Решите неравенство $x^{\lg\sqrt{x}} > x$. (*Ответ:* $(0; 1) \cup (100; +\infty)$.)

96. Повторите пп. 95, 82.

Пример 96а. Что больше: 3^{400} или 4^{300}?

Правильное решение. Приведем заданные выражения к степеням с одинаковыми показателями:

$$3^{400} = (3^4)^{100} = 81^{100}, \quad 4^{300} = (4^3)^{100} = 64^{100}.$$

Очевидно, что $81^{100} > 64^{100}$, следовательно, $3^{400} > 4^{300}$.

Правильный ответ: $3^{400} > 4^{300}$.

Пример 96б. Решите неравенство $(x-3)^{2x^2-7x}>1$. (*Ответ:* $(3;\ 3{,}5)\cup(4;\ +\infty)$.)

97. Повторите пп. 82, 63, 60, 36.

Пример 97а. Решите неравенство

$$\log_x(x^2+3x-3)>1.$$

Правильное решение. Найдем область определения:

$$\left(\begin{cases} x>0,\\ x\neq 1,\\ x^2+3x-3>0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} x>0,\\ x\neq 1,\\ x>-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2} \text{ или } x<-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{21}}{2}\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} x\neq 1,\\ x>-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2}\end{cases}\right).$$

Имеем:

$$(\log_x(x^2+3x-3)>1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\log_x(x^2+3x-3)>\log_x x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} x>1,\\ x^2+3x-3>x\end{cases} \text{ или } \begin{cases} -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2}<x<1,\\ x^2+3x-3<x\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} x>1,\\ x^2+2x-3>0\end{cases} \text{ или } \begin{cases} -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2}<x<1,\\ x^2+2x-3<0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} x>1,\\ x>1 \text{ или } x<-3\end{cases} \text{ или } \begin{cases} -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2}<x<1,\\ -3<x<1\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x>1 \text{ или } -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2}<x<1\right).$$

Правильный ответ: $(\sqrt{21}/2-3/2;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$.

Пример 97б. Решите неравенство

$\log_{0{,}5}x+2<\frac{1}{2}\log_{0{,}5}x$. (*Ответ:* $(16;\ +\infty)$.)

98. Повторите п. 82.

Пример 98а. Определите знак числа

$$\log_{1,7}\left(\frac{1}{2}(1-\log_7 3)\right).$$

Правильное решение. Предположим, что

$$\log_{1,7}\left(\frac{1}{2}(1-\log_7 3)\right)>0.$$

Тогда:

$$\frac{1}{2}(1-\log_7 3)>1,\ 1-\log_7 3>2,\ -\log_7 3>1,$$
$$\log_7 3<-1,\ 3<1/7.$$

Получили неверное неравенство. Так как $3>1/7$, то исходное число должно быть отрицательным.

Правильный ответ: минус.

Пример 98б. Какой знак имеет число

$$\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)?\ (\textit{Ответ: } \text{минус.})$$

99. Повторите пп. 82, 60, 29, 36.

Пример 99а. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_2 x}-\frac{1}{\log_2 x-1}\leqslant 1.$$

Неправильное решение. Область определения: $x>0$, $x\neq 1$, $x\neq 2$.

Последовательно имеем:

$$\left(\frac{1}{\log_2 x}-\frac{1}{\log_2 x-1}\leqslant 1\right)\underline{\Leftrightarrow}$$
$$\underline{\Leftrightarrow}\ (\log_2 x-1-\log_2 x\leqslant \log_2 x\cdot(\log_2 x-1))\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\log_2^2 x-\log_2 x+1\geqslant 0).$$

Дискриминант уравнения $y^2-y+1=0$ меньше нуля. Следовательно, неравенство <u>не имеет</u> решений.

Неправильный ответ: $\varnothing$.

Правильное решение. Область определения: $x>0$, $x\neq 1$, $x\neq 2$.

Последовательно имеем:

$$\left(\frac{1}{\log_2 x}-\frac{1}{\log_2 x-1}\leqslant 1\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\log_2 x\cdot(\log_2 x-1)>0,\\ \log_2 x-1-\log_2 x\leqslant \log_2 x\cdot(\log_2 x-1)\end{cases}\text{ или }\right.$$
$$\left.\begin{cases}\log_2 x\cdot(\log_2 x-1)<0,\\ \log_2 x-1-\log_2 x\geqslant \log_2 x\cdot(\log_2 x-1)\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\log_2 x<0 \text{ или } \log_2 x>1,\\ \log_2^2 x-\log_2 x+1\geqslant 0\end{cases} \text{ или }\right.$$

$$\left.\begin{cases}0<\log_2 x<1,\\ \log_2^2 x-\log_2 x+1\leqslant 0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}0<x<1 \text{ или } x>2,\\ -\infty<\log_2 x<+\infty\end{cases} \text{ или } \begin{cases}1<x<2,\\ \log_2 x\in\varnothing\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}0<x<1 \text{ или } x>2,\\ x>0\end{cases} \text{ или } x\in\varnothing\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(0<x<1 \text{ или } x>2)$$

(ср. с решениями примера 27а).

Правильный ответ: $(0;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$.

Пример 99б. Решите неравенство $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}>2$. (*Ответ:* $(0;\ 1/4)\cup(4;\ +\infty)$.)

100. Повторите пп. 82, 60, 4.

Пример 100а. Решите неравенство $|3-\log_2 x|<2$.

Правильное решение. Область определения: $x>0$.

Преобразуем неравенство:

$$(|3-\log_2 x|<2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}3-\log_2 x\geqslant 0,\\ 3-\log_2 x<2\end{cases} \text{ или } \begin{cases}3-\log_2 x<0,\\ -3+\log_2 x<2\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\log_2 x\leqslant 3,\\ \log_2 x>1\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\log_2 x>3,\\ \log_2 x<5\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x>0,\\ x\leqslant 8,\\ x>2\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x>0,\\ x>8,\\ x<32\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2<x\leqslant 8 \text{ или } 8<x<32)\Leftrightarrow(2<x<32).$$

Правильный ответ: $(2;\ 32)$.

Пример 100б. Найдите ошибку в следующей цепочке неравенств: $\frac{1}{4}>\frac{1}{8}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^2>\left(\frac{1}{2}\right)^3$; $2\log_a\frac{1}{2}>3\log_a\frac{1}{2}$; $2>3$. (*Ответ:* при $a>1$ неверно четвертое неравенство; при $0<a<1$ неверно третье неравенство.)

3. Тригонометрические функции

101. Повторите пп. 4, 13.

Пример 101а. Постройте график функции $y=|\sin x|$.

Правильное решение. Строим график функции $y = \sin x$ (рис. 57). Часть этого графика, лежащую ниже оси OX, зеркально отражаем относительно этой же оси. (Ср. с решениями примеров 51а, 23а).

Правильный ответ: см. рис. 58.

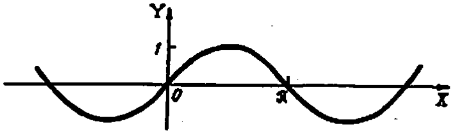

Рис. 57

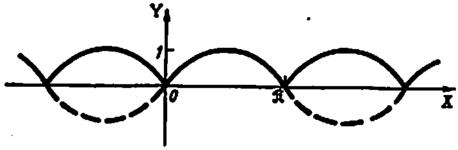

Рис. 58

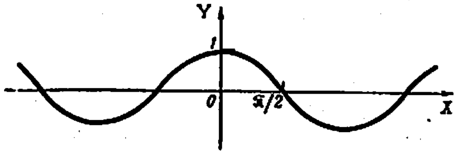

Рис. 59

Пример 101б. Постройте график функции $y = \cos|x|$. (*Ответ:* см. рис. 59 $\left(y = \cos|x| = \begin{cases}\cos x & \text{при } x \geqslant 0,\\ \cos(-x) & \text{при } x < 0\end{cases} = \begin{cases}\cos x & \text{при } x \geqslant 0,\\ \cos x & \text{при } x < 0\end{cases} = \cos x\right)$.)

102. Повторите пп. 4, 13.

Пример 102а. Постройте график функции $y = \sin|x|$.

Правильное решение. Строим график функции $y = \sin x$ (см. рис. 57). Так как функция $y = \sin|x|$ является четной, то часть графика функции $y = \sin x$, лежащую правее оси OY, зеркально отражаем относительно этой же оси при условии, что указанная часть графика не изменяется. (Ср. с решением примера 52а.)

Правильный ответ: см. рис. 60.

Пример 102б. Постройте график функции

$$y = \cos x + |\cos x|.$$

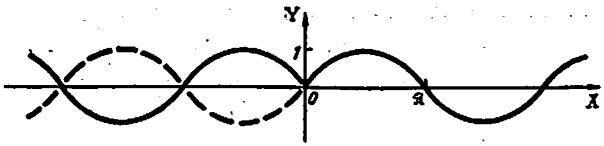

Рис. 60

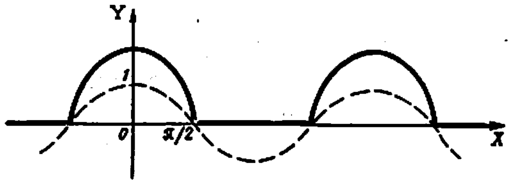

Рис. 61

$\left(\textit{Ответ:}\text{ см. рис. 61 }\left(y=\begin{cases}2\cos x & \text{при } \cos x\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } \cos x<0\end{cases}\right).\right)$

103. Повторите пп. 4, 13, 1.

Пример 103а. На координатной плоскости XOY постройте график уравнения $y=\sin(3/2)$.

Правильное решение. Известно, что $\pi\approx 3{,}14$. Следовательно, $0<3/2<\pi/2$ и $\sin(3/2)>0$.

Правильный ответ: см. рис. 62.

Пример 103б. На координатной плоскости XOY постройте график уравнения $\sin(x+y)=0$. (*Ответ:* см. рис. 63.)

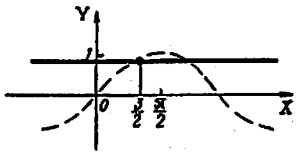

Рис. 62

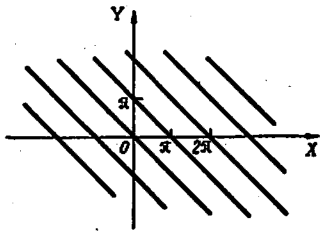

Рис. 63

Указание. Решение данного уравнения имеет вид $x+y=\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$. Следовательно, искомым графиком будут прямые $y=-x+\pi n$ при $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

104. Повторите пп. 1, 12.

Пример 104а. На координатной плоскости XOY постройте график уравнения $y\sin x=0$.

Неправильное решение. Имеем:

$$(y\sin x=0)\Leftrightarrow(y=0 \text{ или } \sin x=0).$$

Неправильный ответ: см. рис. 64 (графиком являются точки оси абсцисс, в которых $\sin x = 0$).

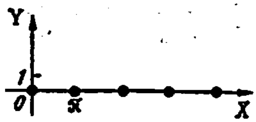

Рис. 64

Правильное решение. Имеем:

$$(y \sin x = 0) \Leftrightarrow (y = 0 \text{ или } \sin x = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y = 0 \text{ или } x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z}).$$

Правильный ответ: см. рис. 65 (график представляет собой объединение оси OX и параллельных прямых $x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$).

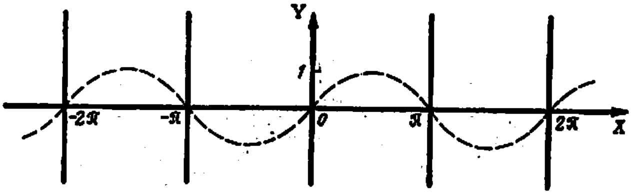

Рис. 65

Пример 104б. Постройте график уравнения $\sqrt{y} \sin x = 0$. (*Ответ:* см. рис. 66 (ср. с решением примера 12а).)

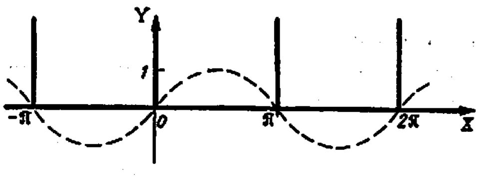

Рис. 66

105. Повторите п. 13.

Пример 105а. Постройте график функции $y = \cos(3x - 1)$.

Неправильное решение. Последовательно строим графики функций: $y = \cos x$, $y = \cos 3x$, $y = \cos(3x - 1)$ (см. рис. 67, *а—в* соответственно).

Неправильный ответ: см. рис. 67, *в*.

Правильное решение. Последовательно строим графики функций: $y=\cos x$, $y=\cos 3x$, $y=\cos(3x-1)=\cos 3(x-1/3)$ (см. рис. 68, *а*—*в* соответственно).

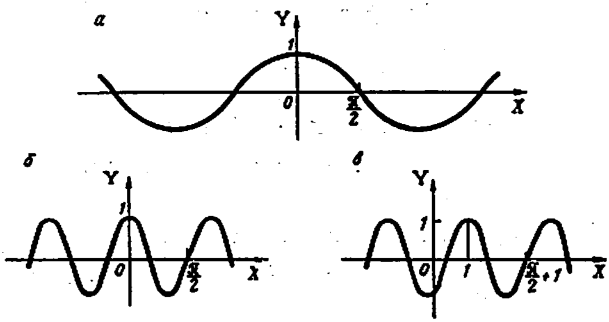

Рис. 67

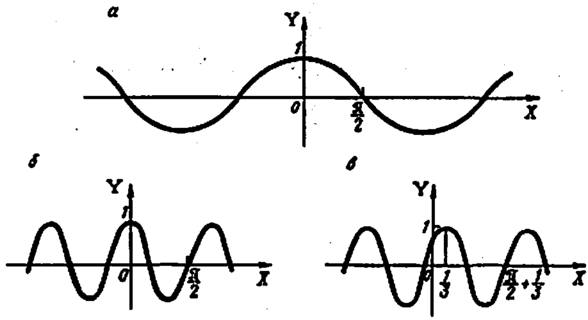

Рис. 68

Правильный ответ: см. рис. 68, *в*.

Пример 105б. Постройте график функции $y=\sin 2x+1$. (*Ответ:* см. рис. 69.)

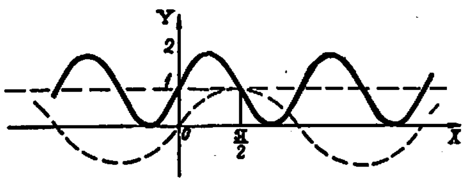

Рис. 69

106. Повторите пп. 4, 13, 1.

Пример 106а. Постройте на координатной плоскости XOY график уравнения $y=|y-\sin x|$.

Правильное решение. Преобразуем уравнение:

$$(y=|y-\sin x|)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}y-\sin x\geqslant 0,\\ y=y-\sin x\end{cases}\text{ или }\begin{cases}y-\sin x<0,\\ y=-y+\sin x\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}y\geqslant\sin x,\\ \sin x=0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}y<\sin x,\\ y=\frac{1}{2}\sin x\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}y\geqslant\sin x,\\ x=\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z}\end{cases}\text{ или }\begin{cases}y<\sin x,\\ y=\frac{1}{2}\sin x\end{cases}\right).$$

Таким образом, получили, что координатная плоскость разбивается синусоидой $y=\sin x$ на две полуплоскости, в одной из которых $y\geqslant\sin x$, а в другой $y<\sin x$ (рис. 70). В полуплоскости, где $y\geqslant\sin x$, графиком исходного уравнения являются прямые, за-

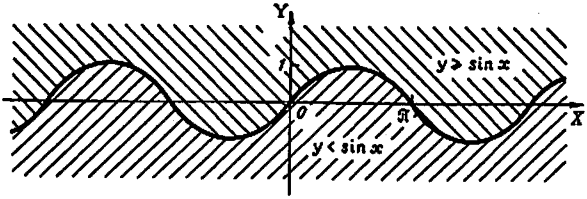

Рис. 70

даваемые уравнениями $x=\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z}$, в полуплоскости, где $y<\sin x$, график — синусоида $y=\frac{1}{2}\sin x$. (Ср. с решением примера 25а.)

Правильный ответ: см. рис. 71.

Пример 106б. Постройте график функции $y=10^{\lg\cos x}$. (*Ответ:* см. рис. 72 ($y=\cos x$ при $-\pi/2+2\pi k<x<\pi/2+2\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z}$).)

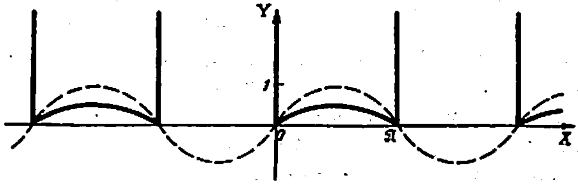

Рис. 71

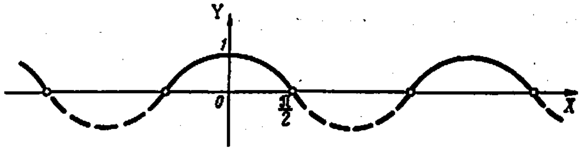

Рис. 72

107. Функция $y=g(x)$ называется *нечетной*, если области ее определения наряду с каждым числом x принадлежит и противоположное ему число $-x$, причем верно равенство $g(-x)=-g(x)$.

Функция $y=f(x)$ называется *четной*, если области ее определения наряду с каждым числом x принадлежит и противоположное ему число $-x$, причем выполняется равенство $f(-x)=f(x)$.

Функцию f называют *периодической с периодом* $T\neq 0$, если для любого x из области определения f значения этой функции в точках x и $x+T$ равны, т. е. $f(x+T)=f(x)$.

Пример 107а. Является ли функция

$$f(x)=\cos\frac{x(x^2-1)}{x^2-1}:$$

четной; периодической?

Неправильное решение. Выполним преобразование:

$$\left(f(x)=\cos\frac{x(x^2-1)}{x^2-1}\right)\Leftrightarrow(f(x)=\cos x).$$

Функция $y=\cos x$ является четной и периодической, следовательно, и заданная функция — четная и периодическая.

Неправильный ответ: четная; периодическая.

Правильное решение. Область определения: $x\neq\pm1$.

Выполним преобразование:

$$\left(f(x)=\cos\frac{x(x^2-1)}{x^2-1}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\neq\pm1,\\ f(x)=\cos x\end{cases}\right).$$

График данной функции приведен на рис. 73.

Поскольку $f(x)=f(-x)$ для всех x, принадлежащих области определения, то $f(x)$ — четная функция. Так как $f(x)\neq f(x+2\pi)$ при $x=1-2\pi$, то функция $f(x)$ не является периодической.

Правильный ответ: четная; непериодическая.

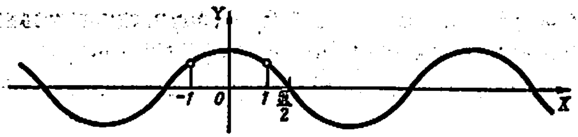

Рис. 73

Пример 107б. Определите, является ли функция

$$f(x)=\sin\frac{x(1+x)}{1+x}:$$

нечетной; периодической. (*Ответ:* не является нечетной; непериодическая.)

108. Повторите п. 107.

Пример 108а. Найдите период функции $y=$ $=\cos 5x-\sin 2x$.

Правильное решение. Так как период косинуса и синуса равен 2π, то:

$$\cos 5x=\cos(5x+2\pi)=\cos 5(x+2\pi/5),\ T_1=2\pi/5,$$
$$\sin 2x=\sin(2x+2\pi)=\sin 2(x+\pi),\ T_2=\pi.$$

Перепишем выражения для T_1 и T_2 в другом виде: $T_1=2\cdot\frac{\pi}{5}$, $T_2=5\cdot\frac{\pi}{5}$. Наименьшим общим кратным T_1 и T_2 будет $T=10\cdot\frac{\pi}{5}=2\pi$.

Правильный ответ: 2π.

Пример 108б. Найдите период функции $y=$ $=\sin\sqrt{x}$. (*Ответ:* функция не является периодической.)

Указание. Найдите период функции при $x=0$ и $x=T$.

109. Перечислим основные методы решения тригонометрических уравнений.

1. Сведение к уравнениям вида

$$\sin ax=b,\ \cos ax=b,\ \operatorname{tg} ax=c,$$

где $a\in\mathbf{R}$; $c\in\mathbf{R}$; $b\in[-1;\ 1]$.

2. Сведение к уравнениям вида

$$\sin ax=\sin bx,\ \cos ax=\cos bx,$$

где a, $b\in\mathbf{R}$, путем использования формул приведения и свойства нечетности функции $y=\sin x$.

3. Сведение к уравнениям вида

$$a\sin\omega x+b\cos\omega x=c,$$

где $a^2+b^2\neq 0$; a, b, $\omega\in\mathbf{R}$. Полученное уравнение можно преобразовать к более простому виду. Для этого разделим его на $\sqrt{a^2+b^2}$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{cases}\cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2},\\ \sin\varphi=b/\sqrt{a^2+b^2}.\end{cases}$$

Заметим, что $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$. Тогда заданное уравнение принимает вид

$$\sin\omega x\cdot\cos\varphi+\cos\omega x\cdot\sin\varphi=c/\sqrt{a^2+b^2}$$

или

$$\sin(\omega x+\varphi)=c/\sqrt{a^2+b^2}.$$

4. Сведение к квадратному уравнению.
5. Разложение на множители.
6. Сведение к однородному уравнению (см. п. 77).
7. Использование оценок.

Пример 109а. Решите уравнение $\sqrt{x}\sin x=0$.

Неправильное решение. Имеем:

$$(\sqrt{x}\sin x=0)\Leftrightarrow(\sqrt{x}=0 \text{ или } \sin x=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x=0 \text{ или } x=\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z}).$$

Неправильный ответ: $\{\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z}\}$.

Правильное решение. Область определения: $x\geqslant 0$.

Имеем:

$$(\sqrt{x}\sin x=0)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}=0 \text{ или } \begin{cases}x\geqslant 0,\\ \sin x=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x=0 \text{ или } x=\pi/k\,|\,k\in\mathbf{Z}_0)\Leftrightarrow(x=\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z}_0).$$

(Ср. с решением примера 12а.)

Правильный ответ: $\{\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z}_0\}$.

Пример 109б. Определите, что меньше: $\sin 2$, $\sin 4$ или $\cos 1°$. (*Ответ:* $\sin 4$.)

110. Повторите пп. 109, 77, 2, 9.

Пример 110а. Решите уравнение $\sin x+\cos x=0$.

Правильное решение. *I способ.* Выполним цепочку преобразований:

$$(\sin x+\cos x=0)\Leftrightarrow(\sin x+\sin(\pi/2-x)=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(2\sin\frac{x+\pi/2-x}{2}\cdot\cos\frac{x-\pi/2+x}{2}=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\cos(x-\pi/4)=0)\Leftrightarrow(x-\pi/4=\pi/2+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x=3\pi/4+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z})\Leftrightarrow(x=-\pi/4+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}).$$

II способ. Данное уравнение является однородным относительно $\cos x$ и $\sin x$. Рассмотрим x, такое, что $\cos x=0$. Из исходного уравнения следует, что тогда и $\sin x=0$. Но это невозможно, так как $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ для любых x. Следовательно, $\cos x\neq 0$ и

$$(\sin x+\cos x=0)\Leftrightarrow(\sin x/\cos x+1=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\operatorname{tg} x=-1)\Leftrightarrow(x=-\pi/4+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}).$$

(Ср. с решением примера 116а (I способ)).

Правильный ответ: $\{-\pi/4+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}\}$.

Пример 110б. Решите уравнение $\operatorname{tg} x\cos x=0$. (*Ответ:* $\{\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}\}$.)

111. Повторите пп. 109, 4.

Пример 111а. Решите уравнение

$$\sin x+|\cos(\pi/2-x)|=0.$$

Правильное решение. Используя формулы приведения, имеем:

$$(\sin x+|\cos(\pi/2-x)|=0)\Leftrightarrow(\sin x+|\sin x|=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\ \sin x+\sin x=0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}\sin x<0,\\ \sin x-\sin x=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}0+2\pi n\leqslant x\leqslant\pi+2\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z},\\ \sin x=0\end{cases}\text{ или }\right.$$
$$\left.\begin{cases}\pi+2\pi n<x<2\pi+2\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z},\\ 0=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x=\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}\text{ или }\pi+2\pi n<x<2\pi+2\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\pi+2\pi n\leqslant x\leqslant 2\pi+2\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}).$$

Правильный ответ: $[\pi+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n]$ при $n\in\mathbf{Z}$.

Пример 111б. Докажите равенство

$$8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=1.$$

Указание. Домножьте исходное неравенство на $\sin 20^\circ$.

112. Повторите пп. 109, 4.

Пример 112а. Решите уравнение $\sin^{1991} x+\cos^{1991} x=1$.

Правильное решение. Преобразуем уравнение:

$$(\sin^{1991} x+\cos^{1991} x=1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\sin^{1991} x+\cos^{1991} x=\sin^2 x+\cos^2 x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\sin^2 x\cdot(\sin^{1989} x-1)=\cos^2 x\cdot(1-\cos^{1989} x)).$$

Левая часть последнего уравнения меньше или равна нулю, а правая — больше или равна нулю. Следовательно, равенство возможно лишь в том случае, когда и левая, и правая части уравнения равны нулю:

$$\begin{cases}\sin^2 x\cdot(\sin^{1989} x-1)=0,\\ \cos^2 x\cdot(1-\cos^{1989} x)=0.\end{cases}$$

Если $\sin x=0$, то $\cos x\neq 0$ и тогда необходимо, чтобы $1-\cos^{1989} x=0$. Если $\sin x=1$, то $\cos x=0$. Итак,

$$\left(\begin{cases}\sin x=0,\\ \cos x=1\end{cases}\text{ или }\begin{cases}\sin x=1,\\ \cos x=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x=2\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z}\text{ или }x=\pi/2+2\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z}).$$

Правильный ответ: $\{2\pi k;\ \pi/2+2\pi k\mid k\in\mathbf{Z}\}$.

Пример 112б. Решите уравнение

$$\frac{\sin x}{(x-4)^2}+|\sin x|=0.\ (\textit{Ответ: }\{5;\ \pi k\,|\,k\in\mathbf{Z}\}.)$$

113. Повторите пп. 109, 1.

Пример 113а. Решите уравнение $\sin 2x+\sin 3x=0$.

Правильное решение. *I способ.* Выполним преобразования:

$$(\sin 2x+\sin 3x=0)\Leftrightarrow(\sin 2x=\sin(-3x))\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(2x=(-1)^n\arcsin(\sin(-3x))+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(2x=(-1)^n(-3x)+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}n=2k\,|\,k\in\mathbf{Z},\\ 2x=-3x+2\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z}\end{cases}\text{ или }\right.$$
$$\left.\begin{cases}n=2l+1\,|\,l\in\mathbf{Z},\\ 2x=3x+2\pi l+\pi\,|\,l\in\mathbf{Z}\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(x=\frac{2}{5}\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z}\text{ или }x=-2\pi l-\pi\,|\,l\in\mathbf{Z}\right).$$

II способ. Имеем:

$$(\sin 2x+\sin 3x=0)\Leftrightarrow(2\sin(5x/2)\cos(-x/2)=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\sin(5x/2)=0\text{ или }\cos(x/2)=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(5x/2=\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}\text{ или }x/2=\pi/2+\pi m\,|\,m\in\mathbf{Z})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(x=\frac{2}{5}\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}\text{ или }x=\pi+2\pi m\,|\,m\in\mathbf{Z}\right).$$

(Ср. с решением примера 110а.)

Правильный ответ: $\left\{\frac{2}{5}\pi k;\ \pi + 2\pi k \mid k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Пример 113б. Решите уравнение $\log_{\cos x} \sin x = 1$. (*Ответ:* $\{\pi/4 + 2\pi n \mid n \in \mathbf{Z}\}$.)

114. Повторите п. 109.

Пример 114а. Решите уравнение $\cos t^2 + \cos t = 0$.

Правильное решение. Выполним цепочку преобразований:

$$(\cos t^2 + \cos t = 0) \Leftrightarrow (\cos t^2 = -\cos t) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\cos t^2 = \cos(\pi - t)) \Leftrightarrow (t^2 = \pm(\pi - t) + 2\pi n \mid n \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (t^2 = \pi - t + 2\pi n \mid n \in \mathbf{Z} \text{ или } t^2 =$$
$$= -\pi + t + 2\pi n \mid n \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (t^2 + t - \pi(2n + 1) = 0 \mid n \in \mathbf{Z} \text{ или } t^2 -$$
$$- t + \pi(1 - 2n) = 0 \mid n \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\pi(2n + 1)}}{2} \middle| n \in \mathbf{Z}_0 \text{ или } t =\right.$$
$$\left.= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\pi(2n - 1)}}{2} \middle| n \in \mathbf{N}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(t = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1 + 4\pi(2n + 1)}}{2} \middle| n \in \mathbf{Z}_0\right).$$

Правильный ответ: $\{(\pm 1 \pm \sqrt{1 + 4\pi(2n + 1)})/2 \mid n \in \mathbf{Z}_0\}$.

Пример 114б. Решите уравнение $\sin t^2 - \sin t = 0$. (*Ответ:* $\{(1 \pm \sqrt{1 + 8\pi k})/2;\ (-1 \pm \sqrt{1 + 4\pi(2k + 1)})/2 \mid k \in \mathbf{Z}_0\}$.)

115. Повторите п. 109.

Пример 115а. Решите уравнение $\sin x - \cos x + 1 = 0$.

Правильное решение. Преобразуем уравнение к более простому виду:

$$(\sin x - \cos x + 1 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\sin x \cos(\pi/4) - \cos x \sin(\pi/4) = -1/\sqrt{2}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\sin(x - \pi/4) = -1/\sqrt{2}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - \pi/4 = (-1)^n(-\pi/4) + \pi n \mid n \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} n=2k \mid k\in\mathbf{Z}, \\ x-\pi/4=-\pi/4+2\pi k \mid k\in\mathbf{Z}\end{cases}\right.$$

$$\text{или } \left.\begin{cases} n=2k+1 \mid k\in\mathbf{Z}, \\ x-\pi/4=-1(-\pi/4)+2\pi k+\pi \mid k\in\mathbf{Z}\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x=2\pi k \mid k\in\mathbf{Z} \text{ или } x=3\pi/2+2\pi k \mid k\in\mathbf{Z}).$$

Правильный ответ: $\{2\pi k;\ -\pi/2+2\pi k \mid k\in\mathbf{Z}\}$.

Пример 115б. Решите уравнение $2\cos x+3\sin x=2$. $\left(\textit{Ответ: } \left\{2\pi k;\ -2\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi(2k+1) \mid k\in\mathbf{Z}\right\}.\right)$

Замечание. Возможна и другая запись ответа. Например, $\left\{2\pi k;\ 2\varphi+2\pi k \mid k\in\mathbf{Z},\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{3}{2}=\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}=\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}\right\}$.

116. Повторите пп. 109, 77.

Пример 116а. Решите уравнение $4\sin 2x+\cos 2x=4$.

