

Cristian Voica

Mihaela Singer

Mihai Sorin Stupariu

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a

M5

Filiera teoretică

Profil umanist

• științe sociale

Filiera vocațională

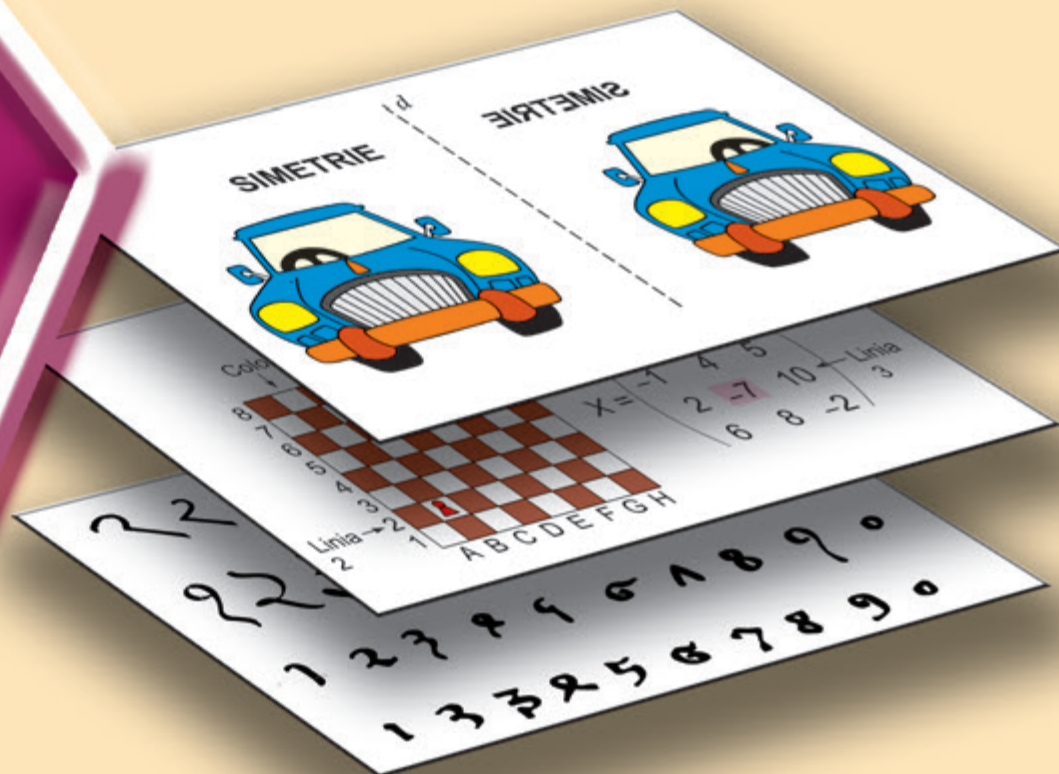
Profil militar M.A.I.

• științe sociale

Filiera vocațională

Profil teologic

• toate specializările



Cristian Voica

Mihaela Singer

Mihai Sorin Stupariu

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a

M5

Filiera teoretică

Profil umanist

- specializarea științe sociale

Filiera vocațională

Profil militar M.A.I.

- specializarea științe sociale

Filiera vocațională

Profil teologic: toate specializările



SIGMA

Manual a fost aprobat prin Ordinul Ministrului Educației, Cercetării și Tineretului nr. 1561-48 din 23.07.2007, în urma evaluării calitative și este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordin al Ministrului Educației și Cercetării nr. 5959 din 22.12.2006.

Referenți: *lector dr.* Daniel Stănică
 asist. univ. dr. Marius Vlădoiu

Redactor: Dana Florina Năstase

Tehnoredactor: Camelia Cristea

Coperta: Camelia Cristea

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

SINGER, MIHAELA

Matematică M5 : clasa a XII-a / Mihaela Singer,
Cristian Voica, Mihai Sorin Stupariu. - București : Sigma,
2007

ISBN 978-973-649-367-6

I. Voica, Cristian

II. Stupariu, Sorin

51(075.35)

© 2007 – Editura SIGMA

Toate drepturile asupra prezentei ediții aparțin Editurii SIGMA.

Nici o parte a acestei lucrări nu poate fi reprodusă fără acordul scris al Editurii SIGMA.

ISBN 978-973-649-367-6

Editura SIGMA

Sediul central:

Str. G-ral Berthelot, nr. 38, sector 1, București, cod 010169
Tel. / fax: 021-313.96.42; 021-315.39.43; 021-315.39.70
e-mail: office@editurasigma.ro; web: www.editurasigma.ro

Distribuție:

Tel. / fax: 021-243.42.40; 021-243.40.52; 021-243.40.35
Puteți transmite comenzi folosind apelul UniTel la numerele:
080.10000.10; 080.10000.11 (în rețeaua ROMTELECOM)
e-mail: comenzi@editurasigma.ro; sigmadistrib@yahoo.com

Manualele Sigma pot fi găsite on-line și la
www.clopotel.ro și **www.calificativ.ro**



CUPRINS

Unitatea de învățare 1. Ecuații și inecuații liniare	6
Situatii cotidiene care conduc la ecuații sau inecuații	7
Modele de rezolvare a ecuațiilor, inecuațiilor și sistemelor	9
Rezolvarea unor ecuații, inecuații sau sisteme	18
Unitatea de învățare 2. Reprezentări grafice. Liniaritate	20
Reprezentarea și interpretarea datelor	21
Metoda grafică în studiul ecuațiilor și al inecuațiilor liniare	24
Elemente de programare liniară	30
Unitatea de învățare 3. *Legi de compoziție	34
Scrierea pozițională a numerelor raționale	35
Operații algebrice	40
Aplicații ale proprietăților operațiilor algebrice	48
Unitatea de învățare 4. Matrice	52
Calcul tabelar	53
Matrice și operații cu matrice	55
Utilizarea matricelor în practică	63
Unitatea de învățare 5. Determinanți și sisteme liniare	66
Rezolvarea sistemelor prin reducerea „în scară”	67
Sisteme și determinanți	69
Calculul determinanților: aplicații	78
Unitatea de învățare 6. *Grupuri	82
Mulțimile de numere și rezolvarea ecuațiilor	83
Structuri algebrice: monoizi și grupuri	86
Structuri algebrice: aplicații în geometrie	94
Unitatea de învățare 7. *Inele și corpuri	98
Proprietăți ale operațiilor algebrice	99
Structuri algebrice: inele și corpuri	101
Structuri algebrice pe mulțimea părților unei mulțimi	105
Unitatea de învățare 8. Matrice inversabile	108
Matrice și coduri	109
Inversa unei matrice. Metode de calcul	111
Ecuații matriceale	118
<i>Probleme recapitulative</i>	123
<i>Răspunsuri</i>	126
<i>Bibliografie</i>	128

Introducere

Toate domeniile culturii se dezvoltă astăzi în strânsă interdependență cu matematica. În societatea contemporană, dinamică și aflată într-un proces de globalizare, matematica devine tot mai mult un instrument necesar pentru studiul și înțelegerea fenomenelor sociale. Domeniul artistic și cel spiritual tind și ele să fructifice achiziții din domeniul matematicii. De aceea, am construit demersul didactic al acestui manual cu scop deopotrivă cultural și pragmatic, urmărind atât formarea de competențe specifice matematicii, cât și transferul de tehnici și metode către domenii transdisciplinare.

Manualul se adresează elevilor de la filiera *teoretică*, profil *umanist*, specializarea *științe sociale*; filiera *vocațională*, profil *militar* M.A.I., specializarea *științe sociale* precum și filiera *vocațională*, profil *teologic*, toate specializările.

Pentru a simplifica parcurgerea manualului am diferențiat unitățile de conținut ce se adresează specializărilor care au prevăzute una, respectiv două ore săptămânal, prin simbolurile grafice, , respectiv .

Cu aceleași simboluri grafice sunt diferențiate exercițiile și problemele propuse spre rezolvare pentru cele două tipuri de alocări în planul de învățământ.

Fiecare unitate de învățare începe cu un test preliminar de autoevaluare, ce sintetizează cunoștințele de bază necesare pentru parcurgerea capitolului respectiv.

În corpul fiecărei lecții, am evidențiat etapele demersului didactic propus prin expresiile: **Să observăm!**, **Să comparăm!**, **Să analizăm!**, **Să aplicăm!**.

Concluziile unei etape de raționament sau de observare, finalizate printr-o propoziție generală, sunt evidențiate cu ajutorul expresiei „**În general**” și marcate prin chenar.

Pentru a facilita conexiunile între conținuturile cu caracter strict matematic din lecție și aplicațiile acestora, am grupat în benzile laterale ale paginilor manualului atenționări, exemplificări și exerciții necesare pentru fixarea noțiunilor prezentate.

Întregul demers de construcție și dezvoltare a manualului a avut în vedere formarea acelor competențe care să permită identificarea relațiilor între noțiunile matematice studiate, interpretarea datelor de diverse tipuri, utilizarea unor algoritmi și concepte matematice în situații diverse, exprimarea caracteristicilor matematice ale unei situații concrete și analiza de situații-problemă în scopul optimizării soluțiilor practice. De aceea, informația conținută în programa școlară a fost structurată și detaliată astfel încât acest deziderat să fie realizat cu succes.

Testele de evaluare de la sfârșitul fiecărui capitol oferă modalități de verificare a nivelului la care s-au format competențele vizate și se adresează în mod diferențiat elevilor care au alocate prin planul de învățământ una, respectiv două ore de studiu.

Ne exprimăm speranța că manualul de față va oferi un instrument util de lucru tuturor acelor care sunt dornici să înțeleagă, să explice și să acționeze eficient în lumea în care trăim.

Cum se utilizează acest manual?

Acest simbol marchează secvența avută în vedere în cadrul unității de învățare.



Observăm și explorăm!

Indică un enunț obținut prin extrapolarea unor exemple sau proprietăți particulare. Acest enunț poate fi o definiție sau o teoremă.

Comentariile și atenționările sunt marcate prin acest semn.



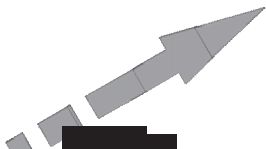
⚠ Dacă un element are invers, atunci acesta este unic.

Aplicațiile imediate sunt corelate cu explicațiile sau exemplele din corpul lecției, în dreptul cărora sunt situate.



📌 Descrie elementele inversabile ale monoizilor (\mathbb{Z}^*, \cdot) ; (\mathbb{Q}^*, \cdot) ; (\mathbb{R}^*, \cdot) .

Exemplele au legătură cu noțiunile definite anterior.



♦ Ce este un grup?

Să analizăm!

Comparând proprietățile adunării și înmulțirii pe mulțimile de numere, observăm că ceea ce distinge adunarea pe \mathbb{Z} de adunarea pe \mathbb{Q} este existența opusului, iar ceea ce distinge înmulțirea pe \mathbb{Q} de înmulțirea pe \mathbb{Z} este existența elementului invers față de înmulțire, pentru numerele nenule. Aceasta arată că există o diferență fundamentală între monoizii $(\mathbb{N}, +)$ și $(\mathbb{Z}, +)$. Proprietatea anterioară diferențiază și monoizii (\mathbb{Z}^*, \cdot) și (\mathbb{Q}^*, \cdot) .

În general

Fie $(M, +)$ un monoid cu element neutru e .

Un element $x \in M$ se numește *inversabil* dacă există un element $y \in M$ astfel încât $x * y = y * x = e$.

Elementul y se numește *inversul lui x* și este notat cu x^{-1} .

Exemple și contraexemplu

1) În monoidul $(\mathbb{N}, +)$ singurul element inversabil este 0, iar opusul său este tot 0. Niciun element $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ nu este inversabil, deoarece pentru $x \neq 0$ nu putem găsi $y \in \mathbb{N}$ astfel încât $x + y = y + x = 0$.

Subtitlurile punctează etape ale demersului didactic.



• O a doua proprietate: comutativitatea

Să analizăm!

Dreptunghiurile din figură sunt congruente, deci au arii egale.

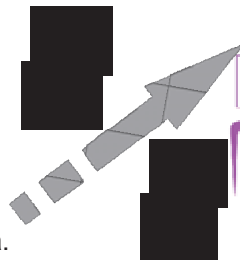
De aceea $4,3 \times 2,1 = 2,1 \times 4,3$.



$$\begin{array}{c} A \quad 4,3 \quad 2,1 \quad B \\ \hline 4,3 + 2,1 \end{array} = \begin{array}{c} C \quad 2,1 \quad 4,3 \quad D \\ \hline 2,1 + 4,3 \end{array}$$

Segmentele AB și CD sunt congruente, deci au lungimi egale. De aceea: $4,3 + 2,1 = 2,1 + 4,3$.

Această expresie evidențiază tipul de activitate care urmează.



Să demonstrăm!

Inelul $(A, +, \cdot)$ este un corp dacă și numai dacă (A^*, \cdot) este un grup, unde $A^* = A \setminus \{0\}$.

Presupunem mai întâi că $(A, +, \cdot)$ este un corp și arătăm că (A^*, \cdot) este grup.

Trebuie să demonstrăm doar că înmulțirea este lege internă pe A^* .

Fie $x, y \in A^*$; presupunem prin absurd că $x \cdot y \notin A^*$, deci că $x \cdot y = 0$.

Înmulțind la stânga cu inversul lui x , obținem:

$x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0$, deci $y = 0$. Contradicția obținută arată că $x \cdot y \in A^*$.

Reciproc, dacă (A^*, \cdot) este un grup, atunci orice element nenul din A este inversabil față de înmulțire. Deci $(A, +, \cdot)$ este corp.

Simbolul ... atenționează asupra faptului că anumite justificări au fost omise în cadrul demonstrației. Ele trebuie formulate de către cititor, pentru a participa activ la înțelegerea textului.

* Textele scrise cu corp de literă mai mic au doar rolul de exemplu. Ele se pot regăsi în paginile acestui manual.

Unitatea de învățare 1

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Calcul numeric

1. Efectuează:
- a) $-15 + 23$; b) $(-4 - 2) \cdot (4 + 2)$; c) $2 \cdot 0 + 3 \cdot (1 - 2)$;
d) $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{25} : \frac{3}{2}$; e) $6,72 - (2,53 - 4,41)$; f) $3\sqrt{2} - (\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2})$.

Proprietățile operațiilor cu numere

2. Calculează, folosind metoda factorului comun:
- a) $2007 \cdot 2008 - 2007 \cdot 2007$
b) $(4 + 6 + 8 + 10) : 2$.
3. Efectuează calculele, apoi stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor de mai jos:
- a) $(1 + 4) + 5 = 1 + (4 + 5)$; b) $(1 - 4) - 5 = 1 - (4 - 5)$;
c) $(1 \cdot 4) \cdot 5 = 1 \cdot (4 \cdot 5)$; d) $(1 : 4) : 5 = 1 : (4 : 5)$.

Procente

4. Calculează:
- a) cât reprezintă 25% din 1400;
b) cât va costa un produs de 20 lei după o ieftinire de 15%;
c) cât la sută din 800 reprezintă 250.

Calcul algebric

Alege răspunsurile corecte!

5. $(x - 1)^2$ este egal cu:
- a) $x^2 - 2x + 1$; b) $x^2 - 1$; c) $x^2 + 2x + 1$; d) $x^2 + 1$.
6. $x^2 - 3x + 2$ este egal cu:
- a) $(x - 3)(x + 2)$; b) $(x + 1)(x + 2)$; c) $(x - 1)(x - 2)$; d) $(x + 2)^2$.

Inegalități

7. Stabilește care dintre următoarele propoziții sunt adevărate:
- a) $4 \cdot 2 < 4 \cdot 3$; b) $(-4) \cdot 2 < (-4) \cdot 3$; c) $(-4) \cdot (-2) \leq (-4) \cdot 0$;
d) $1234 \cdot (-3) \geq 1234 \cdot (-4)$; e) $1234 \cdot 1233 \geq 1233 \cdot 1234$.

Intervale

8. Afirmațiile următoare se referă la numere reale. Identifică afirmațiile false și propune câte un contraexemplu.
- a) $x \leq a$ și $y \leq b \Rightarrow x + y \leq a + b$;
b) $x + y > a + b \Rightarrow x > a$ și $y > b$;
c) $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$;
d) $x \leq a$ și $y \leq b \Rightarrow x \cdot y \leq a \cdot b$;
e) $x \leq y \Rightarrow a \cdot x \leq a \cdot y$.
9. a) Scrie mulțimile de mai jos sub formă de interval și reprezintă-le apoi pe axă.
 $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$.
b) Determină mulțimile: $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus C$.

Ecuatii și inecuații liniare

Situații cotidiene care conduc la ecuații sau inecuații

Ne amintim și explorăm!

Uneori în viața de zi cu zi ne confruntăm cu probleme care conțin în enunțul lor cantități necunoscute. Pentru determinarea acestora trebuie, mai întâi, „să punem problema în ecuație”, cu alte cuvinte să identificăm relații matematice care descriu situația din enunț.

Să analizăm!

Exemplul 1

Doamna Georgescu dorește să-și cumpere un palton din Magazinul „Flora”. Pentru că inițial i s-a părut cam scump, a mai așteptat o lună. Între timp, paltonul s-a ieftinit cu 20 lei, apoi s-a mai aplicat încă o reducere de 15% și a ajuns astfel la prețul de 238 lei. Deoarece a uitat vechiul preț, doamna Georgescu ar vrea să-l calculeze pentru a vedea ce economie a făcut cumpărându-l mai târziu.

Notând cu p acest preț, doamna Georgescu a obținut:

$$p - 20 - \frac{15}{100}(p - 20) = 238.$$

Exemplul 2

Domnul Popescu a fost numit administrator al unui bloc cu 30 de apartamente, în care fiecare apartament are 2 sau 3 camere. Știind că în total sunt 78 de camere, dl. Popescu și-a propus să afle câte apartamente cu 2 camere și câte cu 3 camere sunt în bloc.

Pentru aceasta a notat cu d numărul apartamentelor cu două camere și cu t numărul celor cu 3 camere și a raționat astfel:

„Pe de o parte știu câte apartamente sunt în bloc, iar pe de altă parte știu câte camere sunt în bloc. Am, așadar, următoarele două relații: $d + t = 30$ și $2d + 3t = 78$.”

Exemplul 3

Întrebat de niște colegi ce vârste au copiii săi, domnul Gheorghiu le-a răspuns printr-o problemă: „Băiatul este cu 4 ani mai mare decât fata, iar anul viitor vor avea, împreună, 30 de ani.”

Primul prieten a gândit astfel: „Notez cu x vârsta fetei, deci vârsta băiatului este $x + 4$. Anul viitor cei doi copii vor avea vârstele $(x + 1)$, respectiv $(x + 5)$ și suma lor este 30, deci am relația: $(x + 1) + (x + 5) = 30$.”

Cel de-al doilea coleg a raționat în alt mod: „Să presupunem că vârsta fetei este f , iar vârsta băiatului este b . Despre f și b știu, așadar, că verifică două relații:

$$b = f + 4 \text{ și } (f + 1) + (b + 1) = 30.$$

Exemplul 4

Domnul Andronache este directorul unei firme. Făcând o estimare pentru luna în curs, a constatat că firma va avea cheltuieli în valoare de 21 000 de lei. Pe de altă parte, 25% din veniturile lunare sunt alocate pentru taxe și dezvoltare.

Dl. Andronache și-a pus problema ce venituri trebuie să obțină firma pentru a avea profit. Notând cu v aceste venituri, a observat mai întâi că suma rămasă după efectuarea tuturor plăților este egală cu $v - 21000 - \frac{25}{100}v$, iar pentru a nu avea pierderi

▲ Cea mai veche problemă cunoscută apare într-un papirus egiptean scris acum 3000 de ani. Problema cere să se afle o cantitate necunoscută, dacă știm că șeptimea ei împreună cu ea toată dau 19.

① Explică diferența dintre scăderea prețului unui produs cu 10% și scăderea prețului unui produs cu 10 bani.

② Explică în ce mod a obținut dl. Popescu aceste relații.

▲ Uneori aceeași problemă poate fi pusă în ecuație în mai multe moduri diferite.

③ Explică de ce în acest exemplu nu obținem o ecuație.

④ Construiește, folosind doar rigla și compasul, un triunghi care să aibă laturile egale cu 3 cm, 4 cm și 5 cm. Poți construi, folosind același procedeu, un triunghi având laturile de 3 cm, 4 cm și 8 cm? Explică!

⑤ Pune în evidență acești doi pași în fiecare dintre exemplele anterioare.

trebuie ca această sumă să fie mai mare decât 0, deci să aibă loc relația

$$v - 21000 - \frac{25}{100}v > 0.$$

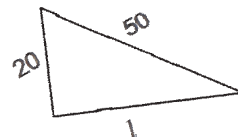
Exemplul 5

Organizatorii unui concurs sportiv trebuie să delimiteze cu jaloane un triunghi având una dintre laturi egală cu 20 m și altă latură egală cu 50 m. Pentru a determina ce lungime l poate avea cea de-a treia latură, organizatorii au folosit un rezultat de geometrie, și anume că într-un triunghi suma oricăror două laturi trebuie să fie mai mare decât cea de-a treia. Ei au obținut următoarele trei relații:

$$l + 50 > 20$$

$$20 + l > 50$$

$$50 + 20 > l.$$



În fiecare dintre exemplele analizate mai sus, am transpus enunțul problemei sub forma unor relații matematice. Am obținut astfel: ecuații, inecuații, sisteme de ecuații, sisteme de inecuații.

În general

Pentru a transpune enunțul unei probleme sub forma unor relații matematice, procedăm astfel:

Etapa I: alegerea necunoscutei

- Citim enunțul cu atenție.
- Ne imaginăm situația descrisă cât mai exact posibil.
- Separăm ceea ce „se dă” de ceea ce „se cere”.
- Identificăm mărimile necunoscute.
- Analizăm enunțul și căutăm mărimea necunoscută cea mai potrivită pentru a fi notată cu o literă.

Etapa a II-a: punerea problemei în ecuație

- Căutăm să exprimăm cât mai simplu legături între date și cerințe.
- Stabilim un plan de acțiune.
- Efectuăm calcule parțiale și evaluăm natura rezultatului.

Exerciții și probleme

Scrie ecuațiile, respectiv inecuațiile prin care se exprimă matematic următoarele probleme:

1. Dacă, pentru a îndeplini un contract de livrare, o uzină ar fabrica zilnic 18 mașini, la termenul stabilit ar lipsi 4 mașini. Dacă uzina ar fabrica zilnic câte 20 de mașini, la termenul stabilit ar fi cu 10 mai multe decât prevede contractul. Câte mașini au fost comandate prin contract și în cât timp este prevăzut a fi fabricate?
2. Află numerele naturale cu proprietatea că diferența dintre triplul fiecăruia și jumătatea sa este mai mică decât 10.
3. Perimetrul unui dreptunghi este de 220 m. Dacă micșorezi lungimea sa cu 20 m, cu cât ar trebui mărită lățimea pentru ca perimetrul să rămână același?
4. Perimetrul unui dreptunghi este de 70 dm și lățimea este de 40% din lungime. Determină aria dreptunghiului.
5. Întrebat odată ce oră este, Pitagora a răspuns: „Până la sfârșitul zilei a rămas de două ori $\frac{2}{5}$ din cât a trecut de la începutul ei.” Ce oră este?
6. Dintr-un coș cu mere, Dănuț ia $\frac{5}{8}$ din numărul lor, apoi vine Ana și ia $\frac{4}{5}$ din numărul merelor rămase. Au rămas 15 mere. Câte mere au fost la început în coș?

Metode de rezolvare a ecuațiilor, inecuațiilor și sistemelor



Analizăm și generalizăm!

Problemele formulate în prima parte a acestei unități de învățare ne-au condus la diverse relații care conțin cantitățile necunoscute. Vom determina, pentru fiecare problemă în parte, mulțimile ale căror elemente verifică ipotezele problemei.

◆ Ce este o ecuație?

Să ne amintim!

O *ecuație* este o propoziție în care apare o singură dată semnul egal. O ecuație are doi *membri*. În cei doi membri ai unei ecuații apar variabile, numite *necunoscute*. Aceste necunoscute pot lua valori dintr-o mulțime, numită *domeniul de definiție* al ecuației.

În cazul în care domeniul de definiție D nu este precizat, acesta trebuie determinat, punând condiția ca pentru orice element al lui D expresiile care apar în cei doi membri ai ecuației să aibă definită valoarea.

O *soluție* a unei ecuații este un element al domeniului de definiție cu proprietatea că, înlocuit în ecuație, conduce la o propoziție adevărată.

Exemple

1) $2(x + 1) + (2x - 3) = x - (-1 - x)$ este o ecuație având necunoscuta x . Cum ambii membri ai ecuației au sens pentru orice număr real x , domeniul de definiție este mulțimea \mathbb{R} .

Înlocuind x cu 1, rezultă propoziția adevărată $3 = 3$. Deci 1 este soluție a acestei ecuații. Pe de altă parte, înlocuind x cu 0, se obține propoziția falsă $-1 = 1$. Deci numărul 0 nu este soluție a acestei ecuații.

2) $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 4$ este o ecuație având necunoscuta x . Pentru ca numitorul care apare în membrul din stânga să fie diferit de 0 (împărțirea prin 0 nu are sens!) trebuie ca x să fie diferit de 1. Deci domeniul de definiție al ecuației este $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Numărul 3 este soluție a acestei ecuații.

3) $2x - y + 3 = 0$ este o ecuație având două necunoscute x și y , al cărei domeniu de definiție este $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Să analizăm!

A rezolva o ecuație înseamnă a găsi mulțimea tuturor soluțiilor acesteia.

Să considerăm, de exemplu, ecuația $2(x + 1) + (2x - 3) = x + (1 + x)$. Am văzut că numărul 1 este o soluție a acestei ecuații. Problema care se pune este dacă aceasta este singura soluție sau mai există și altele.

În general, pentru a determina toate soluțiile unei ecuații încercăm să o aducem la o formă cât mai simplă efectuând transformări echivalente ale acesteia.

În cazul ecuației menționate procedăm astfel:

Efectuăm calculele și reducem termenii asemenea în cei doi membri

$$\begin{aligned} 2x + 2 + 2x - 3 &= x + 1 + x \\ 4x - 1 &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Adunăm în ambii membri ai ecuației $-2x$ (sau scădem $2x$)

$$(4x - 1) - 2x = (2x + 1) - 2x$$

Folosim asociativitatea și comutativitatea adunării

$$\begin{aligned} (4x - 2x) - 1 &= (2x - 2x) + 1 \\ 2x - 1 &= 1 \end{aligned}$$

▲ Cuvântul *ecuație* provine din latinescul „*aequatio*” și înseamnă *egalare*.

❶ Stabilește dacă numărul -1 este o soluție a ecuației $x + 2(1 - x) = 5$.

❷ Identifică necunoscutele și domeniile de definiție pentru ecuațiile:

$$\lg(x + 1) + \frac{1}{x - 2} = -\frac{1}{2};$$

$$\sqrt{2x - 2} + y - 3 = 2.$$

❸ Identifică proprietățile operațiilor cu numere utilizate în aceste calcule.

❹ Explică de ce a fost util să adunăm $(-2x)$ la ambii membri. Ce s-ar fi întâmplat dacă adunam $(-4x)$?

5 Verifică faptul că numărul 1 este soluție a tuturor ecuațiilor care apar prin transformări echivalente din ecuația dată.

6 Explică de ce toate aceste transformări nu au modificat mulțimea soluțiilor ecuației.

7 Ce se întâmplă dacă înmulțim cu 0 ambii membri ai unei ecuații? De ce nu este aceasta o transformare care păstrează mulțimea soluțiilor?

8 Rezolvă ecuația $x \cdot (x - 2) + 3 \cdot (x - 2) = 0$. Ce transformări echivalente ai folosit?

9 Scrie o ecuație liniară cu necunoscutele x , y și z .

10 Exprimă în cuvinte transformările utilizate pentru rezolvarea ecuației $p - 2(p - 1) = 5$.

Adunăm 1 în ambii membri

$$2x - 1 + 1 = 1 + 1$$

$$2x = 2$$

Înmulțim ambii membri cu $\frac{1}{2}$ și folosim faptul că 1 este element neutru pentru înmulțire.

$$\frac{1}{2} \cdot (2x) = \frac{1}{2} \cdot 2$$

$$1 \cdot x = 1$$

$$x = 1$$

În urma tuturor acestor transformări am ajuns la concluzia că ecuația dată are aceeași mulțime de soluții cu ecuația $x = 1$. Deci mulțimea soluțiilor ecuației inițiale este $S = \{1\}$.

În general

Pentru a rezolva o ecuație, încercăm să o aducem la o formă cât mai simplă folosind transformări care nu schimbă mulțimea de soluții ale acesteia. Obținem astfel ecuații echivalente cu cea dată.

Transformările utilizate de obicei sunt:

- efectuarea de calcule algebrice în fiecare membru al ecuației;
- adunarea sau scăderea aceluiași termen în ambii membri ai ecuației;
- înmulțirea sau împărțirea ambilor membri cu același număr real nenul.

◆ Ce este o ecuație liniară?

Să analizăm!

În ecuațiile prezentate mai sus am întâlnit situații în care necunoscuta sau necunoscutele apăreau doar la puterea întâi, cum ar fi, de exemplu:

$$2 \cdot (x + 1) + (2x - 3) = x - (-1 - x) \text{ sau}$$

$$2x - y + 3 = 0.$$

În schimb, în ecuația $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 4$ necunoscuta x apare la numitorul unei fracții, iar numărătorul acesteia conține termenul x^2 .

În general

O ecuație care conține numai termeni de gradul întâi (adică termeni de forma $a \cdot x$, cu a număr real nenul și x necunoscută) și/sau termeni liberi (adică termeni care nu conțin necunoscute) se numește *ecuație liniară* (sau *ecuație de gradul întâi*).

◆ Cum rezolvăm ecuații liniare cu o necunoscută?

Să analizăm!

În unul dintre exemplele anterioare am obținut ecuația liniară cu necunoscuta p :

$$p - 20 - \frac{15}{100}(p - 20) = 238.$$

Utilizând transformări echivalente, obținem succesiv următoarele ecuații, care au aceleași mulțimi de soluții ca și ecuația inițială:

$$\frac{17}{20}p - 255 = 0.$$

$$\frac{17}{20}p = 255.$$

$$p = 300.$$

Deci ecuația inițială are ca soluție numărul 300.

În general

Orice ecuație liniară cu necunoscuta x poate fi adusă, prin transformări echivalente, la o ecuație de forma $ax + b = 0$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

În rezolvarea unei ecuații de forma $ax + b = 0$ putem folosi un algoritm care precizează mulțimea soluțiilor ecuației.

Să demonstrăm!

Despre mulțimea S a soluțiilor ecuației $ax + b = 0$, ($a, b \in \mathbb{R}$), $x \in \mathbb{R}$, putem spune că:

- $S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$, dacă $a \neq 0$.
- $S = \emptyset$, dacă $a = 0$ și $b \neq 0$
- $S = \mathbb{R}$, dacă $a = 0$ și $b = 0$.

Adunând $-b$ la ambii membri, deducem că ecuația $ax + b = 0$ este echivalentă cu ecuația $ax = -b$.

• Dacă $a \neq 0$, înmulțind cu inversul numărului a (deci cu $\frac{1}{a}$), obținem ecuația echivalentă $x = -\frac{b}{a}$. De aceea, pentru $a \neq 0$, mulțimea soluțiilor ecuației inițiale este $S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$.

• Dacă $a = 0$ și $b \neq 0$, ecuația $ax = -b$ se rescrie $0x = -b$. Cum pentru orice număr real x avem $0x = 0 \neq -b$, rezultă că ecuația $0x = -b$ nu are soluții. Deci $S = \emptyset$.

• Dacă $a = 0$ și $b = 0$, ecuația $ax = -b$ devine $0x = 0$. Cum orice număr real x verifică această relație, deducem că în acest caz avem $S = \mathbb{R}$.

11 Stabilește ce proprietăți ale operațiilor cu numere sunt utilizate în algoritmul de rezolvare a ecuației $3x + 7 = 0$.

◆ Cum rezolvăm sisteme de ecuații liniare?

Să ne amintim!

Un *sistem de ecuații* se obține prin operația logică „și” din două sau mai multe ecuații. O *soluție* a sistemului este o soluție comună a tuturor ecuațiilor acestuia. A *rezolva* un sistem de ecuații înseamnă a determina mulțimea tuturor soluțiilor sale. Dacă toate ecuațiile care alcătuiesc un sistem sunt liniare, atunci sistemul se numește *sistem de ecuații liniare* (sau *sistem de gradul întâi*).

Exemple

1. Sistemul $\begin{cases} 2x + 4y - 3 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$ este un sistem de două ecuații liniare cu necunoscutele x și y .

2. Sistemul $\begin{cases} x^2 - y^2 + 4 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$ este un sistem de două ecuații cu necunoscutele x și y . Cum prima ecuație nu este liniară, acesta nu este un sistem de ecuații liniare.

În continuare, vom fi interesați de rezolvarea sistemelor de gradul întâi. Am văzut că orice ecuație de gradul întâi cu necunoscuta x poate fi adusă, prin transformări echivalente, la forma $ax + b = 0$. Există oare o formă simplă la care putem aduce, prin transformări echivalente, un sistem de ecuații liniare, fără a schimba mulțimea soluțiilor?

Am mai văzut că, în funcție de valorile lui a și b , mulțimea de soluții a ecuației $ax + b = 0$ poate avea un element, o infinitate de elemente, sau poate fi mulțimea vidă. Regăsim oare aceste trei situații în rezolvarea sistemelor de ecuații liniare?

12 Formează un sistem de două ecuații liniare cu necunoscutele x și y care să conțină ecuația $2x - y - 1 = 0$.

Să analizăm!

Considerăm sistemul de ecuații liniare cu necunoscutele x și y :

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 6 - x + 3y \\ 2x - 3y - 3 = 1 + x - y \end{cases}$$

Adunând la ambii membri ai primei ecuații termenul $(x - 3y - 1)$ și reducând termenii asemenea se obține o ecuație echivalentă cu ea:

$$2x - y = 5.$$

În mod analog, cea de-a doua ecuație este echivalentă cu $x - 2y = 4$.