Правильное решение. *I способ.* Используя основное тригонометрическое тождество, имеем:

$$(4\sin 2x+\cos 2x=4)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(8\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x=4(\sin^2 x+\cos^2 x))\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(5\sin^2 x-8\sin x\cos x+3\cos^2 x=0).$$

Полученное уравнение является однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$. Заметим, что если $\cos x=0$, то из уравнения следует, что и $\sin x=0$, а это невозможно. Следовательно, значения x, при которых $\cos x=0$, не являются решениями однородного уравнения. Разделив обе части последнего уравнения на $\cos^2 x$, получим равносильное уравнение

$$5\operatorname{tg}^2 x-8\operatorname{tg} x+3=0.$$

Решив его, найдем: $\operatorname{tg} x=1$, $\operatorname{tg} x=3/5$. Отсюда $x=\frac{\pi}{4}+\pi n \mid n\in\mathbf{Z}$ и $x=\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+\pi k \mid k\in\mathbf{Z}$. (Ср. с решениями примеров 110а (II способ), 77а, 161а).

Правильный ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \operatorname{arctg}\frac{3}{5}+\pi n \mid n\in\mathbf{Z}\right\}$.

II способ. Разделим исходное уравнение на положительное число:

$$(4\sin 2x+\cos 2x=4)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{4\sin 2x}{\sqrt{4^2+1^2}}+\frac{1\cdot\cos 2x}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{4^2+1^2}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2x+\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2x=\frac{4}{\sqrt{17}}\right).$$

Введем следующие обозначения: $4/\sqrt{17}=\sin\varphi$, $1/\sqrt{17}=\cos\varphi$ ($\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$ — истинно). Тогда

$$\varphi=\arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}=\operatorname{arctg}4$$

или $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{4}{\sqrt{17}}$, откуда $\varphi=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}$.

Использовав введенные обозначения, представим исходное уравнение в виде

$$\left(\sin 2x\sin\varphi+\cos 2x\cos\varphi=\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\cos(2x-\varphi)=\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2x-\varphi=\pm\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}+2\pi n\,\middle|\,n\in\mathbf{Z}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(2x=\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\pm\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}+2\pi n\,\middle|\,n\in\mathbf{Z}\right).$$

Правильный ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}-\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}+\pi n\,\middle|\,n\in\mathbf{Z}\right\}$.

З а м е ч а н и е. Ответы, полученные при решении уравнения обоими способами, эквивалентны.

П р и м е р 116б. Решите уравнение $\sin 8x+\sqrt{3}\cos 8x=1$. (*Ответ:* $\left\{\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}n;\ -\frac{\pi}{48}+\frac{\pi}{4}n\,\middle|\,n\in\mathbf{Z}\right\}$.)

117. Повторите пп. 109, 16.

П р и м е р 117а. Решите уравнение

$$3\sin x+4\cos x-5\sin 7x=0.$$

П р а в и л ь н о е р е ш е н и е. Имеем:

$$(3\sin x + 4\cos x - 5\sin 7x = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = \sin 7x\right).$$

Введем следующие обозначения: $\cos\varphi = 3/5$, $\sin\varphi = 4/5$. Тогда $\varphi = \arcsin\frac{4}{5}$. С учетом введенных обозначений исходное уравнение представим в виде:

$$(\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \sin 7x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\sin(x+\varphi) = \sin 7x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+\varphi = (-1)^n 7x + \pi n \mid n \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} n = 2k \mid k \in \mathbf{Z}, \\ x+\varphi = 7x + 2\pi k \end{cases} \text{ или } \begin{cases} n = 2k+1 \mid k \in \mathbf{Z}, \\ x+\varphi = -7x + 2\pi k + \pi \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\varphi}{6} + \frac{\pi}{3}k \mid k \in \mathbf{Z} \text{ или } x = \frac{\pi-\varphi}{8} + \frac{\pi}{4}k \mid k \in \mathbf{Z}\right).$$

Правильный ответ: $\left\{\frac{\varphi}{6} + \frac{\pi}{3}k;\ \frac{\pi-\varphi}{8} + \frac{\pi}{4}k \,\middle|\, k \in \mathbf{Z},\right.$ $\left.\varphi = \arcsin\frac{4}{5}\right\}$.

Пример 117б. Решите уравнение $\cos\pi\sqrt{x} = 1$. (*Ответ:* $4n^2 \mid n \in \mathbf{Z}_0\}$.)

118. Повторите пп. 109, 4.

Пример 118а. Вычислите $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.

Правильное решение. Вычисляем:

$$\left(\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}\right) = \frac{4\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{2\sin 10^\circ\cos 10^\circ} =$$
$$= \frac{4(\sin 30^\circ\cos 10^\circ - \cos 30^\circ\sin 10^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{4(\sin(30^\circ - 10^\circ))}{\sin 20^\circ} = 4.$$

Правильный ответ: 4.

Пример 118б. Докажите $|\sin x + \sqrt{3}\cos x| \leqslant 2$.

Указание. Выражение, стоящее под знаком модуля, сводится к эквивалентному выражению: $2\sin y$, где $y = x + \pi/3$.

119. Повторите пп. 109, 2.

Пример 119а. Решите уравнение

$$2\cos^3 x + 3\sin^2 x - 2\cos x - 3 = 0.$$

Неправильное решение. Используя основное тригонометрическое тождество, имеем:

$$(2\cos^3 x + 3\sin^2 x - 2\cos x - 3 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2\cos^3 x + 3\sin^2 x - 2\cos x - 3(\cos^2 x + \sin^2 x) = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2\cos^3 x - 3\cos^2 x - 2\cos x = 0) \underline{\Leftrightarrow}$$
$$\underline{\Leftrightarrow} (2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\cos x = -\frac{1}{2} \text{ или } \cos x = 2\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right).$$

Неправильный ответ: $\left\{\pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi k \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

Правильное решение. Имеем:

$$(2\cos^3 x + 3\sin^2 x - 2\cos x - 3 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2\cos^3 x + 3\sin^2 x - 2\cos x - 3(\cos^2 x + \sin^2 x) = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2\cos^3 x - 3\cos^2 x - 2\cos x = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\cos x = 0 \text{ или } 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{2} + \pi n \,\middle|\, n \in \mathbf{Z} \text{ или } \left(\cos x =\right.\right.$$
$$\left.\left.= -\frac{1}{2} \text{ или } \cos x = 2\right)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{2} + \pi n \,\middle|\, n \in Z, \text{ или } x =\right.$$
$$\left.= \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi n \,\middle|\, n \in \mathbf{Z}, \text{ или } x \in \varnothing\right).$$

Правильный ответ: $\{\pi/2 + \pi n;\ \ \pm 2\pi/3 + 2\pi n \mid n \in \mathbf{Z}\}$.

Пример 119б. Решите уравнение $6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5$. (*Ответ:* $\{\pm\pi/4 + \pi n \mid n \in \mathbf{Z}\}$.)

120. Повторите пп. 109, 60, 2.

Пример 120а. Решите уравнение $\cos 4x = -2\cos^2 x$.

Неправильное решение. Преобразуем уравнение:

$$(\cos 4x = -2\cos^2 x) \Leftrightarrow (\cos^2 2x - \sin^2 2x = -2\cos^2 x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\cos^2 2x - \sin^2 2x = -(1 + \cos 2x)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\cos^2 2x - 1 + \cos^2 2x + 1 + \cos 2x = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2\cos^2 2x + \cos 2x = 0) \underline{\Leftrightarrow} (2\cos 2x + 1 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\cos 2x = -1/2) \Leftrightarrow (x = \pm\pi/3 + \pi n \mid n \in \mathbf{Z}).$$

Неправильный ответ: $\{\pm\pi/3+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}\}$.

Правильное решение. Преобразуем уравнение:

$$(\cos 4x=-2\cos^2 x)\Leftrightarrow(\cos^2 2x-\sin^2 2x=-2\cos^2 x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\cos^2 2x-\sin^2 2x=-(1+\cos 2x))\Leftrightarrow(\cos^2 2x-1+$$
$$+\cos^2 2x+1+\cos 2x=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(2\cos^2 2x+\cos 2x=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\cos 2x=0 \text{ или } 2\cos 2x+1=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\Big(2x=\frac{\pi}{2}+\pi n\,\Big|\,n\in\mathbf{Z} \text{ или } 2x=$$
$$=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi n\,\Big|\,n\in\mathbf{Z}\Big)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\Big(x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n\,\Big|\,n\in\mathbf{Z} \text{ или } x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n\,\Big|\,n\in\mathbf{Z}\Big).$$

Правильный ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n;\ \pm\frac{\pi}{3}+\pi n\,\Big|\,n\in\mathbf{Z}\right\}$.

Пример 120б. При каких значениях a уравнение

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\log_2 a$$

имеет решения? Найдите эти решения. (*Ответ:* $\{\pi/4\pm$ $\pm\arccos(\log_2 a)+2\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}\}$ при $a\in[1/2;\ 2]$.)

Замечание. Возможна и другая запись ответа: $\{(-1)^k\arcsin(\log_2 a)-\pi/4+\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z}\}$ при $a\in[1/2;\ 2]$.

Указание. Сведите уравнение к виду $\cos(x-\pi/4)=\log_2 a$ или $\sin(x+\pi/4)=\log_2 a$.

121. Повторите пп. 109, 77.

Пример 121а. Решите уравнение

$$3\cos^2 x=\sin^2 x+\sin 2x.$$

Правильное решение. Подстановкой проверяем, что значения x, удовлетворяющие равенству $\cos x=0$, не являются решениями исходного уравнения. Следовательно,

$$(3\cos^2 x=\sin^2 x+\sin 2x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(3=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{2\cos x\sin x}{\cos^2 x}\right)\Leftrightarrow(\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x-3=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\operatorname{tg} x=1 \text{ или } \operatorname{tg} x=-3)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x=\pi/4+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z} \text{ или } x=\operatorname{arctg}(-3)+$$
$$+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}).$$

(Ср. с решением примера 116а (I способ).)

Правильный ответ: $\{\pi/4+\pi n;\ \operatorname{arctg}(-3)+\pi n \mid n\in \mathbf{Z}\}$.

Пример 121б. При каких a уравнение $\sin x = a^2-2a$ имеет единственное решение на отрезке $[0;\ 2\pi]$? (*Ответ:* $\{1\pm\sqrt{2};\ 1\}$.)

Указание. Уравнение имеет единственное решение на заданном отрезке, если $\sin x=1$ или $\sin x=-1$ (исследуйте график функции $y=\sin x$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$).

122. Повторите пп. 109, 2.

Пример 122а. Решите уравнение

$$2(\sin x+\cos x)+\sin 2x+1=0.$$

Правильное решение. Выполним цепочку преобразований:

$$(2(\sin x+\cos x)+\sin 2x+1=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(2(\sin x+\cos x)+(2\sin x\cos x+\sin^2 x+\cos^2 x)=$$
$$=0)\Leftrightarrow((\sin x+\cos x)^2+2(\sin x+\cos x)=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x=0 \text{ или } \sin x+\cos x=-2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \text{ или } \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\right.$$
$$\left.=-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\Leftrightarrow\left(x=\pm\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\right.$$
$$\left.+2\pi n \mid n\in\mathbf{Z} \text{ или } \sin\frac{\pi}{4}\sin x+\cos\frac{\pi}{4}\cos x=-\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow((0=\pi/2+2\pi n\mid n\in\mathbf{Z} \text{ или } x=-\pi/4+$$
$$+\pi n\mid n\in\mathbf{Z}) \text{ или } \cos(\pi/4-x)=-\sqrt{2}<-1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow((x\in\varnothing \text{ или } x=-\pi/4+\pi n\mid n\in\mathbf{Z}) \text{ или } x\in\varnothing)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x=-\pi/4+\pi n\mid n\in\mathbf{Z}).$$

Правильный ответ: $\{-\pi/4+\pi n\mid n\in\mathbf{Z}\}$.

Пример 122б. Решите уравнение $\cos 2x+3\sin x=2$. (*Ответ:* $\{\pi/2+2\pi n;\ (-1)^n\pi/6+\pi n\mid n\in\mathbf{Z}\}$.)

123. Повторите пп. 109, 16, 4.

Пример 123а. Решите уравнение $\sqrt{\sin x}=\cos x$.

Неправильное решение. Область определения: $\sin x\geqslant 0$. Следовательно, $2\pi n\leqslant x\leqslant \pi+2\pi n\mid n\in\mathbf{Z}$.

Имеем:

$$(\sqrt{\sin x}=\cos x)\underset{\approx}{\Leftrightarrow}(\sin x=\cos^2 x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\sin x=1-\sin^2 x)\Leftrightarrow(\sin^2 x+\sin x-1=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\sin x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<-1 \text{ или } \sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(x\in\varnothing \text{ или } x=(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}\right)$$

Неправильный ответ: $\left\{(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\right.$ $\left.+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}\right\}$.

Правильное решение. Область определения: $\sin x\geqslant 0$.

Имеем:

$$(\sqrt{\sin x}=\cos x)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\cos x\geqslant 0,\\ \sin x=\cos^2 x\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}-\pi/2+2\pi k\leqslant x\leqslant\pi/2+2\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z},\\ \sin^2 x+\sin x-1=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}-\pi/2+2\pi k\leqslant x\leqslant\pi/2+2\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z},\\ \sin x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ или } \sin x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}<-1\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}-\pi/2+2\pi k\leqslant x\leqslant\pi/2+2\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z},\\ x=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z}\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}-\pi/2+2\pi k\leqslant x\leqslant\pi/2+2\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z},\\ x=\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n \text{ или } x=\\ =-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi(2n+1)\,|\,n\in\mathbf{Z}\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(x=\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}\right).$$

(Ср. с решением примера 74а.)

Правильный ответ: $\left\{\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

Пример 123б. Решите уравнение $(x-2)^2\,|\cos x|=$ $=\cos x$. (*Ответ:* $\{1;\ \pi/2+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}\}$.)

124. Повторите пп. 109, 2.

Пример 124а. Решите уравнение

$$\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x).$$

Правильное решение. Преобразуем уравнение:

$$(\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((\cos^2 x - \sin^2 x) - \sqrt{2}(\cos x - \sin x) = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - \sqrt{2}) = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x = 0 \text{ или } \cos x + \sin x - \sqrt{2} = 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ или } \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = \pm(\pi/2 - x) + 2\pi n \mid n \in \mathbf{Z} \text{ или } \cos(\pi/4 - x) = 1) \Leftrightarrow (x = \pi/4 + \pi n \mid n \in \mathbf{Z} \text{ или } \pi/4 - x = 2\pi n \mid n \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow (x = \pi/4 + \pi n \mid n \in \mathbf{Z} \text{ или } x = \pi/4 + 2\pi n \mid n \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow (x = \pi/4 + \pi n \mid n \in \mathbf{Z}).$$

Правильный ответ: $\{\pi/4 + \pi n \mid n \in \mathbf{Z}\}$.

Пример 124б. Решите уравнение $\frac{1 - \cos x}{\sin(x/2)} = 2$. (*Ответ:* $\{\pi(4n + 1) \mid n \in \mathbf{Z}\}$.)

125. Повторите пп. 109, 9. 81.

Пример 125а. Решите уравнение

$$\cos x + \sin x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}.$$

Правильное решение. Область определения: $\sin 2x \neq 1$. Отсюда находим $x \neq \pi/4 + \pi n \mid n \in \mathbf{Z}$.

Выполним преобразования:

$$\left(\cos x + \sin x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x + \sin x = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x + \sin x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x - \sin x)^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x + \sin x = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} \cos x - \sin x \neq 0, \\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x + \sin x \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\cos x\neq\sin x,\\(\cos x+\sin x)((\cos x-\sin x)-1)=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\cos x\neq\sin x,\\\cos x+\sin x=0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}\cos x\neq\sin x,\\\cos x-\sin x-1=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\neq\pi/4+\pi n\mid n\in\mathbf{Z},\\\cos x=\cos(\pi/2+x)\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x\neq\pi/4+\pi n\mid n\in\mathbf{Z},\\\cos(\pi/4+x)=1/\sqrt{2}\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x=-\pi/4+\pi n\mid n\in\mathbf{Z}\text{ или }\pi/4+x=$$
$$=\pm\pi/4+2\pi n\mid n\in\mathbf{Z}).$$

Правильный ответ: $\{-\pi/4+\pi n;\ 2\pi n;\ -\pi/2+2\pi n\mid n\in\mathbf{Z}\}$.

Пример 125б. Решите уравнение $9^{\cos x}=9^{\sin x}\times 3^{2/\cos x}$. (*Ответ:* $\{\pi n;\ -\pi/4+\pi n\mid n\in\mathbf{Z}\}$.)

126. Повторите пп. 109, 77, 2.

Пример 126а. Решите уравнение $\sin 2x+\operatorname{tg}x=2$.

Правильное решение. Область определения: $x\neq\pi/2+\pi n\mid n\in\mathbf{Z}$.

Последовательно имеем:

$$(\sin 2x+\operatorname{tg}x=2)\Leftrightarrow(\operatorname{tg}x-1=-2\sin x\cos x+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\cos x\neq 0,\\\sin x-\cos x=(\sin x-\cos x)^2\cos x\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\cos x\neq 0,\\(\sin x-\cos x)(1-(\sin x-\cos x)\cos x)=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\cos x\neq 0,\\\sin x-\cos x=0\end{cases}\text{ или }\right.$$
$$\left.\begin{cases}\cos x\neq 0,\\1-\sin x\cos x+\cos^2 x=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\neq\pi/2+\pi n\mid n\in\mathbf{Z},\\\cos x=\cos(\pi/2-x)\end{cases}\text{ или }\right.$$
$$\left.\begin{cases}\cos x\neq 0,\\\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}x+2=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x=\pi/4+\pi n\mid n\in\mathbf{Z},\text{ или }x\in\varnothing).$$

Правильный ответ: $\{\pi/4+\pi n\mid n\in\mathbf{Z}\}$.

Пример 126б. Решите уравнение $\operatorname{tg}x-1=2\sin 2x$. (*Ответ:* $\{-\pi/4+\pi n;\ -\pi/8+(\pi/2)n\mid n\in\mathbf{Z}\}$.)

127. Повторите пп. 109, 2.

Пример 127а. Решите уравнение $\cos 2x+\cos 3x=2$.

Правильное решение. Заметим, что $\cos 2x\leqslant 1$ и $\cos 3x\leqslant 1$. Следовательно,

$$(\cos 2x+\cos 3x=2)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\cos 2x=1,\\ \cos 3x=1\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}2x=2\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z},\\ 3x=2\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z}\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x=\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z},\\ x=\frac{2}{3}\pi k\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\end{cases}\right).$$

Придавая n и k значения 0, ± 1, ± 2, ± 3, ..., находим общее решение полученной системы уравнений, которое можно записать в виде $x=2\pi m\,|\,m\in\mathbf{Z}$. (Для наглядности можно изобразить соответствующие решения точками на единичной окружности.)

Правильный ответ: $\{2\pi m\,|\,m\in\mathbf{Z}\}$.

Пример 127б. Решите уравнение $2\cos 2x+$ $+2\operatorname{tg}^2 x=5$. (*Ответ:* $\{\pm\pi/3+2\pi n;\ \pm(2/3)\pi+$ $+2\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}\}$.)

128. Повторите п. 109.

Пример 128а. Решите уравнение $\cos(\cos x)=0$.

Правильное решение. Введем следующие обозначения:

$$(\cos(\cos x)=0)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\cos x=y,\\ \cos y=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\cos x=y,\\ y=\pi/2+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}\end{cases}\right).$$

Заметим, что $y=\cos x$ — четная функция и ее наибольшее значение равно 1. С другой стороны, из уравнения $\cos y=0$ следует, что наименьшее положительное значение y равно $\pi/2$, что больше единицы. Приведем для наглядности график функции $z=\cos y$ (рис. 74).

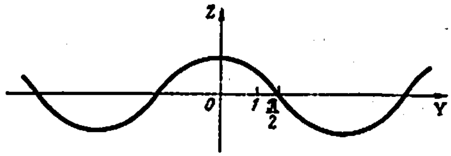

Рис. 74

Правильный ответ: $\varnothing$.

Пример 128б. Решите уравнение $\cos 2x=x^2+1$. (*Ответ:* $\{0\}$.)

129. Повторите пп. 60, 109, 12.

Пример 129а. Вычислите

$$\lg\operatorname{tg}1^\circ+\lg\operatorname{tg}2^\circ+\ldots+\lg\operatorname{tg}89^\circ.$$

Правильное решение. Имеем:

$$\lg\operatorname{tg}1^\circ+\lg\operatorname{tg}2^\circ+\ldots+\lg\operatorname{tg}89^\circ=$$

$$= \lg(\operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 2^\circ \cdots \operatorname{tg} 89^\circ) =$$
$$= \lg((\operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 89^\circ)(\operatorname{tg} 2^\circ \operatorname{tg} 88^\circ) \times \cdots \times$$
$$\times (\operatorname{tg} 44^\circ \operatorname{tg} 46^\circ)(\operatorname{tg} 45^\circ)) =$$
$$= \lg\left(\left(\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 1^\circ}\right)\left(\operatorname{tg} 2^\circ \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 2^\circ}\right) \times \ldots \times\right.$$
$$\left.\times \left(\operatorname{tg} 44^\circ \frac{1}{\operatorname{tg} 44^\circ}\right)(\operatorname{tg} 45^\circ)\right) = \lg 1 = 0.$$

Правильный ответ: 0.

Пример 129б. Вычислите $\lg \operatorname{tg} 1^\circ \lg \operatorname{tg} 2^\circ \times \ldots \times \lg \operatorname{tg} 89^\circ$. (*Ответ:* 0.)

130. Два уравнения или неравенства с одной переменной называются равносильными, если множества их решений совпадают.

Пример 130а. Равносильны ли уравнения:

$$(1 + 2 \sin x) \operatorname{tg} x = 0 \text{ и } (1 + 2 \sin x)/(\operatorname{tg} x)^{-1} = 0?$$

Правильное решение. Первое уравнение получается из второго умножением числителя и знаменателя дроби на $\operatorname{tg} x \neq 0$. Замечаем, что значения x, при которых $\operatorname{tg} x = 0$, являются решениями первого уравнения и не являются решениями второго.

Правильный ответ: не равносильны.

Пример 130б. Решите уравнение $\sin \frac{x}{2} \cos 2x = 1$. (*Ответ:* $\{\pi + 4\pi n \mid n \in \mathbf{Z}\}$.)

Указание. Следует учесть, что максимальные значения функций синус и косинус не превосходят единицы.

131. Повторите пп. 9, 109, 60.

Пример 131а. Решите уравнение

$$\frac{3 \sin 4x + 2 \sin 2x}{3 \cos 4x + 2 \cos 2x + 3} + 2 \operatorname{tg} x = 0.$$

Неправильное решение. Область определения:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0, \\ 3 \cos 4x + 2 \cos 2x + 3 \neq 0. \end{cases}$$

Преобразуем уравнение:

$$\left(\frac{3 \sin 4x + 2 \sin 2x}{3 \cos 4x + 2 \cos 2x + 3} + 2 \operatorname{tg} x = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{6\sin 2x\cos 2x+2\sin 2x}{3\cos^2 2x-3\sin^2 2x+2\cos 2x+3\sin^2 2x+3\cos^2 2x}+2\operatorname{tg}x=\right.$$

$$\left.=0\right)\Leftrightarrow\left(\frac{2\sin 2x(3\cos 2x+1)}{2\cos 2x(3\cos 2x+1)}+2\operatorname{tg}x=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}3\cos 2x+1\neq 0,\\ \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}+2\dfrac{\sin x}{\cos x}=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\neq\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z},\\ \dfrac{2\sin x\cos x}{\cos 2x}+2\dfrac{\sin x}{\cos x}=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\neq\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z},\\ \sin x=0\end{cases}\right.\quad\text{или}$$

$$\left.\begin{cases}x\neq\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z},\\ \dfrac{\cos x}{\cos 2x}+\dfrac{1}{\cos x}=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x=\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}\ \text{или}\right.$$

$$\left.\left(\begin{cases}x\neq\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z},\\ \dfrac{\cos^2 x+2\cos^2 x-1}{\cos 2x\cos x}=0\end{cases}\right)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x=\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}\ \text{или}\right.$$

$$\left.\left(\begin{cases}x\neq\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z},\\ x\neq\pm\pi/2+2\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z},\\ x\neq\pm\pi/4+\pi m\,|\,m\in\mathbf{Z},\\ \cos x=\pm\sqrt{3}/3\end{cases}\right)\right)\underline{\underline{\Leftrightarrow}}$$

$$\underline{\underline{\Leftrightarrow}}\left(x=\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}\ \text{или}\ x=\right.$$

$$\left.=\pm\arccos\left(\pm\sqrt{3}/3\right)+2\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z}\right).$$

Неправильный ответ: $\{\pi k;\ \pm\arccos(\pm\sqrt{3}/3)+2\pi k\,|\,k\in\mathbf{Z}\}$.

Правильное решение. Область определения:

$$\begin{cases}\cos x \neq 0,\\ 3\cos 4x + 2\cos 2x + 3 \neq 0.\end{cases}$$

Преобразуем уравнение:

$$\left(\frac{3\sin 4x + 2\sin 2x}{3\cos 4x + 2\cos 2x + 3} + 2\operatorname{tg} x = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{6\sin 2x\cos 2x + 2\sin 2x}{3\cos^2 x - 3\sin^2 2x + 2\cos 2x + 3\sin^2 2x + 3\cos^2 2x} + 2\operatorname{tg} x = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2\sin 2x(3\cos 2x + 1)}{2\cos 2x\,(3\sin 2x + 1)} + 2\operatorname{tg} x = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}3\cos 2x + 1 \neq 0,\\ \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} + 2\dfrac{\sin x}{\cos x} = 0\end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}3\cos 2x + 1 \neq 0,\\ \dfrac{2\sin x\cos x}{\cos 2x} + 2\dfrac{\sin x}{\cos x} = 0\end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}3\cos 2x + 1 \neq 0,\\ \sin x = 0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}3\cos 2x + 1 \neq 0,\\ \dfrac{\cos x}{\cos 2x} + \dfrac{1}{\cos x} = 0\end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x = \pi n \mid n \in \mathbf{Z} \text{ или } \begin{cases}3\cos 2x + 1 \neq 0,\\ \dfrac{\cos^2 x + 2\cos^2 x - 1}{\cos 2x\cos x} = 0\end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x = \pi n \mid n \in \mathbf{Z} \text{ или } \begin{cases}3\cos 2x + 1 \neq 0,\\ \cos x \neq 0,\\ \cos 2x \neq 0,\\ 3\cos^2 x - 1 = 0\end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x = \pi n \mid n \in \mathbf{Z} \text{ или } \begin{cases}3(2\cos^2 x - 1) + 1 \neq 0,\\ \cos x \neq 0,\\ \cos 2x \neq 0,\\ 3\cos^2 x - 1 = 0\end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x = \pi n \mid n \in \mathbf{Z} \text{ или } \begin{cases}2(3\cos^2 x - 1) \neq 0,\\ \cos x \neq 0,\\ \cos 2x \neq 0,\\ 3\cos^2 x - 1 = 0\end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x = \pi n \mid n \in \mathbf{Z} \text{ или } x \in \varnothing) \Leftrightarrow (x = \pi n \mid n \in \mathbf{Z}).$$

Правильный ответ: $\{\pi n \mid n \in \mathbf{Z}\}$.

Пример 131б. Решите уравнение $2^{\sin^2 x} + 4 \times \times 2^{\cos^2 x} = 6$. (*Ответ:* $\{\pi/2 + \pi n \mid n \in \mathbf{Z}\}$.)

132. Решение тригонометрических неравенств полезно сопровождать графическими построениями.

Пример 132а. Решите неравенство $\sin x < 1/2$.

Правильное решение. Построим графики функций $y = \sin x$ и $y = 1/2$ (рис. 75). Из уравнения $\sin x = 1/2$ находим абсциссы точек пересечения гра-

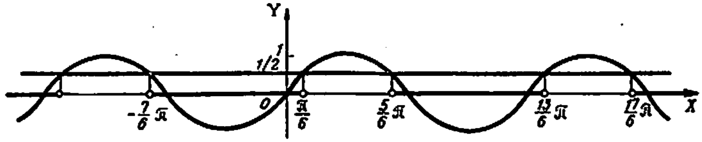

Рис. 75

фиков: $x = (-1)^n \pi/6 + \pi n \mid n \in \mathbf{Z}$. Решением заданного неравенства будут те значения x, при которых график функции $y = \sin x$ проходит ниже графика функции $y = 1/2$. (Ср. с решением примера 59а.)

Правильный ответ: $\left(\frac{5}{6}\pi + 2\pi n;\ \frac{13}{6}\pi + 2\pi n\right)$ при $n \in \mathbf{Z}$.

Замечание. Возможна и другая запись ответа: $\left(-\frac{7}{6}\pi + 2\pi n;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$ при $n \in \mathbf{Z}$.

Пример 132б. Решите неравенство $\frac{\sin x}{1 + \cos x} \geqslant 0$. (*Ответ:* $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n)$ при $n \in \mathbf{Z}$.)

Указание. Воспользуйтесь тем, что $|\cos x| \leqslant 1$.

133. Повторите пп. 132, 4, 13.

Пример 133а. Решите неравенство $|\sin x| < 1/2$.

Правильное решение. *I способ.* Построим графики функций $y = |\sin x|$ и $y = 1/2$ (рис. 76). Из урав-

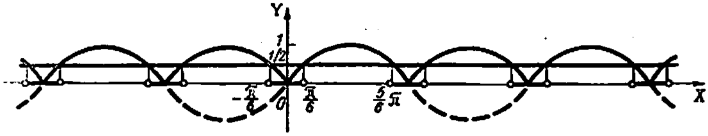

Рис. 76

нения $\sin x = \pm 1/2$ находим абсциссы точек пересечения графиков: $x = (-1)^n(\pm\pi/6) + \pi n \mid n \in \mathbf{Z}$. Решением заданного неравенства будут те значения x, при которых график функции $y=|\sin x|$ лежит ниже графика функции $y=1/2$.

II способ. Имеем:

$$(|\sin x|<1/2)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\sin x<1/2 \text{ при } \sin x\geqslant 0,\\ -\sin x<1/2 \text{ при } \sin x<0\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\sin x<1/2 \quad \text{при } \sin x\geqslant 0,\\ \sin x>-1/2 \text{ при } \sin x<0\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0\leqslant\sin x<1/2,\\ -1/2<\sin x<0\end{pmatrix}\Leftrightarrow(-1/2<\sin x<1/2).$$

Построим графики функций $y=\sin x$, $y=1/2$, $y=-1/2$ (рис. 77). Из уравнений $\sin x=1/2$ и $\sin x=-1/2$ находим абсциссы точек пересечения:

$$x=(-1)^n\pi/6+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z} \text{ и } x=(-1)^m(-\pi/6)+$$
$$+\pi m\,|\,m\in\mathbf{Z}.$$

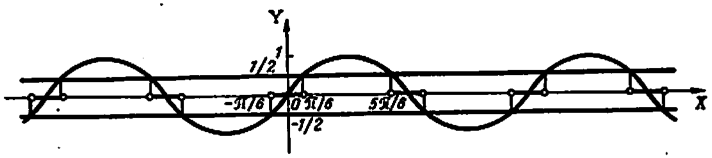

Рис. 77

Решением заданного неравенства будут те значения x, при которых график функции $y=\sin x$ лежит между графиками функций $y=1/2$ и $y=-1/2$.

Правильный ответ: $\left(\frac{5}{6}\pi+\pi n;\ \frac{7}{6}\pi+\pi n\right)$ при $n\in\mathbf{Z}$.

Замечание. Возможна и другая запись ответа: $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right)$ при $n\in\mathbf{Z}$.

Пример 133б. Решите неравенство $\cos^2 x>1/4$. (*Ответ:* $(-\pi/3+\pi n;\ \pi/3+\pi n)$ при $n\in\mathbf{Z}$.)

134. Повторите п. 107.

Пример 134а. Докажите неравенство $\sin x<x$ при $x>0$.

Правильное решение. При $x>1$ неравенство выполняется, так как $|\sin x|\leqslant 1$. При $0<x\leqslant 1$ тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x)=x$ равен $f'(x)=1$, а тангенс угла наклона касательной к графику функции $g(x)=\sin x - g'(x)=\cos x$. Так как

в рассматриваемом промежутке $\cos x < 1$ и $f(0) = g(0)$, то графики функций $f(x)$ и $g(x)$ при $0 < x \leqslant 1$ не пересекаются. В этом случае график функции $g(x) = \sin x$ лежит ниже графика функции $f(x) = x$, что и требовалось доказать.

Пример 134б. Найдите непериодические функции f и g, такие, что функция $f + g$ — периодическая. (*Ответ:* например, $f(x) = \sin x - x$, $g(x) = x$.)

4. Производная. Ее физический и геометрический смысл

135. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x),$$
$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$
$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0).$$

Пример 135а. Найдите производную функции $f(x) = x^2 + 2^x - 2^{13}$.

Правильное решение. Имеем:

$$f'(x) = 2x + \ln 2 \cdot 2^x.$$

Правильный ответ: $2x + \ln 2 \cdot 2^x$.

Пример 135б. Найдите производную функции $f(x) = \cos^2 x$. (*Ответ:* $-\sin 2x$.)

136. Повторите п. 135.

Пример 136а. Найдите $f'(1)$, если $f(x) = 2^{4-x}x^5$.

Правильное решение. Вычисляем:

$$f'(x) = 2^{4-x} \ln 2 \cdot (-1)x^5 + 2^{4-x} \cdot 5x^4 = \\ = \frac{2^4 x^4 (5 - x \ln 2)}{2^x},$$

$$f'(1) = 2^4 \cdot \frac{5 - \ln 2}{2} = 8(5 - \ln 2) .$$

Правильный ответ: $8(5 - \ln 2)$.

Пример 136б. Вычислите $f'(0)$, если $f(x) = \cos^2 (\pi/3 - x)$. (*Ответ:* $\sqrt{3}/2$.)

137. Повторите пп. 135, 109.

Пример 137а. Закон прямолинейного движения задан формулой $s(t) = 2t^3 - 3t + 4$. Найдите скорость и ускорение в момент времени $t = 2$.

Правильное решение. Имеем:

$$v(t)=s'(t)=6t^2-3,\ v(2)=6\cdot 2^2-3=21;$$
$$a(t)=s''(t)=v'(t)=12t,\ a(2)=12\cdot 2=24.$$

Правильный ответ: 21; 24.

Пример 137б. Решите уравнение $f'(0)=f'(x)$, если $f(x)=5\sin x+3\cos x$. $\left(\textit{Ответ: } \left\{2\pi n;\ \ -2\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+\right.\right.$ $\left.\left.+2\pi n \mid n\in \mathbf{Z}\right\}.\right)$

Указание. Сведите данное уравнение к виду $5\cos x-3\sin x=5$.

138. Повторите п. 135.

Пример 138а. Вычислите $f'(\pi)$, если $f(x)=(\sin 2x)/x$.

Правильное решение. *I способ.* Вычислим:

$$f'(x)=\left(2\cos x\cdot\frac{\sin x}{x}\right)'=$$
$$=2(\cos x)'\frac{\sin x}{x}+2\cos x\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=$$
$$=-2\sin x\cdot\frac{\sin x}{x}+2\cos x\cdot\frac{\cos x\cdot x-\sin x}{x^2}=$$
$$=-2\frac{\sin^2 x}{x}+2\frac{\cos^2 x}{x}-\frac{\sin 2x}{x^2},$$
$$f'(\pi)=0+2/\pi-0=2/\pi.$$

II способ. Использовав формулу для вычисления производной сложной функции, данный пример можно решить проще:

$$f'(x)=\frac{(\sin 2x)'x-x'\sin 2x}{x^2}=\frac{2x\cos 2x-\sin 2x}{x^2},$$
$$f'(\pi)=2/\pi.$$

Правильный ответ: $2/\pi$.

Пример 138б. Приведите пример непрерывной функции, не имеющей производной в точке. (*Ответ:* например, $f(x)=|x|$ (не существует $f'(0)$) или $f'(x)=\begin{cases}x^2 & \text{при } x\leqslant 2,\\ 4 & \text{при } x\geqslant 2\end{cases}$ (не существует $f'(2)$.)

139. Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $A(x_0;\ f(x_0))$ имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

или

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ при } y_0 = f(x_0),$$

причем функция $y = f(x)$ должна быть дифференцируема в точке x_0. Тогда $f'(x_0)$ — угловой коэффициент касательной.

Пример 139а. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = (x^3 - 1)/3$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

Правильное решение. Найдем абсциссу точки пересечения графика данной функции с осью OX:

$$((x^3 - 1)/3 = 0) \Leftrightarrow (x = 1).$$

Следовательно, график пересекает ось OX в точке $A(1; 0)$. Уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

В нашем случае $y_0 = 0$, $x_0 = 1$. Для данной кривой $y = f(x)$, где $f(x) = (x^3 - 1)/3$, имеем

$$f'(x) = \left(\frac{x^3 - 1}{3}\right)' = x^2 \text{ и } f'(x_0) = f'(1) = 1.$$

Тогда уравнение касательной принимает вид

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 1) \text{ или } y = x - 1.$$

Правильный ответ: $y = x - 1$.

Пример 139б. При каком значении a угловой коэффициент касательной к параболе $y = x^2 + ax + 3$ в точке пересечения ее с осью OY равен 2? (*Ответ:* $a = 2$.)

140. Производная $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$. Угол отсчитывается в положительном направлении от оси OX против хода часовой стрелки.

Пример 140а. В какой точке касательная к графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$ образует с осью OX угол 135°?

Правильное решение. Область определения функции: $x \neq 2$.

По формулам приведения вычисляем:

$$\operatorname{tg} 135° = \operatorname{tg}(180° - 45°) = -\operatorname{tg} 45° = -1.$$

Следовательно, $f'(x_0)=-1$. Для данной кривой $y=f(x)$, где $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$, имеем

$$f'(x)=\left(\frac{x+2}{x-2}\right)'=\frac{(x-2)-(x+2)}{(x-2)^2}=\frac{-4}{(x-2)^2}.$$

Тогда

$$(f'(x_0)=-1)\Leftrightarrow\left(\frac{-4}{(x_0-2)^2}=-1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x_0\neq 2,\\ -4=-x_0^2+4x_0-4\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x_0\neq 2,\\ x_0^2-4x_0=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow(x_{01}=0 \text{ или } x_{02}=4).$$

Получаем

$$y_{01}=\frac{x_{01}+2}{x_{01}-2}=-1,\ y_{02}=3.$$

Правильный ответ: $\{(4;\ 3);\ (0;\ -1)\}$.

Пример 140б. В какой точке угол между касательной к кривой $y=x^2-5x+2$ и осью OX равен углу наклона прямой $y=x$ к оси OX? (*Ответ:* $\{(3;\ -4)\}$.)

141. Повторите пп. 139, 140.

Пример 141а. В каких точках касательная к графику функции $y=x^3/3-x^2-x+1$ параллельна прямой $y=2x+10$?

Правильное решение. Угловой коэффициент равен 2. Для заданной кривой $y=f(x)$, где $f(x)=$ $=x^3/3-x^2-x+1$, имеем

$$f'(x)=(x^3/3-x^2-x+1)'=x^2-2x-1.$$

Тогда

$$(f'(x_0)=2)\Leftrightarrow(x_0^2-2x_0-1=2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x_0^2-2x_0-3=0)\Leftrightarrow(x_{01}=-1 \text{ или } x_{02}=3).$$

Получаем

$$y_{01}=x_{01}^3/3-x_{01}^2-x_{01}+1=2/3,\ y_{02}=-2.$$

Правильный ответ: $\{(-1;\ 2/3),\ (3;\ -2)\}$.

Пример 141б. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y=x^3-2x+4$ в точке пересечения его с кривой $y=x^3$. (*Ответ:* 10.)

142. Внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками* этой функции.

Точки экстремума — точки максимума или минимума.

Пусть функция имеет на отрезке конечное число критических точек. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции на этом отрезке, нужно вычислить ее значения во всех критических точках, принадлежащих отрезку, и на его концах, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 142а. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x/8+2/x$ на отрезке $[1;\ 6]$.

Неправильное решение. Область определения функции: $x\neq 0$.

Вычислим $f'(x)=1/8-2/x^2$. Найдем критические точки из уравнения $f'(x)=0$:

$$(1/8-2/x^2=0)\Leftrightarrow(x^2-16=0)\Leftrightarrow(x=\pm 4).$$

При $x=+4$ $f(x)=1$, при $x=-4$ $f(x)=-1$.

Неправильный ответ: $\underline{+1}$ — наибольшее значение, $\underline{-1}$ — наименьшее значение.

Правильное решение. Область определения функции: $x\neq 0$.

Вычислим $f'(x)=1/8-2/x^2$. Найдем критические точки из уравнения $f'(x)=0$:

$$(1/8-2/x^2=0)\Leftrightarrow((x^2-16)=0)\Leftrightarrow(x=4 \text{ или } x=-4).$$

При $x=4$ $f(x)=1$. Точка $x=-4$ не принадлежит заданному отрезку $[1;\ 6]$. Вычислим значения функции на его концах. При $x=1$ $f(x)=2\frac{1}{8}$, при $x=6$ $f(x)=13/12$.

Правильный ответ: $2\frac{1}{8}$ — наибольшее значение, 1 — наименьшее значение.

Пример 142б. Найдите точки экстремума функции $f(x)=2x^3-6x^2+3$. (*Ответ:* $x=2$ — точка минимума; $x=0$ — точка максимума.)

143. Повторите п. 142.

Пример 143а. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=\cos^2 x-2\sin x$.

Правильное решение. Заметим, что заданная функция ограничена и имеет производную во всех точках числовой прямой. Найдем критические точки:

$$f'(x) = -2\cos x \sin x - 2\cos x =$$
$$= -2\cos x \cdot (\sin x + 1) = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что $\cos x = 0$ или $\sin x = -1$, откуда получаем, что $x = \pi/2 + \pi n \mid n \in \mathbf{Z}$ или $x = -\pi/2 + 2\pi m \mid m \in \mathbf{Z}$. Общее решение имеет вид $x = \pi/2 + \pi n \mid n \in \mathbf{Z}$. Это и будут критические точки. Поскольку период функции $f(x) = \cos^2 x - 2\sin x$ равен 2π, то достаточно рассмотреть точки $\pi/2$ и $-\pi/2$ с периодом 2π. При $x = \pi/2$ получаем, что $y = -2$, при $x = -\pi/2$ $y = 2$.

Правильный ответ: $f(x) = -2$ при $x = \pi/2 + 2\pi n \mid n \in \mathbf{Z}$.

Пример 143б. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \cos 2x - x$ на отрезке $[0;\ \pi]$. (*Ответ:* $f(x) = 1$ при $x = 0$ — наибольшее значение, $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{12}\pi$ при $x = \frac{7}{12}\pi$ — наименьшее значение.)

144. Повторите п. 142.

Пример 144а. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ при $x = 3$ принимает наименьшее значение, модуль которого равен 3, а при $x = 1$ обращается в нуль. Какое значение он принимает при $x = 6$?

Правильное решение. Найдем коэффициенты a, b, c заданного трехчлена. Так как соответствующая парабола имеет точку минимума и пересекает ось OX, то $a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = -3$; $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0$ — второе уравнение относительно неизвестных a, b, c. Третье уравнение получаем из условия $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b = 0$ при $x = 3$, т. е. $6a + b = 0$.

Решая систему из трех уравнений, находим $a = 3/4$, $b = -9/2$, $c = 15/4$. Далее вычисляем

$$\frac{3}{4} \cdot 6^2 - \frac{9}{2} \cdot 6 + \frac{15}{4} = 27 - 27 + 15/4 = 15/4.$$

Правильный ответ: 3,75.

Пример 144б. Исследуйте на экстремум функцию $f(x) = 2x/(1 + x^2)$. (*Ответ:* $x = -1$ — точка минимума, $x = 1$ — точка максимума.)

145. Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала I, то функция f возрастает на I. Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала I, то функция f убывает на I.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда:

1) если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума;

2) если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума.

Пример 145а. Найдите множество значений a, таких, что функция

$$f(x)=8(2a+1)\cos x-\sin 2x+(16a^2+16a-18)x$$

является возрастающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

Правильное решение. Последовательно находим:

$$f'(x)=-8(2a+1)\sin x-2\cos 2x+16a^2+16a-18=$$
$$=-8(2a+1)\sin x-2+4\sin^2 x+16a^2+16a-18=$$
$$=4(\sin^2 x-2(2a+1)\sin x+4a^2+4a-5)>0.$$

Из последнего неравенства, которое должно выполняться для всех x, получаем

$$((\sin x-(2a+1))^2>6)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\sin x\geqslant 2a+1,\\ \sin x-(2a+1)>\sqrt{6}\end{cases}\text{ или }\begin{cases}\sin x<2a+1,\\ -\sin x+(2a+1)>\sqrt{6}\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}2a+1\leqslant -1,\\ \sin x>2a+1+\sqrt{6}\end{cases}\text{ или }\begin{cases}2a+1>1,\\ \sin x<2a+1-\sqrt{6}\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}a\leqslant -1,\\ 2a+1+\sqrt{6}<-1\end{cases}\text{ или }\begin{cases}a>0,\\ 2a+1-\sqrt{6}>1\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}a\leqslant -1,\\ a<-1-\sqrt{6}/2\end{cases}\text{ или }\begin{cases}a>0,\\ a>\sqrt{6}/2\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(a<-1-\sqrt{6}/2\text{ или }a>\sqrt{6}/2).$$

Правильный ответ: $(-\infty;\ -1-\sqrt{6}/2)\cup(\sqrt{6}/2;\ \infty)$.

Пример 145б. При каких значениях p функция $f(x)=4\cos x+p^2x+8$ возрастает на всей числовой прямой? (*Ответ:* $p\in(-\infty;\ -2]\cup[2;\ +\infty)$.)

146. Повторите пп. 145, 142, 135.

Пример 146а. Чему равно наибольшее значение функции $f(x)=\sin(\sin x)$?

Правильное решение. Заметим, что $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ и отрезок возрастания функции $f(z)=\sin z$ — $[-\pi/2; \pi/2]$ — включает в себя отрезок $[-1; 1]$. Следовательно, $(f(x))_{max}=\sin 1$. (Ср. с решением примера 128а.)

Правильный ответ: $\sin 1$.

Пример 146б. Найдите минимальное значение функции $f(x)=x^3e^x$. (*Ответ:* $f(x)=-27e^{-3}$ при $x=-3$.)

147. Повторите пп. 142, 145, 135.

Пример 147а. Разбейте число 18 на два слагаемых, таких, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

Правильное решение. Пусть x — первое слагаемое, тогда $18-x$ — второе слагаемое. Требуется найти минимальное значение следующей функции:

$$f(x)=x^2+(18-x)^2=2x^2-36x+18^2.$$

Найдем производную и приравняем ее нулю:

$$f'(x)=4x-36=0.$$

Следовательно, $x=9$ — критическая точка. При $x<9$ $f'(x)<0$, а при $x>9$ $f'(x)>0$. Значит, $x=9$ — точка минимума.

Правильный ответ: {9; 9}.

Пример 147б. Из всех прямоугольников площадью 100 м^2 выберите тот, у которого периметр минимальный. (*Ответ:* квадрат со стороной 10 м.)

148. Повторите пп. 142, 145, 109.

Пример 148а. На прямой $y=2x$ найдите такую точку, чтобы сумма квадратов расстояний от нее до точек $A(2; 0)$ и $B(0; 4)$ была минимальной.

Правильное решение. Все точки прямой $y=2x$ имеют координаты $(x; 2x)$ (рис. 78). Для вычисле-

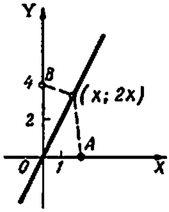

Рис. 78

ния x определим расстояния от точек A и B до точки с координатами $(x;\ 2x)$ и найдем минимум функции, равной сумме квадратов указанных расстояний:

$$f(x)=(\sqrt{x^2+(2x-4)^2})^2+(\sqrt{(x-2)^2+4x^2})^2=$$
$$=x^2+(2x-4)^2+(x-2)^2+4x^2=10x^2-20x+20.$$

Находим производную и приравниваем ее нулю:

$$f'(x)=20x-20=0.$$

Тогда $x=1$ — точка минимума, так как $f'(x)<0$ при $x<1$ и $f'(x)>0$ при $x>1$. Следовательно, искомой будет точка с координатами $(1;\ 2)$.

Правильный ответ: $\{(1;\ 2)\}$.

Пример 148б. Среди всех решений уравнения $\cos 4x=-2\cos^2 x$ найдите те, при которых выражение x^2+2x-3 принимает наименьшее значение. (*Ответ:* $\{-\pi/3\}$.)

Указание. Находим $x=x_M$, при котором выражение x^2+2x- -3 принимает наименьшее значение. Из всех полученных решений данного уравнения выбираем то, которое ближе всего расположено к x_M.

149. Повторите пп. 142, 145.

Пример 149а. Найдите промежутки возрастания и экстремумы функции $f(x)=x^4e^{-x}$.

Правильное решение. Исследуем производную $f'(x)=4x^3e^{-x}-x^4e^{-x}=x^3e^{-x}(4-x)$:

$$(f'(x)>0)\Leftrightarrow(x^3e^{-x}(4-x)>0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x^3>0,\\4-x>0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x^3<0,\\4-x<0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x>0,\\x<4\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x<0,\\x>4\end{cases}\right)\Leftrightarrow(0<x<4),$$
$$(f'(x)=0)\Leftrightarrow(x^3e^{-x}(4-x)=0)\Leftrightarrow(x=0\text{ или }x=4).$$

При $x<0$ $f'(x)<0$, а при $0<x<4$ $f'(x)>0$. Следовательно, $x=0$ — точка минимума. При $0<x<4$ $f'(x)>0$, а при $x>4$ $f'(x)<0$, значит, $x=4$ — точка максимума.

Правильный ответ: $[0;\ 4)$ — промежуток возрастания функции $f(x)=x^4e^{-x}$; $x=0$ — точка минимума; $x=4$ — точка максимума.

Пример 149б. Исследуйте на монотонность и экстремумы функцию $f(x)=x-e^x$. (*Ответ:* на промежутке $(-\infty;\ 0)$ функция возрастает, на промежутке

$[0; +\infty)$ убывает, $x=0$ — точка максимума функции.)

150. Повторите пп. 145, 143, 140, 139.

Пример 150а. Исследуйте функцию $f(x)=x^3/3-2x^2+3x$ с помощью производной и постройте ее график.

Правильное решение. Область определения функции: $x\in(-\infty; +\infty)$.

Найдем производную и приравняем ее нулю:

$$f'(x)=x^2-4x+3=0.$$

Следовательно, $x_1=1$ и $x_2=3$ — критические точки. При $x<1$ $f'(x)>0$, при $1<x<3$ $f'(x)<0$ и при $x>3$ $f'(x)>0$. Таким образом, получаем, что $x=1$ — точка максимума данной функции и $f(1)=4/3$, $x=3$ — точка минимума и $f(3)=0$. При $x<1$ функция возрастает, при $1<x<3$ убывает и при $x>3$ снова возрастает. Найдем точки пересечения с осями координат: (0; 0) и (3; 0).

Правильный ответ: см. рис. 79.

Пример 150б. Исследуйте функцию $f(x)=-x^3+3x$ и постройте ее график. (*Ответ:* см. рис. 80.)

151. Повторите пп. 145, 142, 140, 139.

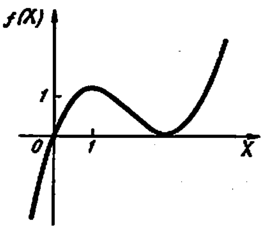

Рис. 79

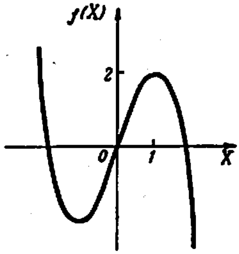

Рис. 80

Пример 151а. Имеет ли решение уравнение $x+\sin x=1{,}1$ на отрезке $[0; \pi/6]$?

Правильное решение. Функция $f(x)=x+\sin x$ на отрезке $[0; \pi/6]$ возрастает, так как $f'(x)=1+\cos x>0$ на этом отрезке. Следовательно, максимум $f(x)$ на $[0; \pi/6]$:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}=$$

$$=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}<\frac{3{,}15}{6}+\frac{1}{2}=1{,}025.$$

Поскольку $f(\pi/6) < 1{,}1$, то заданное уравнение не имеет решений на отрезке $[0;\ \pi/6]$.

Правильный ответ: не имеет.

Пример 151б. Исследуйте функцию $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ с помощью производной и постройте ее график. (*Ответ:* см. рис. 81.)

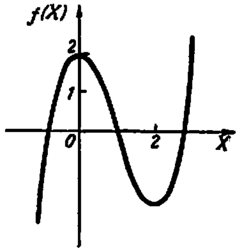

Рис. 81

5. Арифметическая и геометрическая прогрессии

152. Формула n-го члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}.$$

Свойство арифметической прогрессии:

$$a_k = (a_{k-1} + a_{k+1})/2.$$

Пример 152а. Докажите, что последовательность с n-м членом $a_n = 2n - 5$ есть арифметическая прогрессия. Найдите S_{20}.

Правильное решение. Так как

$$a_{n+1} = 2(n+1) - 5 = 2n - 3,$$

то

$$d = a_{n+1} - a_n = (2n-3) - (2n-5) = 2.$$

Получили, что d — постоянная величина, не зависящая от n. Таким образом, заданная последовательность является арифметической прогрессией.

Вычислим S_{20}:

$$S_{20}=\frac{a_1+a_{20}}{2}\cdot 20=\frac{a_1+(a_1+d\cdot 19)}{2}\cdot 20=$$
$$=\frac{-3+(-3+2\cdot 19)}{2}\cdot 20=320.$$

Правильный ответ: $S_{20}=320$.

Пример 152б. Найдите арифметическую прогрессию, у которой сумма первых трех членов равна 27, а сумма их квадратов — 275. (*Ответ:* $a_1=5$, $d=4$ и $a_1=13$, $d=-4$.)

153. Повторите пп. 152, 60.

Пример 153а. Существует ли арифметическая прогрессия, сумма любого числа членов которой равна квадрату числа ее членов?

Правильное решение. Из условия примера следует, что:

$$(S_n=n^2)\Leftrightarrow\left(\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n=n^2\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(n=0 \text{ или } 2a_1+d(n-1)=2n)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(n=0 \text{ или } 2a_1-d=(2-d)n).$$

Решение $n=0$ нам не подходит. Левая часть последнего уравнения не зависит от n, а правая зависит. Это уравнение справедливо для любого n, если коэффициент при n равен нулю, т. е.

$$\begin{cases}2-d=0,\\2a_1-d=0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}d=2,\\a_1=1.\end{cases}$$

(Ср. с решением примера 2а.)

Правильный ответ: существует ($a_1=1$, $d=2$).

Пример 153б. Решите уравнение $5^2\cdot 5^4\cdot 5^6\cdots 5^{2x}=(0{,}04)^{-28}$. (*Ответ:* $\{7\}$.)

154. Формула n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_n=b_1q^{n-1}.$$

Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1}.$$

Свойство геометрической прогрессии:

$$b_k^2=b_{k-1}b_{k+1}.$$

Пример 154а. Числа 2, 2^x-1 и 2^x+3 образуют геометрическую прогрессию. Найдите x.

Правильное решение. Из свойства геометрической прогрессии следует, что

$$q=\frac{2^x-1}{2}=\frac{2^x+3}{2^x-1}$$

при $2^x-1\neq 0$. Имеем:

$$\left(\frac{2^x-1}{2}=\frac{2^x+3}{2^x-1}\right)\Leftrightarrow(2^{2x}-2\cdot 2^x+1=2\cdot 2^x+6)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(2^{2x}-4\cdot 2^x-5=0)\Leftrightarrow(2^x=5 \text{ или } 2^x=-1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x=\log_2 5 \text{ или } x\in\varnothing).$$

Правильный ответ: $\{\log_2 5\}$.

Пример 154б. Могут ли три числа одновременно составлять арифметическую и геометрическую прогрессии? (*Ответ:* да, если они равны между собой и отличны от нуля.)

Указание. Пусть u_1, u_2, u_3 — три числа, составляющие арифметическую и геометрическую прогрессии. Использовав последние два условия, выразим дважды u_2 через u_1 и u_3, а затем найдем уравнение, связывающее u_1 и u_3.

155. Повторите п. 154.

Пример 155а. Число членов геометрической прогрессии четно. Сумма всех ее членов в три раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Определите знаменатель прогрессии.

Правильное решение. Введем следующие обозначения: S — сумма всех членов геометрической прогрессии, $S_{\text{ч}}$ — сумма членов, стоящих на четных местах, $S_{\text{неч}}$ — сумма членов, стоящих на нечетных местах. Тогда:

$$(S=S_{\text{ч}}+S_{\text{неч}})\Leftrightarrow(3S_{\text{неч}}=S_{\text{ч}}+S_{\text{неч}})\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(2S_{\text{неч}}=S_{\text{ч}})\Leftrightarrow\left(\frac{S_{\text{ч}}}{S_{\text{неч}}}=2\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{b_2+b_4+\ldots+b_{2n}}{b_1+b_3+\ldots+b_{2n-1}}=2\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{b_1q+b_3q+\ldots+b_{2n-1}q}{b_1+b_3+\ldots+b_{2n-1}}=2\right)\Leftrightarrow(q=2).$$

Правильный ответ: $q=2$.

Пример 155б. В геометрической прогрессии 5 членов. Сумма их без первого члена равна 240, а без последнего — 80. Найдите крайние члены прогрессии. (*Ответ:* $b_1=2$, $b_5=162$.)

156. Повторите п. 154.

Пример 156а. В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего членов равна 66, произведение второго и предпоследнего членов равно 128, а сумма всех членов равна 126. Сколько членов в прогрессии?

Правильное решение. Пусть a_1 — первый член прогрессии, q — ее знаменатель. Составим систему уравнений:

$$\left(\begin{cases} a_1 + a_1 q^{n-1} = 66, \\ a_1^2 q^{n-1} = 128, \\ a_1(1-q^n)/(1-q) = 126 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} a_1^2 + a_1^2 q^{n-1} = 66a_1, \\ a_1^2 q^{n-1} = 128, \\ a_1(1-q^n)/(1-q) = 126 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} a_1^2 - 66a_1 + 128 = 0, \\ a_1^2 q^{n-1} = 128, \\ a_1(1-q^n)/(1-q) = 126 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} a_1 = 64, \\ q^{n-1} = 1/32, \\ q = 1/2 \end{cases} \text{или} \begin{cases} a_1 = 2, \\ q^{n-1} = 32, \\ q = 2 \end{cases}\right).$$

Поскольку прогрессия является возрастающей, то корень $q = 1/2$ — посторонний. Решив уравнение $2^{n-1} = 32 = 2^5$, найдем $n = 6$.

Правильный ответ: 6.

Пример 156б. Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, у которой первые 10 членов — целые, а следующие — не целые? (*Ответ:* да; например, $b_1 = 2^9$, $q = 3/2$.)

157. Повторите пп. 152, 154.

Пример 157а. Три числа, из которых третье равно 12, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то три числа будут составлять арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

Правильное решение. Применив свойства геометрической и арифметической прогрессий, составим систему уравнений (используем стандартные обозначения):

$$\left(\begin{cases} (b_1 q)^2 = 12b_1, \\ 2b_1 q = 9 + b_1 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} b_1 q^2 = 12, \\ q = \dfrac{9+b_1}{2b_1} \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} b_1\dfrac{(9+b_1)^2}{4b_1^2}=12, \\ q=\dfrac{9+b_1}{2b_1} \end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases} b_1^2-30b_1+81=0, \\ q=\dfrac{9+b_1}{2b_1} \end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} b_1=27, \\ q=2/3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} b_1=3, \\ q=2 \end{cases}\right).$$

Правильный ответ: $b_1=27$, $b_2=18$ или $b_1=3$, $b_2=6$.

Пример 157б. Второй, первый и третий члены арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите ее знаменатель, (*Ответ:* -2.)

6. Системы уравнений и неравенств

158. Повторите п. 2.

Пример 158а. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x+ay=2, \\ 3x-2y=6 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?

Правильное решение. Найдем из первого уравнения $x=2-ay$. Подставив его во второе уравнение, получим

$$(3a+2)y=0.$$

Последнее уравнение выполняется при любом y в случае, когда $3a+2=0$ или $a=-2/3$. Тогда, если $y=t$ — любое действительное число, то $x=2+\dfrac{2}{3}t$. (Ср. с решением примера 2а.)

Правильный ответ: $a=-2/3$.

Пример 158б. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y=y, \\ x^5=y^2. \end{cases}$$

(*Ответ:* $\{(0;\ 0);\ (1;\ 1);\ (1;\ -1)\}$.)

159. Повторите пп. 2, 1.

Пример 159а. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y}=1/\sqrt{x}, \\ y=ax+1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

П р а в и л ь н о е   р е ш е н и е. Область определения: $x>0$, $y\geqslant 0$.

Из первого уравнения найдем $y=1/x$ и подставим его во второе уравнение. (Заметим, что каждому значению $x>0$ соответствует только одно значение y.) Получим:

$$(1/x=ax+1)\Leftrightarrow(ax^2+x-1=0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}a=0,\\ x-1=0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}a\neq 0,\\ x_{1;2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2a}\end{cases}\right).$$

Первая из этих систем уравнений имеет единственное решение при $a=0$; а вторая — при $a=-1/4$, так как $x_1=x_2$.

Кроме этого, необходимо исследовать значения a, при которых корни x_1 и x_2 имеют различные знаки. Тогда положительный корень будет решением данной системы уравнений.

Рассмотрим две системы неравенств:

$$\begin{cases}\dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a}<0,\\ \dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2a}>0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}\dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a}>0,\\ \dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2a}<0.\end{cases}$$

Вторая система имеет решение $a>0$ (ср. с решением примера 72а).

Правильный ответ: $a\in\{-1/4\}\cup[0;\ +\infty)$.

П р и м е р 159б. Найдите такие значения b, чтобы при любых a система уравнений

$$\begin{cases}3x+y=a,\\ ax-y=b\end{cases}$$

имела хотя бы одно решение. (*Ответ:* $b\in\{3\}$.)

160. Повторите п. 7.