Transformările efectuate au avut ca scop obținerea unor ecuații echivalente cu cele inițiale, dar care conțin în membrul stâng numai termeni în care apar necunoscutele, iar în membrul drept termenul liber.

$$\text{În concluzie, sistemul dat este echivalent cu sistemul: } \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

În general

Prin efectuarea unor transformări echivalente convenabile ale ecuațiilor componente, orice sistem de două ecuații liniare cu necunoscutele x și y poate fi adus la

$$\text{forma } \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

13 Explică ce transformare a fost efectuată asupra celei de-a doua ecuații.

14 Scrie forma mai simplă la care poate fi adus un sistem liniar cu trei ecuații și trei necunoscute.

Să ne amintim!

Putem determina mulțimea soluțiilor unui sistem liniar prin **metoda reducerii**.

$$\text{Aplicăm această metodă în cazul sistemului } \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

15 Explică de ce am înmulțit a doua ecuație a sistemului cu -2 .

16 Rezolvă sistemul prin reducerea necunoscutei y .

Prima ecuație o lăsăm neschimbată (o înmulțim cu 1), iar pe cea de-a doua ecuație o înmulțim cu -2 .	$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \cdot (-2)$
Adunăm ecuațiile membru cu membru. În acest fel, reducem necunoscuta x și obținem o ecuație care are doar necunoscuta y .	$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases}$ <hr/> $/ \quad 3y = -3$
Înlocuim a doua ecuație a sistemului cu ecuația cu o singură necunoscută obținută la pasul anterior. Obținem un sistem echivalent cu cel dat.	$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3y = -3 \end{cases}$
Rezolvăm cea de-a doua ecuație a noului sistem, determinând valoarea lui y .	$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ y = -1 \end{cases}$
Înlocuim valoarea lui y în prima ecuație și calculăm pe x .	$\begin{cases} 2x - (-1) = 5 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$
Scriem soluția sistemului.	$S = \{(2; -1)\}$

Să aplicăm!

În unul dintre exemplele anterioare (referitor la numărul de apartamente cu două, respectiv cu trei camere ale unui bloc de locuințe), am obținut sistemul de ecuații

$$\text{liniare: } \begin{cases} x + y = 30 \\ 2x + 3y = 78 \end{cases}$$

Pentru a rezolva acest sistem prin metoda reducerii, este necesar să corelăm coeficienții variabilei x . Pentru aceasta, înmulțim prima ecuație cu 2 și pe cea de-a doua cu -1 , apoi adunăm ecuațiile astfel obținute. Rezultă sistemul echivalent:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ -y = -18 \end{cases}$$

Cea de-a doua ecuație a acestui sistem are soluția unică $y = 18$. De aceea, sistemul considerat are, la rândul său, mulțimea soluțiilor formată dintr-un singur element, și anume perechea $(12, 18)$.

În general

Unele sisteme de ecuații liniare au o singură soluție.
Un sistem de ecuații liniare care are mulțimea soluțiilor formată dintr-un singur element se numește *compatibil determinat*.

Exemplul 2

Am văzut că ecuația $0 \cdot x = 0$ are ca mulțime a soluțiilor \mathbb{R} , deci admite o infinitate de soluții. Apare în mod natural întrebarea: există oare sisteme de două ecuații cu două necunoscute care să aibă, la rândul lor, mai multe soluții?

Să analizăm!

Considerăm sistemul $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$, în care prima și cea de-a doua ecuație coincid. Perechile $(1, 0)$; $(0, 1)$; $(2, -1)$; $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ aparțin mulțimii soluțiilor acestui sistem. De aceea, sistemul dat are o infinitate de soluții.

Să analizăm ce se întâmplă atunci când aplicăm metoda reducerii sistemului $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 4x - 6y = -2 \end{cases}$. Înmulțind prima ecuație cu -2 și adunând ecuațiile astfel obținute, obținem ecuația $0 = 0$. Sistemul dat este deci, echivalent cu sistemul $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$.

Acest sistem admite o infinitate de soluții. De aceea, aceeași proprietate o are și sistemul inițial.

În general

Unele sisteme de ecuații liniare au o infinitate de soluții.
Un sistem de ecuații liniare care admite o infinitate de soluții se numește *compatibil nedeterminat*.

Ultima situație întâlnită în cazul ecuațiilor liniare a fost cea a ecuației incompatibile $0 \cdot x = b$, cu $b \neq 0$, care are mulțimea soluțiilor vidă. Apare în mod natural întrebarea: există oare sisteme liniare de două ecuații care nu admit soluții?

Să analizăm!

Sistemul $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$ nu admite soluții. Într-adevăr, înmulțind prima ecuație cu -2 și adunând ecuațiile, obținem sistemul echivalent $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 0 \cdot y = 1 \end{cases}$.

Cum egalitatea $0 = 1$ nu poate avea loc pentru nici o valoare a lui x și y , rezultă că sistemul considerat nu are soluție.

În general

Unele sisteme de ecuații liniare nu au soluție.
Un sistem de ecuații liniare care nu admite nici o soluție se numește *incompatibil*.

▲ Aplicând metoda reducerii unui sistem compatibil determinat, se ajunge la o ecuație de tip $a \cdot x = b$, cu $a \neq 0$.

17 Găsește y astfel încât perechea $(3, y)$ să fie soluție a sistemului $\begin{cases} x + y = 2 \\ -x - y = -2 \end{cases}$. Stabilește apoi dacă $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ aparține mulțimii soluțiilor.

18 Explică ce legătură este între ecuațiile sistemului $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$. Găsește apoi trei elemente diferite ale mulțimii soluțiilor.

▲ Aplicând metoda reducerii unui sistem compatibil nedeterminat, se ajunge la o ecuație de tip $0 \cdot x = b$.

19 Formează un sistem compatibil nedeterminat care să conțină ecuația $4x - 2y = -8$.

▲ Aplicând metoda reducerii unui sistem incompatibil, se ajunge la o ecuație de tip $0 \cdot x = b$, cu $b \neq 0$.

◆ Cum rezolvăm sisteme liniare cu mai multe necunoscute?

Ideea centrală a metodei reducerii, pe care am aplicat-o unor sisteme de forma

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, constă în înmulțirea ecuațiilor cu numere convenabil alese, astfel încât, prin adunarea ecuațiilor astfel obținute, una dintre necunoscute să se reducă. Această metodă poate fi aplicată însă și unor sisteme de ecuații liniare având mai multe necunoscute.

Fie sistemul de ecuații liniare cu necunoscutele x, y și z :
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + y - 2z = 7 \\ 4x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Pentru rezolvarea acestui sistem prin metoda reducerii putem proceda astfel:

Reducem mai întâi necunoscuta x din ultimele două ecuații. Pentru aceasta, înmulțim prima ecuație cu -3 și o adunăm cu a doua ecuație ...

$$\begin{array}{r} -3x - 3y - 3z = -6 \\ 3x + y - 2z = 7 \\ \hline -2y - 5z = 1 \end{array}$$

... apoi înmulțim prima ecuație cu -4 și o adunăm la a treia ecuație

$$\begin{array}{r} -4x - 4y - 4z = -8 \\ 4x - y + 2z = 0 \\ \hline -5y - 2z = -8 \end{array}$$

Obținem un sistem echivalent cu sistemul inițial

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y - 2z = 1 \\ -5y - 2z = -8 \end{cases}$$

Reducem necunoscuta y din ultimele două ecuații

$$\begin{array}{r} 10y + 25z = -5 \\ -10y - 4z = -16 \\ \hline 21z = -21 \end{array}$$

Obținem un sistem echivalent cu sistemul inițial

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y - 5z = 1 \\ 21z = -21 \end{cases}$$

Rezolvăm succesiv ecuațiile sistemului și obținem soluția $(1; 2; -1)$.

Să analizăm!

În rezolvarea sistemului de mai sus, am aplicat transformări echivalente pentru a aduce sistemul la o formă de „scară”. Mai precis, am făcut acele transformări prin care fiecare ecuație a sistemului obținut are mai puține necunoscute decât ecuația anterioară. Această metodă poate fi folosită în rezolvarea oricărui sistem liniar.

Să aplicăm!

Considerăm sistemul următor, de trei ecuații liniare cu două necunoscute:

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ x + \frac{1}{2}y = 2 \end{cases}$$

Aplicăm „metoda reducerii în scară” acestui sistem și îl aducem la forma

echivalentă:
$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ -7y = -14 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ultima ecuație a sistemului obținut (adică $0 \cdot y = 0$) este verificată pentru orice valoare a lui y . De aceea, această ecuație poate fi neglijată.

Sistemul obținut este compatibil determinat, având mulțimea soluțiilor $S = \{(1, 2)\}$. Aceeași mulțime de soluții o are deci și sistemul inițial.

20 Transformă sistemul dat, reducând mai întâi necunoscuta y .

21 Efectuează calculele intermediare și verifică faptul că $(1, 2, -1)$ este soluție a sistemului dat.

22 Aplică „metoda reducerii în scară” sistemului

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$$

și arată că este sistem incompatibil.

◆ Ce este o inecuație?

Să ne amintim!

O *inecuație* este o propoziție în care apare o singură dată semnul de inegalitate (strictă sau nu). O inecuație are doi *membri*, în care apar variabile numite *necunoscute*. Aceste necunoscute pot lua valori în *domeniul de definiție* al inecuației. O *soluție* a unei inecuații este un element al domeniului de definiție cu proprietatea că, prin înlocuirea sa în inecuație, conduce la o propoziție adevărată.

Exemple

1) $2x + 1 > x - 2$ este o inecuație cu necunoscuta x al cărei domeniu de definiție este \mathbb{R} .

Înlocuind x cu 0 în inecuație, obținem inegalitatea $1 > -2$, care reprezintă o propoziție adevărată. Deci 0 este soluție a acestei inecuații. De asemenea 1 este soluție, deoarece suntem conduși la propoziția adevărată $3 > -1$. În schimb, înlocuind x cu -3 obținem propoziția falsă $-5 > -5$. Deci -3 nu este soluție a inecuației date.

2) În exemplul 4 al primei părți a unității, am notat cu v veniturile unei firme. Ținând cont de cheltuielile existente, condiția de a nu avea pierderi a fost transpusă

în relația $v - 2100 - \frac{25}{100}v \geq 0$, care este o inecuație cu necunoscuta v .

3) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} \geq x + 1$ este o inecuație, având domeniul de definiție $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

4) $\log_2 x \leq x + 1$ este o inecuație, având domeniul de definiție $D = (0, +\infty)$. Numărul 1 este o soluție a acestei inecuații, deoarece $\log_2 1 = 0$ și $0 \leq 2$.

5) $x + y - 2 < 0$ este o inecuație cu necunoscutele x și y , având domeniul de definiție $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Perechea $(2; -1)$ este soluție a inecuației, în timp ce $(2; 3)$ nu este soluție a acestei inecuații.

23) Stabilește care dintre numerele $-2; 0,5; -4$ este soluție a inecuației $2x + 1 > x - 2$.

24) Explică de ce numărul (-1) nu aparține domeniului de definiție al inecuației din exemplul 3. Găsește apoi câteva soluții ale acestei inecuații.

25) Găsește trei soluții ale inecuației $x + y - 2 < 0$, apoi reprezintă-le într-un reper cartezian xOy .

◆ Cum rezolvăm inecuații de gradul întâi cu o necunoscută?

Să analizăm!

Pentru a rezolva o inecuație, trebuie să descriem complet mulțimea soluțiilor acesteia. Vom analiza în continuare inecuații de gradul întâi cu o necunoscută, adică inecuații în care apar doar termeni liberi și termeni în care apare necunoscuta la puterea întâi. Ca și în cazul ecuațiilor, pentru a rezolva o inecuație de gradul întâi, încercăm să o aducem la o formă cât mai simplă.

Exemplu

Dragoș și Eugen și-au propus să rezolve inecuația de gradul întâi cu necunoscuta x și cu domeniul de definiție \mathbb{R} : $-3x - x + 5 > 3 - 2x - 2$.

Pentru început, amândoi au redus termenii asemenea din cei doi membri, obținând inecuația $-4x + 5 > -2x + 1$.

În continuare, Dragoș a adunat $4x - 1$ în ambii membri, a redus din nou termenii asemenea, obținând inecuația $4 > 2x$, pe care a rescris-o „de la dreapta la stânga”, adică $2x < 4$.

În final, înmulțind ambii membri cu numărul pozitiv $\frac{1}{2}$, Dragoș a obținut inecuația $x < 2$. El a dedus că mulțimea soluțiilor inecuației este $S = (-\infty, 2)$.



26) Dă exemple de inecuații de gradul întâi cu o necunoscută.

27 Care dintre cele două rezolvări ți s-a părut mai ușoară? De ce?

28 Rezolvă inecuația

$$v - 2100 - \frac{25}{100}v \geq 0.$$

▲ Dacă $a < 0$, inecuația $ax > b$ este echivalentă cu inecuația $x < \frac{b}{a}$.

29 Ce poți spune despre inecuațiile de forma $0 \cdot x > b$?

Găsește mulțimile de soluții pentru inecuațiile:

$$0 \cdot x > 2,$$

$$0 \cdot x > -3 \text{ și}$$

$$0 \cdot x \leq 4\sqrt{2}.$$

30 Stabilește care dintre numerele 0 , $\frac{1}{2}$, 2 și 4 este soluție a sistemului:

$$\begin{cases} 2x \geq 1 \\ x - 3 < 1 \end{cases}$$

31 Găsește trei soluții ale sistemului din exemplul 2), apoi indică trei numere care nu sunt soluții ale acestuia.

Eugen, în schimb, a adunat termenul $(2x - 5)$ ambilor membri ai inecuației $-4x + 5 > -2x + 1$, ajungând la $-2x > -4$.

Înmulțind ambii membri cu numărul negativ $(-\frac{1}{2})$ și ținând cont că, prin înmulțirea cu un număr negativ, sensul unei inegalități se schimbă, Eugen a obținut inecuația $x < 2$, deci, la rândul său, a obținut mulțimea soluțiilor $S = (-\infty, 2)$.

În general

Pentru a rezolva o inecuație putem utiliza următoarele transformări:

- efectuarea de calcule algebrice în fiecare membru al inecuației;
- adunarea (scăderea) aceluiași termen în ambii membri;
- înmulțirea (împărțirea) ambilor membri cu același număr pozitiv nenul;
- înmulțirea (împărțirea) ambilor membri cu același număr negativ nenul, urmată de schimbarea sensului inecuației;
- schimbarea între ei a celor doi membri ai inecuației, însoțită de schimbarea sensului acesteia.

Prin aplicarea transformărilor de mai sus, se obțin *inecuații echivalente*. Inecuațiile echivalente au aceeași mulțime de soluții.

Orice inecuație de gradul întâi este echivalentă cu o inecuație de forma $ax > b$ (\geq , $<$, \leq).

◆ Cum rezolvăm sisteme de inecuații?

Să ne amintim!

Un *sistem de inecuații* este format din două sau mai multe inecuații legate prin cuvântul „și”. O *soluție* a unui sistem de inecuații este o soluție comună a tuturor inecuațiilor sistemului.

Exemple

$$1) \begin{cases} 2x \geq 1 \\ x - 3 < 1 \end{cases} \text{ este un sistem de inecuații cu necunoscuta } x.$$

Numărul 2 este soluție a acestui sistem, deoarece 2 este soluție atât a inecuației $2x \geq 1$, cât și a inecuației $x - 3 \leq 1$.

În schimb, numărul 5 nu este soluție a sistemului: deși el verifică prima inecuație, el nu este soluție a celei de-a doua inecuații, deci nici a sistemului.

2) Notând cu l lungimea laturii unui triunghi care urmează să fie delimitat cu jaloane, într-un exemplu anterior am obținut sistemul de inecuații cu necunoscuta l :

$$\begin{cases} l + 50 > 20 \\ 20 + l > 50 \\ 50 + 20 > l \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 - y + 1 \leq 2x \\ x - \cos 3y > x + \sin y \end{cases} \text{ este un sistem de două inecuații cu necunoscutele } x \text{ și } y.$$

Să analizăm!

Ne-am amintit cum se rezolvă ecuațiile, inecuațiile și sistemele de ecuații de gradul întâi. Ne propunem în continuare să găsim o metodă de rezolvare a sistemelor formate din inecuații de gradul întâi cu o singură necunoscută.

Să considerăm, de exemplu, sistemul $\begin{cases} 2x \geq 1 \\ x - 3 < 1 \end{cases}$.

Mai întâi, prin efectuarea unor transformări echivalente, rezolvăm fiecare inecuație în parte

$$\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x < 4 \end{cases}$$

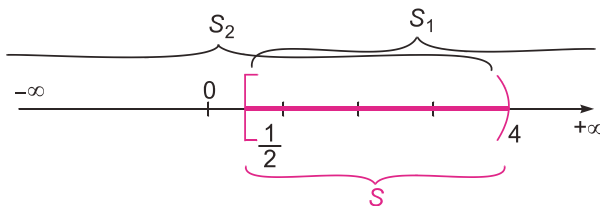
Scriem mulțimile de soluții ale inecuațiilor sistemului

$$\begin{cases} S_1 = \left[\frac{1}{2}, +\infty \right) \\ S_2 = (-\infty; 4) \end{cases},$$

Obținem mulțimea soluțiilor sistemului, intersectând mulțimile de soluții ale celor două inecuații

$$S = \left[\frac{1}{2}, +\infty \right) \cap (-\infty; 4) = \left[\frac{1}{2}, 4 \right).$$

32 Explică de ce trebuie să luăm intersecția mulțimilor de soluții.



În general

Pentru a rezolva un sistem de inecuații, rezolvăm fiecare inecuație în parte și intersectăm mulțimile de soluții.

33 Rezolvă sistemul

$$\begin{cases} l + 50 > 20 \\ 20 + l > 50 \\ 50 + 20 > l \end{cases}$$

Exerciții și probleme

1. Dintre propozițiile următoare, alege-le pe acelea care reprezintă ecuații:

a) $\frac{x-1}{x+1} = 2, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

b) $\frac{x-1}{y+1} = 2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

c) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{5}, x, y, z \in \mathbb{R}$

d) $(-1)^n = n, n \in \mathbb{Z}$

e) $2^x = x + 1, x \in \mathbb{Q}$

2. Rezolvă ecuațiile:

a) $2x + 1 - 3(x + 2) = x + 3$

b) $3x + 4(1 - x) = 2(2x + 1)$

c) $x + 2(1 + x) = 3(x - 1)$

3. Rezolvă sistemele:

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases},$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - y = 2 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}.$

4. Dintre propozițiile următoare, alege-le pe acelea care reprezintă inecuații:

a) $3x - 1 \leq x + 2$

b) $0 \cdot x \leq 5$

c) $x \leq x + 1 \leq 7$

d) $2 + 1 = 3 \leq x$

5. Rezolvă inecuațiile:

a) $x + 2 < 4x - 1$

b) $2(x + 1) \geq 3x - 2$

6. Rezolvă sistemele de inecuații:

a) $\begin{cases} -3x + 2 \geq x \\ 2x < 10 + x \end{cases};$ b) $\begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ 2x \geq x - 4 \\ x + 3 > 2x - 1 \end{cases}$

7. Scrie sub formă de sistem, apoi rezolvă:

a) $x - 2y = x + 4y + 1 = y - 3;$

b) $2x + 3 \leq x + 1 < x - 7$

8. Partea întreagă a unui număr real x (notată $[x]$), este numărul întreg n ales astfel încât $n \leq x < n + 1$.

a) Calculează $[2, 8]$ și $[-2, 8]$.

b) Rezolvă ecuația $[2x + 1] = 4$.

c) Determină numerele reale x pentru care $[x + 1] \leq 3,5$.

9. Rezolvă sistemul: $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 3x + y \leq 0 \end{cases}.$

10. Considerăm ecuația cu necunoscuta x , $(a^2 - 1)x = a - 1$, unde $a \in \mathbb{R}$ este un număr real.

a) Scrie explicit și rezolvă ecuația obținută pentru valoarea $a = 2$.

b) Determină a astfel încât $x = 0$ să fie soluție a ecuației.

c) Stabilește pentru ce valori ale lui a ecuația admite o soluție unică.

Rezolvarea unor ecuații, inecuații sau sisteme



Aplicăm și dezvoltăm!

1 Stabilește domeniul de definiție al ecuației

$\sqrt{x+2x-1} = \sqrt{x+x-4}$ și apoi rezolvă această ecuație.

2 Explică de ce 1 nu aparține domeniului de definiție al ecuației din exemplul 2. Stabilește apoi dacă ecuația

$\frac{x^2+2x-3}{x-1} = 2x+2$ are soluții.

3 Verifică faptul că 5 este soluție a ecuației inițiale.

4 Folosește notații convenabile și rezolvă sistemele:

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 2^{x+1} + 3^{y+1} = 16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log_2(x) + \log_3(y) = 3 \\ \log_2(x^2) + \log_3(y^3) = 7 \end{cases}$

Să analizăm!

Unele ecuații, inecuații sau sisteme pot fi reduse, prin efectuarea unor calcule, la o formă mai simplă, în care apar doar termeni de gradul întâi sau termeni liberi. În acest caz, putem folosi metodele deja învățate, pentru a obține soluțiile ecuațiilor, inecuațiilor sau sistemelor considerate inițial.

Exemplul 1

Să considerăm ecuația $x^2 - 2x + 4 = x^2 - 6x + 9$, cu necunoscuta x și domeniul de definiție \mathbb{R} . Cum în amândoi membrii apare termenul x^2 , aceasta nu este o ecuație de gradul întâi. Totuși, adunând $(-x^2)$ ambilor membri, obținem ecuația echivalentă $-2x + 4 = -6x + 9$, care este o ecuație de gradul întâi. Spunem că ecuația inițială este *reductibilă* la o ecuație de gradul întâi. Obținem că mulțimea soluțiilor ecuației date este $S = \left\{ \frac{5}{4} \right\}$.

Exemplul 2

Discutăm în continuare rezolvarea ecuației $\frac{x^2+2x-3}{x-1} = 2x-2$.

Necunoscuta este x , iar domeniul de definiție este $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Nici aceasta nu este o ecuație de gradul întâi, dar, scriind numărătorul fracției sub forma $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$ și simplificând fracția prin $(x-1)$, ajungem la ecuația de gradul întâi $x+3 = 2x-2$, care are soluția $x = 5$. Cum $5 \in D$, rezultă că ecuația considerată inițial are mulțimea soluțiilor $S = \{5\}$.

Să analizăm!

Uneori, pentru a rezolva ecuații, inecuații sau sisteme putem nota anumiți termeni în mod convenabil, introducând astfel noi necunoscute.

Să considerăm, de exemplu, sistemul de ecuații următor având necunoscutele x și y și domeniul de definiție $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b) \mid a \cdot b = 0\}$:

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 7 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$$

Observăm că, notând $\frac{1}{x} = u$ și $\frac{1}{y} = v$, obținem sistemul de ecuații liniare (în u și v)

$$\begin{cases} 2u + 3v = 7 \\ u - v = 1 \end{cases}, \text{ care admite soluția } (2, 1).$$

Revenind la necunoscutele inițiale x și y , deducem că ele verifică ecuațiile

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = 2 \\ \frac{1}{y} = 1 \end{cases},$$

deci $x = \frac{1}{2}$ și $y = 1$. Cum $\left(\frac{1}{2}, 1\right) \in D$, rezultă $S = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 1\right) \right\}$.

Să analizăm!

Unele inecuații pot fi rezolvate cu ajutorul sistemelor de inecuații. De exemplu, să considerăm inecuația $(x - 5)(x + 1) > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Aceasta se rezolvă astfel:

Produsul a două numere este pozitiv dacă ambele numere sunt fie pozitive, fie negative	$\begin{cases} x - 5 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x - 5 < 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases}$
Rezolvăm fiecare sistem în parte	$x \in (5, +\infty)$ sau $x \in (-\infty, -1)$
Mulțimea soluțiilor inecuației inițiale este reuniunea mulțimilor de soluții ale sistemelor obținute	$S = (5, +\infty) \cup (-\infty, -1)$

⚠ Inecuația $(x - 5)(x + 1) > 0$ a putut fi rezolvată cu ajutorul unor sisteme, deoarece unul dintre membri este 0.

⚠ Cuvântul „sau” conduce la operația de reuniune a mulțimilor.

Exerciții și probleme

1. Rezolvă ecuațiile:

a) $(x + 1)^2 = (x - 2)^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $\frac{x^2 + x}{x} = 1$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Rezolvă sistemul:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 3 \end{cases}$$

3. Determină mulțimile de soluții pentru:

a) $(2x - 1)(3x + 1) = 0$

b) $(2x - 1)(3x + 1) > 0$

c) $(2x - 1)(3x + 1) < 0$.

Ce relație există între mulțimile găsite la punctele a), b) și c)?

4. Rezolvă inecuațiile: a) $x^2 - 3x \leq 10$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $x(x - 1) \leq x(2x + 3)$, $x \in \mathbb{R}$.

Am reușit...?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...

- ◆ să recunosc ecuații, inecuații și sisteme liniare
- ◆ să asociez unei probleme o ecuație, inecuație sau sistem
- ◆ să aplic algoritmi de rezolvare a ecuațiilor, inecuațiilor sau sistemelor
- ◆ să stabilesc compatibilitatea unor sisteme de ecuații liniare?

Test de verificare

1. Dintre propozițiile următoare, identifică ecuațiile, inecuațiile și sistemele de gradul întâi:

a) $x^2 + x - 1 = 3$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $\frac{x-1}{3} = \frac{2x+1}{9} = \frac{-x+6}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$ d) $2x + 1 \geq x + 3$.

2. Rezolvă sistemul de inecuații: $\begin{cases} 3x + 1 \geq x - 3 \\ 2x < x + 1 \end{cases}$

3. Scrie ecuația corespunzătoare următoarei probleme: Determină un număr natural de șase cifre care are cifra unităților egală cu 4 și care se mărește de patru ori atunci când ultima cifră este mutată la începutul numărului.

4. Precizează dacă sistemul următor este compatibil:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2x + 4y - z = 3 \\ 4x + 2y + 5z = 4 \end{cases}$$

Lectură

Printre popoarele antice egiptenii ocupă un loc aparte. Realizările lor au intrigat și fascinat în egală măsură oamenii de cultură sau simplii turiști. Monumentalele piramide de la Gisech au condus la ideea că egiptenii aveau temeinice cunoștințe matematice. În sprijinul acestei presupuneri vine și papyrusul Rhind, descifrat la sfârșitul secolului al XIX-lea, ce conține informații importante despre cunoștințele matematice ale egiptenilor. Aceste cunoștințe erau, în majoritatea lor, algoritmice: metodele de rezolvare nu erau justificate prin raționament, ci fixate și transmise sub formă de „reguli”.

Unitatea de învățare 2

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Reprezentarea datelor statistice

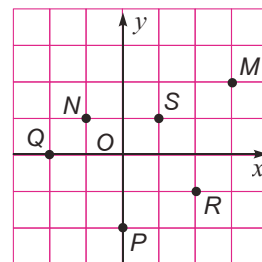
1. Într-un ziar sportiv a apărut următorul tabel comparativ al întâlnirilor directe dintre echipele de fotbal *Manchester United* și *AC Milan*:

	M.U.	A.C.M
Goluri	2,0	1,3
Șuturi de poartă	9,6	12,7
Cornere	3,9	6,1
Faulturi	14,6	12,7

Transformă acest tabel într-un grafic comparativ cu bare.

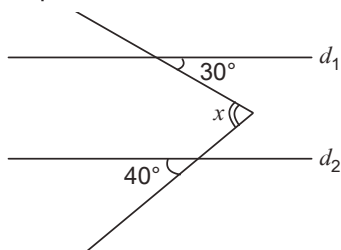
Sisteme de coordonate

2. Reprezintă într-un sistem ortogonal xOy punctele:
 $A(-2; 1)$, $B(3; -1)$, $C(-3; 0)$, $D(0; 2)$, $E(4; 4)$.
3. Observă reprezentarea alăturată, apoi asociază fiecare punct cu coordonatele sale.
- $(0; -2)$
 - $(-1; 1)$
 - $(3; 2)$
 - $(2; -1)$
 - $(1; 1)$
 - $(-2; 0)$

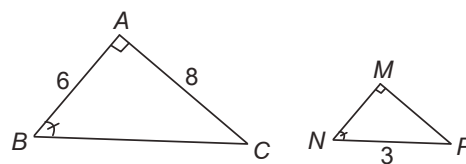


Elemente de geometrie

4. În figura de mai jos dreptele d_1 și d_2 sunt paralele. Calculează x .



5. Completează cu răspunsul corect!
 Lungimea laturii MP este ...

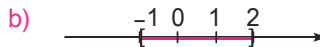
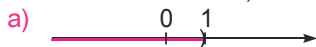


Ecuatii

6. Dintre perechile de numere de mai jos, identifică soluțiile ecuației $3x - y + 1 = 0$.
- $(1; 4)$; b) $(0; 1)$; c) $(1; 0)$; d) $(-1; -2)$.
7. Determină parametrul a , dacă ecuația $3ax - 1 = x + a$ are soluția 2.

Inecuații

8. Reprezintă pe axa numerelor mulțimile de soluții ale inecuațiilor:
- $3x - 1 \geq x + 1$ b) $x - 4 < 3x + 2$
9. Asociază fiecare dintre mulțimile următoare, reprezentate pe axă, cu o inecuație sau cu un sistem de inecuații:



Reprezentări grafice. Liniaritate

Reprezentarea și interpretarea datelor

Observăm și explorăm!

Pentru a analiza și a înțelege mai bine conținutul unor date este util să le reprezentăm într-un mod cât mai sugestiv. Folosind reprezentările grafice, putem formula diverse concluzii utile.

Exemplul 1: Râurile din România

Ionuț a realizat pentru ora de geografie un referat despre râurile de pe teritoriul României. Dorind să facă o comparație, și-a dat seama că are mai mulți indicatori care ar putea fi considerați: lungimea totală, lungimea pe teritoriul României, bazinul hidrografic (total, respectiv pe teritoriul României), debitul mediu.

Ionuț a alcătuit un tabel în care a sintetizat unele dintre aceste date și în care a ordonat râurile din țara noastră în funcție de lungimea lor pe teritoriul României. Pentru ca tabelul să fie cât mai sugestiv, el a inclus în tabel și lungimea totală a respectivelor râuri.

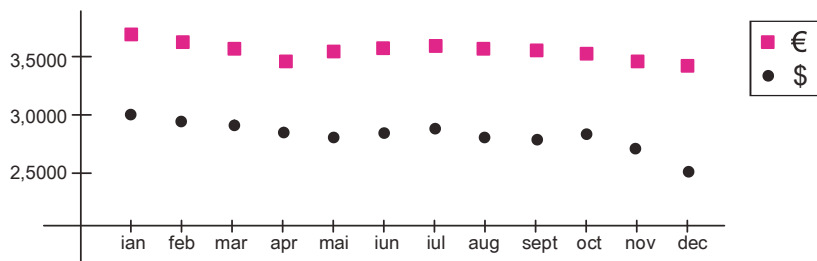
Denumirea cursului de apă	Lungimea pe teritoriul României (km)	Lungimea totală (km)
Dunăre	1075	2850
Mureș	761	803
Prut	742	953
Olt	615	615
Siret	559	706

Din tabel putem deduce imediat că:

- aproape o treime din lungimea totală a Dunării este pe teritoriul României;
- Oltul este singurul râu important care curge doar pe teritoriul țării noastre.

Exemplul 2: Cursul de schimb

Într-un raport privind situația financiară a băncii la care lucrează, domnul Popescu va include și evoluția cursului euro-leu și a cursului dolar-leu în cele 12 luni ale anului 2006. De pe site-ul Băncii Naționale a României, el a extras cursurile valutare medii pentru fiecare lună din 2006 și a realizat un grafic, pentru a ilustra mai bine evoluția acestor cursuri.



Din acest grafic putem deduce că:

- leul a avut o tendință generală de apreciere față de euro și dolar
- deprecierea dolarului față de leu a fost mai accentuată decât deprecierea monedei euro față de leu.

❶ *Informează-te și răspunde! Prin ce țări mai trec principalele râuri de pe teritoriul României?*

❷ *Completează tabelul alcătuit de Ionuț cu încă o coloană, în care exprimi procentual lungimea principalelor râuri de pe teritoriul României, raportată la lungimea lor totală.*

⚠ *În reprezentarea evoluției cursului de schimb, ne interesează doar regiunea din plan în care are relevanță informația. De aceea, originea sistemului de axe nu are coordonatele (0; 0).*

❸ *Presupunând că tendința de apreciere a leului față de euro s-ar fi menținut analog și în 2007, estimează rata medie de schimb euro-leu în decembrie 2007. Compară apoi rezultatul găsit cu evoluția reală a acestei rate.*

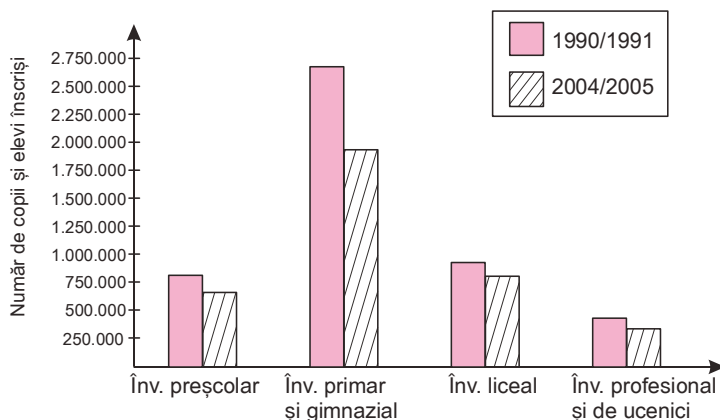
4 Estimează numărul elevilor cuprinși într-o formă de învățământ preuniversitar, în 1990 și în 2004.

Exemplul 3: Variația numărului elevilor

Doamna Marinescu a prezentat colegilor de la un institut de sociologie câteva date referitoare la evoluția populației școlare.

Pentru aceasta, ea a selectat din Anuarul Statistic al României numărul copiilor înscriși în diverse forme ale învățământului preuniversitar (învățământ preșcolar, primar și gimnazial, liceal, profesional și de ucenici) în anii școlari 1990/1991 și 2004/2005.

Pentru ca datele culese să fie redată într-un mod cât mai sugestiv, a fost realizat un grafic cu bare cu ajutorul căruia pot fi realizate mai ușor comparații și pot fi puse în evidență anumite tendințe.