П р и м е р 160а. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x+y+z=2,\\ 2xy-z^2=4.\end{cases}$$

П р а в и л ь н о е   р е ш е н и е. Имеем:

$$\left(\begin{cases}x+y+z=2,\\ 2xy-z^2=4\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}z=2-(x+y),\\ 2xy=4+4-4x-4y+x^2+2xy+y^2\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}z=2-(x+y),\\(x^2-4x+4)+(y^2-4y+4)=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}z=2-(x+y),\\(x-2)^2+(y-2)^2=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}z=2-(x+y),\\x=2,\\y=2\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}z=-2,\\x=2,\\y=2\end{cases}\right).$$

Правильный ответ: $\{(2;\ 2;\ -2)\}$.

Пример 160б. Найдите все целые положительные решения уравнения $2x^2+2xy-x+y=112$. (*Ответ:* $\{(1;\ 37)\}$.)

Указание. Данное уравнение можно представить в виде $(x+$ $+y-1)(2x+1)=3\cdot 37$.

161. Повторите пп. 77, 2.

Пример 161а. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2x^2-3xy+\ y^2=3,\\ \ x^2+2xy-2y^2=6.\end{cases}$$

Правильное решение. Умножим первое уравнение на -2 и сложим со вторым. Получим однородное уравнение относительно x и y:

$$-3x^2+8xy-4y^2=0.$$

Подстановкой определяем, что $y=0$ не удовлетворяет исходной системе. Разделим последнее уравнение на y^2:

$$-3(x/y)^2+8(x/y)-4=0.$$

Имеем $(x/y)=2$ или $(x/y)=2/3$, откуда $x=2y$ или $x=\frac{2}{3}y$. Подставляя выражения для x в первое уравнение заданной системы, получаем, что при $x=2y$ $y=\pm 1$, а при $x=\frac{2}{3}y$ $y\in\varnothing$. Следовательно, решениями данной системы будут $y=1$, $x=2$ и $y=-1$, $x=-2$. (Ср. с решениями примеров 77а и 116а (I способ).)

Правильный ответ: $\{(-2;\ -1);\ (2;\ 1)\}$.

Пример 161б. Найдите все значения m, при которых система уравнений

$$\begin{cases}2x+(9m^2-2)y=3m,\\x+y=1\end{cases}$$

не имеет решений. (*Ответ:* $m\in\{-2/3\}$.)

162. Повторите пп. 4, 60.

Пример 162а. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}|x|+|y|=5,\\ xy=-6.\end{cases}$$

Правильное решение. *I способ.* Из второго уравнения следует, что x, y имеют различные знаки и $x\neq 0$, $y\neq 0$. Тогда:

$$\left(\begin{cases}|x|+|y|=5,\\ xy=-6\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x>0,\\ y<0,\\ x-y=5,\\ xy=-6\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x<0,\\ y>0,\\ -x+y=5,\\ xy=-6\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x>0,\\ y<0,\\ y=x-5,\\ x^2-5x+6=0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x<0,\\ y>0,\\ y=x+5,\\ x^2+5x+6=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x>0,\\ y<0,\\ y=x-5,\\ x(x-5)=-6\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x<0,\\ y>0,\\ y=x+5,\\ x(x+5)=-6\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x>0,\\ y<0,\\ y=x-5,\\ x=2 \text{ или } x=3\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x<0,\\ y>0,\\ y=x+5,\\ x=-2 \text{ или } x=-3\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x=2,\\ y=-3,\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x=3,\\ y=-2,\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x=-2,\\ y=3,\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x=-3,\\ y=2\end{cases}\right).$$

II способ. Выполним преобразования:

$$\left(\begin{cases}|x|+|y|=5,\\ xy=-6\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x^2+2|xy|+y^2=25,\\ xy=-6\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x^2+y^2=13,\\ xy=-6\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}(x+y)^2=1,\\ xy=-6\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x+y=1,\\ xy=-6\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x+y=-1,\\ xy=-6\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}y=1-x,\\ x^2-x-6=0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}y=-1-x,\\ x^2+x-6=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}y=1-x,\\ x=-2 \text{ или } x=3\end{cases}\text{ или }\begin{cases}y=-1-x,\\ x=-3 \text{ или } x=2\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}y=3,\\ x=-2,\end{cases}\text{ или }\begin{cases}y=-2,\\ x=3,\end{cases}\text{ или }\begin{cases}y=2,\\ x=-3,\end{cases}\text{ или }\begin{cases}y=-3,\\ x=2\end{cases}\right).$$

Правильный ответ: $\{(-2;\ 3);\ (-3;\ 2);\ (2;\ -3);\ (3;\ -2)\}$.

Пример 162б. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\lg x+\lg y=2,\\ x-y=15.\end{cases}\quad (\textit{Ответ: } \{(20;\ 5)\}.)$$

163. Повторите п. 60.

Пример 163а. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}y^2-xy=-12,\\ x^2-xy=28.\end{cases}$$

Правильное решение. Имеем:

$$\left(\begin{cases}y^2-xy=-12,\\ x^2-xy=28\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}y(y-x)=-12,\\ x(-x+y)=-28\end{cases}\right).$$

Из первого уравнения вычтем второе. Получим

$$(y-x)^2=16 \text{ или } y-x=\pm 4.$$

Подставив найденные значения $y-x$ в первое и второе уравнения исходной системы, вычислим x и y.

Правильный ответ: $\{(-7;\ -3);\ (7;\ 3)\}$.

Пример 163б. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2^x+2^y=5,\\ 2^{x+y}=4.\end{cases}\quad (\textit{Ответ: } \{(0;\ 2);\ (2;\ 0)\}.)$$

164. Повторите п. 60.

Пример 164а. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^{\log_y x}=2,\\ y^{\log_x y}=2^4.\end{cases}$$

Правильное решение. Область определения: $x>0$, $y>0$, $x\neq 1$, $y\neq 1$.

Выполним преобразования:

$$\left(\begin{cases}x^{\log_y x}=2,\\ y^{\log_x y}=2^4\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\log_y x=\log_x 2,\\ \log_x^2 y=\log_x 2^4\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\log_y x=\log_x 2,\\ \log_x^{-2} 2=4\log_x 2\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\log_y x=\log_x 2,\\ \log_x^3 2=1/4\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\log_y x=\log_x 2,\\ x^{2^{-2/3}}=2\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\log_y x=\log_x 2,\\ x=2^{2^{2/3}}=2^{\sqrt[3]{2^2}}\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\log_y 2^{\sqrt[3]{4}}=\log_{2^{\sqrt[3]{4}}} 2,\\ x=2^{\sqrt[3]{4}}\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\log_y 2=1/(2\sqrt[3]{2}),\\ x=2^{\sqrt[3]{4}}\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases} y=2^{2\sqrt[3]{2}} \\ x=2^{\sqrt[3]{4}} \end{cases}\right).$$

Правильный ответ: $\{(2^{\sqrt[3]{4}};\ 2^{2\sqrt[3]{2}})\}$.

Пример 164б. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy=40, \\ x^{\lg y}=4. \end{cases}$$ (*Ответ:* $\{(4;\ 10);\ (10;\ 4)\}$.)

165. Повторите п. 60.

Пример 165а. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{x}}(xy)=8, \\ \log_3\left(\log_{1/4}\dfrac{x}{y}\right)=0. \end{cases}$$

Правильное решение. Область определения: $x>0,\ y>0,\ x\neq 1,\ \log_{1/4}\dfrac{x}{y}>0.$

Из второго уравнения исходной системы следует, что

$$\log_{1/4}\frac{x}{y}=1 \text{ или } \frac{x}{y}=\frac{1}{4},\ y=4x.$$

Тогда первое уравнение принимает вид:

$$\log_{\sqrt{x}}(x\cdot 4x)=8 \text{ или } \log_{\sqrt{x}}4x^2=8,$$

$$\log_{\sqrt{x}}(\sqrt{2}\sqrt{x})^4=8,\ \log_{\sqrt{x}}\sqrt{2}+\log_{\sqrt{x}}\sqrt{x}=2,$$

$$\log_{\sqrt{x}}\sqrt{2}=1,\ \sqrt{x}=\sqrt{2},\ x=2.$$

Правильный ответ: $\{(2;\ 8)\}$.

Пример 165б. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_y x+\log_x y=2, \\ x^2-y=20. \end{cases}$$ (*Ответ:* $\{(5;\ 5)\}$.)

166. Повторите пп. 60, 63.

Пример 166а. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 8(\sqrt{2})^{x-y}=(0{,}5)^{y-3}, \\ \log_3(x-2y)+\log_3(3x+2y)=3. \end{cases}$$

Правильное решение. Область определения:

$$\begin{cases} x-2y>0, \\ 3x+2y>0. \end{cases}$$

Преобразуем систему уравнений:

$$\left(\begin{cases}8(\sqrt{2})^{x-y}=(0{,}5)^{y-3},\\ \log_3(x-2y)+\log_3(3x+2y)=3\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}2^{3+(x-y)/2}=2^{3-y},\\ (x-2y)(3x+2y)=27,\\ x-2y>0,\\ 3x+2y>0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}3+(x-y)/2=3-y,\\ (x-2y)(3x+2y)=27,\\ x-2y>0,\\ 3x+2y>0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}y=-x,\\ 3x\cdot x=27,\\ x-2y>0,\\ 3x+2y>0\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}y=-x,\\ x=\pm 3,\\ x-2y>0,\\ 3x+2y>0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}y=3,\\ x=-3,\\ x-2y>0,\\ 3x+2y>0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}y=-3,\\ x=3,\\ x-2y>0,\\ 3x+2y>0\end{cases}\right).$$

Правильный ответ: $\{(3;\ -3)\}$.

Пример 166б. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}4^{x+y}=2^{y-x},\\ 4^{\log_{\sqrt{2}}x}=y^4-5.\end{cases}\ \left(\textit{Ответ: } \left\{\left(\frac{1}{2};\ -\frac{3}{2}\right)\right\}.\right)$$

167. Повторите п. 109.

Пример 167а. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x-y=5\pi/3,\\ \sin x=2\sin y.\end{cases}$$

Правильное решение. Имеем $y=x-5\pi/3$. Тогда:

$$(\sin x=2\sin(x-5\pi/3))\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\sin x=-2\sin(2\pi-(\pi/3+x)))\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\sin x=2\sin(\pi/3+x))\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\sin x=2(\sin(\pi/3)\cos x+\cos(\pi/3)\sin x))\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\sin x=\sqrt{3}\cos x+\sin x)\Leftrightarrow(\sqrt{3}\cos x=0)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\cos x=0)\Leftrightarrow(x=\pi/2+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z}).$$

Правильный ответ: $\{(\pi/2+\pi n;\ -7\pi/6+\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z})\}$.

Пример 167б. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sin(x+y)=0,\\ \sin(x-y)=0.\end{cases} \left(\textit{Ответ: } \left\{\left(\frac{\pi}{2}(n+m);\ \frac{\pi}{2}(n-m)\right) \middle| n,\ m\in\mathbf{Z}\right\}.\right)$$

168. Повторите пп. 130, 60, 77.

Пример 168а. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^4-1330x-23=0,\\ x^4-1319x-144=0.\end{cases}$$

Неправильное решение. Вычтем из первого уравнения системы второе уравнение. Получим $-11x+121=0$, откуда $x=11$.

Неправильный ответ: $\{11\}$.

Правильное решение. Выполним эквивалентные преобразования:

$$\left(\begin{cases}x^4-1330x-23=0,\\ x^4-1319x-144=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x^4-1330x-23=0,\\ -11x+121=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x^4-1330x-23=0,\\ x=11\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}11^4-1330\cdot 11-23=0,\\ x=11\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}12=0,\\ x=11\end{cases}\right)\Leftrightarrow(x\in\varnothing).$$

Правильный ответ: $\varnothing$.

Пример 168б. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}5^x-36y=0,\\ 6^x-25y=0.\end{cases} \quad (\textit{Ответ: } \{(-2;\ 1/900)\}.)$$

169. Повторите пп. 29, 60.

Пример 169а. Изобразите на координатной плоскости XOY множество точек, удовлетворяющих неравенству $\log_2(x+y-1)<0$.

Правильное решение. Область определения: $x+y-1>0$ или $y>-x+1$ (рис. 82).

Имеем:

$$(\log_2(x+y-1)<0)\Leftrightarrow(\log_2(x+y-1)<\log_2 1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x+y-1>0,\\ x+y-1<1\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}y>-x+1,\\ y<-x+2\end{cases}\right).$$

Правильный ответ: см. рис. 83 (прямые, ограничивающие заштрихованную область, не принадлежат ей).

Пример 169б. Изобразите на координатной плоскости XOY множество точек, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x-y\geqslant 0, \\ x+y\geqslant 0, \\ xy<3. \end{cases}$$

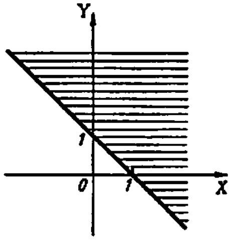

Рис. 82

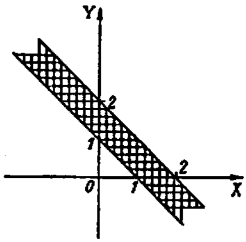

Рис. 83

(*Ответ:* см. рис. 84 (прямые $y=-x$ при $x\geqslant 0$ и $y=x$ при $0\leqslant x<\sqrt{3}$ включаются в искомое множество точек, а точки гиперболы $y=3/x$ при $x\geqslant\sqrt{3}$ не входят в него).)

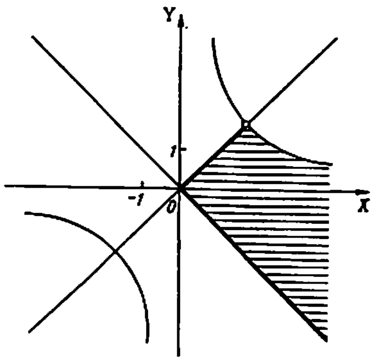

Рис. 84

7. Задачи на составление уравнений и неравенств

170. При решении задач, в которых используются процентные соотношения, важно правильно определить количество, принимаемое за 100 %.

Пример 170а. За смену двое рабочих изготовили вместе 72 детали. После того, как первый рабочий повысил производительность труда на 15 %, а второй — на 25 %, они вдвоем изготовили 86 деталей. Сколько деталей за смену стал изготавливать каждый рабочий после повышения производительности труда?

Неправильное решение. Введем обозначения:

x — число деталей, изготавливаемых за смену первым рабочим после повышения производительности труда;

y — число деталей, изготавливаемых за смену вторым рабочим после повышения производительности труда.

Тогда:

$\underline{x-0{,}15x}$ — число деталей, изготавливаемых за смену первым рабочим до повышения производительности труда:

$\underline{y-0{,}25y}$ — число деталей, изготавливаемых за смену вторым рабочим до повышения производительности труда.

Решаем систему уравнений:

$$\left(\begin{cases} x+y=86, \\ 0{,}85x+0{,}75y=72 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x=75, \\ y=11 \end{cases}\right).$$

Неправильный ответ: $\{75;\ 11\}$.

Правильное решение. Введем обозначения:

x — число деталей, изготавливаемых за смену первым рабочим до повышения производительности труда;

y — число деталей, изготавливаемых за смену вторым рабочим до повышения производительности труда.

Тогда:

$x+0{,}15x$ — число деталей, изготавливаемых за смену первым рабочим после повышения производительности труда;

$y+0{,}25y$ — число деталей, изготавливаемых за смену вторым рабочим после повышения производительности труда.

Решаем систему уравнений:

$$\left(\begin{cases} x+y=72, \\ 1{,}15x+1{,}25y=86 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x=40, \\ y=32 \end{cases}\right).$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 1{,}15x=46, \\ 1{,}25y=40. \end{cases}$$

Правильный ответ: {46; 40}.

Пример 170б. Бригада рыбаков планировала выловить в течение определенного времени 1800 ц рыбы. Вследствие шторма, длившегося треть этого срока, ежедневный улов был меньше на 20 ц. Однако в остальное время бригаде удавалось ежедневно вылавливать на 20 ц больше дневной нормы, и плановое задание было выполнено за один день до срока. Сколько центнеров рыбы намеревалась вылавливать бригада ежедневно? (*Ответ:* {100}.)

171. При решении задач, в которых используются отношения частей, важно правильно определить количество, принимаемое за единицу (ср. с п. 170).

Пример 171а. Имеется два сплава золота и серебра. В первом сплаве количество этих металлов находится в отношении 2:3, а во втором — 3:7. В каком отношении нужно взять указанные сплавы, чтобы получить новый сплав, в котором золото и серебро были бы в отношении 5:11?

Правильное решение. Введем обозначения:

x — необходимое количество первого сплава;

y — необходимое количество второго сплава.

Из условия следует, что в первом сплаве 2/5 части золота и 3/5 части серебра, во втором сплаве — 3/10 части золота и 7/10 частей серебра. Тогда в новом сплаве будет $\left(\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}y\right)$ золота и $\left(\frac{3}{5}x+\frac{7}{10}y\right)$ серебра. Следовательно,

$$\left(\frac{\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}y}{\frac{3}{5}x+\frac{7}{10}y}=\frac{5}{11}\right)\Leftrightarrow(7x=y)\Leftrightarrow\left(\frac{x}{y}=\frac{1}{7}\right).$$

Правильный ответ: 1/7.

Пример 171б. Водонапорный бак наполняется двумя трубами за 2 часа 55 минут. Если бы подача воды осуществлялась только по первой трубе, то бак наполнился бы на 2 часа быстрее, чем если бы вода подавалась по второй трубе. В течение какого времени каждая труба в отдельности может наполнить бак? (*Ответ:* 5 ч; 7 ч.)

172. Повторите пп. 171, 29.

Пример 172а. Расстояние между городами A и B

равно 100 км. Из A в B отправляются одновременно два автомобиля. Скорость первого автомобиля на 10 км/ч больше скорости второго, и в пути он делает остановку на 50 мин. В каких пределах может меняться скорость первого автомобиля при условии, что он прибывает в город B не позже второго автомобиля?

Правильное решение. Введем обозначения: x км/ч — скорость первого автомобиля.

Тогда:

$(x-10)$ км/ч — скорость второго автомобиля;

$\frac{100}{x-10}$ ч — время, в течение которого второй автомобиль находится в пути;

$\left(\frac{100}{x}+\frac{5}{6}\right)$ ч — время, в течение которого первый автомобиль находится в пути.

Из условия следует, что:

$$\left(\left(\frac{100}{x}+\frac{5}{6}\right)\leqslant\frac{100}{x-10}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{x^2-10x-1200}{x(x-10)}\leqslant 0\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{cases}x>0,\\ 10<x\leqslant 40\end{cases}\right).$$

Правильный ответ: (10; 40].

Пример 172б. Из города A в город B, расстояние между которыми 120 км, на мопеде отправился курьер. Через час после этого из города A на мотоцикле выехал второй курьер, который, нагнав первого и передав ему поручение, немедленно с той же скоростью двинулся обратно и возвратился в A в тот момент, когда первый курьер достиг города B. Какова скорость первого курьера, если скорость второго равна 50 км/ч? (*Ответ:* 30 км/ч.)

173. Повторите пп. 170, 142.

Пример 173а. По двум улицам движутся к перекрестку две машины с постоянными скоростями 50 км/ч и 60 км/ч. Считая, что улицы пересекаются под прямым углом, и зная, что в некоторый момент времени машины находятся на расстоянии соответственно 2 км и 3 км от перекрестка, установите, через какое время расстояние между ними будет наименьшим.

Правильное решение. Через x часов расстояние между машинами будет

$$S=\sqrt{(3-60x)^2+(2-50x)^2}$$

(рис. 85). Требуется найти x, при котором данное выражение достигает минимума. Так как то же самое x доставляет минимум выражению

$$S_1(x) = (3 - 60x)^2 + (2 - 50x)^2,$$

найдем его минимум из уравнения

$$S_1'(x) = 0 \text{ или } ((3 - 60x)^2 + (2 - 50x)^2)' = 0,$$

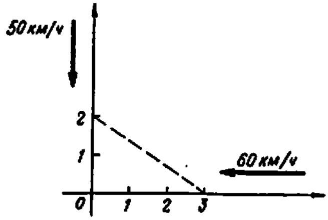

Рис. 85

откуда $610x = 28$, $x = 14/305$.

Правильный ответ: $x = 14/305$ ч.

Пример 173б. Цену товара сначала снизили на 20 %, затем новая цена была снижена на 10 % и, наконец, — еще на 5 %. На сколько процентов была снижена первоначальная цена товара? (*Ответ:* 31,6 %.)

174. Повторите п. 171.

Пример 174а. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к искомому числу прибавить 36, то получим число, записанное с помощью тех же цифр, но расположенных уже в обратном порядке. Найдите это число.

Правильное решение. Пусть $\overline{xy}$ — искомое число (x — первая цифра, y — вторая цифра). Тогда $\overline{xy} = 10x + y$. Согласно условию,

$$x + y = 12 \text{ и } \overline{xy} + 36 = 10x + y + 36 =$$
$$= \overline{yx} = 10y + x.$$

Таким образом, получили систему уравнений:

$$\left(\begin{cases} x + y = 12, \\ 9x - 9y = -36 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = 4, \\ y = 8 \end{cases}\right).$$

Правильный ответ: 48.

Пример 174б. По двум концентрическим окружностям равномерно движутся две точки. Полный оборот одна из них совершает на 5 с быстрее, чем другая, и поэтому успевает сделать в одну минуту на 2 оборота больше. Пусть в начале движения лучи, направленные из центра окружности к этим точкам, совпадают. Вычислите величину угла между лучами через 1 с. (*Ответ:* 12° или 60°.)

Указание. Следует учесть, что точки могут вращаться как в одном направлении, так и в противоположных.

II. ОШИБКИ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ ПО ГЕОМЕТРИИ

8. Планиметрия

175. При решении задач на построение используют линейку и циркуль. Под линейкой понимается инструмент, с помощью которого можно выполнить единственную процедуру — провести прямую (луч, отрезок) через две данные точки. Под циркулем понимается инструмент, с помощью которого можно строить окружности и откладывать на прямой геометрически заданный отрезок. Перечислим основные задачи на построение на плоскости.

1. Построить угол, равный данному.
2. Разделить угол пополам.
3. Разделить отрезок пополам.
4. Из точки на прямой восставить к ней перпендикуляр.
5. Из точки, лежащей вне прямой, опустить на эту прямую перпендикуляр.
6. Построить треугольник: 1) по двум сторонам и углу между ними; 2) по стороне и двум углам, прилежащим к ней; 3) по трем сторонам.

Чтобы решить более сложную задачу на построение, надо попытаться свести ее к рассмотренным выше задачам. Для этого проводят анализ задачи. Допускают, что искомая фигура уже построена, и чертят ее от руки приблизительно такой, какой она должна быть. Рассматривая свойства искомой фигуры и данных ее элементов, находят связи между ними. Этот анализ и покажет, какие основные построения нужно выполнить, чтобы построить искомую фигуру. После этого выполняют построение с помощью циркуля и линейки. Затем доказывают, что построенная фигура удовлетворяет всем требованиям задачи. Наконец, исследуют решение и выясняют, сколько решений может иметь данная задача.

Пример 175а. С помощью циркуля и линейки постройте прямоугольный треугольник, если заданы гипотенуза и высота, опущенная на гипотенузу.

Правильное решение. Пусть заданы: гипотенуза длиной l, высота длиной h. Порядок построения следующий (рис. 86):

1) на произвольной прямой откладываем отрезок длиной l (точки A и B — концы отрезка);

2) проводим окружность радиусом $l/2$, центр которой совпадает с центром отрезка AB;

3) проводим перпендикуляр длиной h к отрезку AB, проходящий через точку A (точка C — «верхний» конец перпендикуляра);

4) через точку C проводим перпендикуляр к отрезку AC (D и D' — точки пересечения перпендикуляра с окружностью);

5) соединяем точку D (или D') с точками A и B. Треугольник ADB (или $AD'B$) искомый.

Правильный ответ: см. рис. 86 (треугольник ADB).

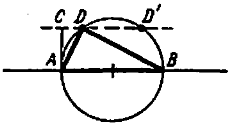

Рис. 86

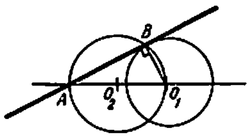

Рис. 87

Пример 175б. С помощью циркуля и линейки проведите касательную к данной окружности, проходящую через точку вне окружности. (*Ответ:* см. рис. 87 (прямая AB).)

Указание. Предварительно определите точку касания. Это можно сделать, например, путем построения вспомогательной окружности с центром в точке O_2, проходящей через центр данной окружности O_1 и данную точку A (см. рис. 87).

176. Повторите п. 175.

Пример 176а. Постройте отрезок с концами, лежащими на данных прямых a и b, и серединой в данной точке O.

Правильное решение. Через точку O проводим прямые, параллельные данным прямым a и b (рис. 88); A_1 и B_1 — точки пересечения соответствующих прямых. Через точку O проводим прямую, параллельную A_1B_1. Получаем, что AB — искомый отрезок. (Случай, когда прямые a и b параллельны, предлагаем читателю исследовать самостоятельно.)

Правильный ответ: см. рис. 88 (отрезок AB).

Пример 176б. Даны прямая и две окружности, расположенные по разные стороны от нее. Постройте квадрат, одна диагональ которого лежит на данной прямой, а концы другой диагонали — на данных окружностях. (*Ответ:* искомые квадраты изображены на рис. 89.)

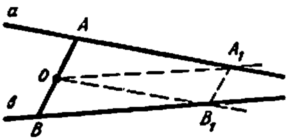

Рис. 88

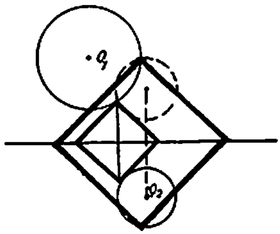

Рис. 89

177. Повторите п. 175..

Пример 177а. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник, зная его периметр и два угла.

Правильное решение. Порядок построения следующий (рис. 90):

1) построим треугольник по стороне AC, равной периметру, и двум углам A и C;

2) проведем биссектрисы углов A и C до пересечения их в точке O;

3) через точку O проведем прямую, параллельную AC; M и N — точки пересечения прямой со сторонами AB и BC соответственно;

4) на стороне AC отложим отрезок CE, равный NO, и отрезок AD, равный MO. Четырехугольники $AMOD$

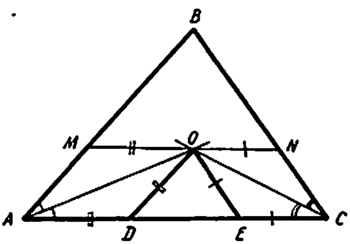

Рис. 90

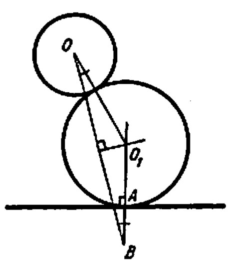

Рис. 91

и $CNOE$ — ромбы, следовательно, треугольник ODE — искомый.

Правильный ответ: см. рис. 90 (треугольник ODE).

Пример 177б. С помощью циркуля и линейки постройте окружность, касающуюся данной окружности и данной прямой в фиксированной точке. (*Ответ:* окружность с центром в точке O_1 изображена на рис. 91.)

Указание. Постройте равнобедренный треугольник OBO_1.

178. Повторите п. 175.

Пример 178а. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длиной $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ по данному отрезку длиной 1.

Правильное решение. Порядок построений следующий:

1) построим прямой угол и на его сторонах отложим от вершины отрезки длиной 1. Отрезок, соединяющий их концы, имеет длину $\sqrt{2}$;

2) отложим на прямой отрезок AB длиной $1+\sqrt{2}$, а затем отрезок BC длиной 1 (рис. 92);

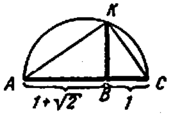

Рис. 92

3) построим на отрезке AC как на диаметре окружность;

4) проведем через точку B прямую, перпендикулярную к диаметру AC. Пусть K — одна из точек пересечения этой прямой с окружностью. Докажем, что $|BK|=\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Действительно, треугольник AKC — прямоугольный, так как $\angle AKC$ — угол, вписанный в окружность и опирающийся на ее диаметр. Квадрат высоты прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, равен произведению отрезков, на которые эта высота делит гипотенузу, т. е. $(1+\sqrt{2})\cdot 1$.

Правильный ответ: см. рис. 92 (отрезок BK).

Пример 178б. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длиной $\sqrt{ab}$ по данным отрезкам длиной a и b.

179. Длина вектора $\vec{a}$, заданного своими координатами $(x_1;\ y_1)$, вычисляется по формуле

$$|\vec{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}.$$

Пример 179а. Точки $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 5)$, $C(2;\ -1)$ — вершины треугольника ABC. Найдите единичный вектор, направленный по биссектрисе внутреннего угла A.

Правильное решение. Пусть AD — биссектриса внутреннего угла (рис. 93). Тогда $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ — единичный вектор, лежащий на стороне AB, $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ — единичный вектор, лежащий на стороне AC, а $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+$ $+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ — вектор, лежащий на биссектрисе AD, так как длины векторов $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ и $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ равны между собой.

Искомым вектором будет

$$\frac{\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}}{\left|\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right|}=\frac{\frac{1}{5}(3;\ 4)+\frac{1}{\sqrt{5}}(1;\ -2)}{\left|\frac{1}{5}(3;\ 4)+\frac{1}{\sqrt{5}}(1;\ -2)\right|}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{\sqrt{5}-1}\right)}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{5};\ \frac{4-2\sqrt{5}}{5}\right).$$

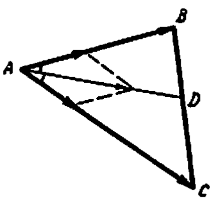

Рис. 93

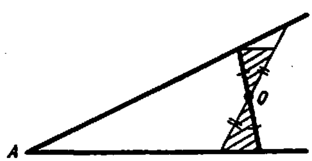

Рис. 94

Правильный ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{5^3}\left(\sqrt{\sqrt{5}-1}\right)}(3+\sqrt{5};\ 4-$
$-2\sqrt{5})$.

Пример 179б. Через данную точку, лежащую внутри угла, проведите прямую так, чтобы она отсекала от него треугольник наименьшей площадью. (*Ответ:* данная точка должна делить отрезок отсекающей прямой пополам (рис. 94).)

180. При нахождении множества точек, удовлетворяющих некоторым условиям, как правило, вводят обозначение для точки или ее координат.

Пример 180а. Дана полуокружность с центром O. Из каждой точки x, лежащей на продолжении диаметра полуокружности, проведен касающийся полуокружности луч и на нем отложен отрезок XM, равный отрезку XO. Найдите множество точек M, полученных таким образом.

Правильное решение. Пусть K — точка касания прямых XM и данной полуокружности, а P — проекция точки M на диаметр (рис. 95). В прямоугольных треугольниках MPX и OKX равны гипотенузы

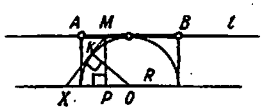

Рис. 95

($|XM| = |OX|$) и острые углы ($\angle PXM = \angle OXK$). Поэтому эти треугольники равны и, в частности, $|MP| = |KO| = R$, где R — радиус данной полуокружности. Следовательно, точка M лежит на прямой l, параллельной диаметру полуокружности и касающейся полуокружности.

Пусть AB — отрезок прямой l, проекцией которого является диаметр полуокружности. Из точки прямой l, лежащей вне отрезка AB, нельзя провести касательную к данной полуокружности. Искомым множеством точек является отрезок AB, из которого удалены точки A, B и его середина.

Правильный ответ: см. рис. 95 (отрезок AB).

Пример 180б. На плоскости даны две точки A и B. Найдите множество точек M, для которых $|AM|:|BM| = k$, $k > 0$. (*Ответ:* при $k=1$ это серединный перпендикуляр к отрезку AB; при $k \neq 1$ — окружность радиусом $\left|\frac{2ka}{1-k^2}\right|$ с центром в точке $\left(-\frac{1+k^2}{1-k^2}a;\ 0\right)$ (если система координат выбрана так, что точка A имеет координаты $(-a;\ 0)$, а точка B — $(a;\ 0)$.)

Указание. Для $k \neq 1$ введите точку $M(x;\ y)$ и составьте отношение $\frac{|\overrightarrow{AM}|^2}{|\overrightarrow{BM}|^2} = k^2$.

181. При решении некоторых геометрических задач необходимы дополнительные построения.

Пример 181а. Соедините середины сторон выпуклого четырехугольника. Докажите, что полученная фигура — параллелограмм.

Правильное решение. Соединим точки M и K (рис. 96). Из подобия треугольников NMK и NAB следует, что $|AB| = \frac{1}{2}|MK|$. Из подобия треугольников LMK и LDC следует, что $|DC| = \frac{1}{2}|MK|$. Значит, $|AB| = |DC|$. Аналогично, соединив точки N и L, можно показать, что $|BC| = |AD|$. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

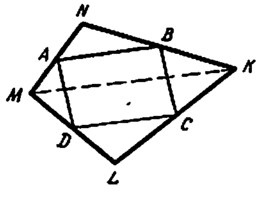

Рис. 96

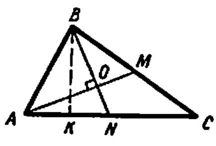

Рис. 97

Пример 181б. В параллелограмме проведены биссектрисы его внутренних углов. Докажите, что точки пересечения биссектрис являются вершинами прямоугольника, длина диагонали которого равна разности длин соседних сторон параллелограмма.

182. При решении геометрических задач иногда полезно вычислять площадь фигуры по двум различным формулам. (При вычислении площади треугольника по формуле $S = ah/2$ за основание вначале принимается одна сторона треугольника, а затем другая.)

Пример 182а. В треугольнике ABC медиана AM

перпендикулярна к медиане BN. Найдите площадь треугольника ABC, если $|AM|=m$, $|BN|=n$.

Правильное решение. Пусть O — точка пересечения медиан и $BK \perp AC$ (рис. 97). Площадь треугольника ABC вычислим по формуле

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|AC|\,|BK|=\frac{1}{2}\cdot 2|AN|\,|BK|=2S_{ABN},$$

а площадь треугольника ABN — по формуле

$$S_{ABN}=\frac{1}{2}|BN|\,|AO|=\frac{1}{2}|BN|\cdot\frac{2}{3}|AM|=\frac{1}{3}mn.$$

Тогда $S_{ABC}=\frac{2}{3}mn$.

Правильный ответ: $\frac{2}{3}mn$.

Пример 182б. Медианы треугольника равны 5, 6 и 5 м. Вычислите площадь этого треугольника. (*Ответ:* 16 м^2.)

183. Повторите п. 182.

Пример 183а. В равнобедренном треугольнике основание равно 30 см, а высота 20 см. Определите высоту, опущенную на боковую сторону.

Правильное решение. Пусть $|AC|=30$ см. $|BD|=20$ см (рис. 98).

I способ. Прямоугольные треугольники BDC и AEC подобны (у них угол C — общий). Следовательно,

$$\frac{|BD|}{|AE|}=\frac{|BC|}{|AC|},$$

откуда находим

$$|AE|=\frac{|AC|\,|BD|}{|BC|}=\frac{|AC|\,|BD|}{\sqrt{|BD|^2+\left(\frac{1}{2}|AC|\right)^2}}=$$

$$=\frac{30\cdot 20}{\sqrt{20^2+15^2}}=24.$$

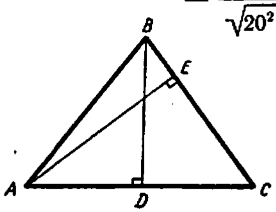

Рис. 98

II способ. Сравним два выражения площади S треугольника ABC:

$$S=\frac{1}{2}|AC|\,|BD| \text{ и } S=\frac{1}{2}|BC|\,|AE|.$$

Получим

$$|AE|=\frac{|AC|\,|BD|}{|BC|}=\frac{30\cdot 20}{\sqrt{20^2+15^2}}=24.$$

Правильный ответ: 24 см.

Пример 183б. Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора. (*Ответ:* если в произвольном треугольнике сумма квадратов длин двух сторон равна квадрату длины третьей стороны, то этот треугольник — прямоугольный.)

184. Алгебраическое решение геометрических задач заключается в следующем. Искомые элементы геометрической фигуры обозначают через x, y, ... Исходя из условия задачи составляют уравнения (неравенства), связывающие известные и неизвестные элементы данной фигуры. После этого решают полученную систему уравнений (неравенств), определяют те элементы или отношения между ними, которые требуется найти. Такой метод решения геометрических задач является одним из наиболее простых и широко используемых. Удачный выбор неизвестных позволяет получить несложную систему уравнений (неравенств).

Пример 184а. Имеется квадрат и равновеликий ему круг. Что больше: длина окружности или периметр квадрата?

Правильное решение. Пусть a — длина стороны квадрата, r — радиус окружности. Тогда $a^2=\pi r^2$, откуда следует, что $a=\sqrt{\pi}\,r$. Предположим, что длина окружности больше периметра квадрата. Следовательно,

$$(2\pi r>4a)\Leftrightarrow(2\pi r>4\sqrt{\pi}r)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\sqrt{\pi}>2)\Leftrightarrow(\pi>4).$$

Полученное противоречие указывает на то, что было сделано неверное предположение.

Правильный ответ: периметр квадрата.

Пример 184б. Квадрат со стороной a повернут вокруг центра на 45°. Найдите площадь общей части данного и полученного квадратов. (*Ответ:* $2(\sqrt{2}-1)a^2$.)

185. При решении геометрических задач необходимо рассматривать **все возможные** случаи взаимного расположения элементов фигуры. Решение задачи будет неполным и ошибочным, если ограничиться рассмотрением лишь одного из возможных случаев. Решая такие задачи, важно не ошибиться, приняв частное за общее.

Пример 185а. В выпуклом четырехугольнике найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин четырехугольника наименьшая.

Правильное решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника, F — произвольная точка, не лежащая на диагоналях AC и BD (рис. 99). Покажем, что

$$|OB|+|OD|+|OC|+|OA|<|FB|+$$
$$+|FD|+|FC|+|FA|.$$

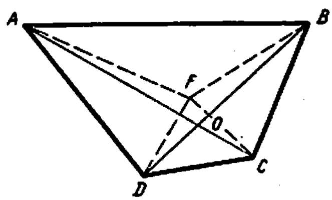

Рис. 99

Из треугольника DFB следует, что $|DB|<|DF|+$ $+|FB|$ или $|DO|+|OB|<|DF|+|FB|$. Аналогично из треугольника AFC следует, что $|AO|+|OC|<$ $<|AF|+|FC|$. Складывая два последних неравенства, получаем требуемое утверждение. Случай, когда точка F лежит на одной из диагоналей четырехугольника, предлагаем читателю рассмотреть самостоятельно.

Правильный ответ: точка пересечения диагоналей четырехугольника.

Пример 185б. Может ли количество сторон в выпуклом многоугольнике быть равным числу диагоналей? (*Ответ:* да, в случае пятиугольника.)

186. Повторите п. 181.

Пример 186а. Существует ли треугольник, у которого длины всех высот меньше 1 см, а площадь больше 100 см^2?

Правильное решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник AOD, у которого $|AO|=|OD|$, $|AD|=20\,000$ см, $|AB|=0{,}1$ см и, следовательно, высота $|OF|=0{,}1$ см <1 см (рис. 100). Покажем,

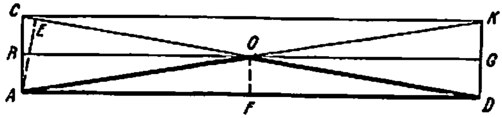

Рис. 100

что длина высоты $|AE|$ треугольника AOD меньше 1 см. Построим прямоугольники $ABGD$ и $ACKD$. Тогда

$$S_{\triangle AOD}=1000\text{ см}^2,\ S_{\triangle COA}=1000\text{ см}^2.$$

По теореме Пифагора

$$|OC|=\sqrt{10\,000^2+0{,}1^2}.$$

Из треугольника COA получаем, что

$$S_{\triangle COA}=\frac{1}{2}|AE|\,|OC|,$$

$$|AE|=\frac{2S_{COA}}{|OC|}<\frac{2000}{10\,000}=0{,}2\text{ см},$$

т. е. длина высоты $|AE|$ также меньше 1 см. Очевидно, что длина третьей высоты равнобедренного треугольника AOD равна длине высоты AE.

Правильный ответ: существует (например, $\triangle AOD$ (см. рис. 100)).

Пример 186б. Докажите, что площадь треугольника меньше единицы, если длины всех биссектрис меньше единицы.

Указание. Последовательно рассмотрите равносторонние, равнобедренные и произвольные треугольники.

187. При решении геометрических задач следует разумно сочетать **геометрические** и **тригонометрические** методы решения. Это предотвратит попытки с помощью громоздких вычислений решать простую геометрическую задачу или, наоборот, рассматривать многочисленные подобные треугольники в задачах, где введение тригонометрических функций является естественным и оправданным путем к решению.

Пример 187а. Окружность F_1 пересекает концентрические окружности F_2 и F_3 соответственно в точках A, B и C, D. Докажите, что хорды AB и CD параллельны.

Правильное решение. Из условия следует, что $F_1 \cap F_2 = \{A;\ B\}$, $F_1 \cap F_3 = \{C;\ D\}$; тогда OO_1 — ось симметрии фигуры $F_1 \cup F_2 \cup F_3$ (рис. 101). Так как

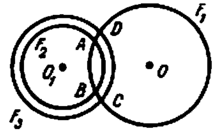

Рис. 101

$A \in F_1 \cap F_2$, а $S_{OO_1}(F_1 \cap F_2) = F_1 \cap F_2$, то $S_{OO_1}(A) \in F_1 \cap F_2$, т. е. $S_{OO_1}(A) = B$. Аналогично $S_{OO_1}(C) = D$. Так как $AB \perp OO_1$ и $CD \perp OO_1$, то $AB \parallel CD$.

Пример 187б. Точка D делит сторону AC треугольника ABC в отношении $|AD|:|DC| = 1:4$. В каком отношении делит отрезок BD медиану AE треугольника ABC? (*Ответ:* 1:2 (считая от вершины А).)

Указание. Проведите через точку E прямую, параллельную BD.

188. Повторите пп. 50, 145.

Пример 188а. Пусть длины всех трех сторон прямоугольного треугольника выражаются в целых числах. Могут ли длины обоих катетов быть нечетными числами?

Правильное решение. Пусть длины катетов — нечетные числа, равные $2k+1$ и $2l+1$. Сумма их квадратов равна $4(k^2+k+l^2+l)+2 = 4m+2$. Покажем, что число такого вида не может быть квадратом целого числа. Если число нечетное, то его квадрат нечетен, а $4m+2$ — четное. Если число четное, то его квадрат делится на 4, а $4m+2$ не делится на 4. Таким образом, получили противоречие, которое доказывает неправильность исходного предположения.

Правильный ответ: не могут.

Пример 188б. В равнобедренный треугольник высотой h со стороной основания $2a$ впишите прямоугольник наибольшей площадью так, чтобы две его вершины лежали на стороне основания, а две другие — на боковых сторонах. (*Ответ:* стороны искомого прямоугольника a и $h/2$.)

189. Повторите пп. 152, 185.

Пример 189а. Найдите все треугольники, у которых и стороны, и углы составляют арифметические прогрессии.

Правильное решение. Обозначим величины внутренних углов треугольника через α, β и γ. Предположим, что они в заданном порядке составляют арифметическую прогрессию. Тогда

$$\left(\begin{cases}\beta-\alpha=\gamma-\beta,\\ \alpha+\beta+\gamma=180^\circ\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}2\beta=\alpha+\gamma,\\ \alpha+\beta+\gamma=180^\circ\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}2\beta=\alpha+\gamma,\\ 3\beta=180^\circ\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\gamma=120^\circ-\alpha,\\ \beta=60^\circ\end{cases}\right).$$

При этом $0^\circ<\alpha<120^\circ$.

Пусть длины сторон треугольника, лежащих напротив углов α, β, γ, соответственно равны a, b и c. Использовав теорему синусов, получим:

$$\left(\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin 60^\circ}=\frac{c}{\sin(120^\circ-\alpha)}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{2b}{\sqrt{3}}=\frac{c}{\sin(180^\circ-(60^\circ+\alpha))}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{2b}{\sqrt{3}}=\frac{c}{\sin(60^\circ+\alpha)}\right).$$

Из последнего выражения находим:

$$a=\frac{2}{\sqrt{3}}b\sin\alpha,\quad c=\frac{2}{\sqrt{3}}b\sin(60^\circ+\alpha).$$

Рассмотрим три случая, последовательно выбирая в качестве среднего члена арифметической прогрессии стороны b, a и c.

1. $(2b=a+c)\Leftrightarrow\left(2b=\frac{2}{\sqrt{3}}b(\sin\alpha+\sin(60^\circ+\alpha)\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(\sin\alpha+\sin(60^\circ+\alpha)=\sqrt{3})\Leftrightarrow(\sin(30^\circ+\alpha)=1)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\alpha=60^\circ+360^\circ n\mid n\in\mathbf{Z}).$$

2. $(2a=b+c)\Leftrightarrow\left(\frac{4}{\sqrt{3}}b\sin\alpha=b+\frac{2}{\sqrt{3}}b\sin(60^\circ+\alpha)\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(2\sin\alpha-\sin(60^\circ+\alpha)=\sqrt{3}/2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\sin\alpha+2\sin(-30^\circ)\cos(\alpha+30^\circ)=\sqrt{3}/2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\sin\alpha-\sin(60^\circ-\alpha)=\sqrt{3}/2)\Leftrightarrow(\sin(\alpha-30^\circ)=1/2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\alpha=30^\circ+(-1)^n 30^\circ+180^\circ n\mid n\in\mathbf{Z}).$$

3. $(2c = a + b) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{\sqrt{3}} b \sin(60^\circ + \alpha) = b + \frac{2}{\sqrt{3}} b \sin \alpha \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin(60^\circ + \alpha) - \sin \alpha = \sqrt{3}/2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin(60^\circ + \alpha) + 2 \sin 30^\circ \cos(30^\circ + \alpha) = \sqrt{3}/2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin(60^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha) = \sqrt{3}/2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\cos \alpha = 1/2) \Leftrightarrow (\alpha = \pm 60^\circ + 360^\circ n \mid n \in \mathbf{Z}).$$

Очевидно, что во всех случаях только $\alpha = 60^\circ$ удовлетворяет условию $0 < \alpha < 120^\circ$. Следовательно, искомым является треугольник, у которого $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 60^\circ$ и $a = b = c$.

Правильный ответ: все равносторонние треугольники.

Пример 189б. Пусть две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника. Можно ли утверждать, что эти треугольники равны? Почему? (*Ответ:* нельзя (см. треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ на рис. 102).)

190. Повторите пп. 145, 185, 187.

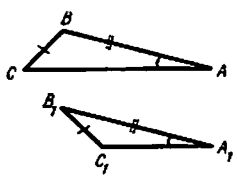

Рис. 102

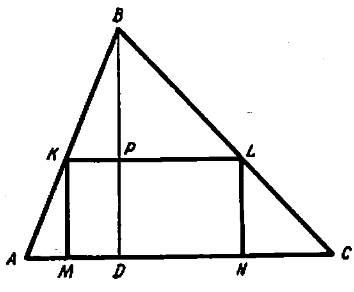

Рис. 103

Пример 190а. В треугольник с основанием 4 см и высотой 3 см вписан прямоугольник так, что одна из его сторон лежит на основании треугольника. Какова максимальная площадь этого прямоугольника?

Правильное решение. Пусть $|AC| = 4$, $|BD| = 3$ (рис. 103). Из подобия треугольников KLB и ACB следует, что:

$$\frac{|BD|}{|AC|} = \frac{|BP|}{|KL|} = \frac{3}{4}, \quad |BP| = 3 - |PD|, \quad |PD| = |KM|,$$

$$\frac{3-|PD|}{|KL|}=\frac{3}{4},\ 3-|KM|=\frac{3}{4}|KL|,$$

$$|KM|=3-\frac{3}{4}|KL|.$$

Обозначим $|KL|=x$. Тогда $|KM|=3-\frac{3}{4}x$,

$$S_{MKLN}=|KM|\,|KL|=x\left(3-\frac{3}{4}x\right)=S(x).$$

Найдем точки экстремума функции $S(x)$: $S'(x)=$ $=3-\frac{3}{2}x=0$, $x=2$. Исследовав производную в окрестности точки $x=2$, заключаем, что $x=2$ является точкой максимума и в этой точке $S(2)=3$.

Правильный ответ: 3 см^2.

Пример 190б. Периметр четырехугольника, вписанного в окружность, равен 1. Может ли ее радиус быть больше 100? (*Ответ:* да.)

191. Повторите пп. 187, 175.

Пример 191а. В описанном шестиугольнике даны пять сторон (по порядку): a, b, c, d, e. Найдите шестую сторону.

Правильное решение. Обозначим шестую сторону описанного шестиугольника через f (рис. 104). Тогда $a+c+e=b+d+f$. Отсюда находим, что $f=a+c+e-b-d$.

Правильный ответ: $a+c+e-b-d$.

Пример 191б. С помощью циркуля и линейки постройте внутри данного круга концентрическую окружность так, чтобы получились кольцо и круг одинаковой площади. (*Ответ:* окружность радиусом $r=$ $=R\sqrt{2}/2$ приведена на рис. 105.)

192. Повторите п. 187.

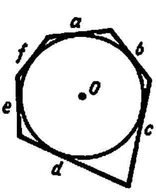

Рис. 104

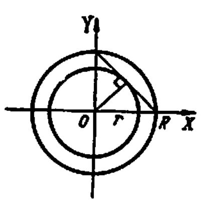

Рис. 105

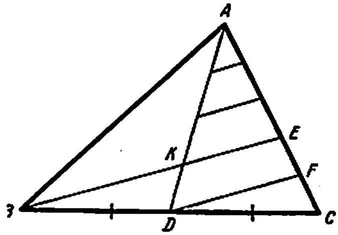

Рис. 106

Пример 192а. Точка K делит медиану AD треугольника ABC в отношении 3:1, считая от вершины В каком отношении прямая BK делит площадь треугольника ABC?

Правильное решение. Заметим, что треугольники BAE и BEC (рис. 106) имеют общую вершину, а их основания лежат на одной прямой. Тогда искомое отношение их площадей равно отношению длин отрезков AE и EC. Следовательно, необходимо выяснить, в каком отношении прямая BE делит сторону AC.

Отметим, что при решении данной задачи прямой вычислительный путь (например, ввод вспомогательных элементов — длин сторон или величин углов) связан с большими трудностями и вряд ли приведет к правильному результату. В то же время она легко решается из чисто геометрических соображений.

По условию одна сторона угла DAC разделена на четыре равные части. Через точки деления проведем прямые, параллельные BK. В результате на стороне AC получим четыре равных отрезка. Для построения пятого отрезка FC надо воспользоваться тем, что AD — медиана. Следовательно, DF — средняя линия треугольника BCE и $|FC|=|EF|$.

Таким образом, сторона AC разделена на 5 равных отрезков, и искомое отношение равно 3:2.

Правильный ответ: 3:2.

Пример 192б. Зная углы треугольника, определите угол между медианой и высотой, проведенными из вершины какого-либо угла, например $\angle C$. $\left(\textit{Ответ:}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2\operatorname{tg}A}-\frac{1}{2\operatorname{tg}B}\right).\right)$

Указание. Определите соотношение между отрезками, на которые медиана и высота делят противоположную сторону треугольника. Длины всех отрезков выразите через высоту.

193. Повторите пп. 187, 181.

Пример 193а. Площадь равнобочной трапеции, описанной около круга, равна S. Определите боковую сторону этой трапеции, если известно, что острый угол при основании трапеции равен $\pi/6$.

Правильное решение. Так как $\angle A=30°$ (рис. 107), то высота $|BE|=h$ трапеции равна $\frac{1}{2}|AB|$. По свойству описанного четырехугольника

$|BC|+|AD|=|AB|+|CD|=2|AB|$. Поэтому

$$S=\frac{|AB|+|CD|}{2}h=\frac{1}{2}|AB|^2,\ |AB|=\sqrt{2S}.$$

Правильный ответ: $|AB|=\sqrt{2S}$.

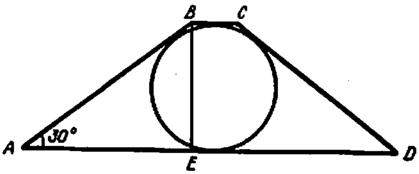

Рис. 107

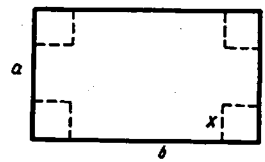

Рис. 108

Пример 193б. Пусть a и b $(a>b)$ — длины оснований трапеции. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям, а его длина равна $(a-b)/2$.

194. Повторите пп. 145, 184.

Пример 194а. Дан прямоугольный лист жести со сторонами 80 и 50 см. Из него требуется изготовить открытую коробку наибольшей вместимостью, вырезав по углам квадраты и отогнув кромки. Определите сторону вырезаемых квадратов.

Правильное решение. Обозначим сторону вырезаемого квадрата через x, а стороны прямоугольного листа через a и b (рис. 108). Объем коробки равен произведению площади основания на высоту:

$$V(x)=((b-2x)(a-2x))x=(80-2x)(50-2x)x,$$
$$V'(x)=-2(50-2x)x-2(80-2x)x+(80-$$
$$-2x)(50-2x)=12x^2-520x+4000.$$

Из условия $V'(x)=0$ следует, что $x_1=10$, $x_2=$ $=33\frac{1}{3}$. Точка $x_2=33\frac{1}{3}$ не удовлетворяет условию задачи. Убедившись, что x_1 — точка максимума функции $V(x)$, заключаем, что $x=10$. (Ср. с решением примера 198а.)

Правильный ответ: 10 см.

Пример 194б. Боковые стороны и меньшее основание трапеции имеют длину 10 см. Определите ее большее основание так, чтобы площадь трапеции была наибольшей. (*Ответ:* 20 см.)

195. Для того чтобы решить стереометрическую задачу, необходимо правильно выполнить рисунок.

Пример 195а. Самая большая диагональ правильной шестиугольной призмы, имеющая длину d, составляет с боковым ребром призмы угол α. Определите объем призмы.

Правильное решение. Пусть $|F_1C|=d$ и $\angle FF_1C=\alpha$ (рис. 109). Тогда высота призмы $h=|FF_1|=d\cos\alpha$, а площадь ее основания $S_{осн}=6S_{OFE}$, где S_{OFE} — площадь треугольника OFE:

$$S_{OFE}=\frac{1}{2}|FE|\,|OK|,$$

$$|FE|=|FO|=\frac{1}{2}|FC|=\frac{1}{2}d\sin\alpha$$

(так как треугольник OFE — равносторонний),

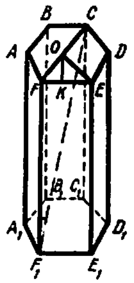

Рис. 109

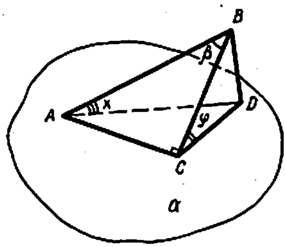

Рис. 110

$$|OK|=|FO|\sin 60°=(\sqrt{3}/4)d\sin\alpha.$$

Следовательно,

$$S_{OFE}=\frac{\sqrt{3}}{16}d^2\sin^2\alpha,\quad S_{осн}=\frac{3\sqrt{3}}{8}d^2\sin^2\alpha.$$

Тогда

$$V=S_{осн}h=\frac{3\sqrt{3}}{16}d^3\sin 2\alpha\sin\alpha.$$

Правильный ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{16}d^3\sin 2\alpha\sin\alpha.$

Пример 195б. Основание прямого параллелепипеда — ромб со стороной a, острый угол между плоскостями двух боковых граней равен φ, большая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол β. Найдите объем параллелепипеда. $\left(\textit{Ответ: } 2a^3 \sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\beta.\right)$

196. Повторите п. 195.

Пример 196а. Дан прямоугольный треугольник ABC, у которого $\angle C = 90°$, $\angle B = \beta$. Через катет AC проведена плоскость α, образующая с плоскостью треугольника угол φ. Найдите угол наклона гипотенузы AB к плоскости α.

Правильное решение. Пусть отрезок BD перпендикулярен к плоскости α (рис. 110). Тогда $\angle DCB = \varphi$, и $\angle BAD = x$ — искомый угол. Из треугольника ABD следует, что

$$\sin x = \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{BC}\,\frac{BC}{AB} = \sin\varphi\cos\beta,$$

откуда

$$x = \arcsin(\sin\varphi\cos\beta).$$

Правильный ответ: $\arcsin(\sin\varphi\cos\beta)$.

Пример 196б. Наклонная образует угол 45° с плоскостью. Через основание наклонной проведена прямая под углом 45° к проекции наклонной. Найдите угол φ между этой прямой и наклонной. (*Ответ:* $\varphi = 60°$.)

197. Повторите пп. 195, 185.

Пример 197а. Боковые грани треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны и их площади равны S_1, S_2 и S_3 соответственно. Найдите объем пирамиды.

Правильное решение. Для решения задачи удобно расположить пирамиду таким образом, чтобы боковая грань стала основанием (рис. 111). Обозначим $a = |AD|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Пусть S_1 — площадь

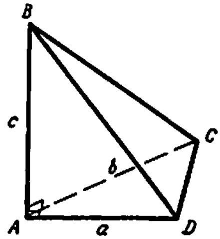

Рис. 111

$\triangle ABD$, S_2 — площадь $\triangle ABC$, S_3 — площадь $\triangle ACD$. Тогда $V=\frac{1}{3}S_3c$, где c — высота пирамиды, а S_3 — площадь основания пирамиды. Так как

$$S_1=\frac{1}{2}ca,\ S_2=\frac{1}{2}cb,\ S_3=\frac{1}{2}ab,$$

то

$$S_1S_2=\frac{1}{4}c^2ab=\frac{1}{2}c^2\cdot\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}c^2S_3.$$

Из последнего уравнения находим:

$$c^2=2S_1S_2/S_3,\ c=\sqrt{2S_1S_2/S_3}.$$

Следовательно,

$$V=\frac{1}{3}S_3\sqrt{2S_1S_2/S_3}=\frac{1}{3}\sqrt{2S_1S_2S_3}.$$

Правильный ответ: $\frac{1}{3}\sqrt{2S_1S_2S_3}$.

Пример 197б. Найдите множество точек, образованное вершиной равнобедренного треугольника с заданным основанием. (*Ответ:* перпендикулярная к основанию треугольника и проходящая через его середину плоскость, из которой исключена точка, лежащая на основании треугольника.)

198. Повторите пп. 145, 184.

Пример 198а. При каком отношении радиуса основания к высоте цилиндр с данной площадью полной поверхности имеет наибольший объем?

Правильное решение. Пусть S — данная площадь полной поверхности цилиндра, x — радиус основания, h — высота цилиндра. Тогда

$$S=2\pi x^2+2\pi xh,\ h=\frac{S-2\pi x^2}{2\pi x}.$$

Следовательно, объем цилиндра

$$V(x)=\pi x^2\frac{S-2\pi x^2}{2\pi x}=\frac{x}{2}(S-2\pi x^2),$$

$$V'(x)=\frac{1}{2}(S-2\pi x^2)+\frac{x}{2}(-4\pi x)=\frac{1}{2}(S-6\pi x^2).$$

Из уравнения $V'(x)=0$ получаем, что $x=\pm\sqrt{S/(6\pi)}$.

Поскольку радиус основания не может быть отрицательным числом, то $x=\sqrt{S/(6\pi)}$ — точка максимума функции $V(x)$ (так как для указанного x $V'(x-\Delta x)>0$, $V'(x+\Delta x)<0$, $0<\Delta x<2\sqrt{S/(6\pi)}$. Для данного значения x найдем отношение x/h:

$$\frac{x}{h}=\frac{x}{(S-2\pi x^2)/(2\pi x)}=\frac{2\pi x^2}{S-2\pi x^2}=$$

$$=\frac{2\pi S/(6\pi)}{S-2\pi S/(6\pi)}=\frac{S/3}{S-S/3}=\frac{S}{2S}=\frac{1}{2}.$$

(Ср. с решением примера 194а.)

Правильный ответ: 1/2.

Пример 198б. Найдите объем конуса, если площадь его осевого сечения равна Q, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. $\left(\textit{Ответ: } \frac{1}{3}\pi Q\sqrt{Q/\operatorname{tg}\alpha}.\right)$

199. Повторите пп. 145, 184, 170.

Пример 199а. В шар радиусом R впишите конус наибольшего объема.

Правильное решение. Проведем осевое сечение через высоту конуса. С учетом осевой симметрии конуса и шара имеем (рис. 112): $|OA|=|OB|=R$, $|O_1A|=h$ — высота конуса, $|O_1B|=r$ — радиус его основания. По теореме Пифагора ($|OB|^2=|OO_1|^2+$ $+|O_1B|^2)\Leftrightarrow(R^2=r^2+(h-R)^2)\Leftrightarrow(r^2+h^2-2hR=0)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(r^2=2hR-h^2)$.

Объем конуса

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi(2hR-h^2)h.$$

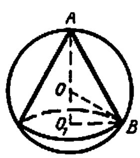

Рис. 112

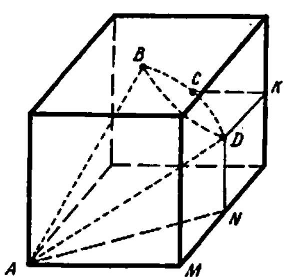

Рис. 113

Рассматривая объем конуса как функцию высоты h, находим точки экстремума функции $V(h)$. Вычислим

$$V'(h) = 4\pi Rh/3 - \pi h^2.$$

Найдем критические точки из уравнения:

$$(4\pi Rh/3 - \pi h^2 = 0) \Leftrightarrow (\pi h(4R/3 - h) = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (h = 0 \text{ или } h = 4R/3).$$

Точка $h = 0$ не подходит по смыслу задачи. В точке $h = 4R/3$ функция $V(h)$ принимает максимальное значение, так как левее точки $h = 4R/3$ $V'(h) > 0$, а правее этой точки $V'(h) < 0$.

Правильный ответ: $h = 4R/3$, $r = 2\sqrt{2}R/3$.

Пример 199б. Радиус сферы увеличился на 50 %. На сколько процентов увеличилась площадь ее поверхности? (*Ответ:* на 125 %.)

200. Иногда полезно вычислять объем тела по двум различным формулам (ср. с п. 182).

Пример 200а. Ребро куба равно b. Найдите объем конуса, у которого вершина совпадает с вершиной A куба, а окружность основания проходит через центры граней куба, не содержащих вершину A.