Forma de învățământ

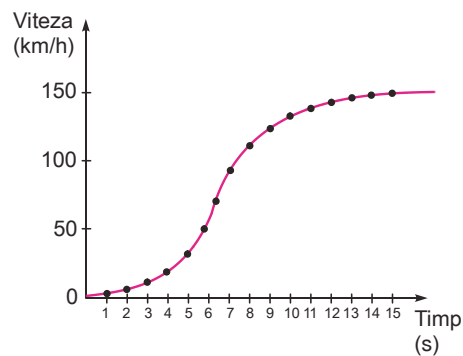
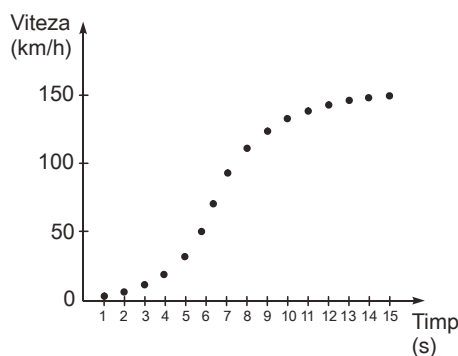
Din acest grafic, deducem că:

- populația școlară a scăzut între 1990 și 2004
- scăderea cea mai accentuată s-a înregistrat în învățământul primar și gimnazial.

5 Folosind graficul timp-viteză din imagine, estimează: a) accelerația mașinii în secunda 4; b) distanța parcursă de autoturism în 15 sec.

Exemplul 4: Creșterea vitezei unui automobil

Constructorii unui nou model de autoturism au testat cât de rapid poate atinge acesta o anumită viteză la pornirea de pe loc. Pentru aceasta ei au folosit un radar special, care înregistrează din secundă în secundă viteza mașinii, timp de 15 secunde. Pe baza datelor obținute, inginerii au realizat graficul de mai jos. Ulterior, ei au constatat însă că unind punctele corespunzătoare din primul grafic obțin o imagine mai sugestivă a comportării modelului testat.



Pe baza reprezentării grafice realizate, constructorii au dedus că:

- modelul realizat atinge viteza de 100 km/h în 8,3 sec de la plecarea de pe loc
- accelerarea maximă se petrece între 6,2 sec și 9,4 sec de la pornire.

În general

Reprezentările grafice transmit, într-o formă concisă și sugestivă, informații referitoare la un set de date. O alegere adecvată a modului de reprezentare a datelor evidențiază caracteristici, tendințe și proprietăți ale setului de date analizate.

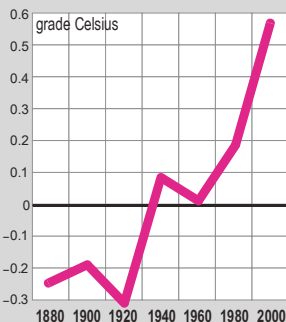
Exerciții și probleme

1. Specialiștii atrag din ce în ce mai des atenția asupra încălzirii globale a Pământului.

NE E DIN CE ÎN CE MAI CALD

În ultimii 125 de ani, temperaturile medii considerate normale la nivel global (marcate cu 0) au cunoscut o tendință clară de creștere.

Temperaturile înregistrate în ultimul deceniu au ajuns chiar la un nivel cu 0,6 grade Celsius mai ridicat decât cel obișnuit. Ceea ce îngrijorează cel mai mult nu este neapărat trendul ascendent, cât ritmul accelerat din ultimele decenii. Dacă se va păstra aceeași progresie, este posibil ca peste mai puțin de un secol climatul global și harta Terrei să se modifice radical.



SURSA: WIKIPEDIA

Sursa: Rev. Capital 5/1 febr. 2007

Observă reprezentarea grafică, apoi precizează:

- Ce semnificație au datele de pe abscisă și de pe ordonată?
- Pe ce se bazează afirmația: „există un ritm accelerat de creștere a temperaturii în ultimele decenii”?
- Cum a fost realizat acest grafic?

2. În tabelul alăturat sunt prezentate dobânzile de referință pentru împrumuturi în lei, practicate de băncile comerciale între septembrie 2005 și aprilie 2006.

a) Asociază acestui tabel o reprezentare grafică cât mai sugestivă.

b) Domnul Popescu a împrumutat de la o bancă, în august 2005, 43000 RON. El achită lunar câte 1000 RON, la care se adaugă dobânda la suma rămasă. Înregistrează într-un tabel sumele totale plătite de domnul Popescu în fiecare lună, din septembrie până în aprilie.

Luna	Dobânda
aprilie 2006	8,50
martie 2006	8,47
februarie 2006	7,50
ianuarie 2006	7,50
decembrie 2005	7,50
noiembrie 2005	7,50
octombrie 2005	7,72
septembrie 2005	8,25

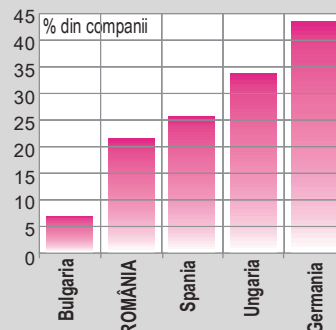
3. Companiile europene au ajuns la concluzia că multiculturalitatea angajaților lor poate aduce beneficii. Astfel, angajarea de personal cu competențe lingvistice a devenit o strategie importantă pentru majoritatea companiilor. În graficul cu bare alăturat sunt prezentate rezultatele unui studiu făcut în câteva țări europene asupra acestei strategii de angajare.

a) Formulează posibile explicații pentru deosebirile între țările analizate din perspectiva studiului prezentat.

b) Informează-te și răspunde. Câți dintre locuitorii României cunosc cel puțin o limbă străină?

VORBITORII NATIVI POT AJUTA EXPORTURILE

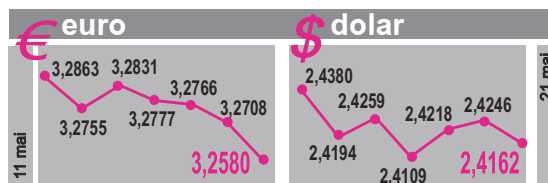
ATU. O bună parte din firme angajează vorbitori nativi de limbi străine pentru a aborda alte piețe.



SURSA: CE

Sursa: Rev. Capital 12/22 martie 2007

4. Reprezentările grafice alăturate prezintă variația cotației principalelor monede în raport cu moneda națională, în câteva zile ale lunii mai 2007.



a) Determină valoarea medie a cotației monedei euro în perioada analizată.

b) Precizează tendința cotației euro.

c) Calculează diferențele dintre cotațiile maxime și cele minime ale acestor monede.

Metoda grafică în studiul ecuațiilor și al inecuațiilor liniare

Analizăm și generalizăm!

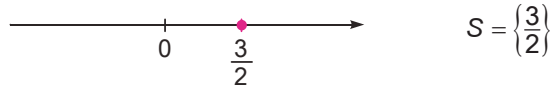
Să ne amintim!

Mulțimea soluțiilor unei ecuații sau a unei inecuații de gradul întâi poate fi reprezentată pe axa numerelor reale.

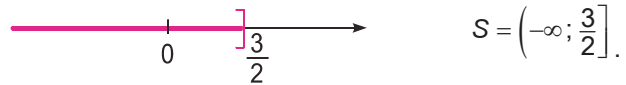
1 Reprezintă pe axa numerelor mulțimile de soluții pentru:

- a) $4x + 1 = 0$
- b) $4x + 1 > 0$
- c) $4x + 1 < 0$.

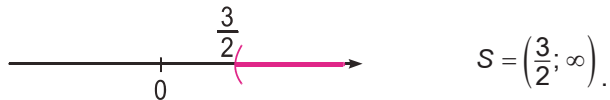
Astfel, în cazul ecuației $2x - 3 = 0$, mulțimea soluțiilor este $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$; acestei mulțimi îi corespunde, pe axa numerelor reale, un punct:



În schimb, considerând inecuația $2x - 3 \leq 0$, mulțimea soluțiilor este intervalul $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$, căruia îi corespunde pe axa numerelor reale o semidreaptă:



Analog, mulțimea soluțiilor inecuației $2x - 3 > 0$ este intervalul $\left(\frac{3}{2}; \infty\right)$, căruia îi corespunde pe axa numerelor reale o semidreaptă:



În lecțiile următoare vom reprezenta grafic și mulțimile de soluții ale unor ecuații, inecuații și sisteme mai generale.

◆ Cum interpretăm grafic ecuații de gradul întâi cu două necunoscute?

Să analizăm!

Am văzut că în cazul ecuațiilor și inecuațiilor de gradul întâi cu o necunoscută putem reprezenta mulțimile de soluții pe axa numerelor reale. Ne propunem în continuare să găsim o reprezentare și pentru soluțiile ecuațiilor și inecuațiilor de gradul întâi cu două necunoscute. În acest caz vom folosi reprezentări grafice într-un plan în care a fost ales un reper cartezian.

Să considerăm, de exemplu, ecuația de gradul întâi cu necunoscutele x și y :

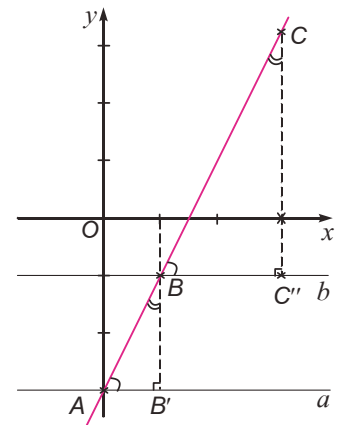
$$2x - y - 3 = 0$$

Observăm mai întâi că această ecuație admite mai multe soluții.

Astfel, $(0; -3)$, $(1; -1)$, precum și $(3; 3)$ sunt soluțiile ecuației date.

Fixăm în plan un reper cartezian xOy în care reprezentăm punctele $A(0; -3)$, $B(1; -1)$ și $C(3; 3)$ corespunzătoare soluțiilor indicate mai sus.

Desenul sugerează că cele trei puncte sunt situate pe o aceeași dreaptă. Acest fapt trebuie însă demonstrat riguros.



2 Găsește trei soluții ale ecuației $2x - y + 3 = 0$.

Să demonstrăm!

Punctele $A(0; -3)$, $B(1; -1)$ și $C(3; 3)$ sunt coliniare.

Vom face o construcție auxiliară: prin A și B ducem paralele a și b la dreapta suport a axei Ox , iar prin B , respectiv C , ducem paralele la axa Oy care intersectează dreptele a și b în B' , respectiv C' . Acestea au coordonatele $B'(1, -3)$, respectiv $C''(3, -1)$. Pentru a arăta că punctele A, B, C sunt coliniare este suficient să demonstrăm că $m(\widehat{ABB'}) + m(\widehat{B'BC''}) + m(\widehat{C''BC}) = 180^\circ$.

Unghiul $\widehat{B'BC''}$ este drept, deci $m(\widehat{B'BC''}) = 90^\circ$. Pentru a obține informații legate de celelalte două unghiuri, studiem triunghiurile $AB'B$ și $BC''C$. Remarcăm că acestea sunt dreptunghice, în B' , respectiv C'' , iar catetele lor au lungimile egale cu

$$AB' = 1; B'B = 2; BC'' = 2; C''C = 4.$$

Observăm că aceste lungimi sunt proporționale, deci $\triangle AB'B \sim \triangle BC''C$ (deoarece

$$\widehat{AB'B} \equiv \widehat{BC''C} \text{ și } \frac{AB'}{BC''} = \frac{B'B}{C''C}.$$

Deducem că $m(\widehat{BAB'}) = m(\widehat{CBC''})$, deci $m(\widehat{ABB'}) + m(\widehat{B'BC''}) + m(\widehat{C''BC}) = m(\widehat{ABB'}) + 90^\circ + m(\widehat{BAB'}) = 180^\circ$, ceea ce probează afirmația făcută.

Am arătat, așadar, că punctele A, B și C , corespunzătoare celor trei soluții $(0; -3)$; $(1; -1)$, respectiv $(3; 3)$, sunt coliniare.

În general, dacă $(x_0; y_0)$ este o soluție a ecuației $2x - y - 3 = 0$, punctul $P(x_0; y_0)$ este situat pe dreapta AB determinată de punctele de mai sus. Ne întrebăm dacă și reciprocă este adevărată, deci dacă orice punct de pe această dreaptă corespunde unei soluții a ecuației considerate.

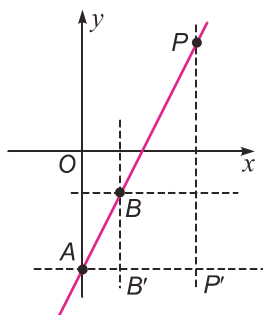
Să demonstrăm!

Dacă $P(x_0; y_0)$ este situat pe dreapta determinată de punctele $A(0; -3)$ și $B(1; -1)$, atunci $2x_0 - y_0 - 3 = 0$, deci $(x_0; y_0)$ este soluție a ecuației $2x - y - 3 = 0$.

Considerăm un punct $P(x_0; y_0)$ aflat pe dreapta AB .

Paralela prin P la Oy intersectează a în P' . Din asemănarea triunghiurilor $AP'P$ și $AB'B$ deducem:

$$\frac{AP'}{AB'} = \frac{PP'}{BB'}, \text{ deci } \frac{x_0}{1} = \frac{y_0 + 3}{2}, \text{ adică } 2x_0 - y_0 - 3 = 0.$$



În concluzie am stabilit o legătură între mulțimea soluțiilor ecuației $2x - y - 3 = 0$ și mulțimea punctelor din plan situate pe dreapta AB .

În general

Mulțimea soluțiilor unei ecuații de gradul întâi cu necunoscutele x și y se reprezintă, într-un plan în care a fost fixat un reper cartezian xOy , printr-o dreaptă. Această dreaptă este determinată de două puncte corespunzând unor soluții particulare ale ecuației.

Reciproc, orice dreaptă din acest plan este reprezentarea grafică a soluțiilor unei ecuații de gradul întâi cu două necunoscute.

3 Exprimă vectorii \overline{AB} și \overline{AC} în funcție de versorii axelor. Ce poți spune despre acești vectori?

4 Calculează lungimea segmentului PQ , dacă:

- $P(1; 2)$, $Q(1; 4)$;
- $P(1; 2)$, $Q(-5; 2)$.

5 Verifică faptul că $(4; 5)$ este o soluție a ecuației

$2x - y + 3 = 0$ și arată că A, B și D sunt coliniare, unde D este punctul de coordonate $(4; 5)$.

6 Determină mijlocul M al segmentului AB . Arată apoi că x_M și y_M (coordonatele lui M) verifică ecuația $2x_M - y_M - 3 = 0$.

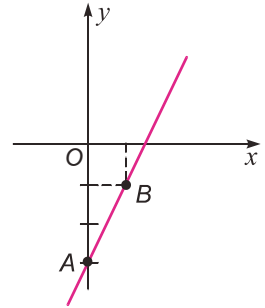
7 Scrie ecuația dreptei PQ , unde $P(1, 1)$ și $Q(-2, 3)$. Determină coordonatele altor trei puncte ale acestei drepte.

◆ Cum interpretăm grafic inecuații de gradul întâi cu două necunoscute?

Să analizăm!

- 8 Reprezintă grafic, față de același sistem de axe, mulțimile de soluții ale ecuațiilor:
 $2x + y - 3 = 0$;
 $2x + y = 0$;
 $2x + y + 1 = 0$.

Am arătat că există o legătură între interpretarea grafică a mulțimii soluțiilor ecuației $2x - 3 = 0$ și interpretarea grafică a mulțimii soluțiilor inecuației $2x - 3 \leq 0$: în timp ce mulțimea soluțiilor ecuației este reprezentată pe axa numerelor reale printr-un punct, inecuația are ca mulțime de soluții o semidreaptă, delimitată de acest punct pe axa numerelor.



Ne așteptăm ca un fenomen analog să aibă loc și în cazul ecuațiilor, respectiv inecuațiilor, de gradul întâi cu două necunoscute. Știm deja că soluțiile unei ecuații de gradul întâi cu două necunoscute pot fi reprezentate printr-o dreaptă și ne punem problema descrierii mulțimilor de soluții pentru inecuațiile asociate.

De exemplu, în cazul ecuației $2x - y - 3 = 0$, mulțimea soluțiilor este reprezentată de dreapta determinată de punctele $A(0; -3)$ și $B(1; -1)$.

Observăm că această dreaptă împarte planul în două *semiplane* și se întrebăm dacă există vreo legătură între acestea și inecuațiile $2x - y - 3 < 0$, respectiv $2x - y - 3 > 0$.

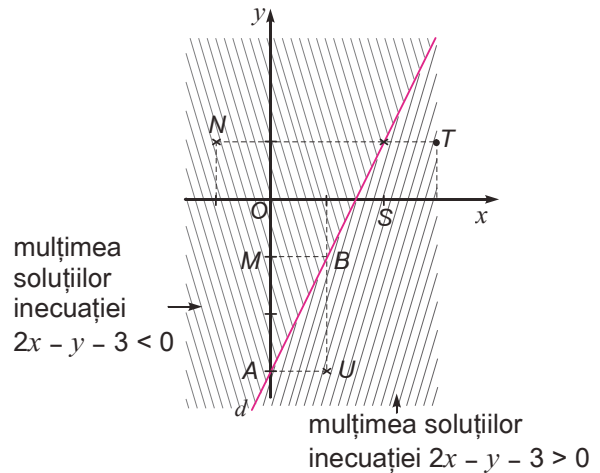
Pentru aceasta, să considerăm punctele $O(0, 0)$; $M(0, -1)$; $N(-1, 1)$, situate într-unul din semiplane, precum și punctele $S(2, 0)$; $T(3, 1)$; $U(1, -3)$, situate în semiplanul opus. Observăm că avem:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0 - 0 - 3 &= -3 < 0 \\ 2 \cdot 0 - (-1) - 3 &= -2 < 0 \\ 2 \cdot (-1) - 1 - 3 &= -6 < 0, \end{aligned}$$

deci punctele O, M, N corespund unor soluții ale inecuației $2x - y - 3 < 0$.

$$\begin{aligned} \text{Pe de altă parte, avem:} \\ 2 \cdot 2 - 0 - 3 &= 1 > 0 \\ 2 \cdot 3 - 1 - 3 &= 2 > 0 \\ 2 \cdot 1 - (-3) - 3 &= 2 > 0, \end{aligned}$$

deci punctele S, T și U corespund unor soluții ale inecuației $2x - y - 3 > 0$.



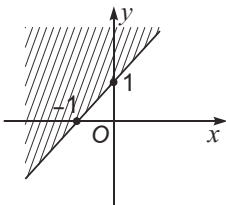
- 9 Identifică două soluții ale inecuației
 $2x + y - 3 = 0$.

- 10 Reprezintă grafic mulțimile de soluții ale inecuațiilor $2x + y - 3 \geq 0$ și $2x + y - 3 \leq 0$.

În general

Mulțimea soluțiilor unei ecuații de gradul întâi cu două necunoscute poate fi reprezentată printr-o dreaptă. Mulțimile de soluții ale inecuațiilor asociate acestei ecuații pot fi reprezentate prin semiplanele delimitate de această dreaptă. Semiplanele sunt deschise (adică nu conțin d) sau închise, după cum inecuațiile considerate sunt stricte sau nu.

- 11 Asociază domeniului evidențiat o inecuație:



Să aplicăm!

Pentru a reprezenta grafic mulțimea soluțiilor inecuației $x + y - 2 \geq 0$, procedăm astfel:

- reprezentăm grafic dreapta de ecuație $x + y - 2 = 0$;
- verificăm dacă $(0; 0)$ este soluție a inecuației date;
- deoarece $0 + 0 - 2 \geq 0$ este o propoziție falsă, mulțimea soluțiilor inecuației este acela dintre semiplanele determinate de dreapta d , care *nu* conține punctul O .

◆ Cum interpretăm grafic sisteme de ecuații liniare?

Să analizăm!

Am demonstrat că mulțimea soluțiilor unei ecuații liniare cu două necunoscute se reprezintă în plan printr-o dreaptă. Aceasta înseamnă că în cazul unui sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute, fiecareia dintre ecuații îi corespunde o dreaptă. Știm că două drepte din plan pot fi concurente, confundate sau paralele. Pe de altă parte, am arătat că sistemele de ecuații liniare pot fi compatibil determinate sau compatibil nedeterminate sau incompatibile. Ne propunem să investigăm legătura dintre compatibilitatea unui sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute și poziția relativă a dreptelor corespunzătoare ecuațiilor sistemului.

Exemplul 1

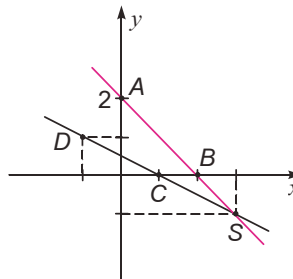
Considerăm sistemul de ecuații liniare cu necunoscutele x și y :
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

Acesta este un sistem compatibil determinat, având soluția $(3; -1)$.

Vrem să determinăm grafic soluția acestui sistem. Pentru aceasta, reprezentăm dreptele corespunzătoare ecuațiilor sale.

Prima ecuație admite soluțiile $(0; 2)$ și $(2; 0)$. De aceea, punctele $A(0; 2)$ și $B(2; 0)$ determină dreapta corespunzătoare ecuației $x + y - 2 = 0$.

Analog, mulțimea soluțiilor ecuației $x + 2y - 1 = 0$, este reprezentată de dreapta determinată de punctele $C(1; 0)$ și $D(-1; 1)$. Reprezentând ambele drepte în reperul cartezian xOy , observăm că ele sunt concurente în punctul $S(3; -1)$, ale cărui coordonate reprezintă chiar soluția sistemului considerat.



12 Rezolvă sistemul

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$
 prin metoda reducerii și verifică faptul că $(3; -1)$ este soluția sa unică.

13 Determină intersecțiile cu axele de coordonate ale dreptei de ecuație

$$x + 2y - 1 = 0.$$

14 Explică de ce punctul de intersecție a dreptelor corespunde soluției sistemului.

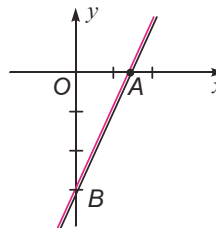
În general

Un sistem de două ecuații cu două necunoscute este compatibil determinat dacă și numai dacă dreptele corespunzătoare ecuațiilor sistemului sunt concurente. Coordonatele punctului de intersecție a celor două drepte reprezintă soluția sistemului dat.

Exemplul 2

Sistemul
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$$
 este compatibil nedeterminat: cea de-a doua ecuație se obține din prima prin înmulțire cu 2.

Dreapta corespunzătoare primei ecuații are ca intersecție cu axa Ox punctul $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, iar ca intersecție cu axa Oy punctul $B(0, -3)$. Pe de altă parte, dreapta corespunzătoare celei de-a doua ecuații are aceleași puncte de intersecție cu cele două axe. Deoarece aceste două drepte au în comun punctele A și B , deducem că ele coincid.



15 Explică ce legătură există între faptul că sistemul are o infinitate de soluții și faptul că cele două drepte coincid.

În general

Un sistem de două ecuații cu două necunoscute este compatibil nedeterminat dacă și numai dacă dreptele corespunzătoare ecuațiilor sistemului coincid.

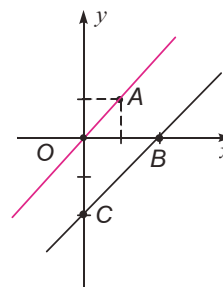
Exemplul 3

16 Putea fi găsită dreapta corespunzătoare primei ecuații din exemplul 3, folosind intersecția cu axele?

17 Ce s-ar fi întâmplat dacă dreptele erau concurente?

Sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$ este incompatibil.

Prima ecuație admite soluțiile particulare $(0; 0)$ și $(1; 1)$, deci mulțimea soluțiilor acestei ecuații se reprezintă prin dreapta determinată de punctele $O(0; 0)$ și $A(1; 1)$. Analog, mulțimea soluțiilor celei de-a doua ecuații se reprezintă prin dreapta BC , unde $B(2; 0)$ și $C(0; -2)$. Reprezentând cele două drepte în același sistem de axe, observăm că ele sunt paralele.



În general

Un sistem de două ecuații cu două necunoscute este incompatibil dacă și numai dacă dreptele corespunzătoare ecuațiilor sistemului sunt paralele.

Putem sistematiza legătura dintre compatibilitatea unui sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute și poziția relativă a dreptelor asociate ecuațiilor prin următorul tabel:

	Cazul I	Cazul II	Cazul III
Forma ecuațiilor (exemple)	$\begin{cases} -2x + 7y = -11 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -2x + 6y = -4 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 6x - 2y = 5 \end{cases}$
Numărul soluțiilor	una singură	o infinitate	nici una
Mulțimea de soluții	$S = \{(2; -1)\}$	$S = \{(x; y) \mid x - 3y = 2\}$	$S = \emptyset$
Compatibilitatea sistemului	Sistem compatibil determinat	Sistem compatibil nedeterminat	Sistem incompatibil
Interpretarea grafică a sistemului	două drepte care se intersectează într-un punct ale cărui coordonate formează soluția sistemului	două drepte care coincid; mulțimea punctelor acestor drepte identice reprezintă mulțimea de soluții a sistemului	două drepte paralele distincte; intersecția nu conține nici un punct

Să aplicăm!

Metoda grafică poate fi utilizată și pentru interpretarea sistemelor de trei ecuații cu două necunoscute. De această dată vom avea trei drepte în plan; poziția lor relativă ne va da informații cu privire la compatibilitatea sistemului. Mai precis: sistemul este compatibil dacă și numai dacă toate dreptele trec prin același punct.

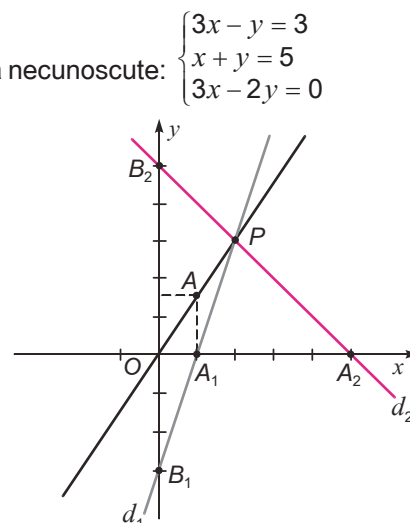
Exemplul 4

Considerăm sistemul de trei ecuații cu două necunoscute: $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x + y = 5 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

Reprezentăm grafic dreptele d_1 , d_2 și d_3 corespunzătoare celor trei ecuații. Obținem astfel dreptele A_1B_1 , A_2B_2 și OP , unde $A_1(1; 0)$;

$B_1(0; -3)$, $A_2(5; 0)$, $B_2(0; 5)$, $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$. Obținem, în concluzie, reprezentarea grafică alăturată.

Desenul indică faptul că cele trei drepte au un punct comun, și anume punctul $P(2; 3)$. Aceasta înseamnă că sistemul considerat admite soluția $(2; 3)$. Deci sistemul dat este compatibil.



18 Rezolvă sistemul din exemplul 4 folosind metoda reducerii.

Exerciții și probleme

1. Se dă inecuația $2x - 3y > 6$. Într-un plan în care s-a fixat un reper, considerăm punctele:

$$A\left(-3; \frac{15}{2}\right) \quad D\left(\frac{11}{3}; 0\right) \quad G\left(-3; -\frac{7}{3}\right)$$

$$B\left(-2; -\frac{2}{3}\right) \quad E(1; 3) \quad H\left(-3; -\frac{9}{2}\right)$$

$$C(0; -2) \quad F(4; 1) \quad I(-10; 1).$$

- a) Marchează cu roșu punctele ale căror coordonate verifică inecuația și cu verde pe celelalte. Fixează alte 10 puncte în plan și colorează-le după regula de mai sus.
 b) Încearcă să ghicești care este frontiera care separă zona „punctelor roșii” de cea a punctelor verzi. Colorează cu roșu zona reprezentând toate soluțiile inecuației.
 c) Colorează cu roșu zona reprezentând toate soluțiile inecuațiilor: $2x - 3y < 6$ și $2x - 3y \leq 6$. Folosește două repere carteziane diferite.
 d) Rezolvă grafic inecuațiile $x \geq 5$ și respectiv $x \leq 2$.

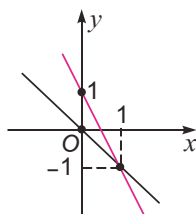
2. Reprezintă dreptele de soluții ale ecuațiilor ce compun sistemele următoare, apoi determină mulțimile de soluții ale sistemelor:

$$a) \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} 2x = y \\ x + y = 0 \end{cases};$$

$$c) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 2 - x \end{cases}; \quad d) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

3. Scrie un sistem care are ca soluție $(-1; 1)$. Mai poți scrie încă un astfel de sistem?

4. În figura alăturată sunt reprezentate dreptele de soluții ale ecuațiilor unui sistem. Care este soluția sistemului?



5. Determină numerele reale a și b știind că $(1; 3)$ este soluție a sistemului:

$$a) \begin{cases} x - ay = 4 \\ bx + y = 1 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} 2x + ay - 1 = 0 \\ 3x - y = b \end{cases};$$

$$c) \begin{cases} ax - by = 3 \\ bx + y = 2 \end{cases}$$

6. Adaugă încă o ecuație sistemului $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$, astfel ca noul sistem obținut să devină
 a) compatibil; b) incompatibil.

7. Folosind reprezentarea pe hârtie milimetrică, aproximează soluțiile sistemelor:

$$a) \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x - y + 0,5 = 0 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} x + y = 1,3 \\ 2x - y = 0,6 \end{cases};$$

$$c) \begin{cases} x - y = \sqrt{2} \\ x + y = \sqrt{3} \end{cases}; \quad d) \begin{cases} x = 2 \\ x + 3y = 1 \end{cases}.$$

Verifică dacă astfel ai obținut soluții ale sistemelor date.

8. Reprezintă grafic dreptele de soluții ale ecuațiilor ce compun sistemele următoare, apoi determină soluțiile sistemelor:

$$a) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 4x - 3y = -13 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases};$$

$$c) \begin{cases} 7x + 5y = -1 \\ -5x + y = -13 \end{cases}$$

9. Folosind proprietățile numerelor reale, rescrie sub forma unui sistem ecuațiile:

$$a) (x - y)^2 + (2x + y - 1)^2 = 0;$$

$$b) |x - y + 1| + |2x - 3y| = 0;$$

$$c) \sqrt{x - 2y} + \sqrt{x + y + 1} = 0;$$

$$d) x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y + 1 = 0.$$

10. Determină numărul de soluții ale sistemelor:

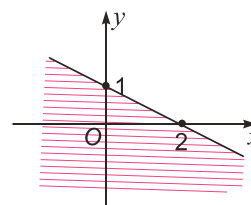
$$a) \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + y = 4 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + y = 1 \\ -x + 2y - 1 = 0 \end{cases}.$$

11. Determină numerele reale a și b știind că sistemele de mai jos au aceeași soluție:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + by = 1 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} ax - 3y = 1 \\ x + y = 8 \end{cases}.$$

12. a) Reprezintă grafic mulțimea soluțiilor inecuației:
 $x + 2y - 3 \geq 0$.

- b) Determină o inecuație a cărei mulțime de soluții este cea reprezentată mai jos.





Aplicăm și dezvoltăm!

1 Fie funcția $x \mapsto ax + b$. Cum putem decide rapid dacă originea reperului se află sau nu deasupra graficului funcției?

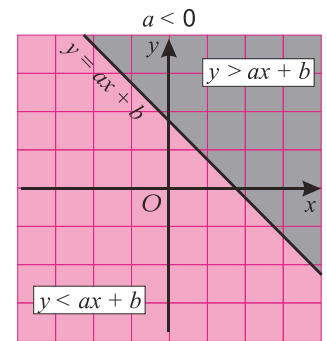
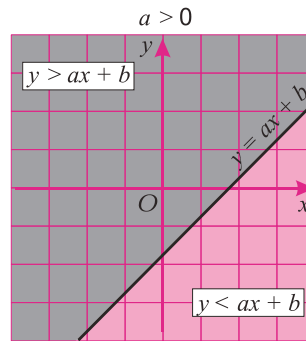
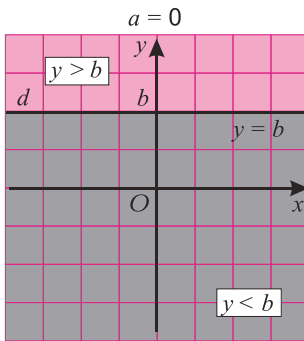
Cum rezolvăm sisteme de inecuații?

Am văzut că mulțimea soluțiilor unei inecuații liniare cu două necunoscute se reprezintă printr-un semiplan.

Considerăm o dreaptă d , având ecuația $y = ax + b$. Atunci, coordonatele tuturor punctelor $M(x; y)$ situate:

- a) deasupra dreptei d , verifică inecuația $y > ax + b$.
- b) sub dreapta d , verifică inecuația $y < ax + b$.
- c) pe dreapta d , verifică ecuația $y = ax + b$.

Sunt posibile situațiile ilustrate mai jos:



Dreptele de ecuații

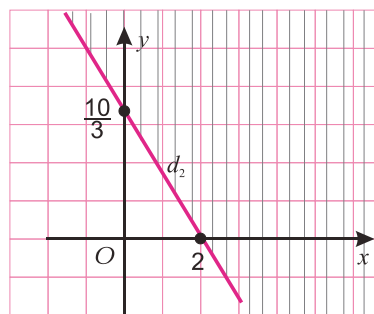
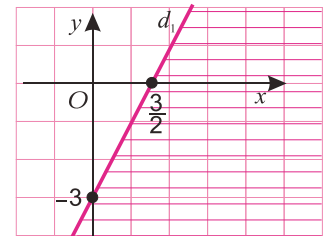
$$y = 2x - 3 \text{ și } 5x + 3y = 10$$

împart planul în patru regiuni. Caracterizează prin inecuații fiecare regiune în parte.

Ne propunem să reprezentăm grafic mulțimea soluțiilor sistemului de inecuații

$$\begin{cases} 2x - y > 3 \text{ (I)} \\ 5x + 3y > 10 \text{ (II)} \end{cases}$$

Inecuația (I) este echivalentă cu inecuația $y < 2x - 3$. Considerăm dreapta d_1 de ecuație $y = 2x - 3$. Folosind punctul b) de mai sus, putem stabili că perechile $(x; y)$ care verifică inecuația (I) sunt situate „sub” dreapta d_1 .



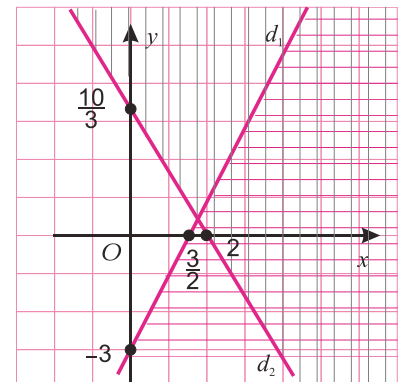
Inecuația (II) este echivalentă cu inecuația $y > -\frac{5}{3}x + \frac{10}{3}$. Considerăm dreapta d_2 de ecuație $y = -\frac{5}{3}x + \frac{10}{3}$. Din punctul a) de mai sus rezultă că perechile $(x; y)$ care verifică inecuația (II) sunt situate „deasupra” dreptei d_2 .