Правильное решение. Заметим, что центры B, C, D соответствующих граней находятся на равном расстоянии от точки A. Оно равно

$$\sqrt{b^2 + b^2/4 + b^2/4} = b\sqrt{3}/\sqrt{2}$$

(рис. 113). Кроме того, расстояние между каждой парой точек B, C, D равно

$$\sqrt{b^2/4 + b^2/4} = b/\sqrt{2}.$$

Следовательно, точки B, C, D являются вершинами правильного треугольника, вписанного в окружность основания конуса. Тогда очевидно, что радиус основания конуса

$$R = \frac{b}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{b}{\sqrt{6}}.$$

Так как образующая конуса $l = b\sqrt{3/2}$, то его высота

$$h = \sqrt{l^2 - R^2} = 2b/\sqrt{3}.$$

Объем конуса

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{\pi b^3}{9\sqrt{3}}.$$

Правильный ответ: $\pi b^3/(9\sqrt{3})$.

Пример 200б. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Определите площадь поверхности шара, если известно, что сторона основания пирамиды равна a, а плоский угол при вершине пирамиды равен α. $\left(\textit{Ответ: } \dfrac{\pi a^2(1 - \operatorname{tg}(\alpha/2))}{1 + \operatorname{tg}(\alpha/2)}.\right)$

Указание. Для нахождения радиуса вписанного шара рекомендуется приравнять объемы данной пирамиды, вычисленные следующими двумя способами:

1) умножить площадь основания пирамиды на третью часть ее высоты;

2) соединить центр вписанного шара со всеми вершинами пирамиды (получится пять пирамид с высотой, равной радиусу вписанного шара); объем заданной пирамиды принять равным сумме объемов полученных пяти пирамид.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ (1991 год)

Общие указания

На экзамене по математике поступающий в высшее учебное заведение должен показать: а) четкое знание математических определений и теорем, предусмотренных программой, умение доказывать эти теоремы; б) умение точно и сжато выражать математическую мысль в устном и письменном изложении, использовать соответствующую символику; в) уверенное владение математическими знаниями и навыками, предусмотренными программой, умение применять их при решении задач.

Программа по математике для поступающих в высшие учебные заведения в 1991 году состоит из трех разделов. Первый из них представляет собой перечень основных математических понятий и фактов, которыми должен владеть поступающий (уметь правильно их использовать при решении задач, ссылаться при доказательстве теорем). Во втором разделе указаны теоремы, которые надо уметь доказывать. Содержание теоретической части экзаменов должно черпаться из этого раздела. В третьем разделе перечислены основные математические умения и навыки, которыми должен владеть экзаменуемый.

I. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

Арифметика, алгебра и начала анализа

1. Натуральные числа (N). Простые и составные числа. Делитель, кратное. Общий наибольший делитель. Общее наименьшее кратное.
2. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.
3. Целые числа (Z). Рациональные числа (Q), их сложение, вычитание, умножение и деление. Сравнение рациональных чисел.
4. Действительные числа (R), их представление в виде десятичных дробей.
5. Изображение чисел на прямой. Модуль действительного числа, его геометрический смысл.
6. Числовые выражения. Выражения с переменными. Формулы сокращенного умножения.
7. Степень с натуральным и рациональным показателем. Арифметический корень.
8. Логарифмы, их свойства.

9. Одночлен и многочлен.

10. Многочлен с одной переменной. Корень многочлена на примере квадратного трехчлена.

11. Понятие функции. Способы задания функции. Область определения, множество значений функции.

12. График функции. Возрастание и убывание функции; периодичность, четность, нечетность.

13. Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке. Понятие экстремума функции. Необходимое условие экстремума функции (теорема Ферма). Достаточное условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке.

14. Определение и основные свойства функций: линейной, квадратичной $y = ax^2 + bx + c$, степенной $y = ax^n$ $(n \in \mathbf{N})$, $y = k/x$, показательной $y = a^x$, $a > 0$, логарифмической, тригонометрических функций $(y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tg} x)$, арифметического корня $y = \sqrt{x}$.

15. Уравнение. Корни уравнения. Понятие о равносильных уравнениях.

16. Неравенства. Решения неравенства. Понятие о равносильных неравенствах.

17. Системы уравнений и неравенств. Решения системы.

18. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формула n-го члена и суммы первых n членов арифметической прогрессии. Формула n-го члена и суммы первых n членов геометрической прогрессии.

19. Синус и косинус суммы и разности двух аргументов (формулы).

20. Преобразование в произведение сумм $\sin\alpha \pm \sin\beta$, $\cos\alpha \pm \pm \cos\beta$.

21. Определение производной. Ее физический и геометрический смысл.

22. Производные функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = x^n$ $(n \in \mathbf{Z})$, $y = a^x$.

Геометрия

1. Прямая, луч, отрезок; ломаная; длина отрезка. Угол, величина угла. Вертикальные и смежные углы. Окружность, круг. Параллельные прямые.

2. Примеры преобразования фигур, виды симметрии. Преобразование подобия и его свойства.

3. Векторы. Операции над векторами.

4. Многоугольник, его вершины, стороны, диагонали.

5. Треугольник. Его медиана, биссектриса, высота. Виды треугольника. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника.

6. Четырехугольники: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция.

7. Окружность и круг. Центр, хорда, диаметр, радиус. Касательная к окружности. Дуга окружности. Сектор.

8. Центральные и вписанные углы.

9. Формулы площади: треугольника, прямоугольника, параллелограмма, ромба, квадрата, трапеции.

10. Длина окружности и длина дуги окружности. Радианная мера угла. Площадь круга и площадь сектора.

11. Подобие. Подобные фигуры. Отношение площадей подобных фигур.

12. Плоскость. Параллельные и пересекающиеся плоскости.

13. Параллельность прямой и плоскости.

14. Угол прямой с плоскостью. Перпендикуляр к плоскости.

15. Двугранные углы. Линейный угол двугранного угла. Перпендикулярность двух плоскостей.

16. Многогранники. Их вершины, ребра, грани, диагонали. Прямая и наклонная призмы; пирамиды. Правильная призма и правильная пирамида. Параллелепипеды, их виды.

17. Фигуры вращения: цилиндр, конус, сфера, шар. Центр, диаметр, радиус сферы и шара. Плоскость, касательная к сфере.

18. Формула объема параллелепипеда.

19. Формулы площади поверхности и объема призмы.

20. Формулы площади поверхности и объема пирамиды.

21. Формулы площади поверхности и объема цилиндра.

22. Формулы площади поверхности и объема конуса.

23. Формулы объема шара.

24. Формулы площади сферы.

II. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ТЕОРЕМЫ

Алгебра и начала анализа

1. Свойства функции $y=ax+b$ и ее график.

2. Свойства функции $y=k/x$ и ее график.

3. Свойства функции $y=ax^2+bx+c$ и ее график.

4. Формула корней квадратного уравнения.

5. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.

6. Свойства числовых неравенств.

7. Логарифм произведения, степени, частного.

8. Определение и свойства функций $y=\sin x$, $y=\cos x$, их графики.

9. Определение и свойства функции $y=\operatorname{tg} x$ и ее график.

10. Решение уравнений вида $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg} x=a$.

11. Формулы приведения.

12. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.

13. Тригонометрические функции двойного аргумента.

14. Производная суммы двух функций.

Геометрия

1. Свойства равнобедренного треугольника.

2. Свойства точек, равноудаленных от концов отрезка.

3. Признаки параллельности прямых.

4. Сумма углов треугольника. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника.

5. Признаки параллелограмма.

6. Окружность, описанная около треугольника.

7. Окружность, вписанная в треугольник.

8. Касательная к окружности, ее свойство.

9. Измерение угла, вписанного в окружность.

10. Признаки подобия треугольников.

11. Теорема Пифагора.

12. Формулы площадей параллелограмма, треугольника, трапеции.

13. Формула расстояния между двумя точками плоскости. Уравнение окружности.

14. Признак параллельности прямой и плоскости.

15. Признак параллельности плоскостей.

16. Теорема о перпендикулярности прямой и плоскости.

17. Перпендикулярность двух плоскостей.

18. Теоремы о параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

III. ОСНОВНЫЕ УМЕНИЯ И НАВЫКИ

Экзаменуемый должен уметь:

1. Производить арифметические действия над числами, заданными в виде десятичных и обыкновенных дробей; с требуемой точностью округлять данные числа и результаты вычислений, производить приближенную прикидку результата; пользоваться калькуляторами и таблицами для производства вычислений.

2. Проводить тождественные преобразования многочленов, дробей, содержащих переменные, выражений, содержащих степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции.

3. Строить графики линейной, квадратичной, степенной, показательной, логарифмической и тригонометрической функции.

4. Решать уравнения и неравенства первой и второй степени, уравнения и неравенства, приводящиеся к ним; решать системы уравнений и неравенств первой и второй степени и приводящиеся к ним. Сюда, в частности, относятся простейшие уравнения и неравенства, содержащие степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции.

5. Решать задачи на составление уравнений и систем уравнений.

6. Изображать геометрические фигуры на чертеже и производить простейшие построения на плоскости.

7. Использовать геометрические представления при решении алгебраических задач, а методы алгебры и тригонометрии — при решении геометрических задач.

8. Проводить на плоскости операции над векторами (сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число) и пользоваться свойствами этих операций.

9. Пользоваться понятием производной при исследовании функций на возрастание (убывание), на экстремумы и при построении графиков функций.

2. УСТНЫЙ ЭКЗАМЕН. ОБРАЗЦЫ БИЛЕТОВ

Билет № 1

1. Свойства функции $y = ax + b$ и ее график.
2. Окружность, описанная около треугольника.
3. Решите уравнение

$$3 \sin x + 4 \cos x = 5.$$

Билет № 2

1. Производная суммы двух функций.
2. Признаки параллельности прямых.
3. Решите неравенство

$$\log_{1+x^2}\left(x^2+\frac{3}{2}x+1\right)<1.$$

Билет № 3

1. Логарифм произведения.
2. Формула площади трапеции.
3. При каких значениях a система неравенств

$$\begin{cases} ax-1\leqslant 0, \\ x-4a\geqslant 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Билет № 4

1. Определение и свойства функции $y=\sin x$.
2. Признаки параллелограмма.
3. Упростите выражение

$$\sqrt{\frac{a+x^2}{x}-2\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{a+x^2}{x}+2\sqrt{a}}.$$

Билет № 5

1. Решение уравнений вида $\operatorname{tg} x=a$.
2. Формула площади треугольника.
3. Докажите, что 60-значное число, записанное при помощи 30 единиц и 30 нулей, не может быть квадратом натурального числа.

Билет № 6

1. Производная суммы двух функций.
2. Теорема Пифагора.
3. При любом n сумма первых n членов арифметической прогрессии равна $5n^2$. Найдите разность прогрессии.

Билет № 7

1. Формула корней квадратного уравнения.
2. Касательная к окружности и ее свойства.
3. Может ли синус какого-либо угла быть равным $\cos 40°+$ $+\cos 50°$?
4. Решите неравенство $\frac{1}{\log_x 2}<3$.

Билет № 8

1. Формулы приведения.
2. Свойства равнобедренного треугольника.
3. Боковые ребра пирамиды равны a, b, c и попарно перпендикулярны. Найдите объем пирамиды.

Ответы, решения, указания

Билет № 1.3. $(3\sin x + 4\cos x = 5) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\varphi\sin x + \cos\varphi\cos x = 1 \,\middle|\, \begin{cases}\sin\varphi = 3/5,\\ \cos\varphi = 4/5\end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos(x-\varphi) = 1 \,\middle|\, \begin{cases}\sin\varphi = 3/5,\\ \cos\varphi = 4/5\end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x = \varphi + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z},\ \begin{cases}\sin\varphi = 3/5,\\ \cos\varphi = 4/5\end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x = \arcsin(3/5) + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}).$$

Билет № 2.3. $(\log_{1+x^2}(x^2 + (3/2)x + 1) < 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases}x^2 + (3/2)x + 1 > 0,\\ x^2 + (3/2)x + 1 < 1 + x^2,\\ x \neq 0\end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases}x \in \mathbb{R},\\ x < 0,\\ x \neq 0\end{cases}\right) \Leftrightarrow (x \in (-\infty;\ 0)).$$

Билет № 3.3. Выполним равносильные преобразования:

$$\left(\begin{cases}ax - 1 \leqslant 0,\\ x - 4a \geqslant 0\end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases}ax \leqslant 1,\\ x \geqslant 4a\end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases}a > 0,\\ x \leqslant 1/a,\\ x \geqslant 4a,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}a < 0,\\ x \geqslant 1/a,\\ x \geqslant 4a,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}a = 0,\\ 0 \leqslant 1,\\ x \geqslant 0\end{cases}\right).$$

Проанализируем полученные системы неравенств. Первая из них имеет решение, если

$$\begin{cases}a > 0,\\ 4a \leqslant 1/a,\end{cases}$$

откуда $0 < a \leqslant 1/2$. Вторая система имеет решение при всех $a < 0$. Третья система имеет решение при $a = 0$. Таким образом, получили, что заданная система неравенств имеет хотя бы одно решение, если $a \in (-\infty;\ 1/2]$.

Билет № 4.3. $\sqrt{\dfrac{a + x^2}{x} - 2\sqrt{a}} + \sqrt{\dfrac{a + x^2}{x} + 2\sqrt{a}} =$

$$= \sqrt{\frac{a - 2\sqrt{a}x + x^2}{x}} + \sqrt{\frac{a + 2\sqrt{a}x + x^2}{x}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{a}-x)^2}{x}} + \sqrt{\frac{(\sqrt{a}+x)^2}{x}} = \frac{|\sqrt{a}-x|}{\sqrt{x}} + \frac{|\sqrt{a}+x|}{\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{|\sqrt{a}-x| + \sqrt{a}+x}{\sqrt{x}} = \left(\frac{\sqrt{a}-x+\sqrt{a}+x}{\sqrt{x}} \text{ при } x \leqslant \sqrt{a} \text{ или} \right.$$

$$\left. \frac{-\sqrt{a}+x+\sqrt{a}+x}{\sqrt{x}} \text{ при } x > \sqrt{a} \right) = \left(2\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} \text{ при } x \in (0;\ \sqrt{a}] \text{ или} \right.$$

$$\left. 2\sqrt{x} \text{ при } x \in (\sqrt{a};\ +\infty) \right).$$

Билет № 5.3. Указание. Используйте тот факт, что квадрат числа, кратного трем, должен быть кратным девяти.

Билет № 6.3. $d = 10$.

Билет № 7.3. Нет. 4. $(0;\ 1) \cup (1;\ 8)$.

Билет № 8.3. $V = \frac{1}{6}abc$. (*Указание.* Для упрощения вычислений примите за основание пирамиды одну из ее боковых граней.)

3. ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН. ВАРИАНТЫ РАБОТ

Вариант 1

(Ленинградский государственный университет (геологический факультет))

1. Два мотоциклиста, выехав одновременно из пункта A, едут с разными, но постоянными скоростями в пункт B и, достигнув его, сейчас же поворачивают обратно. Первый мотоциклист, обогнав второго, встречает его на обратном пути на расстоянии 13 км от B. Затем, достигнув A и снова повернув обратно к B, он встречает второго мотоциклиста, проехав 1/7 расстояния от A до B. Найдите расстояние от A до B.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1+4x-x^2} = x - 1.$$

3. Решите уравнение

$$\sin 7x - \sin x + 2\cos^2 2x = 1.$$

4. Найдите углы прямоугольного треугольника, если известно, что радиус вписанной окружности равен 2, а гипотенуза — 13.

5. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x+1}{5}} (x^2-6x+9) \geqslant 0.$$

Вариант 2

(Новосибирский государственный университет (физический факультет))

1. Найдите все решения уравнения $\sin x + \cos 3x = 0$, удовлетворяющие неравенству $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} > 0$.

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_2(x^2 - x + 1)} + 1 \geqslant \frac{\log_2(x+3)}{\log_2(x^2 - x + 1)}.$$

3. Две окружности радиусами 3 и 4, расстояние между центрами которых равно 5, пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D так, что $|CD| = 8$, а B лежит между C и D. Найдите площадь треугольника ACD.

4. Прямая касается параболы $y = -x^2 + 2x + 2$ в точке A и пересекает ось OX в точке B, а ось OY — в точке C. Известно, что точка A лежит в первой четверти координатной плоскости и $2|AB| = |AC|$. Найдите уравнение касательной.

5. В треугольной пирамиде $SABC$ ребра AB, BC и BS имеют длину 2 и взаимно перпендикулярны. Через середины ребер AC и SB проводится плоскость, пересекающая ребро AB и образующая равные углы с плоскостями граней ABS и ABC. Найдите величины этих углов.

Вариант 3

(Белорусский государственный университет (факультет прикладной математики))

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\log_{1,5}((1 - 2x)/x) \leqslant 0.$$

3. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2ax + y = a^2 - 2a, \\ -10x + (a-6)y = 10a - 5a^2 \end{cases}$$

не имеет решений.

4. Расстояние между населенными пунктами A и B составляет 220 км. Из B в A выезжает автомобиль, который движется со скоростью 60 км/ч. Одновременно из A в B выезжает автобус, минимальная скорость движения которого 40 км/ч, а максимальная — 50 км/ч. После встречи автомобиль еще 20 мин двигался в сторону A, а затем повернул и возвратился в B. Найдите максимальную разницу во времени прибытия автобуса и автомобиля в пункт B.

5. Решите уравнение $|3x^2 - 20| = 7$.

Вариант 4

(Саратовский государственный университет (химический факультет))

1. Решите уравнение

$$\cos^2 2x - \frac{8}{3}\cos^2 x + 7\sin^2 x = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_2(2 + 8\cdot 0{,}5^x) \leqslant |x|.$$

3. Имеется два сосуда, содержащие 8 и 12 кг раствора кислоты разных концентраций. Если слить их вместе, то получится раствор, содержащий 35 % кислоты. Если же слить равные веса растворов, то получится раствор, содержащий 36 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в каждом сосуде?

4. Длины боковых сторон трапеции равны 10 и 18,5 см, разность длин нижнего и верхнего оснований равна 25,5 см. Найдите длину высоты трапеции.

Вариант 5

(Московский институт радиотехники, электроники и автоматики)

1. Решите уравнение

$$\frac{3x-1}{x-4} + \frac{x-2}{2x-13} = 1.$$

2. Решите неравенство

$$(x-3)\sqrt{x^2-x-2} \geqslant 0.$$

3. Решите уравнение

$$\sin 3x \sin(\pi + 3x) = \cos 2x \cos(\pi - 2x).$$

4. Решите неравенство

$$\log_{-3x-5} 4 - \log_{-6x-2} 16 \geqslant 0.$$

5. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE. Найдите отношение площадей треугольников ABC и AED, если $|AB| = 6$, $|AC| = 5$, $|CB| = 7$.

6. Для каждого значения параметра a найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству $\sqrt{4x+a} + 1 \geqslant 2x$.

Вариант 6

(Белорусский политехнический институт)

1. Дано

$$\log_2(\sqrt{3}+1) + \log_2(\sqrt{6}-2) = A.$$

Найдите значение выражения

$$\log_2 (\sqrt{3}-1)+\log_2 (\sqrt{6}+2).$$

2. Решите уравнение

$$2\cos 2x+2\operatorname{tg}^2 x=5.$$

3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{5x-4}{2x-3}>2, \\ |5x-3|\leqslant 7. \end{cases}$$

4. Найдите число, которое в сумме со своим квадратом доставляет этой сумме наименьшее значение.

5. Правильная треугольная пирамида вписана в сферу радиусом R. Найдите объем пирамиды, если угол между ее высотой и боковым ребром равен α.

Вариант 7

(Киевское высшее зенитно-ракетное инженерное училище)

1. В шар радиусом R вписан конус. Найдите объем этого конуса, если угол при вершине осевого сечения конуса равен α.

2. Докажите тождество

$$\frac{\operatorname{tg}^2(45^\circ+\alpha)-1}{\operatorname{tg}^2(45^\circ+\alpha)+1}=\sin 2\alpha.$$

3. Решите уравнение $x^{\log_3 x-2}=27$.

4. Найдите интервалы монотонности и экстремальные значения функции $y=x^4+4x^3+10$.

5. Упростите выражение

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$$

и вычислите его при $a=0{,}25$.

Вариант 8

(Томский политехнический институт)

1. Выполните следующие действия:

$$\left(1+\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{a}{x}\right)\frac{x^3}{a^3-x^3}.$$

2. Решите уравнение $4^x-10\cdot 2^{x-1}=24$.

3. Найдите число точек пересечения графиков функций $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ и $y=2^x$.

4. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y=\operatorname{tg} x$ в точке с абсциссой $x_0=\pi/4$.

5. Около круга описана равнобочная трапеция, периметр которой равен 80, а острый угол — 30°. Найдите площадь трапеции.

Вариант 9

(Киевский педагогический институт)

1. К раствору, который содержит 40 г соли, добавили 200 г воды, после чего его концентрация уменьшилась на 10 %. Сколько воды содержал раствор и какова была его концентрация?

2. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 + x - a(1 + a) = 0$ имеют разные знаки?

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg (x + y)^2 - \lg x = 2 \lg 3. \end{cases}$$

4. При каких значениях параметра a система неравенств

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$$

удовлетворяется для всех значений x?

5. Периметр прямоугольного треугольника равен 84, а длина его гипотенузы равна 37. Вычислите площадь этого треугольника.

Вариант 10

(Рижский политехнический институт)

1. Вычислите

$$\frac{1}{16}\sqrt{192} - 2{,}5\sqrt{\frac{4}{75}} - \frac{1}{234}\sqrt{98^2 - 71^2}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2 - x} + \frac{4}{\sqrt{2 - x} + 3} = 2.$$

3. Найдите больший корень уравнения

$$\lg (x + 6) - 2 = \frac{1}{2}\lg (2x - 3) = \lg 25.$$

4. При каком целом значении b один из корней уравнения

$$4x^2 - (3b + 2)x + (b^2 - 1) = 0$$

втрое меньше другого?

5. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, площадь которого равна 60. Площади диагональных сечений параллелепипеда равны 72 и 60. Найдите объем параллелепипеда.

Вариант 11

(Витебский технологический институт легкой промышленности)

1. В правильной треугольной пирамиде вершина основания находится на расстоянии b от противоположной боковой грани. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, зная, что апофема пирамиды наклонена к плоскости основания под углом α.

2. На графике функции $y = -\cos 2x + \cos x + \frac{1}{3}\cos 3x$, $x \in [0; 2\pi]$, найдите точки, наиболее удаленные от оси абсцисс.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y + x - y^2 = 14, \\ (x - y)(x^2 - y^2) = 24. \end{cases}$$

4. Определите знак числа

$$10(\log_3 10 - \log_6 10) - 4(\log_3 2 + \log_3 5)\log_6 10,$$

не прибегая к таблицам.

Вариант 12

(Челябинский политехнический институт)

1. Свойства логарифмической функции, ее график. Решите неравенство $\log_{x+1} 5 < 0$.

2. Товарный поезд был задержан в пути на 12 мин, а затем на расстоянии 60 км наверстал потерянное время, увеличив скорость на 15 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.

3. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{2 - f'(x)}{x + 2}},$$

где $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 2x + 5$.

4. Решите уравнение $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$.

5. Величина двугранного угла между смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды $120°$. Площадь боковой поверхности $18\sqrt{2}$ см^2. Найдите площадь основания пирамиды.

Ответы, решения

Вариант 1

1. Пусть u и v — скорости первого и второго мотоциклистов соответственно, а S — расстояние от A до B. Составляем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{S + 13}{u} = \dfrac{S - 13}{v}, \\ \dfrac{2S + S/7}{u} = \dfrac{S + 6S/7}{v}, \end{cases}$$

откуда находим: $u/v = 15/13$, $S = 182$.

2. $\left(\sqrt{1+4x-x^2} = x-1\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ 1+4x-x^2 = x^2-2x+1 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x^2-3x=0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow (x=3).$

3. $(\sin 7x - \sin x + 2\cos^2 2x = 1) \Leftrightarrow ((\sin 7x - \sin x) + (2\cos^2 2x -$

$- 1) = 0) \Leftrightarrow (2\sin 3x \cos 4x + \cos 4x = 0) \Leftrightarrow \Big(\cos 4x = 0$ или $\sin 3x =$

$= -\frac{1}{2}\Big) \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k \text{ или } x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{18}\right) + \frac{\pi}{3}k \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{8}(2k+1) \text{ или } x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}k \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right).$

4. Пусть a, b — катеты, c — гипотенуза, r — радиус вписанной окружности. Тогда $2r = a+b-c$ (рис. 114). Используя теорему Пифагора, получаем

$$\left(\begin{cases} a+b=17, \\ a^2+b^2=169 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} a=12, \\ b=5 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} b=12, \\ a=5 \end{cases}\right).$$

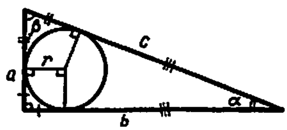

Рис. 114

Следовательно, $\sin\alpha = a/c = 5/13$, $\sin\beta = b/c = 12/13$ и $\alpha =$ $= \arcsin(5/13)$, $\beta = \arcsin(12/13)$.

5. $\left(\log_{\frac{x+1}{5}}(x^2-6x+9) \geqslant 0\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} 0 < \frac{x+1}{5} < 1, \\ 0 < x^2-6x+9 \leqslant 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{x+1}{5} > 1, \\ x^2-6x+9 \geqslant 1 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} -1 < x < 4, \\ x \neq 3, \\ 2 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > 4, \\ x \leqslant 2 \text{ или } x \geqslant 4 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in [2;\ 3) \cup (3;\ 4) \cup (4;\ +\infty)).$$

Вариант 2

1. Решаем уравнение

$$(\sin x + \cos 3x = 0) \Leftrightarrow \left(\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}k \text{ или } x=\frac{\pi}{4}+\pi k \mid k\in \mathbf{Z}\right).$$

Решаем неравенство:

$$\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}>0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}>0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{x}{2}>0\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)>0\right)\Leftrightarrow\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2}+4\pi l;\ \frac{3\pi}{2}+4\pi l \mid l\in \mathbf{Z}\right)\right).$$

Общее решение приведенных уравнения и неравенства можно записать в виде: $x\in \{(32n+m)\pi/8 \mid m=-1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 10,\ 11;\ n\in \mathbf{Z}\}$.

2. $$\left(\frac{1}{\log_2(x^2-x+1)}+1\geqslant\frac{\log_2(x+3)}{\log_2(x^2-x+1)}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x+3>0,\\ x^2-x+1>0,\\ x^2-x+1<1,\\ \log_2(x^2-x+1)-\log_2(x+3)+1\leqslant 0\end{cases}\right. \text{ или }$$
$$\left.\begin{cases}x+3>0,\\ x^2-x+1>1,\\ \log_2(x^2-x+1)-\log_2(x+3)+1\geqslant 0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x>-3,\\ 0<x<1,\\ \dfrac{x^2-x+1}{x+3}\leqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x>-3,\\ x<0 \text{ или } x>1,\\ \dfrac{x^2-x+1}{x+3}\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}0<x<1,\\ \dfrac{2x^2-3x-1}{2x+6}\leqslant 0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}-3<x<0 \text{ или } x>1,\\ \dfrac{2x^2-3x-1}{2x+6}\geqslant 0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(0<x<1, \text{ или } -3<x\leqslant(3-\sqrt{17})/4, \text{ или } (3+\sqrt{17})/4\leqslant$$
$$\leqslant x<+\infty)\Leftrightarrow(x\in(-3;\ (3-\sqrt{17})/4]\cup$$
$$\cup(0;\ 1)\cup[(3+\sqrt{17})/4;\ +\infty)).$$

3. Определим $|AB|=24/5$ (рис. 115). Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусами 3 и 4 соответственно. Пусть AH, O_1K, O_2L — перпендикуляры, опущенные на CD. Тогда $|KL|=$ $=\frac{1}{2}|CD|=4$ $\left(|KB|=\frac{1}{2}|CB|,\ |BL|=\frac{1}{2}|BD|\right)$. Проведем прямую O_1N, параллельную CD ($|O_1N|=|KL|$). Треугольник O_1O_2N подобен треугольнику ABH, откуда $|AH|=96/25$. Следовательно, $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}|CD|\ |AH|=384/25$.

4. Пусть $(x_0;\ y_0)$ — координаты точки A. Тогда $y_0=-x_0^2+$ $+2x_0+2$. Тангенс угла наклона касательной к графику функции $y=-x^2+2x+2$ в точке A, с одной стороны, равен $-2x_0+2$,

а с другой, — $\frac{-y_0}{x_0/2}$, так как из условия задачи следует, что этот угол тупой (рис. 116). Получаем систему

$$\left(\begin{cases} y_0 = -x_0^2 + 2x_0 + 2, \\ -2x_0 + 2 = -2y_0/x_0, \\ x_0 > 0,\ y_0 > 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = 2 \end{cases}\right).$$

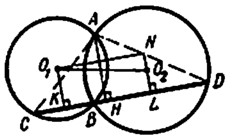

Рис. 115

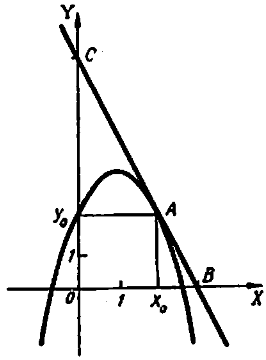

Рис. 116

Тогда искомое уравнение касательной имеет вид: $((y-2) = -2(x-2)) \Leftrightarrow (y = -2x + 6)$.

5. Введем декартовы координаты в пространстве. С учетом условия задачи расположим пирамиду, как показано на рис. 117.

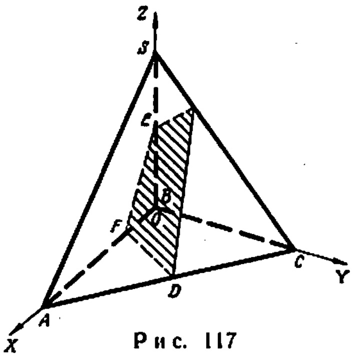

Рис. 117

Сначала укажем координаты точек A, B, C, S: $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 2;\ 0)$, $S(0;\ 0;\ 2)$. Так как точка E является серединой отрезка SB, то имеем $E(0;\ 0;\ 1)$. Точка D также является серединой отрезка AC, поэтому координаты точки $D\left(\frac{2+0}{2};\ \frac{0+2}{2};\ 0\right) = D(1;\ 1;\ 0)$. Грань ABS лежит в плоскости XBZ, и уравнением этой плоскости будет $y = 0$. Аналогично грань ABC лежит в плоскости XBY, и уравнение этой плоскости $z = 0$. Пусть теперь точка $F(X;\ 0;\ 0)$ лежит на прямой AB. Найдем уравнение плоскости, проходящей через точки F, E, D.

Для этого сначала найдем плоскость, проходящую через точку F: $a(x-X)+by+cz=0$, где a, b, c — неизвестные пока координаты вектора, перпендикулярного к данной плоскости. Потребуем, чтобы точки E, D также лежали в этой плоскости:

$$\left(\begin{cases}-aX+c=0,\\ a(1-X)+b=0\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}c=aX,\\ b=a(X-1)\end{cases}\right).$$

Подставим координаты c и b, выраженные через a, в уравнение плоскости: $a(x-X)+a(X-1)y+aXz=0$. Заметим, что $a\neq 0$, так как искомая плоскость не параллельна плоскости YBZ, поэтому последнее уравнение можно разделить на a. Получим плоскость $x+(X-1)y+Xz+X=0$, которая проходит через точки F, E, D. Теперь потребуем, чтобы указанная плоскость составляла одинаковые двугранные углы с плоскостями граней ABS и ABC. Для этого необходимо, чтобы нормальные векторы данных граней составили один и тот же острый угол с плоскостью сечения, или, что то же, модули косинусов двугранных углов были равны. Выпишем уравнения плоскости и координаты векторов, перпендикулярных к данным плоскостям: ABS: $y=0$, $\vec{n}_1(0;\ 1;\ 0)$; ABC: $z=0$, $\vec{n}_2(0;\ 0;\ 1)$; FED: $x+(X-1)y+Xz-X=0$, $\vec{n}_3(1;\ X-1;\ X)$. Имеем:

$$\cos(\angle\vec{n}_1\vec{n}_3)=\frac{\vec{n}_1\vec{n}_3}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_3|}=\frac{X-1}{1\cdot\sqrt{1+(X-1)^2+X^2}},$$
$$\cos(\angle\vec{n}_2\vec{n}_3)=\frac{\vec{n}_2\vec{n}_3}{|\vec{n}_2|\,|\vec{n}_3|}=\frac{X}{1\cdot\sqrt{1+(X-1)^2+X^2}}.$$

Так как $\sqrt{1+(X-1)^2+X^2}=\sqrt{2X^2-2X+2}\neq 0$, то:

$$\left(\left|\frac{X-1}{\sqrt{1+(X-1)^2+X^2}}\right|=\left|\frac{X}{\sqrt{1+(X-1)^2+X^2}}\right|\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(|X-1|=|x|)\Rightarrow(X=1/2)\Rightarrow F(1/2;\ 0;\ 0).$$

Далее получаем:

$$\cos(\angle\vec{n}_2\vec{n}_3)=\frac{1/2}{\sqrt{2\cdot\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{2}+2}}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Следовательно, угол между плоскостью сечения и гранями ABS и ABC $\varphi=\arccos\left(1/\sqrt{6}\right)$.

Вариант 3

1. $\{(2;\ 3);\ (3;\ 2);\ (1;\ 5);\ (5;\ 1)\}$. 2. $(1/3;\ 1/2)$. 3. $a\in\{5\}$. 4. 13/30 ч. 5. $\left\{-3;\ 3;\ -\sqrt{13/3};\ \sqrt{13/3}\right\}$.

Вариант 4

1. $\{\pm\pi/6+\pi k\,|\,k\in Z\}$. 2. $[2;\ +\infty)$. 3. 3,28 кг, 3,72 кг. 4. 6 см.

Вариант 5

1. $\left(\frac{3x-1}{x-4}+\frac{x-2}{2x-13}=1\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}5x^2-26x-31=0,\\ x-4\neq 0,\\ 2x-13\neq 0\end{cases}\right)\Leftrightarrow(x\in\{-1;\ 31/5\}).$$

2. $\left((x-3)\sqrt{x^2-x-2}\geqslant 0\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x-3>0,\\ x^2-x-2\geqslant 0,\end{cases}\right.$ или

$\left.\begin{cases}x-3=0,\\ x^2-x-2\geqslant 0,\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x^2-x-2=0,\\ x-3 \text{ — любое}\end{cases}\right)\Leftrightarrow(x\in\{-1;\ 2\}\cup[3;\ +\infty)).$

3. $(\sin 3x\cdot\sin(\pi+3x)=\cos 2x\cdot\cos(\pi-2x))\Leftrightarrow(\sin^2 3x=\cos^2 2x)\Leftrightarrow(\pm\sin 3x=\cos 2x)\Leftrightarrow(\cos(\pi/2\mp 3x)=\cos 2x)\Leftrightarrow(\pi/2\mp 3x=\pm 2x+2\pi n\,|\,n\in\mathbf{Z})\Leftrightarrow(x=(\pi/10)(2n+1)\,|\,n\in\mathbf{Z}).$

4. Область определения: $x<-5/3$, $x\neq -2$. Имеем:

$$(\log_{-3x-5}4-\log_{-6x-2}16\geqslant 0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}-3x-5>0,\\ \log_{(3x+5)^2}16\geqslant\log_{-6x-2}16\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}0<-3x-5<1,\\ 0<-6x-2<1,\\ (3x+5)^2\geqslant -6x-2\end{cases}\text{ или }\begin{cases}-3x-5>1,\\ -6x-2>1,\\ (3x+5)^2\leqslant -6x-2\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}-2<x<-5/3,\\ -\frac{1}{2}<x<-1/3,\\ x\leqslant -3 \text{ или } x\geqslant -1\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x<-2,\\ x<-1/2,\\ -3\leqslant x\leqslant -1\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow(-3\leqslant x<-2).$

5. Пусть $\angle ABC=\beta$. Заметим, что $\angle EOA=\angle ABC$ как углы с взаимно перпендикулярными сторонами (рис. 118). Тогда:

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|BC|\,|AD|,$$

$$S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}|AD|\,|AE|\sin\angle EAO=\frac{1}{2}|AD|\,|AE|\cos\beta,$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AED}}=\frac{|BC|}{|AE|\cos\beta}.$$

Из треугольника ABC, использовав теорему косинусов, определим $\cos\beta=5/7$. Выражая $|EC|^2$ из треугольников BCE и AEC, получаем уравнение относительно $|AE|^2$: $|AC|^2-|AE|^2=|BC|^2-(|AB|-|AE|)^2$, решая которое находим $|AE|=1$. Следовательно, $S_{\triangle ABC}/S_{\triangle AED}=49/5$.

6. $(\sqrt{4x+a}+1\geqslant 2x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}2x-1\geqslant 0,\\ 4x+a\geqslant(2x-1)^2\end{cases}\text{ или }\begin{cases}2x-1<0\\ 4x+a\geqslant 0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\geqslant 1/2,\\ (2-\sqrt{3+a})/2\leqslant x\leqslant(2+\sqrt{3+a})/2,\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x<1/2,\\ x\geqslant -a/4\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

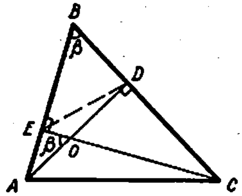

Рис. 118

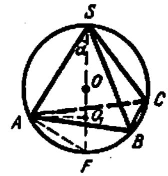

Рис. 119

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} -3 \leqslant a \leqslant -2, \\ (2-\sqrt{3+a})/2 \leqslant x \leqslant (2+\sqrt{3+a})/2 \end{cases} \text{ или } \right.$$

$$\left. \begin{cases} a > -2, \\ 1/2 \leqslant x < (2+\sqrt{3+a})/2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a > -2, \\ -a/4 < x < 1/2 \end{cases}\right).$$

Тогда решение неравенства можно записать в виде: $[(2-\sqrt{a+3})/2;$ $(2+\sqrt{a+3})/2]$ при $a \in [-3;\ -2]$, $[a-/4;\ (2+\sqrt{a+3})/2]$ при $a > -2$ и $\varnothing$ при $a < -3$.

Вариант 6

1. Пусть $\log_2(\sqrt{3}-1)+\log_2(\sqrt{6}+2)=x$. Тогда $A+x=$ $=\log_2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)+\log_2(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)=\log_2 2+\log_2 2=$ $=2$. Отсюда $x=2-A$.

2. $(2\cos 2x+2\,\mathrm{tg}^2\,x=5)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(2\cos 2x+2\,\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}=5\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\cos^2 2x-\dfrac{5}{2}\cos 2x-\dfrac{3}{2}=0,\\ 1+\cos 2x\neq 0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\cos 2x=3,\\ 1+\cos 2x\neq 0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\cos 2x=-1/2,\\ 1+\cos 2x\neq 0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x=\pm\pi/3+\pi k\mid k\in\mathbf{Z}).$$

3. $$\left(\begin{cases}\dfrac{5x-4}{2x-3}>2,\\ |5x-3|\leqslant 7\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\dfrac{x+2}{2x-3}>0,\\ -7\leqslant 5x-3\leqslant 7\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x<-2 \text{ или } x>3/2,\\ -4/5\leqslant x\leqslant 2\end{cases}\right)\Leftrightarrow(3/2<x\leqslant 2).$$

4. Пусть x — искомое число. Требуется найти минимум функции $f(x)=x^2+x$. Из уравнения $f'(x)=2x+1=0$ находим $x=-1/2$. Так как $f'(x)<0$ при $x<-1/2$ и $f'(x)>0$ при $x>-1/2$, то $x=$ $=-1/2$ — искомое число.

5. Пусть $SABC$ — правильная пирамида, вписанная в сферу с центром O (рис. 119). Проведем высоту пирамиды SO_1, продолжив ее до пересечения со сферой в точке F. Центр сферы O лежит на высоте SO_1 пирамиды. Соединим отрезками точки A и F, A и O_1.

По условию $|SO| = R$, $\angle ASF = \alpha$. Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} |SO_1|$. Из прямоугольных треугольников SAF и SO_1A находим: $|AS| = 2R\cos\alpha$, $|SO_1| = |AS|\cos\alpha = 2R\cos^2\alpha$, $|AO_1| = |AS|\sin\alpha = 2R\cos\alpha\sin\alpha = R\sin 2\alpha$. Так как точка O_1 — центр окружности, описанной около основания пирамиды, то $|AO_1|$ — радиус этой окружности. Тогда сторона основания пирамиды $|AB| = |AO_1| \cdot \sqrt{3} = R\sqrt{3}\sin 2\alpha$, а

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(R\sqrt{3}\sin 2\alpha)^2 \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 \sin^2 2\alpha,$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2 \sin^2 2\alpha \cdot 2R\cos^2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} R^3 \sin^2 2\alpha \cos^2\alpha.$$

Вариант 7

1. $\frac{2}{3}\pi R^3 \sin^2\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}$. 3. $[1/3;\ 27]$. 4. Функция монотонно убывает на промежутке $(-\infty;\ -3)$ и монотонно возрастает на промежутке $[-3;\ +\infty)$; $y_{min} = y(-3) = -17$. 5. 1,5.

Вариант 8

1. -1. 2. $\{3\}$. 3. Одна. 4. 2. 5. 200.

Вариант 9

1. 160 г, 20 %. 2. $a \in (-\infty;\ -1) \cup (0;\ \infty)$. 3. $\{(1;\ 2);\ (16;\ -28)\}$. 4. $a \in (-1;\ 2)$. 5. 210.

Вариант 10

1. 0. 2. $\{1\}$. 3. 14. 4. 2. 5. 360.

Вариант 11

1. $\frac{2\sqrt{3}b^2}{3\sin\alpha\sin 2\alpha}$. 2. $\{(\pi;\ -7/3)\}$. 3. $\{(73/12;\ -71/12);\ (4;\ 2)\}$. 4. Минус.

Вариант 12

1. $(-1;\ 0)$. 2. 60 км/ч. 3. $[2;\ +\infty) \cup (-\infty;\ -2) \cup (-2;\ 0]$. 4. $\left\{\frac{\pi}{2}n;\ \pm\frac{\pi}{6} + \pi n \mid n \in Z\right\}$. 5. 18 см^2.

4. ЭКЗАМЕН ПРИНИМАЕТ ЭВМ. ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ

Задание 1

1. Найдите x из пропорции

$$\frac{2\frac{2}{3}-\frac{7}{4}}{18{,}9+15{,}5\cdot\frac{1}{5}}=\frac{\frac{7}{8}:1{,}4}{x}.$$

2. Упростив выражение

$$\left(\frac{a^3-8}{a^2-4}-\frac{a^2-1}{a-1}\right)(a+2),$$

найдите его значение при $a=-2{,}2$.

3. Решите уравнение $(x+2)(2x-3)=2(4x-1)$. В ответе запишите меньший корень.

4. Решив систему

$$\begin{cases}x+y=3,\\ 3^{x-y}=9,\end{cases}$$

запишите в ответе отношение x/y полученных чисел.

5. Первый член геометрической прогрессии $b_1=3$, а ее знаменатель $q=\sqrt{2}$. Найдите b_7.

6. Решите уравнение $3^{1-\lg\sqrt{x}}=9$.

7. Решите неравенство $\left(\frac{4}{5}\right)^{9+3x}<\frac{25}{16}$. В ответе запишите наименьшее целое значение x из множества его решений.

8. Найдите значение выражения $\log_3 100\cdot\lg 3$.

9. Решите уравнение $\sin(2x+30°)+\cos(2x+60°)=0$. В ответе запишите значение x (в градусах) из интервала $(-240°;\ -200°)$.

10. Найдите без помощи таблиц значение выражения

$$\frac{\sqrt{2}(\sin 57°\cos 27°-\cos 57°\sin 27°)}{\cos^2(\pi/8)-\sin^2(\pi/8)}.$$

11. Найдите промежуток убывания функции $f(x)=\ln(-4x+13)$. В ответе запишите наибольшее целое значение x из этого промежутка.

12. Решите неравенство $2x-13\sqrt{x}+21<0$. В ответе запишите наибольшее целое значение x из множества решений.

13. Масса сплава железа с графитом 250 г. Масса графита составляет 3/7 массы железа. Определите массу (в граммах) железа в сплаве.

14. Из 200 г 3%-го раствора соли выпарили некоторое количество воды. В полученном растворе 20 % соли. Сколько граммов воды выпарили?

15. При каком наименьшем целом m квадратный трехчлен $x^2+(2m-5)x+4$ положителен при всех x?

16. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна $\sqrt{58}$, а разность длин его катетов равна 4. Найдите длину большего катета треугольника.

17. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE, пересекающиеся в точке O. Найдите угол (в градусах) BAC, если угол ACB равен 81°, а угол AOC — 127°.

18. Из точки A проведены к окружности касательная AB и секущая ACD. Найдите длину хорды CD, если длины отрезков AB и AD соответственно равны 6 и 9.

19. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 7. Найдите второй катет, если расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол 30° с плоскостью треугольника, равно 3,36.

20. В конус вписан шар радиусом 5. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите высоту конуса

Задание 2

1. Решите уравнение

$$5{,}4+1\frac{2}{5}\left(\frac{8}{7}x\right)=\frac{17}{2}:\left(0{,}3+\frac{7}{5}\right).$$

2. Упростив выражение

$$\left(\frac{a^3+b^3}{a+b}-ab\right)\left(\frac{a+b}{a^2-b^2}\right),$$

найдите его значение при $a=3{,}4$, $b=1{,}4$.

3. Решите уравнение $(2x-2)^2=3x+7$. В ответе запишите отрицательный корень.

4. Решив систему

$$\begin{cases}2x+3y=3x+3{,}5,\\4x+y=2y+8,\end{cases}$$

запишите в ответе большее из полученных чисел.

5. Первый член арифметической прогрессии $a_1=6$, а ее разность $d=5$. Найдите a_{13}.

6. Решите уравнение $2\cdot 3^x-1=17$.

7. Решите неравенство $\log_2(1+2x)>5$. В ответе запишите наименьшее целое значение x из множества его решений.

8. Найдите значение выражения $\log_2 9/\log_2 3$.

9. Решите уравнение $(2+\sin x)(2\cos x-\sqrt{3})=0$. В ответе запишите значение x (в градусах) из интервала $(-90°;\ 0°)$.

10. Найдите без помощи таблиц значение выражения

$$\frac{\sqrt{2}\cos(-45°)+1}{\sin 30°}.$$

11. Точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\sin(2t-3)+4t^3-20t$. Найдите ее скорость в момент времени $t=3/2$.

12. Решите неравенство $\sqrt{5x-8}<1$. В ответе запишите наименьшее значение x из множества решений этого неравенства.

13. Предприятие по плану должно выпустить 120 машин. Сколь-

ко машин выпущено фактически, если план выполнен на 105 %?

14. Два насоса, действуя попеременно, наполняют бассейн за 42 ч. Первый насос перекачивает за 1 ч 640 л, второй — 480 л. Сколько часов работал первый насос, если известно, что оба насоса накачали одинаковое количество воды?

15. Решив неравенство $\frac{3}{3x+2} < \frac{2}{2x+5}$, укажите наибольшее целое из множества решений.

16. Найдите наибольшее целое значение c, при котором уравнение $x^2 + 3x + c = 0$ имеет два действительных корня.

17. В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса угла, равного 60°. Найдите длину этой биссектрисы, если она короче длины большего катета на 1.

18. В равнобочную трапецию с боковой стороной, равной 15, вписана окружность радиусом 5. Найдите площадь трапеции.

19. Из точки, отстоящей от плоскости на расстоянии $\sqrt{6}$, проведена наклонная под углом 45° к плоскости. В этой же плоскости через основание наклонной проведена прямая под углом 45° к проекции наклонной. Найдите расстояние от точки до этой прямой.

20. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее высота равна 3, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 30°.

Задание 3

1. Решите уравнение

$$(x - 4{,}2)|x - 4{,}2| = -16.$$

2. Упростив выражение

$$\left(\frac{a}{a-1} + \frac{1}{ab-b}\right) : \frac{ab+1}{b} - \frac{a}{a^2-1},$$

найдите его числовое значение при $a = \sqrt{3}$.

3. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, сумма первых трех членов которой в 64 раза больше суммы четвертого, пятого и шестого членов.

4. Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства $\frac{5-x}{x+2} \leqslant 0$.

5. Решите уравнение $\sqrt{3x^2 - 12x - 6} = 2 - x$.

6. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\frac{0{,}5^{3x-1}}{0{,}25^{6x+7}} > \frac{1}{8}.$$

7. Вычислите

$$\log_{32}\left(\sqrt[\log_{16} 17]{17}\right).$$

8. Решите уравнение

$$\log_3 x - \log_9\left(2 + \frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

9. Тело движется прямолинейно и за t с проходит путь $s(t) = t^3 - 11t^2 + t$ м. Найдите скорость тела через 3 с после начала движения.

10. Найдите $\sin \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3/\sqrt{91}$ и $180° < \alpha < 270°$.

11. Упростив выражение

$$\frac{1}{\sqrt{3}\cos 2\alpha}(\sin^2 \alpha - \cos^2 3\alpha),$$

найдите его числовое значение при $\alpha = \pi/24$.

12. Решив уравнение $\cos 2x + \sqrt{3}\sin x + 2 = 0$, укажите (в градусах) его наибольший отрицательный корень.

13. Найдите длину основания равнобедренного треугольника, площадь которого равна 25 см^2, а углы α при основании таковы, что $\operatorname{tg} \alpha = 4$.

14. Длина окружности равна $4\sqrt{\pi}$ см. Найдите площадь сектора с центральным углом $\alpha = \pi/10$.

15. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45°. Объем пирамиды равен 4,5 см^3. Найдите длину высоты пирамиды.

16. Конус вписан в шар. Найдите длину образующей конуса, если она составляет с плоскостью основания угол 30°, а площадь поверхности шара равна 16π кв. ед.

Задание 4

1. Найдите наименьшее целое решение уравнения $(x + 6)/|x + 6| = 1$.

2. Упростите выражение $(a^{0,3})^{0,2} : a^{-1,94}$ и вычислите при $a = 0,5$.

3. Найдите разность арифметической прогрессии, если $a_1 = 4$, $a_{18} = 38$.

4. Найдите наименьшее целое решение неравенства $\dfrac{5}{x+3} \geqslant 1$.

5. Решите уравнение $\sqrt{3x^2 - 2} = 2x - 3$.

6. Найдите наименьшее решение неравенства $3 \cdot 9^x + 2 \cdot 3^x - 1 \geqslant 0$.

7. Вычислите $\log_9 17 \cdot \log_{17} 7 \cdot \log_7 3$.

8. Решите уравнение

$$\log_2 x + \log_2 \left(1 - \frac{3}{x}\right) = 3.$$

9. К графику функции $y = 2x^2 - 1$ через точку с абсциссой $x = 0,25$ проведена касательная. Какой угол образует касательная с осью OX?

10. Упростите до числового значения выражение

$$\frac{\cos(180° - \alpha) - \sin(90° + \alpha)}{\cos \alpha}.$$

11. Вычислите (в градусах) $\arccos(-\sin 60°)$.

12. Вычислите (в градусах) наименьший положительный корень уравнения $\cos 8x = 1 - 3\cos 4x$.

13. Известно, что $\operatorname{tg}(\pi/10) = a$. Найдите радиус окружности, вписанной в правильный десятиугольник со стороной $8a$.

14. Найдите площадь равнобочной трапеции, у которой боковые стороны равны 5, острые углы α таковы, что $\sin\alpha = 0{,}4$, а угол между диагональю и основанием равен β ($\operatorname{tg}\beta = 1/12{,}5$).

15. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами $a = 3\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ и острым углом 45°. Площадь боковой поверхности параллелепипеда в 4 раза больше площади его основания. Найдите высоту параллелепипеда.

16. Найдите объем конуса, радиус основания которого равен $\sqrt{3}/\sqrt[3]{\pi}$, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 30°.

*Ответы, решения**

Задание 1

1. $$\left(\frac{2\frac{2}{3}-\frac{7}{4}}{18{,}9+15{,}5\cdot\frac{1}{5}}=\frac{\frac{7}{8}:1{,}4}{x}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{\frac{8}{3}-\frac{7}{4}}{18{,}9+3{,}1}=\frac{\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{7}}{x}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\frac{32-21}{12}}{22}=\frac{5}{8x}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{11}{12\cdot 22}=\frac{5}{8x}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{24}=\frac{5}{8x}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}=\frac{5}{x}\right)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow(x=15)$. (*Ответ:* 15.)

2. $$\left(\frac{a^3-8}{a^2-4}-\frac{a^2-1}{a-1}\right)(a+2)=\left(\frac{a^3-2^3}{a^2-2^2}-\frac{(a-1)(a+1)}{a-1}\right)\times$$

$$\times(a+2)=\left(\frac{(a-2)(a^2+2a+4)}{(a-2)(a+2)}-(a+1)\right)(a+2)=a^2+2a+4-$$

$-a^2-3a-2=2-a=f(a)$. $f(-2{,}2)=2-(-2{,}2)=4{,}2$. (*Ответ:* 4,2.)

3. Имеем: $((x+2)(2x-3)=2(4x-1))\Leftrightarrow(2x^2-3x+4x-6=$ $=8x-2)\Leftrightarrow(2x^2-7x-4=0)\Leftrightarrow(x=-0{,}5$ или $x=4)$. Меньшим корнем является $x=-0{,}5$. (*Ответ:* $-0{,}5$.)

4. Решаем систему:

$$\left(\begin{cases}x+y=3,\\3^{x-y}=9\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x+y=3,\\x-y=2\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}y=3-x,\\2x=5\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}y=3-x,\\x=2{,}5\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}y=0{,}5,\\x=2{,}5\end{cases}\right).$$

Тогда $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2{,}5}{0{,}5}=5$. (*Ответ:* 5.)

5. Из формулы $b_n=b_1q^{n-1}$ следует $b_7=b_1q^6=3(2^{1/2})^6=$ $=3\cdot 2^3=24$. (*Ответ:* 24.)

6. $$\left(\begin{cases}3^{1-\lg\sqrt{x}}=9,\\x>0\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}1-\lg\sqrt{x}=2,\\x>0\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\lg\sqrt{x}=-1,\\x>0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\sqrt{x}=10^{-1},\\x>0\end{cases}\right)\Leftrightarrow(x=0{,}01)$. (*Ответ:* 0,01.)

---

* Ответы приведены в форме, необходимой для обработки результатов экзамена на ЭВМ.

7. Имеем: $\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{9+3x} < \frac{25}{16}\right) \Leftrightarrow \left(\left(\frac{4}{5}\right)^{9+3x} < \left(\frac{4}{5}\right)^{-2}\right)$. Учитывая, что основание $4/5 < 1$, получаем $(9+3x > -2) \Leftrightarrow (3x > -11) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left(x > -3\frac{2}{3}\right)$. Наименьшим целым значением x из множества решений будет $x = -3$. (*Ответ:* -3.)

8. $\log_3 100 \cdot \lg 3 = \log_3 10^2 \cdot \lg 3 = 2 \log_3 10 \cdot \lg 3 = 2 \frac{1}{\lg 3} \lg 3 =$ $= 2$. (*Ответ:* 2.)

9. Решаем уравнение: $(\sin(2x+30°) + \cos(2x+60°) = 0) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\cos(60° - 2x) + \cos(2x+60°) = 0) \Leftrightarrow (2\cos 2x \cos 60° = 0) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\cos 2x = 0) \Leftrightarrow (2x = 90° + k \cdot 180° \mid k \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow (x = 45° + k \cdot 90° \mid k \in \mathbf{Z})$. В интервал $(-240°;\ -200°)$ решение попадает при $k = -3$; $x =$ $= 45° - 270° = -225°$. (*Ответ:* -225.)

10. $$\frac{\sqrt{2}(\sin 57° \cos 27° - \cos 57° \sin 27°)}{\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2}\sin(57° - 27°)}{\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sin 30°}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}(1/2)}{\sqrt{2}/2} = 1.$$ (*Ответ:* 1.)

11. Промежуток убывания данной функции найдем из условия $f'(x) < 0$:

$$\left(f'(x) = \frac{-4}{-4x+13} < 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{4x-13} < 0\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (4x - 13 < 0) \Leftrightarrow \left(x < 3\frac{1}{4}\right).$$

Наибольшее целое значение x из множества решений — $x = 3$. (*Ответ:* 3.)

12. Решаем неравенство:

$$\left(\begin{cases} 2x - 13\sqrt{x} + 21 < 0, \\ x \geqslant 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} 2y^2 - 13y + 21 < 0 \mid y = \sqrt{x}, \\ x \geqslant 0 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (3 < y < 3{,}5 \mid y = \sqrt{x}) \Leftrightarrow (x \in (9;\ 12{,}25)).$$

Наибольшее целое значение x из множества решений — $x = 12$. (*Ответ:* 12.)

13. Пусть x — масса железа в сплаве, тогда $\frac{3}{7}x$ — масса графита. По условию задачи $\frac{3}{7}x + x = 250$, откуда $x = 175$ г. (*Ответ:* 175.)

14. До выпаривания в растворе было $200 \cdot 0{,}03 = 6$ г соли. Поскольку в полученном растворе 20 % соли, составим пропорцию:

$$6 \text{ г} - 20\ \%,$$
$$y - 80\ \%,$$

где y — количество воды в выпаренном растворе: $y = \frac{6 \cdot 80}{20} = 24$ г. В исходном растворе было $200 - 6 = 194$ г воды. Выпарили $194 -$ $- 24 = 170$ г воды. (*Ответ:* 170.)

15. Для того чтобы данный многочлен при всех x принимал

положительные значения, необходимо, чтобы $D<0$: $(D=(2m-5)^2-16<0)\Leftrightarrow(4m^2-20m+9<0)\Leftrightarrow(m\in(1/2;\ 9/2))$. Наименьшим целым значением m из множества решений является $m=1$. (*Ответ:* 1.)

16. Обозначим длину большего катета через x, тогда длина второго катета будет $x-4$. По условию задачи и теоремы Пифагора $((x-4)^2+x^2=58)\Leftrightarrow(x^2-4x-21=0)\Leftrightarrow(x=-3$ или $x=7)$. Условию задачи удовлетворяет $x=7$. (*Ответ:* 7.)

17. Выполним чертеж (рис. 120). По условию задачи $\angle ACB=81^\circ$, $\angle AOC=127^\circ$, $\angle AEC=\angle ADC=90^\circ$. Далее, $\angle EOA=180^\circ-127^\circ=53^\circ$, $\angle BAD=90^\circ-53^\circ=37^\circ$, $\angle DOC=\angle EOA=53^\circ$, $\angle DCO=90^\circ-53^\circ=37^\circ$, $\angle ECA=81^\circ-37^\circ=44^\circ$, $\angle DAC=180^\circ-(127^\circ+44^\circ)=9^\circ$, $\angle BAC=\angle BAD+\angle DAC=37^\circ+9^\circ=46^\circ$. (*Ответ:* 46.)

18. Используя теорему о квадрате касательной, имеем: $|AB|^2=|AD|\,|AC|$ или $36=9\cdot|AC|$, $|AC|=4$; $|CD|=|AD|-|AC|=9-4=5$. (*Ответ:* 5.)

19. Сделаем чертеж (рис. 121). По условию задачи $|BC|=7$, $|BE|=3{,}36$, $\angle BDE=30^\circ$, $\angle ABC=90^\circ$, $\angle BED=90^\circ$, $\angle BDC=90^\circ$. Так как $\triangle BDE$ — прямоугольный с острым углом 30°, то

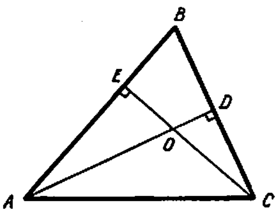

Рис. 120

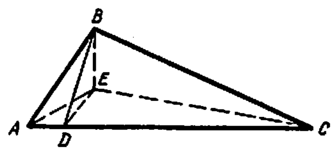

Рис. 121

$|BD|=2\cdot3{,}36=6{,}72$. Обозначим $|AB|=x$, $|AD|=y$ и используем теорему Пифагора: $|DC|^2=|BC|^2-|BD|^2$, $x^2=|BD|^2+y^2$, $|BC|^2+x^2=(y+|DC|)^2$; $|BC|^2+|BD|^2+y^2=y^2+2y|DC|+|DC|^2$, $|BC|^2+|BD|^2=2y|DC|+|BC|^2-|BD|^2$, $2|BD|^2=2y|DC|$, $y=\dfrac{|BD|^2}{|DC|}$;

$$x^2=|BD|^2+\frac{|BD|^4}{|DC|^2}=|BD|^2\left(1+\frac{|BD|^2}{|DC|^2}\right),$$

$$x=|BD|\sqrt{1+\frac{|BD|^2}{|DC|^2}}=|BD|\sqrt{1+\frac{|BD|^2}{|BC|^2-|BD|^2}}=$$

$$=|BD|\sqrt{\frac{|BC|^2}{|BC|^2-|BD|^2}}=\frac{|BD|\,|BC|}{\sqrt{(|BC|-|BD|)(|BC|+|BD|)}}=$$

$$=\frac{6{,}72\cdot7}{\sqrt{(7-6{,}72)(7+6{,}72)}}=\frac{6{,}72\cdot7}{\sqrt{0{,}28\cdot13{,}72}}=\frac{672\cdot7}{\sqrt{28\cdot1372}}=$$

$$=\frac{672\cdot7}{\sqrt{2^4\cdot7^4}}=\frac{672\cdot7}{2^2\cdot7^2}=\frac{168}{7}=24.\ (\textit{Ответ: } 24.)$$

20. Проведя сечение через высоту конуса, получим равносторонний треугольник с вписанной окружностью. Так как в этом треугольнике высота является и медианой, и биссектрисой, а пересечение высот — центр вписанной окружности, то $h=3R$, где R — радиус этой окружности, откуда $h=3\cdot 5=15$. (*Ответ:* 15.)

Задание 2

1. $-0{,}25$. **2.** 2. **3.** $-0{,}25$. **4.** 2,5. **5.** 66. **6.** 2. **7.** 16. **8.** 2. **9.** -60. **10.** 4. **11.** 9. **12.** 1,6. **13.** 126. **14.** 18. **15.** -1. **16.** 2. **17.** 2. **18.** 150. **19.** 3. **20.** 108.