Reprezintă grafic soluția sistemului de inecuații:

$$\begin{cases} 3x - 2y > 1 \\ 2x + y < 2 \end{cases}$$

Soluțiile sistemului de inecuații sunt acele perechi $(x; y)$ care verifică ambele inecuații. Ele sunt situate în zona de intersecție a celor două domenii.

Se poate întâmpla ca intersecția celor două domenii să fie mulțimea vidă. În acest caz, sistemul de inecuații nu are soluții.



◆ Cum rezolvăm probleme cu ajutorul sistemelor de inecuații?

Exemplu

Un vagon de marfă poate transporta maxim 20 de containere, încărcătura maximală a vagonului fiind de 32 tone. Un container cu grâu cântărește 1 tonă și un container cu porumb cântărește 2 tone. Este necesar să se expedieze cel puțin 7 containere cu porumb și cel puțin 8 containere cu grâu. Ce posibilități sunt de a face transportul?

Rezolvare

Notăm cu x – numărul de containere cu grâu posibil de expediat și cu y – numărul de containere cu porumb posibil de expediat.

Constrângeri „evidente”: x și y sunt numere naturale.

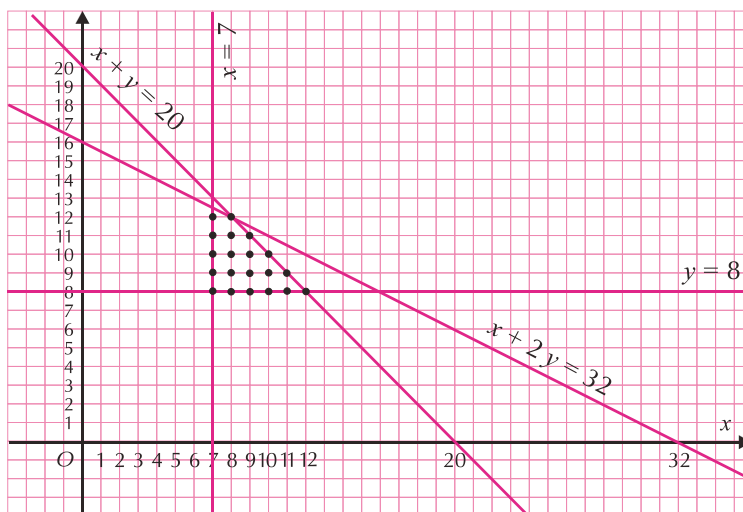
Constrângeri asupra numărului de containere: $x \geq 7$; $y \geq 8$; $x + y \leq 20$.

Constrângeri asupra masei: $x + 2y \leq 32$.

Formăm sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} x \geq 7, y \geq 8 \\ x + y \leq 20 \\ x + 2y \leq 32 \end{cases}$$

unde $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$.



▲ Alegem convenabil variabilele

▲ Reprezentăm grafic sistemul („poligonul condițiilor”)

Soluțiile sistemului sunt:

- ◆ (7; 8); (7; 9); (7; 10); (7; 11); (7; 12);
- ◆ (8; 8); (8; 9); (8; 10); (8; 11); (8; 12).
- ◆ (9; 8); (9; 9); (9; 10); (9; 11);
- ◆ (10; 8); (10; 9); (10; 10);
- ◆ (11; 8); (11; 9); (12; 8).

Graficul permite lectura directă a posibilităților de expediție:

- ◆ Expedierea a 7 containere cu porumb poate fi realizată împreună cu 8; 9; 10; 11 sau 12 containere cu grâu.
 - ◆ Expedierea a 8 containere cu porumb poate fi realizată împreună cu 8; 9; 10; 11 sau 12 containere cu grâu.
 - ◆ Expedierea a 9 containere cu porumb poate fi realizată împreună cu 8; 9; 10 sau 11 containere cu grâu.
 - ◆ Expedierea a 10 containere cu porumb poate fi realizată împreună cu 8; 9 sau 10 containere cu grâu.
 - ◆ Se mai pot expedia 11 containere cu porumb și 8 sau 9 containere cu grâu sau 12 containere cu porumb și 8 containere cu grâu.
- Nu se pot trimite mai mult de 12 containere cu porumb.

▲ Interpretăm rezultatele folosind lectura grafică

4 Explicitează toate soluțiile problemei.

5 Modifică una dintre condiții pentru ca problema să aibă mai puține soluții.

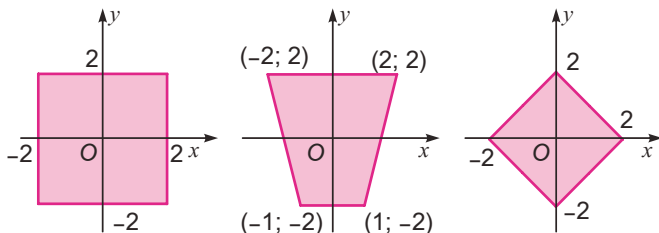
Exerciții și probleme

1. Rezolvă sistemele de inecuații, reprezentând grafic mulțimea soluțiilor:

a) $\begin{cases} 2x - 3y < 7 \\ -4x + y < -5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -9x + 3 > 3y - 5 \\ 2x + 5y > 7 - x \end{cases}$;

c) $\begin{cases} -x + y > 3 \\ 2x - 4y < -2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2(x - 2y) > 3(3x + y) \\ x + 6y - 2 < 12 - y \end{cases}$.

2. Caracterizează printr-un sistem de inecuații mulțimea punctelor $M(x; y)$ situate în zona colorată a fiecărei figuri;



3. Un librar cumpără albume cu 5 lei și le vinde cu 8 lei bucata. Impozitul revine la 0,8 lei pe album, la care se adaugă o sumă fixă de 4 lei.

- a) Calculează, în funcție de x , profitul obținut din vânzarea a x albume.
b) Câte albume trebuie să vândă pentru ca profitul să fie cuprins între 150 lei și 160 lei?

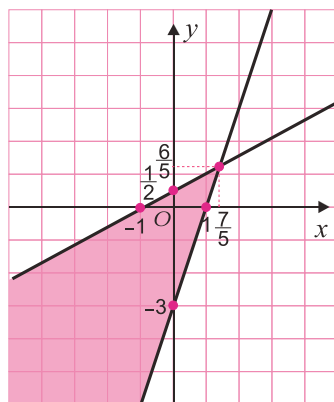
4. Printre următoarele sisteme de inecuații, unul singur are ca soluții mulțimea indicată în sistemul de axe de coordonate. Care este acesta?

a) $\begin{cases} 3x - y > 3 \\ -x + 2y > 1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x + 1 < 2y + x \\ 3 + 6x - 2y > 3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} (x - 1)(y + 3) > xy \\ \frac{y + 2x - 4}{3x - 3 - y} > 1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} y + 3 > 3x \\ 2y - x < 1 \end{cases}$.

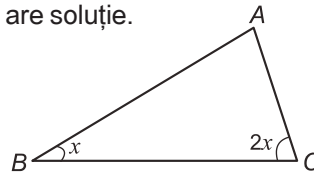


5. Rezolvă grafic fiecare inecuație:

a) $2x + y > 3$; b) $5x + 3y > -2$;
c) $x + 3y < 6$; d) $3x + 9 < -5 - y$.

6. Un vaporăș coboară în aval pe un râu 10 km, apoi urcă în amonte 6 km. Viteza de deplasare a râului este de 1 km/h. Între ce limite trebuie să varieze viteza dezvoltată de vaporăș, astfel încât întreaga călătorie să dureze între 3 și 4 ore?

7. În triunghiul ABC , află cum trebuie ales x pentru ca unghiul A să fie obtuz, iar unghiul B să aibă mai puțin de 35° . Formulează o problemă asemănătoare, care nu are soluție.



8. Un dreptunghi are aria de 480 m^2 . Arată că una dintre laturile sale este mai mare de 21 m.

9. Pentru o excursie, mai multe persoane au închiriat un autocar, plătind fiecare o sumă între 70 și 75 de lei. În ultima clipă, doi dintre excursioniști au renunțat așa că, pentru a completa suma cerută, ceilalți au mai plătit fiecare câte 3 lei. Câți excursioniști au plecat în excursie?

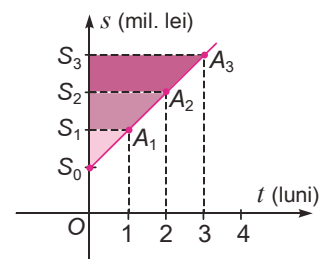
10. Pentru a pregăti un cocteil, se folosește de cel puțin 5 ori mai mult suc de mere decât suc de portocale. Sucul de mere costă 9 lei litrul, sucul de portocale costă 12 lei litrul, iar suma de bani disponibilă este de 270 lei. Trebuie pregătiți minimum 18 l de cocteil.

a) Dacă se folosesc 15 l suc de mere și 3 l suc de portocale sunt îndeplinite condițiile problemei? Dar dacă se folosesc 25 l suc de mere și 5 l suc de portocale?

b) Notând cu x , respectiv y , numărul de litri de suc de mere, respectiv portocale, exprimă, folosind un sistem, constrângerile impuse de problemă. Reprezintă într-un sistem ortogonal zona care satisface toate condițiile problemei.

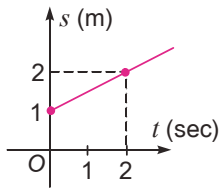
11. O gimnastă are nevoie, pentru a executa o săritură, de 1,5 secunde între momentul aruncării pe verticală a mingii și momentul prinderii acesteia. Cu ce viteză inițială trebuie să arunce mingea? (Aplicăm relația care exprimă dependența spațiului de timp în mișcarea de aruncare pe verticală: $s(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, unde $g = 10 \text{ m/s}^2$, iar v_0 este viteza inițială a corpului.)

12. Variația capitalului depus la o bancă în regim de dobândă simplă este reprezentată în figura alăturată. Demonstrează că triunghiurile $S_0A_1S_1$ și $A_0A_3S_3$ sunt aseme-



nea. Ce semnificație are proporția $\frac{S_0S_1}{S_1A_1} = \frac{S_0S_3}{S_3A_3}$, dedusă din această asemănare?

13. În figura alăturată este reprezentată variația spațiului parcurs de un mobil în funcție de timp. Ce semnificație fizică are faptul că graficul este liniar? Care este viteza mobilului după 2 secunde de la plecare?



14. Determină o funcție de forma $x \mapsto ax + b$ ce are proprietatea că $f(2m + 1) = m - 1$, pentru orice $m \in \mathbb{R}$.
15. Determină $m \in \mathbb{R}$ astfel încât punctul $A(2; -1)$ să aparțină graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (m - 1)x + 1$. Este funcția obținută crescătoare?

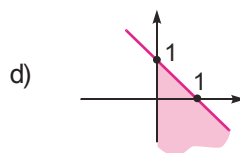
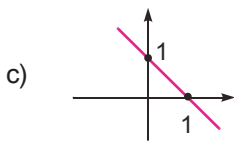
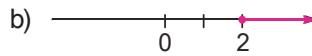
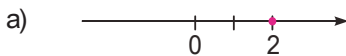
Am reușit... ?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...

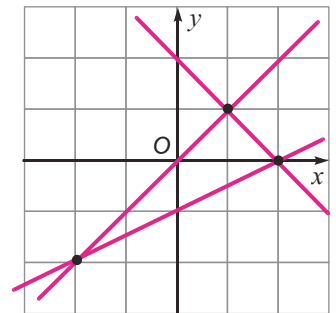
- ◆ să asociez unor ecuații, inecuații sau sisteme o reprezentare grafică adecvată a mulțimilor de soluții
- ◆ să urmez proceduri recomandate pentru reprezentarea grafică adecvată a ecuațiilor/inecuațiilor / sistemelor
- ◆ să corelez proprietăți ale reprezentărilor grafice cu condiții de compatibilitate ale sistemelor?

Test de verificare

1. Descrie fiecare dintre mulțimile reprezentate, printr-o ecuație, o inecuație sau un sistem:



2. Reprezintă grafic mulțimea soluțiilor sistemului:
$$\begin{cases} x + y - 3 \geq 0 \\ 2x - y + 1 < 0 \end{cases}$$
3. Cele trei ecuații ale unui sistem cu necunoscutele x și y sunt reprezentate geometric în figura alăturată. Precizează numărul soluțiilor sistemului.



Lectură

Găsirea unor formule de rezolvare a sistemelor liniare a fost una dintre preocupările fundamentale ale matematicienilor secolului al XVIII-lea. Pornind de la cercetările lui Leibniz desfășurate începând cu 1676, astfel de formule au fost obținute de Mac-Laurin în 1748 și de Cramer în 1754.

Algebra liniară, în cadrul căreia s-a dezvoltat teoria sistemelor liniare (sisteme conținând ecuații de forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, pentru care cele de forma $y = ax + b$ reprezintă un caz particular) a cunoscut ulterior o dezvoltare imprevizibilă prin aplicațiile sale. Astfel, de la cercetarea optimizării regimului alimentar la contribuția asupra stabilirii podului aerian american în perioada blocadei Berlinului (1948-1949), separarea planului în regiuni pe baza programării liniare și-a găsit numeroase aplicații.

Așa cum s-a întâmplat în cazul rezolvării sistemelor, adesea, analizând o anumită problemă, matematicienii creează concepte noi, care deschid drumul unor domenii noi, îmbogățind problema de la care s-a pornit și anticipând necesitățile viitoare de dezvoltare în știință și tehnologie.



G. Leibniz

Unitatea de învățare 3

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Scrierea numerelor în baza 10

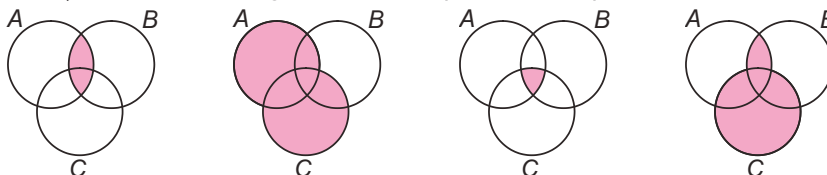
- Calculează:
 - $10^3 \cdot 10^4$;
 - $10^5 : 10^2$;
 - $(10^4)^3$.
- Scie în baza 10:
 - o mie doi;
 - $3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5$.
- Scie cu ajutorul puterilor lui 10:
 - 321;
 - 1005.

Calcul numeric

- Folosește proprietățile operațiilor și calculează rapid:
 - $23 + 41 + 37 + 159$;
 - $11 + 42 - 12 - 11$;
 - $137 \cdot 2 + 137 \cdot 3 + 137 \cdot 5$;
 - $999 \cdot 46$.
 - $99 \cdot 101$.
- Alege răspunsul corect!
Pentru a obține rezultatul 1, numărul 12,5 trebuie înmulțit cu:
 - 11,5;
 - 1;
 - 0,08;
 - $\frac{125}{10}$.

Operații cu mulțimi

- Pe diagramele Venn-Euler de mai jos sunt reprezentate câteva rezultate ale unor operații cu mulțimi. Asociază diagramele cu răspunsul corespunzător.

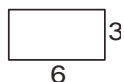


- $A \cap B \cap C$;
- $A \cap B$;
- $(A \cap B) \cup C$;
- $A \cup C$.

- Calculează:
 - $(-\infty; 1) \cap [0; \infty)$;
 - $[0; 2) \cup (1; 5]$;
 - $[2; 5] \cup [-1; 4]$;
 - $(-\infty; 0) \cup [-2; +\infty)$.

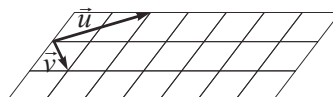
Calcul geometrice

- Calculează:
 - aria dreptunghiului;
 - numărul de cercuri din desen;
 - lungimea segmentului AB.



Vectori

- În desen sunt reprezentați vectorii \vec{u} și \vec{v} . Reprezintă $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $-\vec{v}$, $2\vec{v}$, $-2\vec{u}$.



Elemente de logică

- Considerăm propozițiile p , q , r . Știm că p este adevărată, iar q și r sunt false. Stabilește valoarea de adevăr pentru fiecare dintre propozițiile următoare:
 - $p \wedge q$;
 - $\neg r$;
 - $q \wedge r$;
 - $p \vee (q \wedge r)$;
 - $\neg p \rightarrow (q \vee r)$.

Scrierea pozițională a numerelor raționale

Ne amintim și explorăm!

◆ Cum au apărut sistemele de numerație?

Numererele și operațiile cu numere reprezintă fundamentul matematicii moderne. Acestea au un caracter universal: în orice loc de pe Pământ simboluri precum 213 reprezintă același lucru. La fel, $15 + 42 = 57$ sau $3 > 1$, au aceeași semnificație indiferent de limba în care sunt exprimate. Minteia umană le procesează la fel, chiar dacă sunt exprimate verbal în moduri diferite.

Dar ce este numărul? Cum s-a ajuns la scrierea universal acceptată a simbolurilor „+”, „-”, „=”, „×”, căroro aproape că nu le mai acordăm nici o atenție? În continuare, facem o scurtă incursiune în istoria sistemului numeric pe care îl folosim astăzi.

Prima etapă: o unitate = un simbol

La început, în epoca primitivă, oamenii foloseau desene sau colectau obiecte pentru a ține minte sau pentru a transmite altor oameni informații numerice: fiecare pietricică, nod, liniuță, desen însemna o unitate.

Ei realizau astfel o corespondență „1 la 1” între mulțimea ce trebuia „numărată” și unitățile folosite.

A doua etapă: ideea grupării

În timp, a ține socoteala animalelor cu ajutorul „unităților” (care puteau fi liniuțe, noduri, pietricele, desene) a devenit, pentru vechile triburi de păstori, un procedeu complicat atunci când se lucra cu numere mai mari.

De aceea, oamenii au ajuns la ideea grupării unităților și atribuirea câte unui simbol pentru fiecare grupă.

Ca mod simplu de înregistrare a numerelor s-a folosit multă vreme (și se mai folosește și astăzi), răbojul.

În exemplele de mai jos, sunt prezentate câteva numere, scrise în două variante de răboj. Imaginea alăturată prezintă fotografia unui răboj utilizat în zilele noastre.

3		□
5	/	□
6	/	□
8	/	□ L



▲ Alte simboluri universal acceptate sunt cele rutiere.



▲ Istoricul grec Herodot (484 î.Hr. – 425 î. Hr.) povestește că Darius a învins marele imperiu persan și pentru că a stabilit cu aliații săi un mod de numărare a zilelor.

▲ Conform DEX, răbojul este o bucată de lemn, pe care se înscriu prin creștături diverse socoteli (numărul vitelor, zile de muncă, bani datorăți).

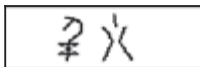
① Reprezintă numerele 11 și 14 în cele două variante de răboj.

A treia etapă: gruparea grupelor

Apariția monedelor și dezvoltarea economică i-a condus pe oameni la necesitatea de a lucra cu numere din ce în ce mai mari. Au apărut astfel sisteme de numerație în care se foloseau simboluri (pictograme) speciale pentru a reprezenta diverse numere. Prezentăm în continuare trei exemple importante.

⚠ Se crede că simbolurile numerice ale vechilor chinezi aveau semnificații religioase: ele erau folosite doar în ceremonii funerare.

② În imagine apare scris numărul 5080, în sistemul chinezesc de numerație.



Scrive analog numărul 2030.

一	二	三	四	五
1	2	3	4	5
六	七	八	九	十
20	30	40	50	60
百	千	萬	萬	萬
100	200	300	400	500
千	千	千	千	千
1000	2000	3000	4000	5000

Sistemul de numerație chinezesc folosit cu 10 secole î. Hr. era, în esență, un sistem zecimal.

Chinezii foloseau simboluri de tipul celor din imagine pentru a reprezenta numere. Astfel, simbolul pentru 300 este o combinație între simbolul pentru 3 și cel pentru 100 (ceea ce dă un caracter multiplicativ scrierii), iar numărul 52 se reprezintă prin alăturarea simbolului pentru 50 cu simbolul pentru 2 (ceea ce dă caracterul aditiv al scrierii).

Sistemul vechi chinezesc nu era un sistem pozițional, adică ordinea în care erau scrise simbolurile nu conta. De aceea, chinezii nu aveau nevoie de un simbol special pentru 0.

⚠ Simbolul din imagine reprezintă fracția $\frac{1}{3}$ în sistemul egiptean.



③ Scrive fracția $\frac{2}{5}$ ca o sumă de fracții cu numărătorul 1 și numitori diferiți între ei.

⚠ Notația substractivă a fost inspirată și de exprimarea verbală: de exemplu, în limba latină, nouăsprezece se pronunță unodeviginti, adică „unu până la douăzeci”.

⚠ Notațiile MDCCCCX și MCMX reprezintă amândouă numărul 1910, în sistemul roman de numerație.

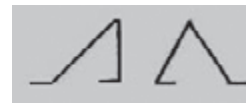
④ Găsește o justificare pentru împărțirea unității în 12 părți egale, făcută de către romani.

Sistemul de numerație egiptean s-a dezvoltat în jurul anului 3400 î.Hr.

Egiptenii aveau un sistem de scriere în baza 10, în care foloseau mici pictograme (hieroglife) pentru a reprezenta diverse numere. Spre deosebire de sistemul actual de scriere, egiptenii foloseau însă hieroglife speciale pentru fiecare dintre numerele 10, 100, 1000.

La egipteni, adunarea numerelor era foarte simplă: ei doar puneau împreună simbolurile de același fel, înlocuind zece astfel de semne cu un singur simbol, de valoarea imediat superioară.

Se pare că egiptenii au fost primii care au folosit semne speciale pentru adunare și scădere. Semnul egiptean pentru adunare seamănă cu o pereche de picioare ce merg în direcția de scriere a textului. Același semn, așezat în direcția opusă sensului de scriere, indica operația de scădere. Nu exista un semn distinctiv pentru a marca egalitatea.



Egiptenii foloseau, de asemenea, simboluri speciale pentru fracții. Ei exprimau însă orice fracție ca o sumă de fracții cu numărător 1.

Sistemul de numerație roman s-a dezvoltat în intervalul 500 î.Hr. - 100 d.Hr. Acest sistem folosește simbolurile din tabelul alăturat.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Notația în sistemul roman de numerație s-a schimbat de-a lungul timpului. Inițial, se folosea simbolul IIII pentru a reprezenta numărul patru. Ulterior, în secolul al XIV-lea, a fost adoptată notația substractivă: când simboluri cu valoare mai mică sunt scrise înaintea unora cu valoare mai mare, atunci valorile se scad.

Chiar dacă romanii foloseau un sistem de numerație zecimal, sistemul ales pentru fracții era duodecimal (adică fracțiile se obțineau prin divizarea unității în 12 părți egale).

De exemplu, $\frac{1}{12}$ se nota • și se numea *uncie*, iar $\frac{1}{3} (= \frac{4}{12})$ se nota ••• și se numea *triens*.

(În imaginea alăturată apare o monedă cu valoarea de un triens.)



A patra etapă: ideea poziționării

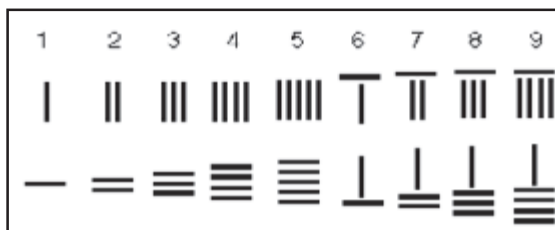
Evidențierea prin simboluri diferite a unor numere foarte mari era totuși greu de făcut. O idee genială a fost acordarea unor semnificații diferite unui același simbol, în funcție de *poziția* pe care acesta o ocupa în scrierea numărului.

Primii care au ajuns la această idee au fost *chinezii*. Ei au simplificat scrierea folosită anterior și au trecut la un sistem de scriere pozițional, pentru a putea efectua mai ușor calcule cu numere.

În imaginea alăturată, sunt prezentate două modalități folosite de chinezi pentru scrierea cifrelor.

Sistemul chinezesc de numerație putea să fie folosit pentru o varietate de probleme, cum ar fi rezolvarea sistemelor de ecuații.

Scrierea pozițională chinezească a fost determinată de utilizarea, în efectuarea calculelor a „tablelor de numărat”: acestea erau realizate de obicei din lemn, cu mici adâncituri umplute cu nisip, pe care se „scriau” cifrele. Înainte de apariția unui semn distinctiv pentru zero, în locul acestuia se lăsa un spațiu.



Cu 2000 de ani î.Hr, *sumerienii* (locuitorii Babilonului antic, ținut situat între Tigru și Eufrat) aveau un sistem pozițional de scriere a numerelor în baza 60. Pentru a scrie un număr, ei foloseau 59 de simboluri grafice („cifre”), prezentate în imaginea alăturată.

Babilonienii nu aveau un simbol special pentru zero; acesta nu era considerat număr, ci indica doar absența unui număr.

O scurtă explicație este necesară. Numărul 271, scris în baza 10, înseamnă $2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 1$. Sistemul babilonian plasează simbolurile pentru „cifre” cu aceeași convenție: dacă adoptăm o notație ad-hoc prin care punem în câte un dreptunghi fiecare „cifră” de la 1 la 59, atunci, de exemplu, numărul $\boxed{1} \boxed{23} \boxed{49}$ (scris cu simboluri sumeriene) reprezintă (în scrierea zecimală, cu care suntem obișnuiți) numărul $1 \cdot 60^2 + 23 \cdot 60 + 49$.



▲ Sistemul de numerație cu baza 60 a condus la împărțirea zilei în 24 de ore, a orei în 60 de minute și a minutului în 60 de secunde. Babilonienii înșiși foloseau această împărțire orară.

⑤ Reprezintă „cu virgulă”, în sistemul sexagesimal (în baza 60), fracțiile $\frac{1}{3}$ și $\frac{7}{12}$. Folosește pentru aceasta simbolurile „cifrelor” babiloniene.

Pentru efectuarea calculelor cu numere, sumerienii foloseau *table* special alcătuite, cu care reușeau să efectueze adunări, înmulțiri și chiar unele împărțiri.

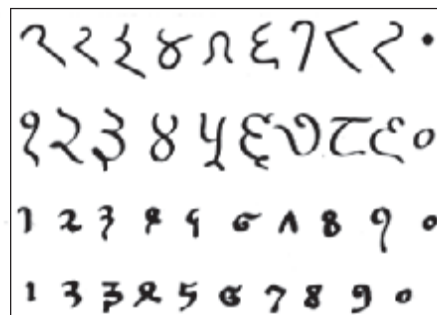
Babilonienii utilizau, de asemenea, un sistem sexagesimal de reprezentare a fracțiilor, similar sistemului nostru de reprezentare zecimală. În scrierea lor, întregii și fracțiile erau scrise la fel, diferența fiind făcută de context. Unul dintre avantajele bazei 60 constă în faptul că fracția $\frac{a}{b}$ se reprezintă ca fracție sexagesimală finită doar dacă b nu are divizori primi diferiți de 2, 3 sau 5. Prin comparație, în sistemul zecimal, $\frac{a}{b}$ este fracție zecimală finită doar dacă b nu are divizori primi diferiți de 2 sau 5.

A cincea etapă: apariția lui zero

Odată ce poziția cifrelor a căpătat semnificație în scrierea unui număr, trebuia rezolvată situația în care lipsește o cifră. Această lipsă trebuia și ea marcată printr-un simbol.

Cea mai veche inscripție în care zero apare foarte clar a fost gravată în piatră în anul 933 într-un mic templu situat la 30km de New Delhi (India). Se pare însă că zero era cunoscut încă din anii 400-500. Inventat la început doar pentru a „ține locul” unei cifre lipsă, s-a constatat că zero se comportă foarte interesant în operații și a devenit un număr ca și celelalte.

Pornind dinspre Orient, arabii au răspândit între secolele X-XIV tehnica de scriere și de calcul care integra pe zero printre numere. Treptat, cifrele venite din India s-au simplificat și au ajuns către secolul XV la forma de astăzi.



⚠ *Împărțirea la 2 era suficient de simplă la Egipteni sau la romani: se luau jumătate din simbolurile folosite în reprezentarea numărului!*

⑥ *Verifică dacă înmulțirea 146×27 este corectă. Procedează analog pentru a calcula 27×146 .*



⚠ *De la numele lui Al-Horezmi a fost derivat cuvântul „algoritm”, iar de la numele cărții sale s-a format denumirea „algebră”.*



Fibonacci (1170-1250)

⚠ *Până la apariția simbolurilor „+” și „-”, pentru adunare și scădere erau folosite în Europa secolului al XV-lea, literele P, respectiv M.*

⚠ *Robert Recorde (1510-1558) a fost matematician galez.*

⚠ *Thomas Harriot (1560-1621) a fost matematician englez.*

◆ Cum se făceau calculele în vechile sisteme de numerație?

Egiptenii și, mai apoi, romanii, utilizau doar adunări și scăderi în calculele lor. Totuși, ei reușeau să efectueze înmulțiri și împărțiri, reducând aceste operații la un șir de câteva adunări. Iată, de exemplu, cum efectuau ei înmulțirea 146×27 . (Desigur, egiptenii și romanii foloseau propriile simboluri pentru numere!)

Scriem numerele unul lângă altul, apoi împărțim primul număr la 2 și dublăm al doilea număr. Continuăm la fel, ignorând restul atunci când deîmpărțitul din prima coloană este impar. Rezultatul produsului se obține adunând numerele din a doua coloană, aflate în dreptul numerelor impare din prima coloană:

$$146 \times 27 = 54 + 432 + 3456 = 3942.$$

Sistemele de numerație prezentate anterior nu pun suficient în evidență proprietățile operațiilor cu numere. De aceea, matematicienii antichității au trebuit să inventeze reguli de calcul care astăzi ni se par dificile, dar și instrumente adecvate de calcul. Astfel au apărut: abacul roman, suan-pan-ul chinezesc, sciutul rusesc, sau yupana incașilor. De exemplu, abacul roman (prezentat în imaginea alăturată), avea două serii de câte opt baghete pe care culisau bile găurite. Acestea arătau progresiv, de la dreapta la stânga, unciile (subunitățile), unitățile, zecile, sutele, etc.

Multă vreme, abacul (în diversele sale forme) a reprezentat singurul sprijin în calculul aritmetic.

146	27
73	<u>54</u>
36	108
18	216
9	<u>432</u>
4	864
2	1728
1	<u>3456</u>

◆ Cum s-a dezvoltat simbolismul în matematică?

Sistemul zecimal de scriere a numerelor și operațiile aritmetice, care se învață astăzi începând chiar de la grădiniță, ascund proprietăți a căror complexitate a pus numeroase probleme matematicienilor de-a lungul timpului. Simpla scriere a numerelor așa cum este folosită ea astăzi, este rezultatul unui amplu proces de interacțiune a mai multor culturi. Astfel, simbolurile cifrelor de astăzi au fost introduse în Occidentul European de către arabi, care au preluat modul de scriere indian.

Una dintre primele lucrări în care sunt explicate principiile de bază ale calculului numeric este „Al-Gebr wel mukabala”, scrisă în jurul anului 825 de către Muhamed ben Musa Al-Horezmi. Acesta folosește scrierea zecimală pozițională și cifra 0 pentru a descrie reguli (algoritmi) de calcul. Astfel, s-a făcut un prim pas spre ceea ce Leibniz a numit „cabbala vera”, adică „magia” matematicii: rezultatele calculelor nu mai era date de abace, ci o scriere „magică” permitea efectuarea acestora doar prin folosirea celor 10 semne pentru cifre și a tablelor de adunare și de înmulțire.

Cel care a contribuit decisiv la răspândirea sistemului

zecimal arab a fost matematicianul italian Leonardo din Pisa, numit și Fibonacci. Lucrarea sa, „Liber Abaci” (scrisă în 1202), prezenta modul de operare în scrierea zecimală a numerelor, cu aplicații în comerț, dar și în probleme de matematică.

Dacă sistemul de scriere și modul de operare actuale provin de la indieni și arabi, terminologia utilizată este, în mare parte, de origine latină. Astfel, cuvântul „adunare” (care are forme asemănătoare și în alte limbi) provine din latinescul „addere”. Chiar semnul „+” (folosit pentru prima dată de către J. Widmann, în 1489) pare să fie o formă stilizată a latinescului *et*.

Majoritatea simbolurilor matematice, atât de familiare astăzi, au apărut abia în secolele al XV-lea – al XVII-lea. De exemplu, semnul „=” a fost utilizat pentru prima oară în 1557, de către R. Recorde, iar „>” – în 1621, de T. Harriot.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

◆ Cum a influențat religia dezvoltarea matematicii?

Există o indiscutabilă legătură între religie și istoria matematicii.

În societățile antice, cunoștințele matematice erau considerate de natură divină și, ca atare, erau împărtășite doar câtorva inițiați. Regulile de calcul se transmiteau de la o generație la alta de către preoți, fără a se insista asupra justificării lor. De aceea, amestecul de reguli științifice cu regulile privind practicile cultului sau cu teze de tip metafizic, au făcut ca matematica să aibă mult timp un caracter secret. Nu este întâmplător că unul dintre primele papirusuri egiptene – papirusul din colecția Rhind, care a condus la descifrarea hieroglifelor egiptene, se intitula „Instrucțiuni pentru a cunoaște toate lucrurile secrete”.

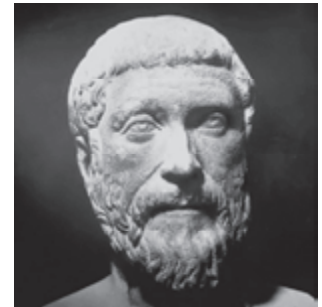
Legea secretului se regăsește, într-o formă chiar mai accentuată, în școala lui Pitagora. Modul de viață impus, admiterea doar în urma parcurgerii unui stagiu de inițiere, prestarea unui jurământ de credință și caracterul ei secret fac din școala lui Pitagora un fel de sectă religioasă.

Știința occidentală s-a dezvoltat prin intermediul bisericii creștine. Nu este vorba aici doar de faptul că, mult timp, școala a fost o anexă a Bisericii, iar cei mai mari învățați au provenit din rândul călugărilor; dar disputele teologice au dezvoltat mai ales gândirea analitică, ceea ce a dus și la dezvoltarea matematicii.