Задание 3

1. $$\big((x-4{,}2)|x-4{,}2|=-16\big)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}-(x-4{,}2)^2=-16,\\ x-4{,}2<0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x-4{,}2=-4,\\ x-4{,}2<0\end{cases}\right)\Leftrightarrow(x=0{,}2).$$ (*Ответ:* 0,2.)

2. $$\left(\frac{a}{a-1}+\frac{1}{ab-b}\right):\frac{ab+1}{b}-\frac{a}{a^2-1}=\left(\frac{ab+1}{(a-1)b}\right)\frac{b}{ab+1}-$$
$$-\frac{a}{(a-1)(a+1)}=\frac{1}{a-1}-\frac{a}{(a-1)(a+1)}=\frac{a+1-a}{(a-1)(a+1)}=$$
$$=\frac{1}{a^2-1}=f(a),\ f(\sqrt{3})=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$ (*Ответ:* 0,5.)

3. По условию задачи $a_1+a_2+a_3=64(a_4+a_5+a_6)$ или $a_1+a_1q+a_1q^2=64(a_1q^3+a_1q^4+a_1q^5)$, $a_1(1+q+q^2)=64a_1q^3(1+q+q^2)$, $1=64q^3$, $q=1/4=0{,}25$. (*Ответ:* 0,25.)

4. Решаем неравенство:
$$\left(\frac{5-x}{x+2}\leqslant 0\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}5-x\geqslant 0,\\ x+2<0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}5-x\leqslant 0,\\ x+2>0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x\leqslant 5,\\ x<-2\end{cases}\text{ или }\begin{cases}x\geqslant 5,\\ x>-2\end{cases}\right)\Leftrightarrow(x<-2\text{ или }x\geqslant 5).$$

Наибольшим целым отрицательным значением x из множества решений будет $x=-3$. (*Ответ:* -3.)

5. $$\left(\sqrt{3x^2-12x-6}=2-x\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\left(\sqrt{3x^2-12x-6}\right)^2=(2-x)^2,\\ 2-x\geqslant 0\end{cases}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\begin{cases}3x^2-12x-6=4-4x+x^2,\\ x\leqslant 2\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x=-1\text{ или }x=5,\\ x\leqslant 2\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x=-1).$$ (*Ответ:* -1.)

6. $$\left(\frac{0{,}5^{3x-1}}{0{,}25^{6x+7}}>\frac{1}{8}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{(1/2)^{3x-1}}{(1/2)^{12x+14}}>\frac{1}{8}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1-12x-14}>\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)\Leftrightarrow(-9x-15<3)\Leftrightarrow(x>-2).$$

Наименьшим целым значением x из множества решений будет $x=-1$. (*Ответ:* -1.)

7. $\log_{32}\left(\sqrt[\log_{16} 17]{17}\right)=\log_{32} 17^{1/\log_{16} 17}=\dfrac{1}{\log_{16} 17}\log_{32} 17=$

$=\dfrac{1}{\log_{16} 17}\,\dfrac{\log_{16} 17}{\log_{16} 32}=\dfrac{1}{\log_{16}(2\cdot 16)}=\dfrac{1}{\log_{16} 2+\log_{16} 16}=$

$=\dfrac{1}{1/4+1}=\dfrac{4}{5}=0{,}8$. (*Ответ:* 0,8.)

8. $\left(\log_3 x-\log_9(2+x/3)=\dfrac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\log_3 x-\frac{\log_3(2+x/3)}{\log_3 9}=\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\log_3 x-\log_3\sqrt{2+x/3}=\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\left(\log_3\frac{x}{\sqrt{2+x/3}}=\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}\sqrt{3}=\dfrac{x}{\sqrt{2+x/3}},\\ x>0\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}3=\dfrac{x^2}{2+x/3},\\ x>0\end{cases}\right)\Leftrightarrow\left(\begin{cases}6+x=x^2,\\ x>0\end{cases}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\begin{cases}x=-2 \text{ или } x=3,\\ x>0\end{cases}\right)\Leftrightarrow(x=3).\ (\textit{Ответ: } 3.)$$

9. Скорость равна производной функции пути: $S'(t)=3t^2-22t+1$, $S'(3)=3\cdot 9-22\cdot 3+1=-38$. (*Ответ:* -38.)

10. Имеем: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{3}{\sqrt{91}}$, $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{9}{91}$, $\sin^2\alpha=$ $=\dfrac{9}{91}\cos^2\alpha=\dfrac{9}{91}(1-\sin^2\alpha)=\dfrac{9}{91}-\dfrac{9}{91}\sin^2\alpha$, $\left(1+\dfrac{9}{91}\right)\sin^2\alpha=\dfrac{9}{91}$, $\dfrac{100}{91}\sin^2\alpha=\dfrac{9}{91}$, $100\sin^2\alpha=9$, $\sin\alpha=$ $=\pm 0{,}3$. По условию $180°<\alpha<270°$, значит, $\sin\alpha=-0{,}3$. (*Ответ:* $-0{,}3$.)

11. $\dfrac{1}{\sqrt{3}\cos 2\alpha}(\sin^2\alpha-\cos^2 3\alpha)=\dfrac{1}{\sqrt{3}\cos 2\alpha}(\sin\alpha-\cos 3\alpha)\times$ $\times(\sin\alpha+\cos 3\alpha)=\dfrac{1}{\sqrt{3}\cos 2\alpha}(\cos(90°-\alpha)+\cos 3\alpha)(\cos(90°-$ $-\alpha)-\cos 3\alpha)=\dfrac{-1}{\sqrt{3}\cos 2\alpha}\left(2\cos\dfrac{90°+2\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{90°-4\alpha}{2}\times\right.$ $\left.\times 2\sin\dfrac{90°+2\alpha}{2}\cdot\sin\dfrac{90°-4\alpha}{2}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{3}\cos 2\alpha}(\sin(90°+2\alpha)\times$ $\times\sin(90°-4\alpha))=-\dfrac{\cos 2\alpha\cos 4\alpha}{\sqrt{3}\cos 2\alpha}=-\dfrac{\cos 4\alpha}{\sqrt{3}}=f(\alpha)$, $f\left(\dfrac{\pi}{24}\right)=$ $=-\dfrac{\cos(\pi/6)}{\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}=-0{,}5$. (*Ответ:* $-0{,}5$.)

12. Решаем уравнение: $(\cos 2x+\sqrt{3}\sin x+2=0)\Leftrightarrow(\cos^2 x-$

$-\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x + 2\cos^2 x + 2\sin^2 x = 0) \Leftrightarrow (3\cos^2 x + \sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = 0) \Leftrightarrow (3 - 3\sin^2 x + \sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = 0) \Leftrightarrow (2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x - 3 = 0) \Leftrightarrow (2y^2 - \sqrt{3}y - 3 = 0 \mid y = \sin x) \Leftrightarrow (y = \sqrt{3}$ или $y = -\sqrt{3}/2 \mid y = \sin x) \Leftrightarrow (\sin x = \sqrt{3}$ или $\sin x = -\sqrt{3}/2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x = (-1)^{n+1}\pi/3 + \pi n \mid n \in \mathbb{Z})$. Наибольший отрицательный корень x из множества решений будет $x = -\pi/3 = -60°$. (*Ответ:* -60.)

13. По условию задачи $\sin\alpha = 4\cos\alpha$, $S = \frac{1}{2}cb\sin\alpha$, $S = \frac{1}{2}ca\sin(180° - 2\alpha) = \frac{1}{2}c^2\sin 2\alpha = c^2\sin\alpha\cos\alpha = 4c^2\cos^2\alpha$ (здесь $|AC| = b$ — основание равнобедренного треугольника ABC, $|AB| = c$, $|BC| = a$, $a = c$ — боковые стороны, $S = 25$ — площадь треугольника). Получаем: $(25 = 4c^2\cos^2\alpha) \Rightarrow (c\cos\alpha = 5/2)$; $\frac{b}{2} : c = \cos\alpha$, $b = 2c\cos\alpha = 2\cdot\frac{5}{2} = 5$. (*Ответ:* 5.)

14. Пусть $S = \frac{1}{2}R^2\alpha$ — площадь сектора с центральным углом α. По условию задачи $4\sqrt{\pi} = 2\pi R$, где R — радиус окружности. Находим: $R = \frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}$, $S = \frac{1}{2}R^2\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{4\pi}{\pi^2}\,\frac{\pi}{10} = \frac{2}{10} = 0{,}2$. (*Ответ:* 0,2.)

15. По условиям задачи получаем, что высота h пирамиды равна половине длины стороны квадрата, лежащего в основании пирамиды. Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}S_{осн}h = \frac{1}{3}h\cdot 4h^2 = \frac{4}{3}h^3 = 4{,}5$, $h^3 = 3{,}375$, $h = 1{,}5$. (*Ответ:* 1,5.)

16. Построим сечение, проходящее через высоту конуса (рис. 122). По условию задачи $\angle BAC = \angle BCA = 30°$, $\angle ABC = 120°$, поэтому

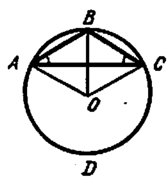

Рис. 122

$\smile ADC = 240°$, а $\smile ABC = 120°$ и центральный угол $\angle AOC = 120°$. Следовательно, $ABCO$ — ромб и $|AO| = R = |AB|$. Пусть $S = 4\pi R^2$ — известная площадь поверхности шара, равная 16π. Отсюда находим: $16\pi = 4\pi R^2$, $R = 2$, поэтому образующая $|AB| = R = 2$. (*Ответ:* 2.)

Задание 4

1. -5. **2.** 0,25. **3.** 2. **4.** -2. **5.** 11. **6.** -1. **7.** 0,5. **8.** 11. **9.** 45. **10.** -2. **11.** 150. **12.** 15. **13.** 4. **14.** 50. **15.** 1,5. **16.** 1.

5. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

(предлагались на вступительных экзаменах по математике в Белорусском государственном университете на различных факультетах в 1985—1989 гг.)

Вариант 1

1. По аллее два мальчика катят обручи. Длина окружности одного обруча 3,2 м, а другого — 2,8 м. Найдите длину аллеи, если известно, что второй обруч сделал на этом расстоянии десятью оборотами больше, чем первый.

2. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + xy - 3y = 9, \\ 3x + 2y = -1. \end{cases}$$

3. Решите уравнение $3^{x+1} + 15 \cdot 3^x = 6$.

4. Решите неравенство $\log_{3x-2} x < 1$.

5. Около круга радиусом r описана трапеция, боковые стороны которой образуют с большей из параллельных сторон углы α и β. Определите длины оснований трапеции.

Вариант 2

1. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4 и в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3 и в остатке 5. Найдите это число.

2. Решите уравнение $2 \cos 2x + 2 \operatorname{tg}^2 x = 5$.

3. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4^{x+y} = 2^{y-x}, \\ 4^{\log_{\sqrt{2}} x} = y^4 - 5. \end{cases}$$

5. Плоскость, проведенная через вершину конуса, пересекает основание по хорде, длина которой равна радиусу этого основания. Определите отношение объемов образовавшихся частей конуса.

Вариант 3

1. Решите уравнение

$$\sin 5x - 2 \sin 2x \cos 3x = 1/2.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{m}{mx+1} + \frac{1}{mx-1} < \frac{1}{1-m^2x^2},$$

если параметр $m \leqslant 0$.

3. Решите уравнение

$$\lg (2x^2 + 21x + 9) - \lg (2x + 1) = 1.$$

4. На один продукт два раза была снижена цена, каждый раз — на 20 %. На другой продукт, бывший до снижения в одной цене с пер-

вым, снизили цену один раз на $x\,\%$. Каким должно быть x, чтобы после всех указанных снижений цен оба продукта были вновь в одной цене?

5. Объем правильной треугольной призмы равен V. Какова должна быть длина стороны основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

Вариант 4

1. Решите уравнение $\sqrt{10-x^2}+\sqrt{x^2+3}=5$.

2. Решите неравенство $(1/3)^{3-x}<9$.

3. Докажите тождество $1/\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha=2/\mathrm{tg}\,2\alpha$.

4. Прямые, содержащие боковые стороны равнобочной трапеции, пересекаются под прямым углом. Найдите длины всех сторон трапеции, если ее площадь равна 12 см^2, а длина высоты равна 2 см.

5. Найдите наибольшее значение функции $y=3x^4-4x^3-12x^2+5$ на отрезке $[-2;\ 4]$.

Вариант 5

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x+7}\geqslant\frac{\sqrt{12+x-x^2}}{x+5}.$$

2. В треугольнике ABC с периметром $2p$ длина стороны AC равна a и величина острого угла ABC равна α. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается стороны BC в точке K. Найдите площадь треугольника BOK.

3. При всех a решите уравнение

$$(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=(a-1)(a+2)$$

и определите, при каких a оно имеет ровно одно решение.

4. Два скрепера разной мощности, работая вместе, могут выполнить работу за 6 ч. Если бы первый скрепер проработал 4 ч, а после него второй 6 ч, то они выполнили бы 80 % всей работы. За сколько часов каждый скрепер, работая отдельно, может выполнить всю работу?

5. Пусть x_1 и x_2 — соответственно точка минимума и точка максимума функции $y=-2x^3+3(1-2a)x^2+12ax-1$. При каком значении a $x_1^2=x_2$?

Вариант 6

1. Пункты A и B расположены на одной реке так, что плот, плывущий из A в B со скоростью течения реки, проходит путь от A до B за 24 ч. Весь путь от A до B и обратно катер проходит не менее чем за 10 ч. Если бы собственная скорость (скорость в стоячей воде) катера увеличилась на 40 %, то тот же путь (от A до B и обратно) занял бы у катера не более 7 ч. Найдите время, за которое катер проходит путь из B в A, когда его собственная скорость не увеличена.

2. Решите неравенство $\log_3^2(x+2)\geqslant\log_9(2x+12)$.

3. Решите уравнение

$$\sin x + 4 \sin 2x \cos^2 x - \sin 4x = 0.$$

4. На плоскости задана точка $M(1;\ 2)$. Проходящая через эту точку прямая образует с положительными полуосями координат треугольник. Какое минимальное значение может принимать площадь этого треугольника?

5. Решите уравнение $\sqrt{x-5} - \sqrt{9-x} = 1$.

Вариант 7

1. Решите уравнение $|2x-3| = 3-2x$.
2. Решите неравенство $\log_2(x-1) + \log_2 x \geqslant 1$.
3. Решите уравнение $3^{2x+1} + 3^{x+1} = 6$.
4. При каких a уравнение

$$\cos^2 ax + \cos x = 2(\cos ax + \cos x - 1)$$

имеет единственное решение.

5. Найдите множество точек, разность расстояний от которых до двух пересекающихся прямых равна постоянной величине.

Вариант 8

1. Решите неравенство $\log_{1/3} \dfrac{2-3x}{x} \geqslant -1$.
2. Решите уравнение $6 \cos^2 x + 5 \sin x - 7 = 0$.
3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} |x^2 - 4x| < 5, \\ |x+1| < 3. \end{cases}$$

4. Найдите длину высоты цилиндра с наибольшей площадью боковой поверхности, который может быть вписан в шар радиусом R.
5. Найдите три числа, если первое составляет 80 % второго, второе относится к третьему, как $0{,}5 : 9/20$, а сумма первого и третьего на 70 больше второго числа.

Вариант 9

1. Решите уравнение

$$x\sqrt{36x + 1261} = 18x^2 - 17x.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\sin \frac{\pi}{6}} (x^2 - 4x + 3) \geqslant -3.$$

3. В прямоугольнике $ABCD$ длины отрезков AB и BD равны соответственно 3 и 6. На продолжении биссектрисы BL треугольника ABD взята точка N такая, что точка L делит отрезок BN в отношении $10:3$, считая от точки B. Что больше: длина BN или длина CL?
4. Решите уравнение

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos 2x = 1.$$

5. В данный конус вписан цилиндр наибольшего объема. Найдите отношение радиуса основания конуса к радиусу основания этого цилиндра.

Вариант 10

1. Самолет летел сначала со скоростью 220 км/ч. Когда ему осталось пролететь на 385 км меньше, чем он пролетел, самолет изменил скорость и стал двигаться со скоростью 330 км/ч. Средняя скорость самолета на всем пути оказалась равной 250 км/ч. Какое расстояние пролетел самолет?

2. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен 90°. Найдите отношение боковой поверхности этой пирамиды к площади ее основания.

3. Решите уравнение $\cos 2x - \cos x = 0$.

4. Решите неравенство $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1$.

5. Решите уравнение

$$\lg(3x-2) - 2 = \lg(x^2 - 1) - \lg 50.$$

Вариант 11

1. Два тела начали движение одновременно и движутся прямолинейно навстречу друг другу. Одно из них проходит в каждую минуту 7 м, другое в первую минуту прошло 24 м, а в каждую последующую проходит на 4 м меньше, чем в предыдущую. Через сколько минут оба тела встретятся, если первоначальное расстояние между ними было равно 100 м?

2. Решите уравнение

$$4\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + 7\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 7\frac{1}{4}.$$

3. Исследуйте функцию $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$ с помощью производной и постройте ее график.

4. Найдите площадь равнобедренной трапеции, зная длину ее диагонали l и величину угла α между этой диагональю и бо́льшим основанием.

5. Решите неравенство $\log_x(5x^2 - 8x + 3) > 0$.

Вариант 12

1. Турист проехал расстояние между двумя городами за 3 дня. В первый день он проехал 1/5 всего пути и еще 60 км, во второй день 1/4 всего пути и еще 20 км и в третий день 28/80 всего пути и оставшиеся 25 км. Найдите расстояние между городами.

2. Решите уравнение $x = \sqrt{5x + 6}$.

3. Решите неравенство $\log_{1/3}(1 - 2x) > 2$.

4. Сколько корней уравнения $4\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ содержится в отрезке $[0; \pi]$?

5. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 24 см, а боковые стороны — 15 см. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.

Вариант 13

1. Внутри данного треугольника ABC найдите точку O, такую, что площади треугольников BOL, COM и AON равны (точки L, M и N лежат на сторонах AB, BC и CA соответственно, причем $OL \parallel BC$, $OM \parallel AC$ и $ON \parallel AB$).

2. Решите уравнение $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$.

3. Решите неравенство $\log_{2x+2}(x^2-3x+2)>1$.

4. Решите уравнение $\operatorname{tg} 3x+\operatorname{tg} x=2\sin 4x$.

5. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой $4\sqrt{3}$ см и острым углом 30°. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

Вариант 14

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x-\sin x=1+\cos y-\sin y, \\ 3\sin 2x-2\sin 2y=3/4. \end{cases}$$

2. Решите неравенство $3^{-\frac{1}{4}\log^2_{1/3} x}\geqslant 3x^{\frac{1}{3}\log_{1/3} x}$.

3. Решите уравнение $x=a-\sqrt{a^2-x\sqrt{x^2+a^2}}$.

4. Длина стороны AB параллелограмма $ABCD$ равна 2, $\angle BAD=45^\circ$. Точки E и F расположены на диагонали BD, причем $\angle AEB=\angle CFD=90^\circ$, $|BF|=\frac{3}{2}|BE|$. Найдите площадь параллелограмма.

5. Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1:2, а другой содержит те же металлы в отношении 2:3. Сколько частей каждого сплава нужно взять, чтобы получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27?

Вариант 15

1. Объем правильной треугольной призмы равен V. Какова должна быть сторона ее основания, чтобы площадь поверхности призмы бала наименьшей?

2. Докажите тождество $\dfrac{1-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{1-\sin 2\beta}{\cos 2\beta}$.

3. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=x\cos^2 x$ в точке с абсциссой $x=\pi/2$.

4. Решите неравенство $\log_{0,5}(3x-4)<\log_{0,5}(x-2)$.

5. Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 62, а сумма их десятичных логарифмов равна 3. Найдите эти члены прогрессии.

Вариант 16

1. Два велосипедиста выехали из пунктов A и B навстречу друг другу. Через 4 часа после встречи велосипедист, ехавший из A,

прибыл в B, а через 9 часов после встречи велосипедист, ехавший из B, прибыл в A. Сколько часов был в пути каждый велосипедист?

2. Решите уравнение $\log_2(2x-3)+2\log_2\sqrt{x+1}=2$.

3. Решите неравенство $\sqrt{\frac{1}{4}-x}\geqslant x+\frac{1}{2}$.

4. Сколько решений имеет уравнение $b\operatorname{tg}x+\sin x=2(b+\cos x)$ на отрезке $[0;\ \pi]$ в зависимости от значений параметра b? Найдите их.

5. Объем шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, относится к объему пирамиды как $\pi:q$. Найдите угол между боковой гранью и высотой пирамиды и допустимые значения q.

Вариант 17

1. Решите уравнение $x^{2-\lg^2 x-\lg x^2}-\frac{1}{x}=0$.

2. Решите уравнение $2\cos x\left(\cos x-\sqrt{8}\operatorname{tg}x\right)=5$.

3. При каком значении x выражение $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}+3}$ принимает наименьшее значение?

4. Решите неравенство $\sqrt{2\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)}>\frac{x+a}{5\sqrt{x-a}}$.

5. В треугольной пирамиде $SABC$ все плоские углы трехгранных углов с вершинами в точках A и B равны α, $AB=a$. Найдите объем пирамиды.

Вариант 18

1. Первая ткацкая фабрика за k дней (k — целое число) выпустила 80 640 м тканей, а вторая, затратив на один рабочий день больше, выпустила 139 840 м той же ткани. Известно, что за один день вторая фабрика выпускает по крайней мере на 8000 м ткани больше первой. Сколько метров ткани производит каждая фабрика за один рабочий день?

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-x-y^2=-0{,}25, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=0{,}5. \end{cases}$$

3. Решите уравнение $\log_{\cos x}\left(\cos x-\frac{1}{4}\sin x\right)=3$.

4. Решите неравенство

$$\log_2\log_3\frac{x+2}{x-2}<\log_{1/2}\log_{1/3}\frac{x-2}{x+2}.$$

5. Через касательную к шару радиусом R проведены две плоскости под углом 45° друг к другу. Найдите радиусы сечений шара этими плоскостями, если известно, что они относятся как $1:2$.

Вариант 19

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3(2/3)^{2x-y}+7(2/3)^{(2x-y)/2}=6, \\ \lg(3x-y)+\lg(x+y)=4\lg 2. \end{cases}$$

2. Решите неравенство $\sqrt{x^2+x-2}\geqslant 9-x$.

3. Найдите наименьшее из расстояний от точки M с координатами $(0;\ 1)$ до точек графика функции $y=1+\dfrac{1}{4\sqrt{3}x^{3/2}}$.

4. Решите уравнение $\sqrt{4-\sqrt{2}\sin x}+2\cos x=0$.

5. Через сторону основания правильной треугольной призмы проведена плоскость под углом α к плоскости основания. Определите площадь образовавшегося треугольного сечения, если объем пирамиды, отсеченной плоскостью от призмы, равен V.

Вариант 20

1. Решите уравнение

$$\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=1/16.$$

2. Решите неравенство $\log_2 x-2\log_x 2+1\geqslant 0$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-3x^2+5$ на отрезке $[0;\ 3]$.

4. Имеются два сплава меди и цинка. В первом сплаве меди в 2 раза больше, чем цинка, а во втором меди в 5 раз меньше, чем цинка. Во сколько раз больше надо взять второго сплава, чем первого, чтобы получить новый сплав, в котором цинка было бы в 2 раза больше, чем меди?

5. В равнобедренной трапеции основания равны a и b, а угол между диагональю и основанием равен α. Найдите длину отрезка, соединяющего точку пересечения диагоналей с серединой боковой стороны трапеции.

Вариант 21

1. Решите уравнение $3\,\mathrm{tg}^2 x-8\cos^2 x+1=0$.
2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5\log_x a+3\log_y a=0, \\ x^3-4y^5=0, \end{cases} \quad \text{где } a\neq 1.$$

3. Решите неравенство $\dfrac{3x+7}{2x-7}\geqslant 5$.

4. Требуется изготовить коническую воронку с образующей $l=20$ см. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

5. Если пароход и катер плывут по течению, то расстояние от пункта A до пункта B пароход проходит в полтора раза быстрее, чем катер, при этом катер каждый час отстает от парохода на 8 км. Если

же они плывут против течения, то пароход проходит путь от B до A в два раза быстрее катера. Найти скорости парохода и катера в стоячей воде.

Вариант 22

1. На ЭВМ решаются две задачи. Первая состоит из 9 миллионов операций типа A и 16 миллионов операций типа B и требует 11 мин 40 с машинного времени. Вторая задача содержит вдвое больше операций типа A и вдвое меньше операций типа B, для ее решения требуется 13 мин 40 с. Сколько операций каждого типа может выполнить ЭВМ в секунду?

2. Решите уравнение
$$\frac{4}{3}\sin x=\frac{9\sin x-2\sin 3x-9\sin 7x}{\cos^2 2x+4\cos 4x}.$$

3. Решите уравнение $\dfrac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}}=1.$

4. Решите неравенство $\log_a(x-2)+\log_a x>1.$

5. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник, длина гипотенузы которого равна c, а величина острого угла α. Через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания двугранный угол величиной β. Определите объем треугольной пирамиды, отсеченной от призмы плоскостью.

Вариант 23

1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}3^{\log_3 x}-2^{\log_4 y^2}=77,\\ 3^{\log_3\sqrt{x}}-2^{\log_{16} y^2}=7.\end{cases}$$

2. Решите неравенство $\sqrt{x^2+2x-8}>x-1.$

3. Найдите наименьшее из расстояний от точки M с координатами $(-1;\ 0)$ до точек $(x;\ y)$, таких, что
$$y=\frac{27}{\sqrt{2}(x+1)^2},\ x>-1.$$

4. Решите уравнение $\dfrac{9}{\operatorname{tg}^2 x}+4\sin^2 x=6.$

5. Найдите двугранный угол между основанием и боковой гранью правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол между боковыми гранями этой пирамиды равен α.

6. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРИМЕРОВ С РЕШЕНИЯМИ ПО СТЕПЕНИ ТИПИЧНОСТИ ОШИБОК АБИТУРИЕНТОВ

№ п/п	Степень типичности ошибок	Номера примеров, при решении которых допускались ошибки (вариант «а»)
1	Наиболее распространенные	14, 17, 21, 25, 32, 37, 38, 40, 42, 45, 47, 48, 49, 54, 56, 72, 74, 81, 91, 106, 123, 131, 134, 159, 161, 168, 177, 178, 180, 192, 200
2	Допускаемые многими абитуриентами, в том числе и хорошо подготовленными теоретически	2, 8, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 24, 27, 29, 30, 33, 34, 36, 39, 43, 44, 46, 50, 55, 65, 66, 67, 70, 77, 79, 80, 86, 90, 94, 95, 96, 100, 102, 104, 105, 107, 108, 109, 111, 112, 114, 115, 117, 118, 126, 127, 129, 133, 140, 145, 146, 148, 155, 156, 160, 164, 167, 171, 173, 175, 176, 179, 181, 186, 187, 189, 190, 196, 197, 198, 199
3	Допускаемые, как правило, недостаточно подготовленными абитуриентами	1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 22, 23, 26, 28, 31, 35, 41, 51, 52, 53, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 68, 69, 71, 73, 75, 76, 78, 82, 83, 84, 85, 87, 88, 89, 92, 93, 97, 98, 99, 101, 103, 110, 113, 116, 119, 120, 121, 122, 124, 125, 128, 130, 132, 135, 136, 137, 138, 139, 141, 142, 143, 144, 147, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 157, 158, 162, 165, 166, 169, 170, 172, 174, 182, 183, 184, 185, 188, 191, 193, 194, 195

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Основные обозначения 5

I. Ошибки на вступительных экзаменах по алгебре и началам анализа 6

1. Функции $y = ax + b$, $y = k/x$, $y = ax^2 + bx + c$ 6
2. Логарифмическая и показательная функции 43
3. Тригонометрические функции 73
4. Производная. Ее физический и геометрический смысл 100
5. Арифметическая и геометрическая прогрессии 110
6. Системы уравнений и неравенств 114
7. Задачи на составление уравнений и неравенств . . . 122

II. Ошибки на вступительных экзаменах по геометрии 128

8. Планиметрия 128
9. Стереометрия 145

Приложения 151

Справочное издание

Самусенко Анатолий Васильевич
Казаченок Виктор Владимирович

МАТЕМАТИКА:
ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ АБИТУРИЕНТОВ

Справочное пособие

Заведующий редакцией Л. Д. Духвалов
Редактор М. С. Молчанова
Художник обложки и
художественный редактор Ю. С. Сергачев
Технический редактор И. П. Тихонова
Корректор Л. А. Еркович

ИБ № 3150

Сдано в набор 29.08.90. Подписано в печать 05.05.91. Формат $84\times108/32$. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 10,08. Усл. кр.-отт. 10,5. Уч.-изд. л. 9,87. Тираж 52 500 экз. Заказ 676. Цена 2 р. 40 к.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета БССР по печати. 220048, Минск, проспект Машерова, 11.

Минский ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат МППО им. Я. Коласа. 220005, Минск, ул. Красная, 23.

ВНИМАНИЕ! НОВИНКА!

ЭЛЕКТРОННЫЕ ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ КУРСЫ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОГО И КОЛЛЕКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ И КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ (TEACHER, ВЕРСИЯ 1)

ТИПИЧНЫЕ ЗАДАЧИ И ОШИБКИ ПО МАТЕМАТИКЕ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ В ВУЗАХ И ТЕХНИКУМАХ

Разработчики: канд. физ.-мат. наук *Самусенко А. В.*, канд. физ.-мат. наук *Казаченок В. В.*, канд. физ.-мат. наук *Гляков П. В.*

Диалоговый комплекс программных средств TEACHER разработан для персональных ЭВМ типа IBM (ЕС 1840, ЕС 1841, IBM PC XT, IBM PC AT, Искра 1030, Mazovia и др.) и обеспечивает абитуриентам качественную самостоятельную подготовку к вступительным экзаменам по математике.

Программный комплекс может работать в обучающем или контролирующем диалоговом режиме, причем выбор заданий производится по разделам школьного курса математики или по степени подготовленности абитуриента. Предусмотрен контролирующий режим по типам вступительных экзаменов (устный, письменный, с помощью ЭВМ). За решение каждого примера автоматически выставляется оценка, которая зависит от количества подсказок, использованных при решении примера. По результатам работы в контролирующем режиме определяется итоговая оценка.

Программный комплекс позволяет распечатывать условия обучающих и контролирующих примеров, а также образцы билетов устного и письменного экзаменов, задания для проведения вступительных экзаменов с помощью ЭВМ. Предусмотрена также печать подсказок, решений, ответов. Распечатку можно производить по разделам школьного курса математики или по степени подготовленности абитуриента.

Комплекс содержит примерно 300 заданий, наиболее распространенных на вступительных экзаменах в вузах и техникумах, которым в программе курса математики средней школы уделяется недостаточно много внимания.

Для работы с комплексом программных средств TEACHER никаких специальных знаний не требуется. После загрузки программного комплекса в память компьютера весь диалог ведется на русском языке.

Заказы принимаются по адресу: *220080, Минск, Ленинский пр., 4, Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина, факультет прикладной математики, учебная лаборатория фонда алгоритмов и программ или 220050, Минск, а/я 171.*

Телефоны для справок: *26-86-36, 26-81-02.*