În anumite momente, religia a fost însă o frână în dezvoltarea matematicii. Răspândirea în Europa a notației cu cifre arabe, în locul celei cu simboluri romane, s-a făcut destul de târziu, prin secolul al XII-lea, mai ales datorită dezvoltării relațiilor comerciale cu Orientul. O monedă din 1134, descoperită în Sicilia, este deocamdată prima atestare a utilizării noilor cifre în Europa. Introducerea sistemului arab a întâmpinat însă rezistență din partea bisericii catolice, care considera utilizarea acestor simboluri drept erezie. Astfel, un edict din 1300 interzicea negustorilor florentini folosirea cifrelor arabe.

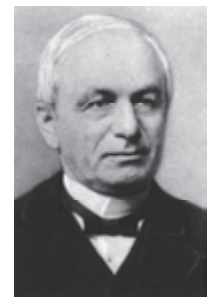
Influența ideilor religioase în matematică s-a resimțit și în alegerea unor simboluri. Se pare că semnul de înmulțire „ \times ”, care a fost utilizat pentru prima oară în 1631 de către W. Oughtred, este o stilizare a crucii Sfântului Andrei.

Principiul dominant al matematicii moderne constă în faptul că toate propozițiile matematice trebuie să se reducă, în cele din urmă, la propoziții referitoare la numerele naturale. Leopold Kronecker spunea: „Dumnezeu a creat numerele naturale; restul este opera omului”.



Pitagora (569-500 î.Hr.)

▲ Crucea Sfântului Andrei este simbolul Scoției. Ea apare pe steagurile unor state din nordul Europei.



L. Kronecker (1823-1891)

Exerciții și probleme

1. Pentru scrierea numerelor în baza 5 se folosesc doar cifrele 0, 1, 2, 3, 4. Tabele de adunare și de înmulțire în această bază sunt următoarele:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

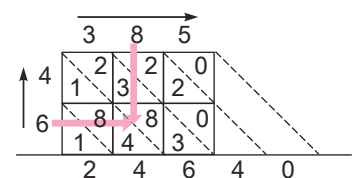
\times	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Folosește aceste table pentru a calcula în baza 5: $4304 + 1244$, 12×34 , $(31)^2$.

2. a) Scrie numărul 23 ca o sumă de puteri diferite ale lui 2.
b) Folosește modul egiptean de calcul pentru a găsi rezultatul produsului 23×31 .
c) Explică de ce se obține rezultatul corect al înmulțirii atunci când aplici metoda egipteană de calcul.

3. În Evul Mediu, unele popoare arabe foloseau o anumită așezare a calculelor pentru a înmulți două numere. De exemplu, pentru a calcula 64×385 , ei procedau astfel:

- Așezau factorii 64 și 385 pe laturile unui tabel, în ordinea indicată.
- În fiecare căsuță a tabelului, înscriau produsul dintre numerele aflate la capătul liniei, respectiv coloanei, din care face parte căsuța.
- Adunau cifrele dintre două diagonale consecutive și citeau rezultatul:
 $64 \times 385 = 24640$.



- a) Urmărește exemplul, apoi calculează analog 247×38 .
b) Explică de ce algoritmul prezentat conduce la rezultatul corect.

4. Explică de ce $125 \neq 1250$, dar $1,25 = 1,250$, deși, în fiecare caz, adăugăm o cifră de 0 la sfârșit!



◆ Ce este o operație algebrică?

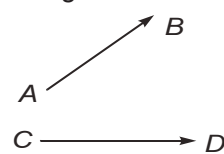
În matematică folosim diverse operații. Unele dintre acestea, cum ar fi adunarea sau produsul numerelor, ne-au devenit atât de familiare, încât suntem tentați să nu mai acordăm prea mare atenție proprietăților lor. Vom vedea însă în continuare că tocmai aceste proprietăți au un rol important în structurarea mulțimilor de numere. Pentru a înțelege mai bine cum funcționează proprietățile operațiilor învățate, pornim la drum cu câteva exemple.

Experiența de calcul dobândită până acum ne face să nu ne îndoim de faptul că suma a două numere naturale este un număr natural și că produsul a două numere raționale este tot un număr rațional. Ce se întâmplă însă atunci când mulțimile cu care operăm nu sunt mulțimi de numere? În anii anteriori am lucrat, de exemplu, cu vectori, cu funcții, cu propoziții logice. Cu fiecare dintre aceste „obiecte” matematice, am definit diferite operații.

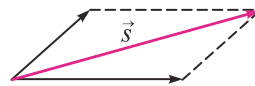
Exemplul 1: Adunarea vectorilor

Orice două puncte A și B , din plan, determină un vector, notat \overline{AB} .

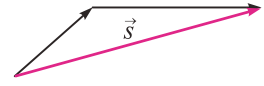
Suma a doi vectori se calculează cu regula paralelogramului sau cu regula triunghiului.



Fiind dați vectorii \overline{AB} și \overline{CD} , calculăm $\vec{s} = \overline{AB} + \overline{CD}$.



Regula paralelogramului: Transportăm unul din vectori cu originea în originea celui-lalt. Suma vectorilor (\vec{s}) este diagonala (orientată) a paralelogramului format.



Regula triunghiului: Transportăm unul din vectori cu originea în extremitatea celui-lalt. Suma vectorilor (\vec{s}) este cea de-a treia latură (orientată) a triunghiului format.

Observăm că suma a doi vectori este tot un vector.

Exemplul 2: Produsul funcțiilor

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, două funcții. Produsul funcțiilor f și g se notează $f \cdot g$ și este definit prin condiția următoare:

Pentru orice număr real a , $(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$.

Observăm că oricărui număr $a \in \mathbb{R}$ îi corespunde numărul $(f \cdot g)(a) \in \mathbb{R}$. Aceasta arată că produsul a două funcții este tot o funcție.

Exemplul 3: Conjuncția propozițiilor

Fiind date propozițiile p și q , notăm $p \wedge q$ conjuncția lui p cu q .

$p \wedge q$ este o propoziție adevărată dacă și numai dacă atât p , cât și q sunt adevărate.

Ca urmare, conjuncția a două propoziții este tot o propoziție.

În toate exemplele anterioare, la două „obiecte” matematice de un anumit tip (vectori, funcții, respectiv propoziții) le corespunde un al treilea obiect, de același tip. Spunem că am definit astfel o operație algebrică pe mulțimea acelor „obiecte”.

❶ Ce se poate spune despre suma a două numere iraționale?

❷ Se poate aplica regula paralelogramului pentru suma a doi vectori coliniari?

❸ Explicitează produsul funcțiilor $u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $u(x) = x + |x|$,
 $v(x) = x - |x|$.

Observăm că operația a fost notată diferit în fiecare caz analizat. Astfel, în cazul vectorilor au folosit simbolul „+”; în cazul funcțiilor, simbolul „.”; în cazul propozițiilor simbolul „^”. Deși notațiile sunt diferite, ele evidențiază o corespondență între orice pereche de elemente ale mulțimii date (fie ea mulțime de vectori, de funcții sau de propoziții) și rezultatul aplicării operației asupra elementelor perechii.

Putem folosi o notație convențională generală oarecare ce evidențiază această corespondență. De exemplu: fiind dată mulțimea M și $a, b \in M$, atunci notăm cu $a * b$ rezultatul operației „*”.

În general

O operație algebrică (lege de compoziție internă) pe mulțimea M este o funcție $\varphi : M \times M \rightarrow M$.

Așa cum am precizat anterior, în loc să scriem $\varphi(a, b) = c$, alegem un simbol (de exemplu, *) și scriem $a * b = c$.

Să aplicăm!

O operație algebrică pe care am studiat-o deja este intersecția intervalelor de numere reale. În acest caz, mulțimea pe care este definită operația algebrică „ \cap ” este mulțimea tuturor intervalelor (închise sau deschise) de numere reale.

Pentru orice două intervale I și J , notăm $I \cap J$ rezultatul operației „intersecție”:

$$x \in I \cap J \Leftrightarrow x \in I \text{ și } x \in J.$$

Observăm că intersecția a două intervale de numere reale este tot un interval de numere reale.

Atenție! Să considerăm, pe aceeași mulțime de intervale, operația „reuniune”. În unele situații, reuniunea a două intervale nu este un interval. De aceea, reuniunea nu este o lege de compoziție internă pe mulțimea intervalelor de numere reale.

Atunci când definim o operație algebrică pe o mulțime, „obiectele” cu care operăm trebuie, în mod firesc, să aparțină mulțimii date. Am învățat însă și operații între „obiecte” matematice de tipuri diferite (care nu se găsesc într-o aceeași mulțime). De exemplu, știm să înmulțim un număr real cu un vector sau cu o funcție. În aceste cazuri, operațiile respective nu sunt legi de compoziție internă.

Atenție! Produsul dintre un număr și un vector nu este operație algebrică: numerele reale și vectorii sunt „obiecte” matematice diferite.

◆ Ce proprietăți importante poate avea o operație algebrică?

O primă proprietate: asociativitatea

Să analizăm!

Atunci când adunăm numerele naturale 52 și 6, procedăm astfel:

- *descompunem:* $52 = 50 + 2$;
- *grupăm:* $2 + 6 = 8$
- *calculăm:* $52 + 6 = (50 + 2) + 6 = 50 + (2 + 6) = 58$.

În același fel putem proceda pentru a efectua mai ușor diferite înmulțiri. Să presupunem, de exemplu, că vrem să calculăm produsul 28×25 :

- *descompunem:* $28 = 7 \times 4$
- *grupăm:* $4 \times 25 = 100$
- *calculăm:* $28 \times 25 = (7 \times 4) \times 25 = 7 \times (4 \times 25) = 700$

4 Considerarea celui mai mare divizor comun a două numere naturale, este operație algebrică? Cum este aceasta notată de obicei?

▲ Câteva simboluri prin care reprezentăm operații algebrice uzuale sunt: „+”, „-”, „ \times ”, „.”, „ \cup ”, „ \cap ”, „^”.

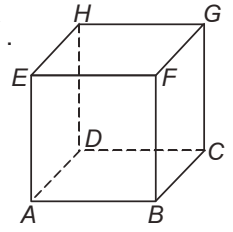
5 Calculează:
 $[-1; 3) \cap (0; 4]$ și
 $(-\infty; 1] \cap [2; 5)$.

6 Este înmulțirea dintre un număr întreg și un număr rațional, o lege de compoziție internă?

7 Grupează convenabil factorii pentru a calcula 48×125 .

Putem proceda analog nu doar când adunăm sau înmulțim numere reale: există și alte operații algebrice cu proprietăți asemănătoare.

Exemplul 1: Adunarea vectorilor



În cubul ABCDEFGH, vrem să calculăm suma $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE}$.

Pentru aceasta, putem proceda în două moduri:

grupăm: $(\overline{AB} + \overline{AD}) = \overline{AC}$ sau $(\overline{AD} + \overline{AE}) = \overline{AH}$

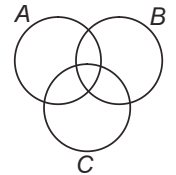
calculăm: $(\overline{AB} + \overline{AD}) + \overline{AE} = \overline{AC} + \overline{AE} = \overline{AG}$ sau

$\overline{AB} + (\overline{AD} + \overline{AE}) = \overline{AB} + \overline{AH} = \overline{AG}$.

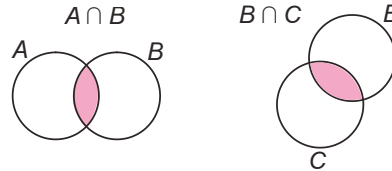
Observăm că, prin gruparea în moduri diferite a vectorilor, rezultatul sumei este același.

Exemplul 2: Intersecția mulțimilor

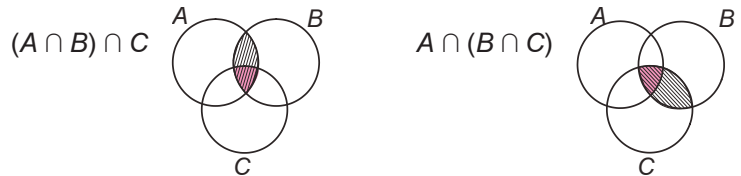
Fie A, B, C trei mulțimi, reprezentate în diagrama Venn-Euler alăturată. Pentru a identifica pe diagramă mulțimea $A \cap B \cap C$, putem proceda în două moduri:



grupăm și identificăm:



reprezentăm:



Observăm că, prin gruparea în moduri diferite a mulțimilor, rezultatul intersecției este același.

Exemplul 3: Conjunția propozițiilor

Fie p, q, r propoziții logice. Explicităm tabelele de adevăr ale propozițiilor $(p \wedge q) \wedge r$, respectiv $p \wedge (q \wedge r)$.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0

Observăm că, prin gruparea în moduri diferite a propozițiilor, obținem propoziții echivalente logic.

În fiecare din exemplele anterioare, grupările diferite ale numerelor, vectorilor, mulțimilor sau propozițiilor au condus, de fiecare dată, la același rezultat. Această coincidență evidențiază o proprietate comună pentru operații algebrice foarte diferite, așa cum sunt adunarea sau înmulțirea numerelor, adunarea vectorilor, intersecția mulțimilor sau conjunția propozițiilor.

În general

Fiind dată operația algebrică *, definită pe mulțimea M, spunem că ea este operație asociativă dacă, pentru orice elemente x, y, z din M, avem $(x * y) * z = x * (y * z)$.

8 Justifică egalitățile

$\overline{AC} + \overline{AE} = \overline{AG}$ și

$\overline{AB} + \overline{AH} = \overline{AG}$, în cubul ABCDEFGH.

9 Pentru numărul natural n, notăm cu D_n mulțimea divizorilor săi. Calculează mulțimile $(D_6 \cap D_{12}) \cap D_9$ și $D_6 \cap (D_{15} \cap D_9)$.

10 Completează încă două linii ale tabelului din exemplul 3.

Cum justificăm, pe tabelele de adevăr, echivalența

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$?

Putem concluziona deci că adunarea și înmulțirea numerelor, adunarea vectorilor, intersecția mulțimilor și conjuncția propozițiilor sunt operații algebrice asociative.

Să aplicăm!

O operație algebrică pe care am studiat-o deja este înmulțirea funcțiilor numerice: și aceasta este o operație asociativă. De aceea, funcțiile

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 1) \cdot x \text{ și } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = (x - 1)(x^2 + x) \text{ sunt funcții egale.}$$

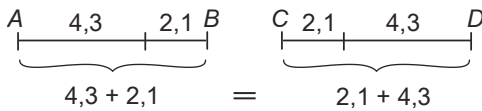
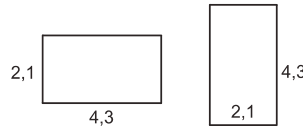
Atenție! Nu orice operație algebrică este asociativă. De exemplu, operația de scădere a numerelor reale nu este asociativă, deoarece $(3 - 1) - 5 \neq 3 - (1 - 5)$.

• O a doua proprietate: comutativitatea

Să analizăm!

Dreptunghiurile din figură sunt congruente, deci au arii egale.

$$\text{De aceea } 4,3 \times 2,1 = 2,1 \times 4,3.$$



Segmentele AB și CD sunt congruente, deci au lungimi egale.
De aceea: $4,3 + 2,1 = 2,1 + 4,3$.

Din justificările geometrice de mai sus, vedem că ordinea factorilor la înmulțire, sau ordinea termenilor la adunarea numerelor reale, nu contează. Există însă și alte operații algebrice cu această proprietate: la adunarea vectorilor, produsul funcțiilor numerice, intersecția mulțimilor sau conjuncția propozițiilor, rezultatul nu se modifică dacă schimbăm ordinea elementelor implicate în operație.

În general

Fiind dată operația algebrică $*$, definită pe mulțimea M , spunem că ea este operație *comutativă* dacă, pentru orice două elemente x, y din M , avem $x * y = y * x$.

Atenție! Nu orice operație algebrică este comutativă. De exemplu, operația de împărțire pe \mathbb{R}^* nu este comutativă, deoarece $4 : 2 \neq 2 : 4$.

• O a treia proprietate: existența elementului neutru

Să analizăm!

În civilizațiile antice, modul de reprezentare simbolică a numerelor nu impunea existența unui semn distinctiv pentru zero.

Considerarea lui zero ca număr și folosirea unui semn distinctiv pentru cifra zero s-au impus de-abia în momentul apariției sistemelor poziționale de scriere. Astfel, zero a căpătat un dublu rol. Pe de o parte, așezat la dreapta unui număr natural, zero îi mărește valoarea de 10 ori; pe de altă parte, adunarea cu zero nu modifică termenul inițial, adică $a + 0 = a$, pentru orice număr a .

O evoluție asemănătoare a avut și numărul 1. Până în Evul Mediu, era răspândită ideea că „unu” nici nu reprezintă un număr, deoarece oamenii legau numărul de mărime, multitudine. Numărul unu nu este însă important doar pentru că pornind de la el, putem genera toate numerele naturale adunând, pe rând, 1. Un alt motiv este acela că înmulțirea cu 1 nu modifică factorul inițial, adică $a \cdot 1 = a$, pentru orice număr a .

Egalitățile: $a + 0 = a$ și $a \cdot 1 = a$, pentru orice număr real a , exprimă faptul că adunarea cu 0, respectiv înmulțirea cu 1 nu au nici un efect. De aceea, 0 se numește *element neutru pentru adunare*, iar 1 se numește *element neutru pentru înmulțirea numerelor reale*.

11 Arată că $(4 - 1) - 0 = 4 - (1 - 0)$. Cum se justifică atunci afirmația: „Scăderea nu este asociativă”?

12 Arată că operația de împărțire este o lege de compoziție neasociativă pe mulțimea $M = (0; +\infty)$.

13 Arată printr-un desen că, dacă \vec{u} și \vec{v} sunt doi vectori, atunci $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

14 Verifică egalitatea: $(-3) : 3 = 3 : (-3)$. Este aceasta în contradicție cu afirmația „împărțirea este necomutativă”?

15 Ce rol are cifra zero în scrierea numărului 2043? Poate fi ignorată această cifră în scrierea anterioară?

▲ Conform DEX, cuvântul „neutru” are și sensul de „indiferent”.

Există însă și alte operații algebrice care admit elemente neutre.

Exemplul 1: Adunarea vectorilor

Un vector este determinat de un segment orientat \overline{MN} , adică de originea M și de extremitatea N ale segmentului.



Dacă originea și extremitatea unui segment orientat coincid, obținem un vector redus la un punct, numit vectorul nul și notat cu $\vec{0}$.

Vectorul nul este element neutru pentru adunarea vectorilor deoarece pentru orice vector \overline{MN} , avem $\overline{MN} + \vec{0} = \vec{0} + \overline{MN} = \overline{MN}$. $\vec{0}$ este singurul vector cu această proprietate.

Exemplul 2: Produsul funcțiilor numerice

Fie $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția constantă, descrisă prin asocierea $u(x) = 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Funcția u este element neutru pentru operația de înmulțire a funcțiilor numerice, deoarece, pentru orice funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, avem $f \cdot u = u \cdot f = f$. Funcția u este singura funcție cu această proprietate.

Exemplul 3: Intersecția intervalelor de numere reale

Să notăm cu T „intervalul” $(-\infty; +\infty)$, adică întreaga mulțime a numerelor reale. T este element neutru pentru operația de intersecție a intervalelor, deoarece $T \cap J = J \cap T = J$, pentru orice interval J . T este singurul interval cu această proprietate.

În general

Operația algebrică „ $*$ ”, definită pe mulțimea M , admite element neutru dacă există $e \in M$ cu proprietatea $e * x = x * e = x$, pentru orice $x \in M$.

Să demonstrăm!

Dacă o operație algebrică admite un element neutru, atunci acesta este unic.

Fie e_1 și e_2 elemente neutre pentru operația algebrică „ $*$ ”; vrem să demonstrăm că $e_1 = e_2$.

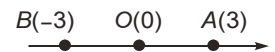
Avem $e_1 * e_2 = e_2$ (deoarece e_1 este element neutru) și $e_1 * e_2 = e_1$ (deoarece și e_2 este element neutru). Deci $e_1 = e_2$.

Atenție! Există operații algebrice care nu admit element neutru. Să considerăm, de exemplu, operația min definită pe \mathbb{N} , prin care asociem numerelor naturale x și y pe cel mai mic dintre ele. Această operație algebrică nu are element neutru: în caz contrar, ar exista un cel mai mare număr natural, ceea ce este imposibil.

• O a patra proprietate: existența simetricului unui element

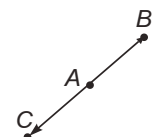
Să analizăm!

Numărul 3 se reprezintă pe axa numerelor prin punctul A . Simetricul lui A față de origine, reprezintă pe axă numărul



-3. Această proprietate geometrică ne asigură că $3 + (-3) = 0$.

Considerăm vectorul \overline{AB} și fie C simetricul lui B față de A . Vectorii \overline{AB} și \overline{AC} au aceeași lungime, aceeași direcție, dar sensurile lor sunt opuse. Această proprietate geometrică ne asigură că $\overline{AB} + \overline{AC} = \vec{0}$.



16 Care este elementul neutru pentru operația algebrică de adunare a funcțiilor?

17 Arată că operația algebrică de reuniune a mulțimilor admite ca element neutru mulțimea vidă.

18 Observă egalitatea: $x : 1 = x$, pentru orice $x > 0$. Putem deduce de aici că 1 este element neutru pentru operația de împărțire a numerelor reale pozitive?

19 Calculează $min(2; 5)$. Demonstrează că operația algebrică min este asociativă și comutativă.

20 Demonstrează că nu există un cel mai mare număr natural.

În cele două exemple anterioare, am pornit inițial de la câte un „obiect” matematic (număr, respectiv vector) și am obținut prin simetrie, un alt „obiect” de același tip, astfel ca suma dintre „obiectul” inițial și cel „construit” să fie „zero”. Numărul 0 și vectorul $\vec{0}$ nu reprezintă același tip de „obiect” matematic; ele se aseamănă doar prin faptul că sunt elemente neutre ale unor operații algebrice de adunare, definite însă pe mulțimi diferite.

Putem să ne întrebăm dacă procedeele de simetrizare folosite anterior ar putea căpăta vreun sens și în cazul unor alte legi de compoziție. Ce ar însemna, de exemplu, „simetricul” unui număr rațional relativ la operația de înmulțire?

Să comparăm!

0 este element neutru pentru adunarea numerelor raționale.
 $-2,5$ este simetricul lui $2,5$ față de adunare, deoarece
 $2,5 + (-2,5) = 0$.

1 este element neutru pentru înmulțirea numerelor raționale.
 Care este simetricul lui $2,5$ față de înmulțire?

Comparând cele două operații algebrice, putem spune că numărul $0,2$ este simetricul lui $2,5$ față de înmulțire, deoarece $0,2 \times 2,5 = 1$.

În general

Fie „ $*$ ” o operație algebrică definită pe mulțimea M , care admite elementul neutru e .
 Un element x din M se numește *simetrizabil* față de operația „ $*$ ” dacă există un element $x' \in M$ astfel încât $x * x' = x' * x = e$.
 Elementul x' se numește *simetricul* lui x față de operația „ $*$ ”.

Să observăm!

Pentru o operație algebrică cu element neutru, pot exista elemente care nu sunt simetrizabile.

Exemplul 1

Considerăm operația de înmulțire, definită pe mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi, care admite ca element neutru pe 1.

Numărul -1 este inversabil față de înmulțire, deoarece $(-1) \times (-1) = 1$.

Numărul -2 nu este inversabil față de înmulțire, deoarece nu există un număr întreg y astfel încât $(-2) \times y = 1$.

Exemplul 2

Pe mulțimea M a intervalelor de numere reale, considerăm operația algebrică de intersecție, față de care elementul neutru este intervalul $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Elementul $I = (0; 2) \in M$ nu este simetrizabil, deoarece nu putem găsi un interval J astfel încât $I \cap J = \mathbb{R}$.

Exemplul 3

Pe mulțimea funcțiilor numerice, operația de înmulțire admite ca element neutru funcția $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = 1$. Să considerăm funcțiile numerice $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + 1$.

Funcția f este simetrizabilă față de înmulțire, simetrica ei fiind funcția $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Funcția g nu este însă simetrizabilă: dacă ar fi, deci dacă ar exista o funcție $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $g \cdot t = u$ și $t \cdot g = u$, am deduce că $(g \cdot t)(-1) = u(-1)$, adică $0 \cdot t(-1) = 1$, ceea ce este imposibil.

▲ Denumirea de „simetric” atribuită elementului x' din definiție este, de obicei, adaptată operației algebrice. Astfel, în cazul operației de adunare, simetricul se numește opus, iar pentru înmulțire, simetricul se numește invers.

21 Demonstrează că -1 și 1 sunt singurele numere întregi inversabile față de înmulțire.

22 Determină toate intervalele simetrizabile față de intersecție.

23 Demonstrează că funcția $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, e(x) = 2^x$, este simetrizabilă față de operația de înmulțire a funcțiilor.

24 Demonstrează că o funcție $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este simetrizabilă față de înmulțire dacă și numai dacă $p(x) \neq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Să demonstrăm!

Fie „ $*$ ” o operație algebrică asociativă, definită pe mulțimea M , care admite elementul neutru e , și fie x un element din M .
Atunci simetricul lui x (dacă există!) este unic.

Să presupunem că $y, z \in M$ sunt două simetrice pentru x ; vom demonstra că $y = z$.
Deoarece $(y * x) * z = y * (x * z)$..., iar $y * x = e$ și $x * z = e$..., deducem că $e * z = y * e$, deci $z = y$...

◆ Ce proprietăți pot relaționa două operații algebrice?

Să analizăm!

25 Efectuează înmulțirea 73×24 , prin procedeul de înjumătățire folosit de egipteni.

26 Pe schema de înmulțire, explică de ce rezultatul 73×2 (adică 146), se scrie deplasat cu o poziție față de 73×4 (adică 292).

Pentru a calcula produsul 73×24 , organizăm de obicei datele ca în schema alăturată.

$$\begin{array}{r} 73 \times \\ 24 \\ \hline 292 \\ 146 \\ \hline 1752 \end{array}$$

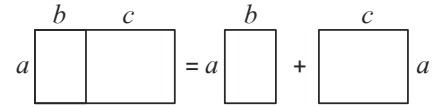
Am văzut anterior că înmulțirea s-a efectuat mult timp folosind o cu totul altă schemă de organizare a datelor. Ce proprietăți ale operațiilor cu numere au permis oare simplificarea algoritmului de înmulțire?

Pentru a înțelege acest mecanism, este nevoie să detaliem calculele: $73 \times 24 = 73 \times (4 + 20) = 73 \times 4 + 73 \times 20 = 73 \times 4 + (73 \times 2) \times 10$.

Observăm că putem recurge la operații în care înmulțitorul are o singură cifră, datorită „desfacerii parantezei”, ceea ce exprimă o legătură între operațiile de adunare și de înmulțire:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

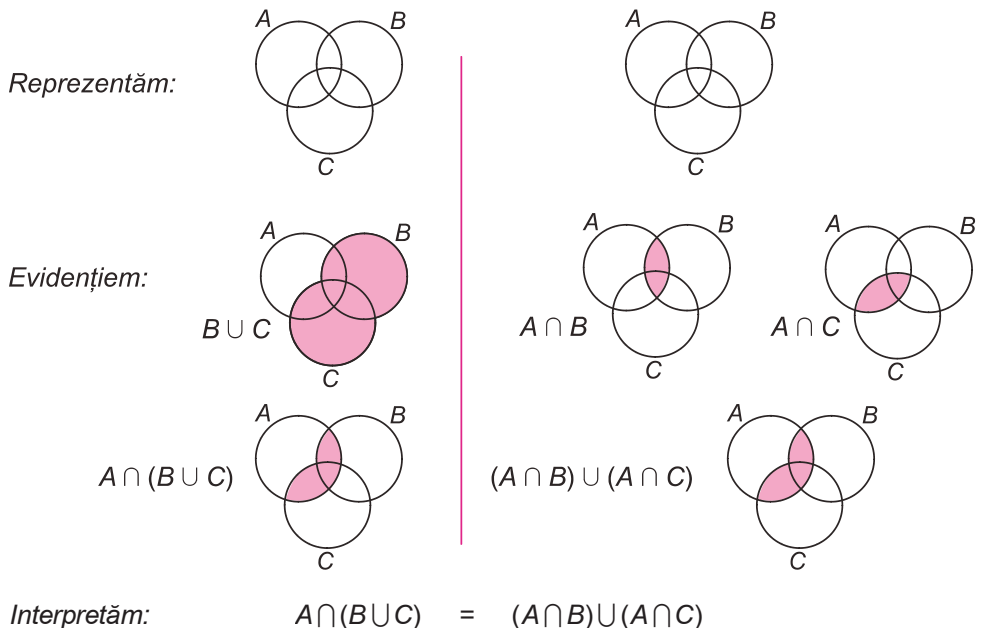
Interpretăm geometric această proprietate folosind desenul alăturat, în care aria dreptunghiului inițial este egală cu suma ariilor dreptunghiurilor componente.



Putem identifica proprietăți asemănătoare și în raport cu alte operații algebrice, definite pe o aceeași mulțime.

Exemplu: Reuniunea și intersecția

Fie A, B, C trei mulțimi de numere reale. Vom arăta că $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, folosind diagrame Venn-Euler.



▲ Egalitatea $a \times b + a \times c = a \times (b + c)$ se mai numește „regula factorului comun”.

▲ Dacă înlocuim simbolul „ \cap ” cu „ \times ” și „ \cup ” cu „ $+$ ”, în egalitatea de mulțimi $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, obținem regula factorului comun pentru numere!

27 Demonstrează că $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Înlocuiește apoi convenabil simbolurile „ \cup ” și „ \cap ” cu „ $+$ ” și „ \times ” pentru a recunoaște regula factorului comun.

În general

Fie „*” și „°” două operații algebrice definite pe mulțimea M . Spunem că operația „*” este *distributivă* față de operația „°” dacă, pentru orice $x, y, z \in M$, avem $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$ și $(y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x)$.

▲ În orice expresie algebrică, parantezele precizează prioritățile în calcul.

Să aplicăm!

Pe mulțimea numerelor naturale definim operațiile algebrice notate \textcircled{m} , respectiv

\textcircled{M} care sunt descrise astfel:

$x \textcircled{m} y = \text{cel mai mic dintre numerele } x \text{ și } y$

$x \textcircled{M} y = \text{cel mai mare dintre numerele } x \text{ și } y$.

De exemplu, $6 \textcircled{m} 9 = 6$ și $6 \textcircled{M} 9 = 9$.

Ne propunem să demonstrăm că operația \textcircled{M} este distributivă față de operația \textcircled{m} ; aceasta înseamnă că trebuie să verificăm dacă $x \textcircled{M} (y \textcircled{m} z) = (x \textcircled{M} y) \textcircled{m} (x \textcircled{M} z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Pentru a putea demonstra această egalitate, este nevoie să ordonăm numerele care apar în calcule.

Dacă, de exemplu, $y \leq x \leq z$, atunci:

$x \textcircled{M} (y \textcircled{m} z) = x \textcircled{M} y = x$, iar

$(x \textcircled{M} y) \textcircled{m} (x \textcircled{M} z) = x \textcircled{m} z = x$.

Considerând toate cazurile posibile, putem justifica distributivitatea operației \textcircled{M} față de operația \textcircled{m} .

28 Explicitează operațiile algebrice din cei doi membri, în cazul $z \leq y \leq x$. Câte cazuri ar trebui considerate în total, pentru a demonstra distributivitatea?

Exerciții și probleme

- Pe mulțimea numerelor reale, definim operațiile algebrice notate Δ , respectiv \circ și descrise prin:
 $x \Delta y = 2x - y + 1$, $x \circ y = xy - x$.
Calculează: $2 \Delta 4$, $(-1) \circ 3$ și $(4 \Delta 5) \circ (2 \Delta 0)$.
- Folosește regula triunghiului și demonstrează că adunarea vectorilor este asociativă.
- Pe mulțimea propozițiilor logice, considerăm operația care asociază propozițiilor p și q , propoziția $p \rightarrow q$. Justifică dacă această operație algebrică este asociativă.
- a) Adaugă paranteze pentru a obține o egalitate!
 $-1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 = 0$.
b) Arată că în scrierea următoare nu se pot așeza paranteze pentru a obține egalitate.
 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 20$.
c) Explică diferența între (a) și (b).
- Pe mulțimea $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$ definim operația $a \circ b = a^b$, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$.
a) Verifică dacă $(2 \circ 1) \circ 5 = 2 \circ (1 \circ 5)$.
b) Este „°” operație asociativă?
c) Admite „°” element neutru?
- Pe mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12\}$, definim operația algebrică: $x \Delta y = \text{cel mai mare divizor comun între } x \text{ și } y$.
a) Calculează $4 \Delta 6$ și $4 \Delta 9$.
b) Completează „tabla operației Δ ”, după modelul tablei adunării și al tablei înmulțirii.
c) Demonstrează că Δ este operație comutativă și că 12 este element neutru pentru Δ .
d) Demonstrează că Δ este operație asociativă.
e) Care sunt elementele simetrizabile din M ?
- Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ considerăm operația algebrică $u : M \times M \rightarrow M$, $u(x; y) = \text{ultima cifră a produsului } x \cdot y$.
a) Demonstrează că 1 este element neutru pentru u .
b) Arată că simetricul lui 3 față de u , este 7.
c) Determină toate elementele simetrizabile față de u .
- a) Demonstrează că înmulțirea este distributivă față de scăderea numerelor reale.
b) Este conjuncția propozițiilor distributivă față de disjuncție? Pentru a răspunde, alcătuieste un tabel de adevăr.

Aplicații ale proprietăților operațiilor algebrice



Aplicăm și dezvoltăm!

◆ Cum folosim proprietățile operațiilor algebrice pentru a rezolva ecuații?

Să analizăm!

Cunoaștem un algoritm pentru a rezolva ecuații de tipul $m \cdot x + n = p$, unde $m, n, p \in \mathbb{R}$. De exemplu, ecuația $3x + 1 = 16$ se rezolvă astfel:

$$3x = 16 - 1$$

$$3x = 15 \quad | : 3$$

$$x = 5.$$

Algoritmul de rezolvare de mai sus utilizează proprietățile operațiilor algebrice; înțelegerea modului în care aplicăm aceste proprietăți ne poate folosi și pentru rezolvarea altor ecuații. De aceea, este util să reluăm algoritmul, dintr-o altă perspectivă:

Ecuația dată:

$$3x + 1 = 16$$

Adunăm în ambii membri numărul -1 ; deoarece acesta este opusul lui 1 față de adunare:

$$(3x + 1) + (-1) = 16 + (-1)$$

Folosim asociativitatea adunării și grupăm convenabil termenii:

$$3x + [1 + (-1)] = 15$$

Numărul 0 este elementul neutru pentru adunare:

$$3x + 0 = 15$$

$$3x = 15$$

Înmulțim în ambii membri cu $\frac{1}{3}$ deoarece acesta

este inversul lui 3 față de înmulțire:

$$(3x) \cdot \frac{1}{3} = 15 \cdot \frac{1}{3}$$

Folosim comutativitatea și asociativitatea înmulțirii:

$$x \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) = 5$$

Numărul 1 este element neutru pentru înmulțire:

$$x \cdot 1 = 5$$

Obținem astfel soluția ecuației:

$$x = 5$$

▲ Relația de egalitate este compatibilă cu operațiile algebrice, adică:

$$a = b \Rightarrow a + c = b + c \text{ și}$$

$$a \cdot c = b \cdot c, \text{ pentru } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

1 Explică ce proprietăți folosești în rezolvarea ecuației:

$$3 \cdot (x + 1) = x - 2.$$

▲ Operația „ Δ ” se numește diferență simetrică.

2 Calculează

$$\{1; 2\} \Delta \{1; 2; 3\} \text{ și}$$

$$\{3; 5\} \Delta \{3; 5\}.$$

Să aplicăm!

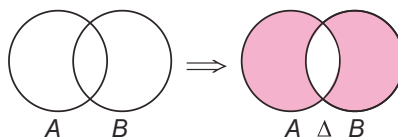
Fie A și B două mulțimi. Definim operația algebrică notată Δ , astfel:

$$A \Delta B = \{x \mid x \text{ aparține uneia dintre cele două mulțimi, dar nu aparține celeilalte}\}.$$

De exemplu, dacă $A = \{1; 4; 10; 13\}$ și $B = \{4; 5; 10\}$, atunci $A \Delta B = \{1; 5; 13\}$.

Vrem să determinăm un algoritm pentru rezolvarea ecuațiilor de tipul $M \Delta X = N$ (unde M și N sunt două mulțimi cunoscute). Pentru aceasta, este util să identificăm mai întâi proprietățile operației „ Δ ”.

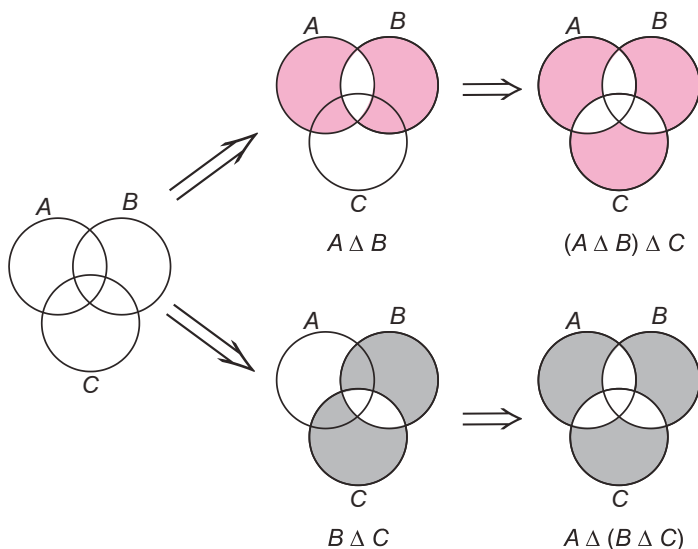
Reprezentăm operația Δ folosind diagrame Venn-Euler:



Mulțimea $A \Delta B$ este reprezentată prin porțiunea colorată de pe desen.

Verificăm că:

- elementul neutru al operației Δ este mulțimea vidă: $A \Delta \emptyset = \emptyset \Delta A = A$.
- operația Δ este asociativă: $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.



- orice mulțime este propria ei simetrică față de operația Δ : $A \Delta A = \emptyset$.

Folosind aceste proprietăți, putem rezolva ecuația $M \Delta X = N$ astfel:

Compunem în ambii membri cu mulțimea M , deoarece aceasta este simetrica lui M față de Δ :

$$M \Delta (M \Delta X) = M \Delta N$$

Folosim asociativitatea operației Δ :

$$(M \Delta M) \Delta X = M \Delta N$$

Simetrica lui M față de Δ este M însuși:

$$\emptyset \Delta X = M \Delta N$$

Mulțimea vidă este elementul neutru pentru Δ ;

obținem astfel soluția ecuației:

$$X = M \Delta N$$

◆ Cum folosim proprietățile operațiilor algebrice pentru a rezolva sisteme?

În rezolvarea unor sisteme de ecuații și de inecuații, cunoașterea proprietăților operațiilor algebrice poate fi un ajutor util pentru efectuarea calculelor.

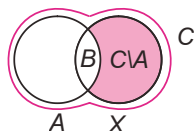
Exemplul 1

Fie A, B, C trei mulțimi date; ne propunem să rezolvăm sistemul de ecuații

$$\begin{cases} X \cup A = B \\ X \cup A = C \end{cases}, \text{ în care necunoscuta este mulțimea } X.$$

Observăm că o condiție necesară pentru ca sistemul dat să aibă soluție este ca între mulțimile A, B și C să existe relația: $B \subset A \subset C$. Presupunând că această relație este îndeplinită, reprezentăm ecuațiile sistemului printr-o diagramă Venn-Euler și identificăm astfel o posibilă soluție:

$$X = B \cup (C \setminus A)$$



Ne propunem să verificăm dacă, într-adevăr, această mulțime este soluție a sistemului:

$$(B \cup (C \setminus A)) \cap A = (B \cap A) \cup ((C \setminus A) \cap A) = B \cup \emptyset = B$$

$$(B \cup (C \setminus A)) \cup A = B \cup ((C \setminus A) \cup A) = B \cup C = C$$

În calculele anterioare, am folosit în mod esențial distributivitatea intersecției față de reuniune și asociativitatea reuniunii.

3 Urmărește diagramele Venn-Euler și explică modul în care a fost evidențiată mulțimea $(A \Delta B) \Delta C$.

4 Dacă $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 4\}$ și $C = \{3; 4; 5\}$, calculează $(A \Delta B) \Delta C$ și $A \Delta (B \Delta C)$.

5 Rezolvă ecuația $\{1; 2\} \Delta X = \{2; 5; 6\}$.

▲ Dacă $M \cup N = P$, atunci $M \subset P$ și $N \subset P$, iar dacă $M \cap N = Q$, atunci $M \supset Q$ și $N \supset Q$.

6 Ce alte proprietăți ale reuniunii au mai fost folosite în verificarea soluției sistemului?

7 Rezolvă sistemul

$$\begin{cases} X \cap \{1; 2\} = \{1\} \\ X \cup \{1; 2\} = \{1; 2; 3\} \end{cases}$$

Exemplul 2

Ne propunem să rezolvăm sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ 3x + 7 < 0 \\ x^3 - 2x^2 + x + 1 > 0 \end{cases}$$

Pentru rezolvarea acestui sistem, putem proceda astfel:

- rezolvăm pe rând cele trei inecuații și obținem mulțimile de soluții S_1, S_2, S_3 ;
- exprimăm mulțimea de soluții a sistemului: $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$.

Observăm că primele două inecuații se pot rezolva ușor, deoarece acestea sunt inecuații de gradul I cu o necunoscută:

$$2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow S_1 = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

$$3x + 7 < 0 \Leftrightarrow 3x < -7 \Leftrightarrow x < -\frac{7}{3} \Leftrightarrow S_2 = \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right)$$

Nu știm însă cum să rezolvăm cea de-a treia inecuație. Totuși, putem determina mulțimea de soluții a sistemului dat, aplicând proprietăți ale intersecției:

$$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = (S_1 \cap S_2) \cap S_3 = \left(\left[-\frac{1}{2}; \infty\right) \cap \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right)\right) \cap S_3 = \emptyset \cap S_3 = \emptyset.$$

⊗ Rezolvă în \mathbb{R} sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 0 \\ x^4 + 1 > 0 \\ (3x - 2)(x - 3) \leq 0 \end{cases}$$

Exerciții și probleme

1. Pentru $A = \{1; 2; 3\}$ și $B = \{2; 3\}$:

- calculează $A \setminus B$ și $A \Delta B$;
- rezolvă ecuația $A \Delta X = B$;
- rezolvă ecuația $B \cup Y = A$.

2. Pe mulțimea numerelor naturale vrem să descriem o nouă operație algebrică (notată \oplus), în același mod în care definim adunarea.

Pentru aceasta, întocmim tabla operației \oplus pentru cifrele de la 0 la 9 și folosim această tablă în adunarea oricăror numere.

\oplus	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3
5	5	1	2	3	4	0	1	2	3	4
6	6	2	3	4	0	1	2	3	4	0
7	7	3	4	0	1	2	3	4	0	1
8	8	4	0	1	2	3	4	0	1	2
9	9	0	1	2	3	4	0	1	2	3

Astfel, $2 \oplus 4 = 1$, $21 \oplus 43 = 14$.

- Calculează $317 \oplus 56$.
- Rezolvă ecuația $5 \oplus x = 12$.
- Arată că operația \oplus are element neutru, dar nu este asociativă.

3. Pe mulțimea $A = \{1; 2; 3; \dots; 9\}$ definim operațiile \textcircled{m} și \textcircled{M} astfel: $a \textcircled{m} b = \text{cel mai mic dintre numerele } a \text{ și } b$; $a \textcircled{M} b = \text{cel mai mare dintre numerele } a \text{ și } b$.

b. Rezolvă sistemul:
$$\begin{cases} x \textcircled{m} 6 = y \textcircled{m} 4 \\ x \textcircled{M} 6 = y \textcircled{M} 4 \end{cases}$$

4. Pe mulțimea numerelor reale definim operația algebrică notată $*$, astfel: $x * y = xy + x + y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

- Calculează $2 * 3$ și $0 * 5$.
- Demonstrează că operația $*$ este asociativă și comutativă.
- Arată că 0 este element neutru pentru operația $*$ și că inversul lui -2 față de operația $*$ este tot -2 .
- Rezolvă ecuația $(-2) * x = 4$, folosind doar proprietățile operației date.

5. Pe mulțimea $M = \{0, 1, 2, 3\}$, definim operația algebrică notată \square , a cărei tablă este descrisă mai jos.

\square	0	1	2	3
0	2	3	0	1
1	3	2	1	0
2	0	1	2	3
3	1	0	3	2

- Calculează $1 \square 3$ și $(1 \square 3) \square 0$.
- Arată că 2 este elementul neutru al operației \square .
- Determină simetricul lui 3 față de operația \square .
- Rezolvă ecuația $3 \square x = 1$.

Am reușit... ?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...

- ◆ să recunosc operații algebrice definite pe diverse mulțimi de numere
- ◆ să identific proprietăți ale unor operații algebrice
- ◆ să compar proprietăți ale unor operații algebrice, în scopul identificării unor algoritmi de calcul
- ◆ să utilizez proprietăți ale operațiilor algebrice pentru optimizarea calculului?

Test de verificare

- a) Subliniază numerele raționale din lista următoare: $0,25$; $\sqrt{2}$; $0,1010101\dots$; $0,1010010001\dots$; $\sqrt{9}$; $\frac{3}{4}$; $\sqrt{2} + 1$.
b) Precizează care dintre următoarele reguli de asociere definește o operație algebrică pe mulțimea numerelor raționale.
 $(x; y) \mapsto |x + y|$ $(x; y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ $(x; y) \mapsto x + y\sqrt{2}$ $(x; y) \mapsto x^2$.
- Pe mulțimea $M = [0; \infty)$ definim operația algebrică $*$ descrisă prin: $x * y = |x - y|$ (unde $|a|$ înseamnă modulul numărului real a).
 - Demonstrează că $*$ este operație comutativă.
 - Este $*$ operație asociativă? Admite element neutru?
 - Arată că orice element din M este simetrizabil față de operația $*$.
- Fie P mulțimea părților mulțimii $\{1; 2; 3; 4\}$ și fie $S = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.
Pe mulțimea P definim operațiile „intersecție” (notată \cap) și „reuniune” (notată \cup), iar pe mulțimea S definim operațiile „cel mai mare divizor comun” (notată \textcircled{D}), respectiv „cel mai mic multiplu comun” (notată \textcircled{M}).
 - Calculează $\{1; 2\} \cap \{2; 3; 4\}$ și $4 \textcircled{D} 6$.
 - Demonstrează că $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$, pentru $X, Y, Z \in P$ și că $x \textcircled{M} (y \textcircled{D} z) = (x \textcircled{M} y) \textcircled{D} (x \textcircled{M} z)$, pentru $x, y, z \in S$.
 - Soluția sistemului
$$\begin{cases} X \cap \{1; 2; 3\} = \{1\} \\ X \cup \{1; 2; 3\} = \{1; 2; 3; 4\} \end{cases}, X \in P$$
, este mulțimea $\{1\} \cup (\{1; 2; 3; 4\} \setminus \{1; 2; 3\})$.
Determină analog, soluția sistemului
$$\begin{cases} x \textcircled{D} 4 = 2 \\ x \textcircled{M} 4 = 12 \end{cases}, x \in S$$
, comparând proprietățile celor patru operații definite în enunț.
- Rezolvă sistemul de inecuații:
$$\begin{cases} 2x + 1 \leq -x + 4 \\ x^3 - 2x - 1 < 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases}$$
.

Lectură

De-a lungul timpului, constituirea unor tipuri de numere a fost strâns legată de rezolvarea unor ecuații.

Dacă numerele naturale au apărut din necesități practice încă din preistoria omenirii, numerele negative s-au constituit mult mai greu. Prima mențiune a acestora apare abia într-un manuscris chinez din anul 200 d.Hr., fără ca acest lucru să aibă impact asupra altor civilizații. Astfel, în lucrarea sa „Aritmetica”, ce este considerată apogeul algebric în Grecia antică, Diofante din Alexandria (cca. 250 D.Hr.) afirmă că ecuația $3x + 11 = 5$ este absurdă, deoarece această ecuație nu are ca soluție niciun număr natural.

În jurul anului 600 D.Hr., Brahmagupta vorbește de cantități „afirmative” și cantități „negative” și dă reguli de adunare și scădere pentru credite și debite în bilanțuri.

Abia în 1545, Gerolamo Cardano – matematician, medic și filozof italian, stabilește regula semnelor, care permite obținerea de ecuații echivalente.

Unitatea de învățare 4

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Calcul numeric

1. Efectuează:
- a) $2 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 + (-2) \cdot 0$ b) $1,2 \cdot 3 + 0,4 \cdot 0 - 1,5 \cdot 2$
c) $-1,5 \cdot 4 + (-3) \cdot (-2) - (-1) \cdot 5$

Calcul algebric

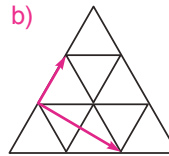
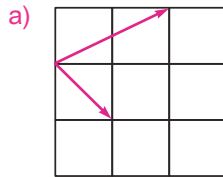
2. Scrie mai simplu:
- a) $x + x + x + x$ b) $x \cdot x + x \cdot x + x \cdot x$ c) $x^2 \cdot x - x \cdot x^2$

Poziționare în plan

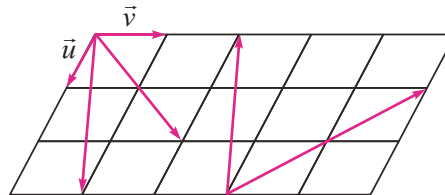
3. Desenează planul unei săli de spectacol, în care sunt 20 de rânduri cu câte 15 fotolii. Indică pe acest plan fotoliul corespunzător biletului pe care scrie: rândul 4, locul 7.
4. Reprezintă pe un sistem de axe ortogonale punctele: $A(-1; 4)$; $B(3; 2)$; $C(1; 0)$; $D(0; -3)$.

Operații cu vectori

5. Desenează suma și diferența vectorilor marcați pe desen.



6. Exprimă vectorii marcați prin culoare în funcție de \vec{u} și \vec{v} .



Proprietăți ale operațiilor cu numere

7. În imaginea alăturată apare rezultatul înmulțirii 2359×487 , așa cum a fost el afișat pe ecranul unui calculator de buzunar. Precizează rezultatele următoarelor operații, fără să le mai efectuezi de fiecare dată.

1148833

- a) 487×2359 ; b) $2359 \times 400 + 2359 \times 87$; c) $2300 \times 487 + 59 \times 487$.

8. Alege propozițiile adevărate!

- a) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$ b) $\exists x, y \in \mathbb{R}, x \cdot y \neq y \cdot x$ c) $\forall z \in \mathbb{R}, z \cdot 1 = z$.

Elemente de logică

9. Precizează valoarea de adevăr a următoarelor propoziții!

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$ b) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x - y = y - x$
c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \neq y + x$ d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \cdot y \neq y \cdot x$.

10. Formulează propoziția obținută prin negarea enunțului: orice două numere reale x și y au proprietatea $x^2 + y^2 \geq 4$.

Calcul tabelar

Ne amintim și explorăm!

◆ Cum operăm cu tabelele de date?

În multe situații din viața cotidiană este util să organizăm datele în tabele. În acest fel, avem o imagine globală asupra situației descrise și putem opera mai ușor cu datele înregistrate.

Exemplul 1: Evidența vânzărilor

Rețeaua de magazine „Simfonia” comercializează CD-uri muzicale. Pentru a putea compara eficiența echipelor de vânzări din două magazine, managerul firmei a cerut situația vânzărilor pentru fiecare articol în parte, în lunile noiembrie și decembrie. Iată o parte a tabelelor completate cu această ocazie.

Simfonia Brașov

Denumire produs Luna	Beethoven IX	Beatles Love Songs	Bach Arta fugii	Berlioz Fantastica
noiembrie	48	86	121	27
decembrie	64	102	87	56

Simfonia Bacău

Denumire produs Luna	Beethoven IX	Beatles Love Songs	Bach Arta fugii	Berlioz Fantastica
noiembrie	63	51	157	32
decembrie	56	92	149	40

Tabelele oferă atât informații comparative, cât și posibilitatea de a obține un centralizator al vânzărilor. Pentru aceasta „adunăm” tabelele prin suprapunere și obținem:

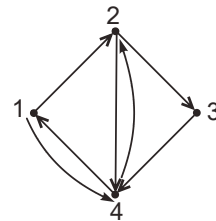
$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 48 & 86 & 121 & 27 \\ \hline 6 & 63 & 51 & 157 & 32 \\ \hline 56 & 92 & 149 & 40 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 111 & 137 & 278 & 59 \\ \hline 120 & 194 & 236 & 96 \\ \hline \end{array}$$

Avem astfel situația totală a vânzărilor, din cele două magazine.

Exemplul 2: Codificarea grafurilor

În imaginea alăturată este desenat graful orientat corespunzător străzilor unui cartier. Pentru a înregistra sintetic informația în vederea determinării unor drumuri optime, o firmă de transport a preferat codificarea grafului printr-un tabel cu numere.

În tabel apare 1 în pătrățelul din linia i și coloana j dacă nodurile i și j sunt unite printr-un arc (de la i la j); dacă un astfel de arc nu există, atunci în tabel apare 0. Graful din imaginea de mai sus a fost deci codificat prin tabelul alăturat:



↓ coloana 3

	0	1	0	1
linia 2 →	0	0	1	1
	0	0	0	1
	1	1	0	0

1 **Informează-te și răspunde!**
Cine a fost Berlioz?
La ce se referă „Fantastica”?

2 **Câte CD-uri Beatles s-au vândut în total în cele două magazine?**

3 **Ce reprezintă numărul 137 din ultimul tabel?**

▲ **Pătrățelul marcat pe tabel este situat pe locul (2; 3).**

4 **Identifică pătrățelul de pe locul (4; 2). Ce număr apare în acest loc?**

5 Cum crezi că se poate codifica un graf neorientat?

Din modul în care se face codificarea, putem deduce că:

- numărul de arce ale grafului corespunde numărului de apariții în tabel ale lui 1;
- numărul de arce care pleacă din nodul i corespunde aparițiilor lui 1 pe linia i ;
- numărul de arce care sosesc în nodul j corespunde aparițiilor lui 1 pe coloana j .

Exemplul 3: Situația încasărilor

Firmele „Alfa”, „Beta” și „Gama” assemblează computere, pe care le vând prin magazinele firmei „Computers S.R.L.”. Pentru primele patru luni ale anului, serviciile specializate ale firmelor au întocmit următoarele situații:

Serviciul desfacere			
	Numărul de PC-uri vândute lunar		
	Alfa	Beta	Gama
Magazinul 1	50	100	80
Magazinul 2	70	100	40

Serviciul marketing				
	Prețul unitar al PC-urilor (lei)			
	I	F	M	A
Alfa	420	410	440	400
Beta	350	360	340	350
Gama	520	520	510	500

6 Ce reprezintă numărul 80 din primul tabel? Dar numărul 360 din al doilea tabel?

7 Explică modul de calcul al încasărilor din luna ianuarie în magazinul 1.

La sfârșitul perioadei, serviciul contabilitate dorește să aibă o situație clară a încasărilor din cele două magazine, în fiecare dintre cele patru luni.

De exemplu, încasările din magazinul 1 în ianuarie au fost de:

$$50 \times 420 + 100 \times 350 + 80 \times 520 = 97\ 600 \text{ lei}$$

Observăm că numerele care apar în acest calcul provin din prima linie, respectiv din prima coloană a celor două tabele.

Analog, pentru a calcula încasările din magazinul 1 în luna martie, folosim numerele de pe linia „magazinul 1” din primul tabel și numerele de pe coloana „martie” din al doilea tabel:

$$50 \times 440 + 100 \times 340 + 80 \times 510 = 96\ 800 \text{ lei}$$

8 Explică modul în care procedăm, pentru a afla valoarea vânzărilor din magazinul 2, în februarie.

9 Completează tabelul încasărilor lunare cu datele care mai lipsesc. În ce lună s-au obținut cele mai mari încasări?

Putem proceda în același mod pentru a calcula încasările lunare ale fiecărui magazin. Rezultatele calculului au fost centralizate în tabelul alăturat:

Încasări lunare				
	I	F	M	A
Magazinul 1	97600	98100	96800	
Magazinul 2	85200		85200	83000

Exerciții și probleme

1. Domnul Popescu a depus mai multe sume de bani la câteva bănci, pe timp de 1 an. Ratele dobânzilor anuale și sumele depuse sunt cuprinse în tabelul alăturat.

Suma	3000	4000	2000
Rata dobânzii	20%	15%	17%

Ce dobândă totală va încasa domnul Popescu după 1 an?

2. La o bancă se acordă o dobândă de 15% pentru depunerile pe termen de un an. Organizează într-un tabel situația conturilor la începutul și la sfârșitul anului pentru: Ana, Dragoș, Ștefan și Matei care au depus fiecare 3 400, 6 800, 7 200, respectiv 12 100 lei.

3. a) Care este prețul unui produs achiziționat de magazinul „Mega” cu 145 lei, dacă i se aplică un adaos comercial de 20%?
b) Completează tabelul următor și reprezintă grafic variația prețului de vânzare în funcție de prețul de achiziție.

Denumire produs	Aparat ras	Oală bucătărie	Mănuși menaj	Perie păr	Trusă voiaj	Agrafe
Preț achiziție (lei)	16,50	72,50			19,50	
Preț de vânzare (lei)			1,80	4,44		1,16

4. Magazinul „Calculus” vinde calculatoare de buzunar.

Folosește tabelele pentru a afla încasările în fiecare dintre cele două luni.

Tipul calculatorului	CASIO	SHARP	CITIZEN
Prețul unitar	35	30	40

Tipul calculatorului	Nr. de bucăți vândute	
	Mai	Iunie
CASIO	100	50
SHARP	200	400
CITIZEN	250	150

Matrice și operații cu matrice

Analizăm și generalizăm!

◆ Ce este o matrice?

Pentru a ține evidența vânzărilor, administratorul unei papetării completează săptămânal un tabel din care redăm mai jos doar o secvență.

	Pixuri	Creioane	Caiete
L	300	200	50
M	150	200	125
M	225	75	200
J	89	234	145
V	200	150	70

În acest tabel, fiecare element este caracterizat de poziția lui pe coloană (vertical – sortimentul de produse) și pe linie (orizontal – ziua din săptămâna când s-a efectuat vânzarea).

Pentru a simplifica scrierea, la matematică notăm tabelul anterior astfel:

$$\begin{pmatrix} 300 & 200 & 50 \\ 150 & 200 & 125 \\ 225 & 75 & 200 \\ 89 & 234 & 145 \\ 200 & 150 & 70 \end{pmatrix}$$

Acest tabel se numește *matrice* cu 5 linii și 3 coloane.

❶ Caracterizează poziția numărului 145 în tabelul cu evidența vânzărilor.

❷ Scrie o matrice de tipul (2, 3) cu elemente din mulțimea \mathbb{Q} .

⚠ O matrice în care numărul de linii este egal cu numărul de coloane se numește *matrice pătratică*. Mulțimea matricelor pătratice de tip (m, m) cu elemente din E, se notează $\mathcal{M}_m(E)$; m se mai numește și *ordinul* acestor matrice.

În general

Fie E o mulțime de numere reale. Vom numi *matrice de tipul (m, n) cu elemente din mulțimea E*, orice tabel de forma următoare, în care numerele a_{ij} sunt numere din mulțimea E.

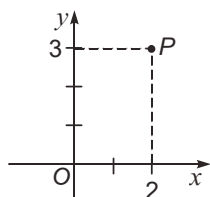
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Putem folosi pentru matricea de mai sus și notația $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.

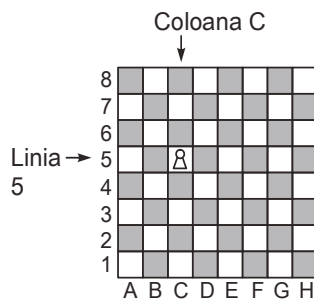
Dacă tipul matricei este precizat, putem nota pe scurt $A = (a_{ij})$.

Mulțimea tuturor matricelor de tip (m, n) cu elementele din mulțimea E se notează prin $\mathcal{M}_{m,n}(E)$.

Să observăm!



În sistemul ortogonal de axe, punctul P are coordonatele (2; 3).



Pe tabla de șah, pionul este așezat pe câmpul C5.

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & -7 & 10 \\ 6 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

În matricea X, numărul -7 ocupă poziția (3; 2): $x_{3,2} = -7$.

❸ Observă asemănări și deosebiri între cele 3 moduri de raportare, sugerate în exemplele alăturate. Cât este $x_{2,3}$ în matricea X?

◆ Cum definim egalitatea matricelor?

Să comparăm!

Pentru un studiu statistic, Alina, Dan și Silviu au avut de completat un tabel cu temperaturile înregistrate în orașul lor, în câteva zile și la anumite ore, stabilite anterior. Iată cum arată tabelele lor de date:

Alina					Dan					Silviu				
	L	M	M	J		L	M	M	J		L	M	M	
8 ⁰⁰	12°C	10°C	10°C	9°C	8 ⁰⁰	12°C	10°C	10°C	9°C	8 ⁰⁰	12°C	10°C	10°C	
12 ⁰⁰	18°C	14°C	15°C	12°C	12 ⁰⁰	18°C	16°C	15°C	12°C	12 ⁰⁰	18°C	14°C	15°C	
16 ⁰⁰	16°C	14°C	14°C	10°C	16 ⁰⁰	16°C	14°C	14°C	10°C	16 ⁰⁰	16°C	14°C	14°C	

4 Ce temperatură a înregistrat Alina miercuri, la ora 16⁰⁰? Când a înregistrat Dan temperatura minimă?

Observăm că, deși înregistrează temperaturi în același oraș, la aceleași ore și în aceleași zile, primele două tabele nu sunt identice: înregistrările făcute marți, la ora 12⁰⁰, nu coincid. De aceea, deși celelalte date corespund, matricele obținute de Alina și de Dan nu sunt egale.

Ultimul tabel, completat de Silviu, confirmă înregistrările Alinei; Silviu a neglijat însă să consemneze temperaturile de joi. De aceea, nici matricele obținute de Alina și Silviu nu sunt egale.

În general

Două matrice sunt egale dacă au același număr de linii și de coloane și dacă elementele corespunzătoare sunt egale.

Altfel spus: matricele $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ și $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ se numesc egale dacă $a_{ij} = b_{ij}$, pentru orice indici (i, j) .

5 Află x și y dacă matricele

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ și } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & y \end{pmatrix} \text{ sunt egale.}$$

6 Explică ce reprezintă fiecare număr din matricele ce conțin situația vânzărilor de umbrele.

◆ Cum se adună matricele?

Să analizăm!

Firma Aqua, care produce trei sortimente de umbrele, își desface produsele prin două puncte de vânzare. Pentru lunile octombrie și noiembrie, situația vânzărilor este înregistrată în matricele următoare:

$$\begin{pmatrix} 214 & 108 & 156 \\ 312 & 154 & 171 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 81 & 45 & 71 \\ 92 & 57 & 83 \end{pmatrix}$$

primul magazin al doilea magazin

Situația vânzărilor firmei Aqua în cele două luni, pentru fiecare dintre sortimente, se obține adunând termen cu termen matricele date. Matricea astfel obținută este suma matricelor date:

$$\begin{pmatrix} 214 & 108 & 156 \\ 312 & 154 & 171 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 81 & 45 & 71 \\ 92 & 57 & 83 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 295 & 153 & 227 \\ 404 & 211 & 254 \end{pmatrix}$$

În general

Două matrice se pot aduna numai dacă sunt de același tip, adică au același număr de linii și de coloane.

Suma matricelor $A = (a_{ij})$ și $B = (b_{ij})$, unde $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, este matricea $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, unde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pentru orice indici (i, j) .

Notăm $C = A + B$.

7 Pentru $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{și } Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

calculează $X + Y$ și $X + X$.

Să aplicăm!

Într-un sistem de axe ortogonale, orice vector corespunde unei matrice de tip $(2; 1)$, care exprimă descompunerea vectorului după cele două axe.

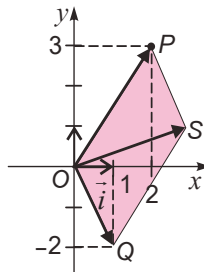
De exemplu, pentru vectorii din imagine, putem scrie:

$$\overline{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dacă $\overline{OS} = \overline{OP} + \overline{OQ}$, coordonatele lui S se obțin adunând matricele termenilor:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Deci S este punctul de coordonate (3; 1).

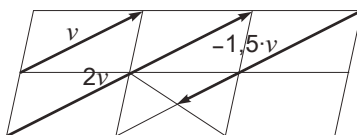


8 Exprimă în coordonate suma vectorilor $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ și $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Verifică prin desen corectitudinea calculelor.

◆ Cum definim produsul dintre o matrice și un scalar?

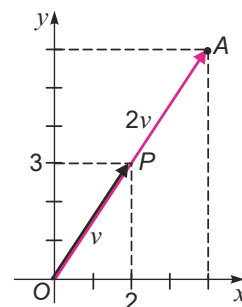
Să ne amintim!

În afară de adunarea vectorilor, am mai definit o operație importantă: înmulțirea unui vector cu un număr real.



Pentru vectorii din figură, egalitatea $2 \cdot \overline{OP} = \overline{OA}$ se scrie matriceal: $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Observăm că elementele celei de-a doua matrice s-au obținut din elementele corespunzătoare ale primei matrice, prin înmulțire cu 2.



În general

Prin înmulțirea unei matrice cu un număr real se obține o matrice de același tip cu matricea inițială.

Produsul matricei $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ cu numărul real λ este matricea $P = (p_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, unde $p_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ pentru orice indici (i, j) .

Notăm: $P = \lambda \cdot A$.

9 Desenează un vector \vec{u} , apoi reprezintă grafic vectorii: $2 \cdot \vec{u}$, $(-2) \cdot \vec{u}$, $0 \cdot \vec{u}$.

10 Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determină o matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X = 3 \cdot A$.

◆ Ce relație există între adunarea matricelor și înmulțirea cu scalari?

Să comparăm!

Dacă a este un număr real, atunci $a + a + a = 3 \cdot a$.

Această relație se păstrează dacă \vec{a} este un vector în plan: $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = 3 \cdot \vec{a}$.

Observăm că, în exemplele anterioare, este evidențiată o legătură între adunare (de numere sau de vectori) și înmulțire cu numere naturale. Această proprietate rămâne valabilă și pentru operațiile cu matrice: pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ și orice număr natural r , avem $\underbrace{A + A + \dots + A}_{r \text{ termeni}} = r \cdot A$.

Să aplicăm!

Fie $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Atunci $X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $-3 \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & -9 \end{pmatrix}$.

◆ Cum definim produsul a două matrice?

Să analizăm!

Pentru următorii ani, specialiștii în demografie apreciază că structura populației României se va modifica astfel:

Până în 2010: 20% din populația urbană se va muta la sat, iar 30% din populația rurală va pleca la oraș.

Între 2010 și 2015: 15% din populația urbană se va muta la sat, iar 25% din populația rurală se va muta la oraș.

11 Explică de unde provin coeficienții 0,8 și 0,3, din estimarea făcută pentru populația rurală în 2010.

Să presupunem că populația întregii țări nu variază în perioada analizată. Fie u și r populația urbană, respectiv rurală, în acest moment. Variația de populație urbană și rurală va fi, conform previziunilor:

$$\begin{aligned} 2010: \text{urban: } & 0,8 \cdot u + 0,3 \cdot r \\ & \text{rural: } 0,2 \cdot u + 0,7 \cdot r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2015: \text{urban: } & 0,85 \cdot (0,8 \cdot u + 0,3 \cdot r) + 0,25 \cdot (0,2 \cdot u + 0,7 \cdot r) = \\ & = (0,85 \cdot 0,8 + 0,25 \cdot 0,2) \cdot u + (0,85 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,7) \cdot r \\ \text{rural: } & 0,15 \cdot (0,8 \cdot u + 0,3 \cdot r) + 0,75 \cdot (0,2 \cdot u + 0,7 \cdot r) = \\ & = (0,15 \cdot 0,8 + 0,75 \cdot 0,2) \cdot u + (0,15 \cdot 0,3 + 0,75 \cdot 0,7) \cdot r \end{aligned}$$

Putem organiza aceste date cu ajutorul matricelor astfel:

• notăm sintetic:

$$\begin{array}{c} \text{DE LA} \rightarrow \text{oraș} \quad \text{sat} \\ \text{MERG LA} \downarrow \text{oraș} \quad \left(\begin{array}{cc} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{array} \right) = A \\ \text{sat} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{DE LA} \rightarrow \text{oraș} \quad \text{sat} \\ \text{MERG LA} \downarrow \text{oraș} \quad \left(\begin{array}{cc} 0,85 & 0,25 \\ 0,15 & 0,75 \end{array} \right) = B \\ \text{sat} \end{array}$$

• exprimăm matriceal variația de populație urbană și rurală:

$$\begin{array}{ccc} \text{modul de variație} & & \text{modul de variație} \\ \text{până în 2010} & & \text{până în 2015} \\ \left(\begin{array}{c} u \\ r \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c} 0,8 \cdot u + 0,3 \cdot r \\ 0,2 \cdot u + 0,7 \cdot r \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} u' \\ r' \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c} 0,85 \cdot u' + 0,25 \cdot r' \\ 0,15 \cdot u' + 0,75 \cdot r' \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} (0,85 \cdot 0,8 + 0,25 \cdot 0,2) \cdot u + (0,85 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,7) \cdot r \\ (0,15 \cdot 0,8 + 0,75 \cdot 0,2) \cdot u + (0,15 \cdot 0,3 + 0,75 \cdot 0,7) \cdot r \end{array} \right) \end{array}$$

12 Ce semnificație au u' și r' , în exprimarea matriceală a variației de populație?

Putem deci descrie variația de populație, între momentul actual și 2015, prin matricea:

$$C = \begin{pmatrix} 0,85 \cdot 0,8 + 0,25 \cdot 0,2 & 0,85 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,7 \\ 0,15 \cdot 0,8 + 0,75 \cdot 0,2 & 0,15 \cdot 0,3 + 0,75 \cdot 0,7 \end{pmatrix}.$$

Ce legătură este între matricea C și matricele A și B ?

Observăm că în formula de calcul a fiecărui element din C apar elementele unei linii a matricei B și a unei coloane a matricei A .

$$\left(\begin{array}{cc} 0,85 & 0,25 \\ 0,15 & 0,75 \end{array} \right) \text{ și } \left(\begin{array}{cc} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc} 0,85 \cdot 0,8 + 0,25 \cdot 0,2 & 0,85 \cdot 0,3 + 0,25 \cdot 0,7 \\ 0,15 \cdot 0,8 + 0,75 \cdot 0,2 & 0,15 \cdot 0,3 + 0,75 \cdot 0,7 \end{array} \right).$$

Spunem că matricea C este *produsul* matricelor B și A .

În general

Fie $X = (x_{ij})$ o matrice de tip (m, n) și $Y = (y_{ij})$ o matrice de tip (n, p) .

Produsul matricelor X și Y (în această ordine!) este matricea $Z = (z_{ij})$, de tip (m, p) , unde $z_{ij} = x_{i1} \cdot y_{1j} + x_{i2} \cdot y_{2j} + \dots + x_{in} \cdot y_{nj}$, pentru orice pereche de indici (i, j) .

Notăm $Z = X \cdot Y$.

▲ Numărul de linii ale matricei $X \cdot Y$ este egal cu numărul de linii ale matricei X . Numărul de coloane ale matricei $X \cdot Y$ este egal cu numărul de coloane ale matricei Y .

Atenție! Putem calcula produsul a două matrice doar dacă numărul de coloane ale primei matrice este egal cu numărul de linii ale celei de-a doua matrice.

Să aplicăm!

Calculăm produsul matricelor $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Matricea $X \cdot Y$ are două linii și patru coloane. Pentru a calcula $X \cdot Y$:

• înmulțim pe rând prima linie a lui X cu coloanele lui Y :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 10$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 14$$

$\begin{pmatrix} 10 & 14 & \dots & \dots \end{pmatrix}$

• procedăm la fel cu a doua linie a lui X :

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = 7$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 10$$

$\begin{pmatrix} 10 & 14 & 25 & 0 \\ 7 & \dots & 10 & \dots \end{pmatrix}$

• în final, obținem: $X \cdot Y = \begin{pmatrix} 10 & 14 & 25 & 0 \\ 7 & 26 & 10 & -11 \end{pmatrix}$

◆ Ce proprietăți au operațiile cu matrice?

Să analizăm!

Știm că operația de adunare a vectorilor este asociativă, este comutativă și admite element neutru.

Prin raportare la un sistem de axe ortogonale, orice vector din plan corespunde unei matrice de tip $(2; 1)$, astfel că suma a doi vectori corespunde matricei sumă.

Este oare adevărat că proprietățile adunării vectorilor, enumerate mai sus, se regăsesc la adunarea matricelor?

Pentru a răspunde, este util să considerăm un exemplu.

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -8 & 5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & \dots & \dots \\ \dots & 3+6 & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+1 & \dots & \dots \\ \dots & 6+3 & \dots \end{pmatrix} = B + A$$

$$(A + B) + C = \begin{pmatrix} 1+4 & \dots & \dots \\ \dots & 3+6 & \dots \end{pmatrix} + C = \begin{pmatrix} (1+4)+2 & \dots & \dots \\ \dots & (3+6)+5 & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+(4+2) & \dots & \dots \\ \dots & 3+(6+5) & \dots \end{pmatrix} = A + (B + C)$$

13 Explică modul în care au fost calculate toate elementele matricei $X \cdot Y$ din exemplul alăturat.

14 Ce ar putea însemna pătratul unei matrice A ? În ce caz s-ar putea calcula matricea A^2 ?

15 Calculează

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

16 Justifică geometric asociativitatea operației de adunare a vectorilor. Cine este elementul neutru pentru adunarea vectorilor?

17 Efectuează toate calculele și convinge-te că egalitățile din exemplul alăturat sunt corecte.

Fie $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matricea de tip $(2; 3)$ în care toate elementele sunt egale cu zero. Atunci $A + O = \begin{pmatrix} 1+0 & \dots & \dots \\ \dots & 3+0 & \dots \end{pmatrix} = A$.

În calculele de mai sus, am completat doar o parte dintre elementele matricelor obținute prin adunare. Ne putem însă convinge imediat că egalitățile sunt, într-adevăr, corecte.

În toate aceste calcule am folosit, de fapt, proprietățile adunării pe \mathbb{R} . De fiecare dată când adunăm matrice de același tip, calculele se reduc la operații cu numere reale. Ca urmare, putem afirma că proprietățile adunării matricelor evidențiate mai sus sunt universal valabile.

În general

Adunarea matricelor definește pe $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ o operație algebrică asociativă și comutativă. Adunarea admite ca element neutru matricea nulă, adică matricea $O \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, în care toate elementele sunt egale cu zero.

Înmulțirea matricelor este o operație mai complicată și de aceea are nevoie de o discuție mai amplă.

Să observăm mai întâi că înmulțirea matricelor devine o operație algebrică doar dacă ne restrângem la matricele pătrate de ordin fixat. Pentru a determina ce proprietăți are această operație, este util să considerăm câteva exemple.

▲ Dacă X și Y sunt două matrice, putem efectua produsele $X \cdot Y$ și $Y \cdot X$ doar dacă X și Y sunt matrice de același ordin.

18 Dacă $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și

$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calculează

$X \cdot Y$ și $Y \cdot X$, apoi compară rezultatele obținute.

19 Găsește numere reale nenule x, y, z, t , diferite între ele, astfel încât $x : y \neq y : x$, dar $z : t = t : z$.

20 Calculează $C \cdot (B \cdot A)$ și $(C \cdot B) \cdot A$.

Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Studiem comutativitatea înmulțirii:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 6 & 28 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & 5 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 11 & 27 \end{pmatrix}$$

Observăm că, pentru exemplul dat, $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Verificăm alte două produse. Observăm că $A \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = C \cdot A$.

În concluzie, dacă schimbăm ordinea factorilor unui produs de matrice pătrate, uneori rezultatul se păstrează, alteori obținem rezultate diferite.

2. Studiem asociativitatea înmulțirii:

$$(A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 6 & 28 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 14 \\ 50 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 14 \\ 50 & 6 \end{pmatrix}$$

Observăm că $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Verificăm alte produse. Obținem, de exemplu:

$$B \cdot (A \cdot C) = \begin{pmatrix} -5 & 15 \\ 44 & 11 \end{pmatrix} = (B \cdot A) \cdot C$$

3. Observăm ce proprietăți are înmulțirea cu matricea unitate.

Fie $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matricea pătratică de ordinul 2 în care elementele de pe diagonala

principală sunt egale cu 1, iar restul elementelor sunt egale cu 0. Atunci

$$A \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = A$$

$$I_2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = B$$

Exemplele de mai sus nu reprezintă o demonstrație. Putem afirma totuși că proprietățile evidențiate sunt valabile pentru calculele cu matrice arbitrare.

În general

Înmulțirea matricelor definește pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o operație algebrică asociativă și necomutativă.

Înmulțirea matricelor de ordin n admite ca element neutru matricea unitate, adică matricea $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ în care toate elementele de pe diagonala principală sunt egale cu 1, iar restul elementelor sunt egale cu 0.

$$\triangle I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

21 Scrie matricea I_4 .

◆ Ce legătură există între adunarea și înmulțirea matricelor?

Să comparăm!

În calculele cu numere reale folosim distributivitatea înmulțirii față de adunare: pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$ avem $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

$$a \begin{array}{|c|c|} \hline b & c \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline c \\ \hline \end{array}$$

Această proprietate ne permite să efectuăm mai ușor unele calcule, prin utilizarea factorului comun. De exemplu:

$$23 \cdot 6 + 23 \cdot 4 = 23 \cdot (6 + 4) = 230$$

$$\frac{11+22+33+44}{111+222+333+444} = \frac{11 \cdot (1+2+3+4)}{111 \cdot (1+2+3+4)} = \frac{11}{111}$$

Operațiile de adunare și de înmulțire au fost definite însă și pentru matrice pătratice de același ordin. Se păstrează oare și în acest caz proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare?

Să demonstrăm!

Dacă $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, atunci

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \text{ și } (B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A.$$

Fie $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$. Atunci

$$A \cdot (B + C) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 & b_4 + c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot (b_1 + c_1) + a_2 \cdot (b_3 + c_3) & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B + A \cdot C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_3 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_3 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Deoarece $a_1 \cdot (b_1 + c_1) + a_2 \cdot (b_3 + c_3) = (a_1 b_1 + a_2 b_3) + (a_1 c_1 + a_2 c_3)$, deducem că $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Analog se demonstrează a doua egalitate din enunț.

22 Explică geometric distributivitatea, folosind figura alăturată.

23 Completează spațiile marcate prin ... în demonstrația alăturată, apoi verifică egalitățile din enunț.

24 Explică de ce, în operațiile cu numere reale enunțăm o singură condiție privind distributivitatea înmulțirii față de adunare, în timp ce pentru operațiile cu matrice avem două astfel de condiții.

În general

În operațiile cu matrice pătratică, putem folosi *distributivitatea înmulțirii față de adunare*: pentru orice matrice $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avem
 $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ și $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$.

Exerciții și probleme

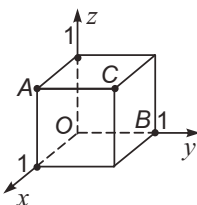
1. Determină numerele x, y și z astfel încât

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & x+z \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. a) Scrie două matrice X și Y din $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, care au pe fiecare linie și pe fiecare coloană exact câte un element nenul.
 b) Calculează $X + Y$ și $X \cdot Y$.

3. Observă desenul, apoi descrie matriceal egalitatea:

$$\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}.$$



4. Fie $X, Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Notăm \bar{X} matricea obținută din X , prin înmulțirea tuturor elementelor primei linii cu 2. Ce relație există între matricea $X \cdot Y$ și matricea $\bar{X} \cdot Y$?

5. Pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculează:

$$A + B; \quad 3 \cdot A; \quad 3 \cdot A + 2 \cdot B; \quad A \cdot B; \\ A \cdot B + B \cdot A; \quad A^2; \quad B^2.$$

6. Află numărul real a dacă

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

7. Verifică pe câteva exemple dacă formula $X^2 - Y^2 = (X - Y) \cdot (X + Y)$ este valabilă pentru $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

8. Fie $O \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ matricea nulă. Demonstrează că $O \cdot X = O$, pentru orice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

9. Notăm $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Demonstrează că $A^3 = 0$.

10. Fie $X, Y, Z \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Notăm $(Y | Z)$ matricea de tip $(2; 4)$, în care scriem mai întâi coloanele lui Y , apoi coloanele lui Z . Demonstrează că $X \cdot (Y | Z) = (X \cdot Y | X \cdot Z)$.

11. Notăm $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculează $T \cdot A$.

b) Dacă $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ este o matrice oarecare, arată că $T \cdot X = 3 \cdot X$.

12. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculează A^2, A^3, A^4 .

b) Observă rezultatele obținute, apoi propune o formulă generală de calcul pentru A^n . Verifică formula pentru $n = 5$.

13. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Determină x și y astfel încât $A \cdot B = B \cdot A$.

14. Pentru o matrice pătratică $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ notăm $\text{Tr}(X)$ suma elementelor de pe diagonala principală. (Prescurtarea Tr provine din cuvântul „trace”, care înseamnă în limba engleză „urmă”).

De exemplu, dacă $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, atunci $\text{Tr}(X) = 1 + 5 + 7 = 13$.

a) Calculează $\text{Tr}(Y)$, pentru $Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Alege două matrice pătratice X și Y , de ordinul 3, și verifică egalitățile:

$$\text{Tr}(X + Y) = \text{Tr}(X) + \text{Tr}(Y); \quad \text{Tr}(5 \cdot X) = 5 \cdot \text{Tr}(X);$$

$$\text{Tr}(X \cdot Y) = \text{Tr}(Y \cdot X).$$

c) Demonstrează proprietățile de la punctul b) în cazul unor matrice pătratice X și Y de ordinul n , dacă X este o matrice arbitrară, iar Y are doar elementul de pe poziția (i, j) nenul.

15. Fie $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Verifică

$$\text{dacă } (X + Y)^2 = X^2 + 2 \cdot X \cdot Y + Y^2.$$

16. Ce condiții îndeplinesc, $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, dacă

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & t \\ x & z \end{pmatrix} = O_2?$$

Utilizarea matricelor în practică



Aplicăm și dezvoltăm!

Matricele și operațiile cu matrice nu sunt importante doar pentru matematică. Multe situații cotidiene pot fi exprimate mai ușor matriceal.

◆ Cum folosim operațiile cu matrice în rezolvarea unor probleme practice?

Exemplu

Angajații unei firme de construcții au fost solicitați de câteva ori să lucreze peste program sau în zilele de week-end. Directorul firmei a decis ca, în aceste cazuri, angajații să fie plătiți cu 20 lei/oră, față de 10 lei/oră cât ar fi câștigat în cadrul programului normal de lucru. La această firmă, plata se face săptămânal, dar actele contabile se întocmesc la sfârșitul lunii. La sfârșitul primei săptămâni, contabilitatea a primit situația din tabelul alăturat.

Drepturile salariale pentru prima săptămână pot fi calculate înmulțind, pentru fiecare angajat, numărul de ore din programul normal cu 10 și numărul de ore suplimentare cu 20. Putem formaliza acest calcul folosind operații cu matrice. Mai precis, drepturile salariale pot fi calculate efectuând produsul alăturat.

Nume \ Ore lucrate	Program normal	Ore suplimentare
Popescu	40	5
Ionescu	40	15
Georgescu	20	0
Marinescu	36	7
Constantinescu	40	10

$$\begin{pmatrix} 40 & 5 \\ 40 & 15 \\ 20 & 0 \\ 36 & 7 \\ 40 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

❶ Cum poți exprima matriceal numărul total de ore lucrate de fiecare angajat?

Aceași regulă a fost păstrată în a doua săptămână. Situația numărului de ore lucrate este prezentată în tabelul următor, iar serviciul contabil a calculat drepturile salariale efectuând produsul matricelor de mai jos.

Nume \ Ore lucrate	Program normal	Ore suplimentare
Popescu	40	20
Ionescu	0	0
Georgescu	20	5
Marinescu	36	10
Constantinescu	40	5

$$\begin{pmatrix} 40 & 20 \\ 0 & 0 \\ 20 & 5 \\ 36 & 10 \\ 40 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

❷ Explică de ce drepturile salariale săptămânale ale angajaților firmei pot fi calculate efectuând un produs de matrice.

Patronul firmei a vrut să verifice corectitudinea înregistrărilor contabile. El a procedat însă altfel: a totalizat mai întâi orele lucrate de fiecare angajat în programul normal, respectiv ca ore suplimentare și apoi a calculat drepturile salariale totale:

$$\begin{pmatrix} 40 & 5 \\ 40 & 15 \\ 20 & 0 \\ 36 & 7 \\ 40 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 & 20 \\ 0 & 0 \\ 20 & 5 \\ 36 & 10 \\ 40 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

La sfârșit, se obține același rezultat, deoarece înmulțirea matricelor este distributivă față de adunare: $X \cdot Z + Y \cdot Z = (X + Y) \cdot Z$.

❸ Cum ar fi trebuit organizate calculele, dacă muncitorii ar fi fost plătiți cu 10 lei/oră pentru zilele normale de lucru, cu 15 lei/oră pentru orele suplimentare din timpul săptămânii și cu 20 lei/oră pentru orele lucrate în week-end?

❹ Calculează în două moduri drepturile salariale ale angajaților firmei de construcții, în cele două săptămâni și verifică dacă obții aceleași rezultate.

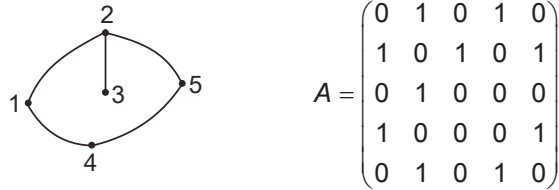
◆ Cum determinăm drumuri în grafuri?

5 Explică modul în care unui graf i se asociază o matrice.

Un graf poate fi descris cu ajutorul unei matrice. Putem folosi matricea asociată pentru a determina și alte proprietăți ale grafului.

Exemplu

Graful din figura de mai jos corespunde următoarei matrice:



Vrem să interpretăm numerele ce apar în matricea $B = A^2$ și să deducem proprietăți ale grafului dat. Să calculăm, de exemplu, numărul de pe poziția (2; 4) din B ; conform definiției, acesta este egal cu:

$$b_{2,4} = a_{2,1} \cdot a_{1,4} + a_{2,2} \cdot a_{2,4} + a_{2,3} \cdot a_{3,4} + a_{2,4} \cdot a_{4,4} + a_{2,5} \cdot a_{5,4}$$

Observăm că termenii sumei anterioare pot fi doar 0 sau 1.

Termenul $a_{2,i} \cdot a_{i,4}$ este egal cu 1 dacă și numai dacă $a_{2,i} = a_{i,4} = 1$. Dar această condiție este echivalentă cu următoarea condiție: în graful dat, există muchii între nodurile 2 și i , respectiv i și 4. De aceea, $b_{2,4}$ reprezintă numărul de drumuri de lungime 2 între nodurile 2 și 4.

Analog, numerele ce apar în matricea A^3 precizează câte drumuri de lungime 3 există între două noduri date ale grafului, numerele din A^4 precizează câte drumuri de lungime 4 există între două noduri ale grafului, și așa mai departe.

6 Calculează matricea A^2 , unde A este matricea alăturată. Arată astfel că între nodurile 1 și 5 există două drumuri de lungime 2. Câte circuite de lungime 3 are graful dat?

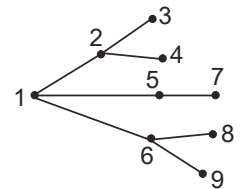
Exerciții și probleme

1. La un service auto, contabilitatea a sintetizat în tabele numărul de ore lucrate, după cum urmează:

Ore lucrate \ Nume	Martie		Aprilie	
	Program normal	Ore suplimentare	Program normal	Ore suplimentare
Mihai	160	20	150	15
Gigi	160	0	160	10
Ștefan	0	0	160	5
Sandu	80	4	85	10

Fiecare oră din programul normal se plătește cu 15 lei, iar ora suplimentară cu 20 lei. Calculează în două moduri, cu ajutorul matricelor, sumele totale încasate de către angajați în cele două luni.

2. Asociază o matrice grafului din figura alăturată, apoi află câte drumuri de lungime 2 are acest graf.



3. Se dă matricea $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Asociază acestei matrice un graf adecvat.

Ce ordine au nodurile grafului? Verifică dacă ai desenat corect, calculând ordinele nodurilor doar pe baza elementelor matricei.

Am reușit... ?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...

- ◆ să identific situații practice care necesită asocierea unor date cu reprezentarea lor matriceală
- ◆ să aplic algoritmi de calcul cu matrice
- ◆ să descriu matriceal modalități de calcul în situații cotidiene
- ◆ să interpretez rezultatele obținute prin calcul matriceal?

Test de verificare

1. Calculează: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. În cadrul unui sondaj de opinie, au fost adresate elevilor dintr-un liceu întrebările:

- a) cât timp aloci zilnic pentru tema la matematică?
- b) câte ore petreci zilnic în fața calculatorului?

Sondajul a fost realizat de trei elevi, care au prezentat rezultatele obținute sub forma tabelelor următoare:

Ana

Întrebare \ Timp	0 – 0,5 h	0,5 – 1 h	1 – 1,5 h	1,5 – 2 h	> 2 h
a)	15	12	3	1	0
b)	5	20	2	3	1

Bogdan

Întrebare \ Timp	0 – 0,5 h	0,5 – 1 h	1 – 1,5 h	1,5 – 2 h	> 2 h
a)	17	20	5	4	2
b)	8	24	10	5	1

Camelia

Întrebare \ Timp	0 – 0,5 h	0,5 – 1 h	1 – 1,5 h	1,5 – 2 h	> 2 h
a)	13	20	11	1	1
b)	21	15	2	4	4

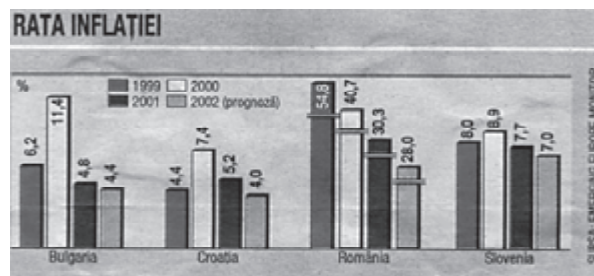
Exprimă matriceal rezultatele totale ale sondajului.

4. Bucătarul restaurantului „Poftă bună!” dispune de două rețete pentru un anumit fel de mâncare. El a înregistrat cantitățile ingredientelor necesare în tabelul din dreapta, în care unitățile de măsură sunt cele standard.

Pentru aprovizionare, directorul restaurantului a cerut la trei firme comerciale oferte de prețuri. Acestea sunt înregistrate în tabelul alăturat.

Aplicați calculul matriceal pentru a determina costul realizării fiecărei rețete, în cazul aprovizionării din unul dintre aceste magazine.

3. Transpune într-o matrice datele reprezentate prin graficul cu bare de mai jos.



	Făină	Ulei	Roșii	Paste	Sare
Rețeta I	0,4	0,1	2	1	0,05
Rețeta II	0,3	0,1	3	1,2	0,06

	Făină	Ulei	Roșii	Paste	Sare
Magazin 1	12	35	30	14	2
Magazin 2	14	34,5	31	15	2
Magazin 3	13	36	29	16	2

Lectură

De-a lungul timpului, matematicienii au căutat modalități de a exprima cât mai sintetic calcule abstracte complexe. O notație simplă și clară simplifică și clarifică la rândul ei întregul raționament.

Noțiunea de matrice intervine în studiul sistemelor de ecuații liniare. Ea a fost introdusă de matematicianul englez Arthur Cayley (1821- 1895) în 1858. În 1913, C. E. Cullis propune notația $[a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, iar în 1919, la sugestia lui M. Bôcher, s-a introdus notația $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Unitatea de învățare 5

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Calcul numeric

- $(-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 2 = \dots$
a) 4; b) 0; c) 2; d) -2
- $-(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot 2 \cdot 3 = \dots$
a) 12; b) 0; c) -6; d) 6.

Ecuții și sisteme

- Care dintre următoarele perechi de numere sunt soluții ale sistemului $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$?
a) (2; 1); b) (2; 4); c) (0; 3); d) (1; 2)
- Rezolvă sistemul: $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$.

5. a) Reprezintă grafic, în același sistem de axe, mulțimile de soluții ale ecuațiilor: $x - y = 0$, respectiv $x + y = 4$.

b) Folosește reprezentarea grafică de la punctul a) pentru a rezolva sistemul

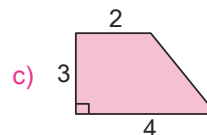
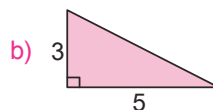
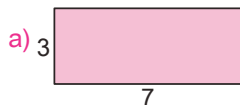
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Calcul algebric

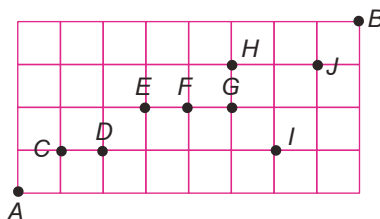
- Exprimă printr-o formulă:
a) aria unui pătrat cu latura l ;
b) volumul unui cub cu latura t ;
c) soluția ecuației $a \cdot x + b = 0$ ($a \neq 0$);
d) soluțiile ecuației $x^2 + mx + 11 = 0$.

Elemente de geometrie

- Calculează ariile figurilor desenate.



- Precizează care dintre punctele marcate pe desen se găsesc:
a) pe dreapta AB ; b) pe dreapta CE ;
c) în interiorul triunghiului AHI ; d) în interiorul unghiului HCI .



Determinanți și sisteme liniare

Rezolvarea sistemelor prin reducerea „în scară”

Ne amintim și explorăm!

Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare se poate face prin mai multe metode. În oricare dintre acestea se urmărește, însă, transformarea sistemului dat într-un sistem echivalent cu el, astfel încât ecuațiile noului sistem să devină mai simple.

De exemplu, sistemul: (S) $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 3x + y = -6 \end{cases}$ este echivalent cu: (S') $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 3y = 15 \end{cases}$

Observăm că S' se poate rezolva imediat, deoarece este un sistem „în scară” în care a doua ecuație a sistemului are o singură necunoscută. În general, putem transforma un sistem de ecuații liniare într-un sistem echivalent cu el, de tip scară. Această metodă de rezolvare este atribuită matematicianului german Karl Gauss.

Exemplul 1

Considerăm sistemul: $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -3x + 3y + 5z = 4 \\ 4x - y - 3z = -2 \end{cases}$

Pentru a transforma sistemul dat într-un sistem scară, putem proceda astfel:

Pasul 1: Înmulțim ecuațiile cu numere nenule, alese convenabil, astfel încât coeficienții lui x să devină egali:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 & | \cdot 6 \\ -3x + 3y + 5z = 4 & | \cdot (-4) \\ 4x - y - 3z = -2 & | \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 6y + 6z = 6 \\ 12x - 12y - 20z = -16 \\ 12x - 3y - 9z = -6 \end{cases}$$

Pasul 2: Scădem prima ecuație din celelalte două; în acest fel, obținem sistemul

echivalent: $\begin{cases} 12x + 6y + 6z = 6 \\ -18y - 26z = -22 \\ -9y - 15z = -12 \end{cases}$

Pasul 3: Procedăm la fel cu ultimele două ecuații ale sistemului, urmărind termenii care conțin necunoscuta y :

$$\begin{cases} 12x + 6y + 6z = 6 \\ -18y - 26z = -22 \\ -9y - 15z = -12 \end{cases} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 6y + 6z = 6 \\ -9y - 13z = -11 \\ -9y - 15z = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 6y + 6z = 6 \\ -9y - 13z = -11 \\ -2z = -1 \end{cases}$$

Pasul 4: Aflăm succesiv necunoscutele sistemului, pornind de la ultima ecuație spre prima:

$$\begin{array}{l} -2z = -1 \\ z = \frac{1}{2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -9y - 13 \cdot \frac{1}{2} = -11 \\ y = -\frac{35}{18} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 12x + 6 \cdot \frac{-35}{18} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 6 \\ x = \frac{11}{9} \end{array}$$

❶ Explică de ce sistemele (S) și (S') sunt echivalente.



Karl Friedrich Gauss
(1777-1855)

❷ În exemplul dat, pentru „a reduce” necunoscuta x , s-a obținut coeficientul comun 12. Ce coeficient comun ar trebui obținut pentru a-l reduce pe y ? Dar pe z ?

⚠️ Pasul 2 realizează prima „treaptă” a scării.

⚠️ Pasul 3 construiește a doua „treaptă” a scării.

❸ Rezolvă același sistem, construind o „scară” de forma celei din desen.



Pentru aceasta, începe prin a reduce variabila z .

⚠️ A doua ecuație a sistemului nu conține variabila x , deci nu este nevoie să fie modificată!

4 Rezolvă sistemul dat prin metoda lui Gauss, scriind variabilele ecuațiilor în ordinea y, x, z .

Exemplul 2

Să rezolvăm prin metoda lui Gauss sistemul:
$$\begin{cases} 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

Observăm că prima ecuație nu conține variabila x . De aceea, pentru a aplica metoda lui Gauss, avem două posibilități: ori schimbăm ordinea ecuațiilor, ori schimbăm ordinea necunoscutelor!

Să alegem prima variantă:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \cdot 2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 6z = 0 \\ 3y + z = 1 \\ 3y - 7z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 6z = 0 \\ 3y + z = 1 \\ -8z = 1 \end{cases}$$

În general

Un sistem de ecuații liniare se poate rezolva prin metoda lui Gauss. Pentru aceasta reducem necunoscutele sistemului, obținând un sistem „scară”, echivalent cu cel inițial.

Exerciții și probleme

1. Scrie un sistem de 3 ecuații cu 3 necunoscute care admite ca soluție tripletul:

- a) (1; 2; -3); b) (0; 1; 2); c) (1; 0; 2); d) (0,2; 0,5; 0).

2. În sistemul de mai jos, înmulțește convenabil pentru a reduce:

- a) mai întâi necunoscuta x ; b) mai întâi necunoscuta y ; c) mai întâi necunoscuta z .

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - \frac{3}{4}y + 8z = 6 \\ 6x - 6y - 7z = 12 \end{cases}$$

3. Rezolvă prin metoda lui Gauss sistemele următoare:

a)
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + z = 2 \\ z = 3 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 4y + 3z + 1 = 0 \\ 5y + 2z = 4 \end{cases};$$

c)
$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ 6x + 4y + 3z = 17 \\ 3x - 6y + z = 4 \end{cases};$$

d)
$$\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 7 \\ 3x - 5y + 4z = 3 \\ 7x - 4y + 5z = 8 \end{cases};$$

e)
$$\begin{cases} x\sqrt{2} + y\sqrt{3} - z = 1 \\ 3x\sqrt{2} + y\sqrt{3} - 2z = 1 \\ 2x\sqrt{2} - y\sqrt{3} + z = -1 \end{cases};$$

f)
$$\begin{cases} 2x - y\sqrt{5} + z\sqrt{7} = 0 \\ 3x - 2y\sqrt{5} + 3z\sqrt{7} = 14 \\ 5x + 3y\sqrt{5} - 2z\sqrt{7} = 6 \end{cases};$$

4. Aplică metoda lui Gauss pentru sistemele următoare. Ce observi?

a)
$$\begin{cases} x + 3y - 4z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + 6z = 0 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 2 \\ x + y + 3z = 6 \\ 6x + 8y - 4z = 4 \end{cases};$$

c)
$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 6 \\ 2x - 6y + 4z = 3 \\ 3x - 9y + 6z = 5 \end{cases};$$

5. Aplică metoda reducerii în scară pentru a rezolva sistemele:

a)
$$\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 1 \\ 2x - y + z + t = 2 \\ -x + y + 2z + t = 3 \\ x - y + 3z - t = 4 \end{cases};$$

b)
$$\begin{cases} -x + y - z + 2t = -1 \\ x - 3y + 3t = 0 \\ -2y + 2z + t = 1 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases};$$



Analizăm și generalizăm!

◆ Cum se obțin formulele de calcul pentru soluțiile unor ecuații sau sisteme?

Să analizăm!

Considerăm ecuația $3x^2 + 7x + 2 = 0$.

Putem rezolva această ecuație prin descompunerea membrului stâng într-un produs.

$$3x^2 + 7x + 2 = 0$$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \boxed{6x} & \boxed{x} \end{array}$$

$$(3x^2 + 6x) + (x + 2) = 0$$

$$3x(x + 2) + (x + 2) = 0$$

$$(x + 2)(3x + 1) = 0$$

În acest fel, ecuația se reduce la rezolvarea a două noi ecuații, de gradul întâi:

$$x + 2 = 0 \text{ sau } 3x + 1 = 0$$

$$x = -2 \text{ sau } x = -\frac{1}{3}.$$

Există însă situații în care descompunerea unui termen ca o sumă convenabilă de alți doi termeni nu este evidentă. De aceea, matematicienii au găsit un mod de rezolvare a ecuațiilor de gradul al doilea, ce se poate aplica tuturor acestor ecuații. Observând cum rezolvăm ecuații date, ei au ajuns la o formulă generală de rezolvare.

$$3x^2 + 7x + 2 = 0 \mid \cdot 3$$

$$9x^2 + 21x + 6 = 0$$

$$\left(9x^2 + 21x + \frac{49}{4}\right) - \frac{25}{4} = 0$$

$$\left(3x + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$3x + \frac{7}{2} = \frac{5}{2} \text{ sau}$$

$$3x + \frac{7}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ sau}$$

$$x = -2$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \mid \cdot a, (a \neq 0)$$

$$a^2x^2 + abx + ac = 0$$

$$\left(a^2x^2 + abx + \frac{b^2}{4}\right) - \frac{b^2 - 4ac}{4} = 0$$

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}$$

$$ax + \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \text{ sau}$$

$$ax + \frac{b}{2} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ sau}$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

❶ Descompune convenabil și scrie ca produs membrul întâi al ecuațiilor:

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$5x^2 + 16x + 3 = 0.$$

⚠ În formula de rezolvare a ecuațiilor de gradul al doilea apare numărul $\Delta = b^2 - 4ac$. Formula se poate aplica doar dacă $\Delta \geq 0$.

❷ Aplică formula pentru a rezolva ecuațiile următoare:

$$x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$6x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$2x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Cum am putea oare obține o formulă de rezolvare pentru sistemele de ecuații liniare?

Să comparăm!

Rezolvăm sistemul următor prin metoda lui Gauss:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$$

Generalizăm metoda de rezolvare pentru sisteme cu coeficienți literali:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Înmulțim convenabil ecuațiile, astfel încât coeficienții lui x să devină egali, apoi reducem variabila x :

$$\begin{cases} 4x + 3y = 6 & | \cdot 5 \\ 5x + 2y = 1 & | \cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20x + 15y = 30 \\ 20x + 8y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ -7y = -26 \end{cases}$$

Determinăm soluția sistemului:

$$y = \frac{26}{7}, x = \frac{9}{7}$$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 & | \cdot a_{21} \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 & | \cdot a_{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x + a_{12}a_{21}y = a_{21}b_1 \\ a_{11}a_{21}x + a_{22}a_{11}y = a_{11}b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases}$$

Determinăm soluția sistemului în cazul în care numărul $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ nu este zero:

$$y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

3 Rezolvă sistemul

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x - 5y = -3 \end{cases}$$

aplicând direct formulele de calcul. Identifică mai întâi coeficienții.

◆ Ce sunt determinanții de ordinul doi?

Formulele obținute par mult prea complicate; de aceea, este nevoie să înțelegem mai bine cum se obțin numărătorii și numitorii lui x și y , pornind de la coeficienții sistemului inițial.

Scriem sistemul $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ în forma matriceală: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Observăm că numărul $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (care apare atât ca numitor al lui x , cât și ca numitor al lui y , în formulele de rezolvare) este calculat folosind elementele matricei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Acest număr se obține făcând „înmulțiri în diagonală” ca în schema alăturată. Numărul astfel obținut se numește *determinantul* matricei M și se notează

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Numerele care apar la numărătorii lui x și respectiv y , în formulele de rezolvare de mai sus, pot fi și ele scrise ca determinanți ai unor matrice pătratice de ordinul 2.

Astfel, dacă înlocuim în matricea sistemului prima coloană (a coeficienților lui x), cu coloana termenilor liberi, apoi calculăm determinantul, obținem:

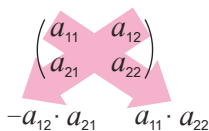
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}.$$

De aceea, formulele de rezolvare ale sistemului literal $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ pot fi scrise cu ajutorul unor determinanți de ordinul doi, sub forma:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

4 Exprimă soluția sistemului $\begin{cases} 5x - 4y = 7 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ cu ajutorul determinanților.

▲ Matricea M se numește matricea sistemului.



◆ Determinanți de ordinul trei

De ce ar fi așa de importante formulele de rezolvare scrise cu ajutorul determinanților? Avantajul este că ele pot fi aplicate analog în rezolvarea *oricărui* sistem compatibil de ecuații liniare. Pentru a înțelege cum se întâmplă acest lucru, este necesar să definim și determinanți de ordin mai mare decât 2.

Să analizăm!

Am văzut că în rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ am recurs la scrierea matriceală $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

În acest caz, determinantul de ordinul doi $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ a apărut ca numitor comun al soluției $(x; y)$ a sistemului considerat. De aceea, ne putem aștepta ca determinanții de ordinul trei să poată fi descoperiți prin rezolvarea sistemului:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Pentru a rezolva sistemul dat, reducem variabila x din ultimele două ecuații:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})y + (a_{23}a_{11} - a_{13}a_{21})z = b_2a_{11} - b_1a_{21} \\ (a_{32}a_{11} - a_{31}a_{12})y + (a_{33}a_{11} - a_{13}a_{31})z = b_3a_{11} - b_1a_{31} \end{cases}$$

Observăm că ecuațiile pe care le obținem în acest fel evidențiază câțiva determinanți de ordinul 2. Pentru ca acest lucru să fie mai clar, scriem a doua și a treia ecuație sub forma:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot z = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \cdot y + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot z = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} \end{cases}$$

Este de așteptat ca soluțiile sistemului inițial să poată fi exprimate în funcție de determinanți de ordinul doi, de tipul celor de mai sus. Continuând rezolvarea obținem ca numitor comun al necunoscutelor sistemului, numărul:

$$a_{33} \cdot (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{32} \cdot (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + a_{31} \cdot (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}),$$

care se mai poate scrie:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Observăm că acest număr se calculează folosind numai coeficienții necunoscutelor sistemului. De aceea este util să scriem sistemul în forma sa matriceală:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Prin analogie cu determinanții de ordinul 2, notăm determinantul matricei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ prin } \det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5 Transcrie etapele de calcul alăturate pentru sistemul:

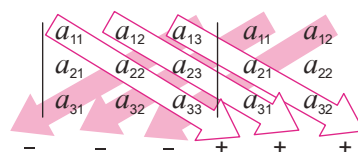
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 7 \\ 3x - 4y + 2z = 3 \end{cases}$$

6 Identifică produsele $a_{12}a_{23}a_{31}$ și $a_{13}a_{22}a_{31}$ din determinantul

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & -3 & 6 \\ 7 & -8 & 10 \end{vmatrix}.$$

▲ Pierre Frederic Sarrus a trăit între 1798 și 1861.

Determinantul de ordinul trei se obține și el, ca și determinantul de ordinul doi, prin procedeul înmulțirilor în diagonală. Această regulă a fost descoperită de Sarrus. Pentru a vizualiza mai ușor calculele repetăm primele două coloane ale matricei:



În general

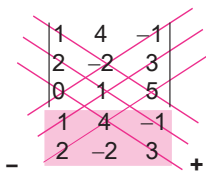
Unui sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute, scris în forma matriceală:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ \u00e2i asociem determinantul de ordinul } n, \text{ notat}$$

▲ Determinanții sunt numere asociate doar matricelor pătratice. Ordinul unui determinant este numărul de linii sau coloane ale sale.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \text{ Acest num\u00e2r este numitorul comun al solu\u00e7iilor sistemului.}$$

7 Putem aplica regula lui Sarrus repet\u00e2nd primele dou\u00e2 linii \u00e7i aplic\u00e2nd regula diagonalelor „pozitive” sau „negative”:



Calculeaz\u00e2, aplic\u00e2nd regula lui Sarrus,

$$\text{determinantul } \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

S\u00e2 aplic\u00e2m!

Pentru a calcula determinantul $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ prin regula lui Sarrus, proced\u00e2m astfel:

• repet\u00e2m primele dou\u00e2 coloane ale determinantului \u00e7i calcul\u00e2m produsele de pe diagonalele „pozitive”:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow 1 \cdot (-2) \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \cdot 1$$

• sc\u00e2dem apoi produsele de pe diagonalele „negative”:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow 1 \cdot (-2) \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot (-2) \cdot 0 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 5$$

• ob\u00tenem astfel valoarea determinantului:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -57$$

Analog, ob\u00tenem:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = [(3 \cdot 1 \cdot 2) + (-2) \cdot 7 \cdot 5 + 1 \cdot (-4) \cdot 0] - [1 \cdot 1 \cdot 5 + 3 \cdot 7 \cdot 0 + (-2) \cdot (-4) \cdot 2] = -85$$

◆ Cum putem folosi determinanții în rezolvarea sistemelor?

La prima vedere, utilizarea determinanților în rezolvarea sistemelor pare foarte complicată. Importanța metodei constă în posibilitatea unei tratări unitare a rezolvării unor sisteme diferite ca număr de ecuații și de necunoscute.

Să verificăm!

Am văzut că soluția sistemului $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ poate fi calculată astfel:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

(dacă determinantul $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ este diferit de zero).

Vom arăta printr-un exemplu că aceleași formule se aplică și în cazul sistemelor liniare cu trei ecuații și trei necunoscute.

$$\text{Considerăm sistemul: } \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ -x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

Calculăm determinantul matricei sistemului:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \dots = 3$$

Numărătorii rapoartelor prin care exprimăm soluția sistemului se obțin înlocuind în matricea sistemului, pe rând, coloana coeficienților fiecărei necunoscute cu coloana termenilor liberi. Obținem:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Soluția sistemului se obține calculând rapoartele de mai jos:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1 \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -1 \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 2.$$

Această metodă de rezolvare a sistemului a fost descoperită de Gabriel Cramer.

În general

Fie M o matrice pătratică de ordinul n , al cărei determinant (notat cu Δ) este diferit de zero.

Atunci soluția sistemului $M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ poate fi exprimată prin formulele lui Cramer:

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

unde Δ_{x_i} este determinantul obținut din Δ , prin înlocuirea coloanei i cu coloana termenilor liberi a sistemului.

8 Explică schema:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

▲ Determinantul Δ_x se obține înlocuind prima coloană a determinantului matricei sistemului, cu coloana termenilor liberi.

9 Explică regula de formare a determinanților notați Δ_y și Δ_z .

10 Calculează determinanții, apoi verifică soluția sistemului prin înlocuiri în ecuațiile inițiale.



Cramer, Gabriel
(1704-1752)

◆ Ce proprietăți de calcul au determinanții?

Să observăm!

Sistemul $\begin{cases} x - 5y + z = 1 \\ 4x + 3y - 5z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 2 \end{cases}$ poate fi înlocuit cu un sistem echivalent (deci cu un

sistem având aceleași soluții), folosind câteva tipuri de transformări.

Pe de altă parte, soluțiile sistemului pot fi calculate cu ajutorul unor determinanți.

Observăm că:

- schimbarea între ele a primelor două ecuații ale sistemului conduce la schimbarea între ele a două linii ale determinantului:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 5z = 0 \\ x - 5y + z = 1 \\ 3x - 2y + 4z = 2 \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

- rescrierea ecuațiilor, prin comutarea termenilor în y și z , conduce la schimbarea între ele a două coloane ale determinantului:

$$\begin{cases} x + z - 5y = 1 \\ 4x - 5z + 3y = 0 \\ 3x + 4z - 2y = 2 \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

- înmulțirea primei ecuații cu 2 conduce la înmulțirea cu 2 a primei linii a determinantului:

$$\begin{cases} 2x - 10y + 2z = 2 \\ 4x + 3y - 5z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 2 \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \cdot 2} \begin{vmatrix} 2 & -10 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

- adunarea primelor două ecuații conduce la adunarea primelor două linii ale determinantului:

$$\begin{cases} x - 5y + z = 1 \\ 5x - 2y - 4z = 1 \\ 3x - 2y + 4z = 2 \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 + L_1} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 5 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

În ce mod se schimbă oare valoarea determinantului inițial, în urma aplicării acestor transformări? Pentru a răspunde, calculăm:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 140$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -140.$$

Δ_1 se obține din Δ schimbând între ele linia 1 cu linia 2. Deci: un determinant își schimbă semnul dacă schimbăm între ele două linii ale determinantului.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 4 & -5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -140.$$

Δ_2 se obține din Δ schimbând între ele coloana 2 cu coloana 3. Deci: un determinant își schimbă semnul, dacă schimbăm între ele două coloane.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -10 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 280.$$

Δ_3 se obține din Δ înmulțind prima linie cu 2. Deci: înmulțind o linie a unui determinant cu un număr, determinantul se înmulțește cu acel număr.

11 Asupra determinantului

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \text{ aplică următoarele transformări:}$$

toarele transformări:

$$L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$C_1 \leftrightarrow C_2$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2 + 4.$$

Calculează în fiecare caz determinantul obținut. Ce observi?

12 Calculează determinanții

Δ , Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , Δ_4 , care apar în exemplul alăturat și verifică astfel proprietățile enunțate.

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 4+1 & 3-5 & -4+1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 140.$$

Δ_4 se obține din Δ , adunând prima linie la a doua linie. Deci: un determinant nu se schimbă dacă adunăm la o linie a sa o altă linie a determinantului.

Aceste proprietăți sunt valabile pentru determinanți de orice ordin. Determinanții au însă și alte proprietăți care se dovedesc foarte utile în calcule.

Să demonstrăm!

- Dacă un determinant are o linie (sau o coloană) cu toate elementele egale cu zero, atunci determinantul este egal cu zero.
- Dacă un determinant are două linii (sau două coloane) proporționale, atunci determinantul este egal cu zero.

• Fie $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$; atunci $2 \cdot \Delta = \begin{vmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \Delta$, deci $\Delta = 0$.

• Să presupunem, de exemplu, că linia 1 și linia 2 din determinant sunt proporționale și factorul de proporționalitate este 3; atunci:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 \cdot a & 3 \cdot b & 3 \cdot c \\ m & n & p \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0.$$

În general

Determinanții au următoarele proprietăți:

- Dacă schimbăm între ele două linii (sau două coloane) ale unui determinant, acesta își schimbă semnul.
- Dacă înmulțim o linie (sau o coloană) a unui determinant cu un număr, determinantul se înmulțește cu acel număr.
- Dacă la o linie (sau la o coloană) a unui determinant adunăm o altă linie (sau o coloană), atunci determinantul nu se schimbă.
- Dacă un determinant are o linie (sau o coloană) cu toate elementele egale cu zero, atunci determinantul este egal cu zero.
- Dacă un determinant are două linii (sau două coloane) proporționale, atunci determinantul este egal cu zero.

◆ Cum se pot calcula determinanții de ordin mai mare ca 3?

Să observăm!

Fie $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, determinantul general de ordinul 3.

Știm că Δ este o sumă algebrică cu 6 termeni; grupând convenabil termenii, obținem, de exemplu:

$$\Delta = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \text{sau}$$

$$\Delta = -a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

13 Compară valorile următorilor determinanți fără să îi calculezi efectiv:

$$p = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$q = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 4 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$r = \begin{vmatrix} 3-5 & -1+4 & 0-4 \\ -5 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

14 Explică toate transformările făcute în demonstrația proprietății alăturate. Menționează regulile aplicate.

▲ Scrierile exprimă dezvoltarea determinantului după prima linie, respectiv după a doua coloană.

Cele două moduri de exprimare a determinantului Δ sunt asemănătoare; câteva analogii sunt evidențiate în continuare.

- Coeficienții a_{11}, a_{12}, a_{13} și a_{12}, a_{22}, a_{32} sunt numerele de pe o linie, respectiv o coloană a lui Δ ;

- Fiecare dintre aceste numere se înmulțește cu determinantul de ordinul doi, obținut prin tăierea liniei și coloanei sale; de exemplu, a_{11} se înmulțește cu

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- Semnele „+” și „-” alternează și sunt alese după regula „tablei de șah”.

+	-	+
-	+	-
+	-	+

Astfel, termenul $a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$ are semnul minus, deoarece a_{32} este poziționat,

în Δ , pe un „câmp negativ”.

Aceste reguli sunt importante deoarece ne ajută să calculăm determinanți de ordin mai mare decât 3. Astfel pentru a calcula un determinant de ordinul 4, putem proceda ca în exemplele următoare.

Exemplul 1

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = +(-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} -$$

Dezvoltăm după a treia coloană

$$-0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-33) + 2 \cdot (+11) = 55.$$

Exemplul 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{L_2-3L_1, L_3+L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 9.$$

În general

Un determinant se poate calcula prin dezvoltarea după o linie sau o coloană. În acest fel, calculul unui determinant de ordinul n se poate reduce la calculul unor determinanți de ordin $n - 1$.

În calculul determinanților, este util să aplicăm proprietățile pentru a obține cât mai multe zerouri.

Să aplicăm!

17 Calculează:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dots = 1$$

Dezvoltăm după prima coloană

Exerciții și probleme

1. Afirmările următoare sunt false. Descoperă greșeala. Reformulează enunțurile astfel încât acestea să fie adevărate.

a) Ecuația $(x + 2)^2 - 1 = (1 - x)^2 + 3x$ are o soluție număr natural.

b) Ecuația $2(x - 3)^2 - 5x = 2 - (3 - x)^2$ are o infinitate de soluții.

c) Sistemul $\begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0 \\ 6x - 9y - 2 = 0 \end{cases}$ are o infinitate de soluții reale.

d) Sistemul $\begin{cases} 2(x - 4) + 3(y + 2) = 3 \\ 3(x + 2) + 2(y - 4) = 3 \end{cases}$ nu are soluții reale.

2. Rezolvă sistemele folosind metoda reducerii.

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - 3y + z = 5 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 4 \\ x - y - z = 1 \\ 4x - 2y + 5z = 2 \end{cases}$.

3. Scrie fiecare sistem în formă matriceală, apoi exprimă soluțiile folosind determinanți.

a) $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 2 \\ x - y + z = 2 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$.

4. Calculează determinanții:

a) $\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -3 & -9 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

5. Calculează rapid, folosind proprietățile determinantilor:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 5\sqrt{3} & 6\sqrt{3} \\ 4 & 10 & 1 \\ 6 & 15 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 3 \end{vmatrix}$.

6. Calculează determinanții:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 3 & 4 \\ 8 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} -12 & -6 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & -4 & 8 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

7. Aplicând proprietățile determinantilor, calculează și scrie punând rezultatul sub formă de produs:

a) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} x-1 & x+1 & x^2-1 \\ y-1 & y+1 & y^2-1 \\ z-1 & z+1 & z^2-1 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$.

8. Rezolvă următoarele sisteme liniare prin metoda lui Cramer:

a) $\begin{cases} 12x - 7y + 6z = 83 \\ 8x - 4y - 3z = 24 \\ -2x + 5y + 13z = 23 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x + 8y - 4z = 23 \\ 6x + 2y + 7z = 6 \\ -x + 9y - 5z = 38 \end{cases}$.

9. Verifică următoarea proprietate de aditivitate a determinantilor:

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

Calculul determinanților: aplicații

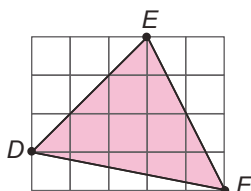
Aplicăm și dezvoltăm!

1 Aria unui triunghi se calculează cu formula:

$$A = \frac{b \cdot \hat{h}}{2}.$$

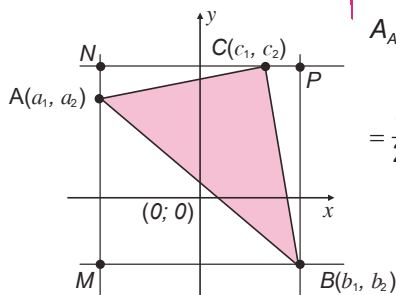
Scrive formula pentru aria unui triunghi dreptunghic.

2 Calculează aria triunghiului DEF din imaginea următoare.



3 Observă figura de mai jos, apoi explică de ce $BM = b_1 - a_1$ și $AM = a_2 - b_2$. Identifică apoi toți termenii care apar în calculul A_{ABC} .

4 Ce arie are triunghiul DEF, ale cărui vârfuri au coordonatele $D(2; 4)$, $E(-3; 5)$, $F(1; 6)$?



Determinanții au apărut în matematică din necesitatea de a identifica formule directe de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare.

Ulterior, s-a constatat însă că putem utiliza determinanții și în rezolvarea altor probleme de matematică. Câteva dintre aceste aplicații sunt explicate în continuare.

◆ Cum calculăm aria unui triunghi?

În clasele anterioare, am învățat mai multe formule de calcul pentru aria unui triunghi. Dacă triunghiul este trasat pe caietul de matematică (sau pe orice altă rețea de pătrățele), putem calcula aria acestuia mai simplu, folosind numai ariile unor dreptunghiuri sau triunghiuri dreptunghice.

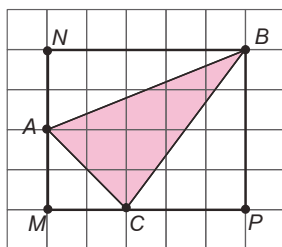
Să analizăm!

Considerăm o rețea de pătrate de latură 1.

Pentru a calcula aria unui triunghi cu vârfurile în nodurile rețelei, putem proceda astfel:

- încadrăm triunghiul într-un dreptunghi
- scădem din aria acestui dreptunghi, ariile a trei triunghiuri dreptunghice.

Exemplu



Pentru triunghiul din figură:

$$A_{ABC} = A_{MNBP} - (A_{AMC} + A_{ANB} + A_{BPC})$$

$$A_{ABC} = 5 \cdot 4 - \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \right) = 7$$

Putem utiliza această metodă de calcul și pentru a determina aria unui triunghi, la care sunt precizate coordonatele vârfurilor în raport cu un sistem de axe.

Să demonstrăm!

Dacă vârfurile triunghiului ABC au coordonatele $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$, atunci aria triunghiului se poate calcula cu formula:

$$A_{ABC} = \pm \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ semnul fiind ales astfel ca rezultatul să fie pozitiv.}$$

Încadrăm triunghiul ABC într-un dreptunghi. Dacă figura arată ca în imaginea alăturată, atunci:

$$A_{ABC} = (b_1 - a_1)(c_2 - b_2) - \left[\frac{1}{2}(b_1 - a_1)(a_2 - b_2) + \frac{1}{2}(b_1 - c_1)(c_2 - b_2) + \frac{1}{2}(c_1 - a_1)(c_2 - a_2) \right] =$$

$$= \frac{1}{2}(a_1 b_2 + a_2 c_1 + b_1 c_2 - b_2 c_1 - a_2 b_1 - a_1 c_2) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

O analiză simplă conduce la concluzia că, în orice situație, unul dintre vârfurile triunghiului dat va coincide cu un vârf al dreptunghiului, iar celelalte două vârfuri vor fi pe laturile opuse acestuia. De aceea, formula demonstrată rămâne valabilă în orice situație.

Să aplicăm!

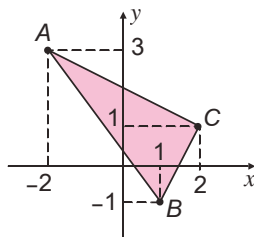
Pentru a calcula distanța de la $C(2; 1)$ la dreapta AB , unde $A(-2; 3)$ și $B(1; -1)$, putem proceda astfel:

- Calculăm $A_{ABC} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$.

- Determinăm $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (3-(-1))^2} = 5$.

- Exprimăm $A_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h_c$

Deci: $d(C; AB) = h_c = 2$.



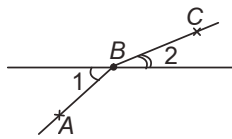
5 Calculează distanța de la $A(1; 3)$ la dreapta ce trece prin $B(3; 0)$ și $C(2; 1)$.

◆ Cum demonstrăm coliniaritatea unor puncte?

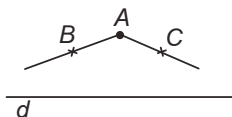
Trei sau mai multe puncte se numesc *coliniare* dacă se găsesc toate pe o dreaptă. În clasele anterioare, am învățat mai multe metode de demonstrare a coliniarității.

Să ne amintim!

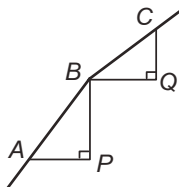
- Dacă $m(\hat{1}) = m(\hat{2})$, atunci A, B, C sunt coliniare.



- Dacă $AB \parallel d$ și $AC \parallel d$, atunci A, B, C sunt coliniare.



- Dacă $\frac{AP}{BQ} = \frac{BP}{CQ}$, atunci A, B, C sunt coliniare.



Dacă punctele sunt raportate la un sistem de axe ortogonale, putem verifica mai simplu dacă acestea sunt coliniare.

Să analizăm!

Trei puncte sunt coliniare dacă și numai dacă aria triunghiului format de ele este egală cu zero.

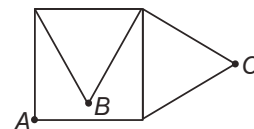
Fie $A(-3; -1)$, $B(-1; 1)$, $C(3; 5)$ trei puncte reprezentate în sistemul cartezian xOy .

Calculăm:

$$A_{ABC} = \pm \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \dots = 0$$

Deducem că A, B, C sunt coliniare.

6 În figură sunt desenate un pătrat și două triunghiuri echilaterale. Arată că A, B, C sunt puncte coliniare.



7 Folosește metoda triunghiurilor asemenea pentru a verifica dacă $A(-3; -1)$, $B(-1; 1)$ și $C(3; 5)$ sunt coliniare.

8 Continuă calculele și arată că $A_{ABC} = 0$.

În general

Punctele $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ și $C(x_3; y_3)$ sunt coliniare dacă și numai dacă

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

◆ Cum aflăm ecuația dreptei determinată de două puncte?

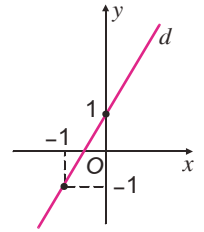
Am văzut că mulțimea soluțiilor unei ecuații de tipul $ax + by + c = 0$ se reprezintă într-un sistem cartezian xOy , printr-o dreaptă.

Reciproc, orice dreaptă din plan este reprezentarea geometrică a mulțimii soluțiilor unei ecuații de gradul I cu două necunoscute.

Exemplu

Mulțimea soluțiilor ecuației $2x - y + 1 = 0$ se reprezintă geometric prin dreapta d .

Spunem că d are ecuația $2x - y + 1 = 0$.



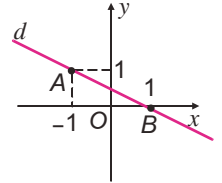
- 9 Reprezintă geometric mulțimea soluțiilor ecuației $x + y + 1 = 0$.

Să analizăm!

Fie $A(-1; 1)$ și $B(1; 0)$ două puncte în plan. Vrem să determinăm ecuația dreptei AB . Altfel spus: vrem să determinăm în ce condiții un punct $M(x; y)$ aparține dreptei AB .

Observăm că:

$M \in AB$ dacă și numai dacă M, A, B sunt coliniare.



Această ultimă condiție este echivalentă cu:
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

adică $x + 2y - 1 = 0$. Ecuația dreptei AB este deci $x + 2y - 1 = 0$.

În general

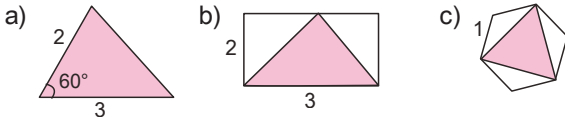
Ecuația dreptei determinată de punctele distincte $A(x_1; y_1)$ și $B(x_2; y_2)$ este:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

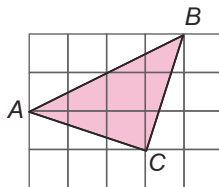
- 10 Scrie ecuația dreptei CD , unde $C(1; 1)$, $D(2; 3)$.

Exerciții și probleme

1. Calculează ariile triunghiurilor din figurile de mai jos.



2. Pătratele din rețeaua alăturată au latura de 1. Calculează lungimile laturilor și aria triunghiului ABC . Ce măsură are unghiul A ?



3. Fie $M(-1; 1)$, $N(1; 2)$, $P(3; -3)$.
 a) Calculează A_{MNP} .
 b) Desenează perpendiculara din N pe MP și estimează, pe desen, distanța de la N la MP .
 c) Calculează distanța de la N la MP . Compară rezultatul găsit cu estimarea de la punctul b).

4. Fie d dreapta de ecuație $x - y + 1 = 0$.
 a) Arată că $A(1; 2)$ și $B(0; 1)$ aparțin lui d .
 b) Calculează distanța de la $M(2; 0)$ la d .
5. a) Verifică dacă $A(1; 2)$, $B(-1; 1)$ și $C(5; 4)$ sunt puncte coliniare.
 b) Determină numărul real m dacă punctele $M(m; 1)$, $P(1; -1)$, $Q(3; 0)$ sunt coliniare.
6. Următoarele puncte sunt raportate la sistemul de axe xOy : $A(6; 0)$, $B(6; 6)$, $C(0; 6)$, $D(4; 2)$, $E(6; 3)$.
 a) Arată că $OABC$ este un pătrat.
 b) Verifică afirmația: $D \in AC$ și $2 \cdot AD = DC$.
 c) Demonstrează că E este mijlocul lui AB și că O, D, E sunt puncte coliniare.
 d) Reformulează problema, făcând abstracție de sistemul de axe și de coordonatele punctelor date.
7. Într-un determinant de ordinul trei, toate cele 9 elemente sunt egale cu $+1$ sau cu -1 . Arată că valoarea determinantului poate fi doar $0, 4$ sau -4 .

Am reușit...?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...

- ◆ să identific proprietăți ale determinantilor
- ◆ să calculez determinanți de ordin cel mult 4
- ◆ să rezolv sisteme, folosind metode diferite de rezolvare, și să compar aceste rezolvări
- ◆ să utilizez determinanții în rezolvarea unor probleme de geometrie?

Test de verificare

1. Completează cu răspunsul corect!

Determinantul $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ este egal cu zero, deoarece ...

2. Considerăm determinantul $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

- a) Transformă determinantul D după regula: $L_2 \leftarrow L_2 + 2 \cdot L_1$.
- b) Dezvoltă determinantul obținut după prima coloană.
- c) Aplică regula lui Sarrus pentru a calcula D . Compară rezultatele obținute.

3. Considerăm sistemul: $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$. Rezolvă sistemul:

- a) prin metoda reducerii;
 - b) folosind regula lui Cramer;
 - c) prin reprezentarea grafică a ecuațiilor sistemului.
- Compară modurile de rezolvare. Care metodă ți se pare mai simplă? De ce?

4. Fie $A(-2; 1)$, $B(1; 3)$, $C(2; -2)$.

- a) Calculează aria triunghiului ABC .
- b) Scrie ecuațiile dreptelor AB , AC și BC .
- c) Justifică dacă sistemul format cu cele trei ecuații determinate la b) are soluție.

Lectură

Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare este legată în mod fundamental de numele matematicianului elvețian Gabriel Cramer (1704-1752). Acesta a descoperit forma generală a soluției unice a unui sistem liniar de n ecuații liniare cu n necunoscute și condiția de existență a acesteia. Algoritmii de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare dezvoltat de matematicianul german Karl Friederich Gauss (1777-1855) se mai numește și rezolvarea prin eliminare. Acest algoritm se pretează la folosirea pe calculator; de aceea această metodă a căpătat o importanță tot mai mare în ultimii ani.

După cum știm, o ecuație liniară cu două necunoscute definește în plan o dreaptă. Ca urmare, două ecuații cu două necunoscute determină o pereche de drepte în plan și soluțiile, dacă există, trebuie să fie punctele de intersecție ale celor două drepte. Putem avea următoarele situații:

- a) Există o infinitate de soluții și o infinitate de puncte de intersecție ale celor două drepte. În acest caz, cele două drepte coincid. Putem da o valoare arbitrară uneia dintre necunoscute, iar cealaltă este determinată în funcție de aceasta.
- b) Sistemul admite soluție unică. În acest caz, dreptele se intersectează într-un singur punct.
- c) Sistemul nu are soluții. În acest caz, dreptele sunt distincte și paralele.

În mod similar, putem proceda în cazul unui sistem cu trei ecuații și trei necunoscute. Fiecare ecuație determină un plan în spațiul cu trei dimensiuni. Soluțiile sistemului se găsesc la intersecția celor trei plane.

Unitatea de învățare 6

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Operații elementare

1. Calculează:
 a) $2 - 3 \cdot (5 + 4)$; b) $[(-2) - (-3)] \cdot (-2)$; c) $4 + 1 \cdot [2 + 3 - (-4)]$; d) $-(-4) + 0 \cdot (234 - 432)$;
 e) $\frac{1}{5} \cdot [(-3) + (-2)]$; f) $\left(\frac{1}{2} : \frac{2}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{5} : \frac{50}{10}\right)$; g) $\left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3} - \frac{7}{3}\right) \cdot 1$; h) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$.

Exponențiale și logaritmi

2. Determină:
 a) $(-2)^3$ b) $(-3)^2$ c) $\log_2 4$ d) $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right)$ e) 10^{97}
 f) $\log_4 \sqrt[3]{4}$ g) $3^2 \cdot 3^{-3}$ h) $(5^1)^2$ i) $\log_3 27$ j) $\log_3 6 - \log_3 2$.

Elemente de logică

3. Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:
 a) $(2 + 1) + 3 = 2 + (1 + 3)$ c) $(2 - 1) - 3 = 2 - (1 - 3)$ e) $(2^1)^3 = 2^3$
 b) $(2 \cdot 1) \cdot 3 = 2 \cdot (1 \cdot 3)$ d) $(2 : 1) : 3 = 2 : (1 : 3)$ f) $(4^2)^3 = (4^3)^2$.
4. Exprimă altfel următoarele enunțuri, folosind principiile logice de transformare a propozițiilor echivalente.
 a) Dacă nu mă grăbesc, atunci pierd trenul.
 b) Dacă toți sportivii sunt prezenți, atunci concursul poate începe.
 c) Dacă echipa aplică indicațiile antrenorului, atunci ea câștigă meciul.

Rezolvarea ecuațiilor

5. Rezolvă ecuațiile de mai jos în mulțimea numerelor reale. Stabilește în fiecare caz dacă soluțiile găsite aparțin și mulțimii numerelor naturale.
 a) $x + 3 = -5$ b) $(-4)x = -8$ c) $-3x - 6 = -12$
 d) $4x + 1 = 0$ e) $x^2 - x - 2 = 0$ f) $x^2 + 4x + 4 = 0$.

6. Rezolvă în \mathbb{R} ecuațiile:
 a) $2^x = 8$ b) $\log_3 x = 2$ c) $2^x + 2^{x+1} = 6$ d) $\log_3 x + \log_3(x - 2) = 1$.

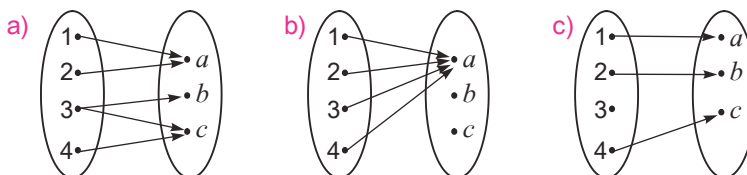
Operații cu mulțimi

7. Fie E o mulțime. Demonstrează folosind diagrame Venn-Euler că oricare ar fi submulțimile A , B și C ale lui E , au loc egalitățile:
 a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
 c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 e) $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$ f) $A \cap E = E \cap A = A$.

8. Exprimă altfel următoarele mulțimi:
 a) A este mulțimea numerelor naturale, care sunt multipli și de 2, și de 3.
 b) B este mulțimea numerelor naturale care dau restul 1 la împărțirea cu 2 și restul 2 la împărțirea cu 3.

Funcții

9. Stabilește care dintre diagramele de mai jos corespunde unei funcții.



Mulțimile de numere și rezolvarea ecuațiilor

Ne amintim și explorăm!

◆ Ce tipuri de ecuații liniare au soluții în \mathbb{N} ?

Să analizăm!

În soluționarea unor probleme din cotidian suntem conduși la rezolvarea unor ecuații și uneori suntem interesați să decidem dacă aceste ecuații au soluții în mulțimea numerelor naturale \mathbb{N} .

Exemple

- 1) Ecuația $2 + x = 6$ are în mulțimea numerelor naturale soluția 4.
- 2) Ecuația $2x = 6$ are în mulțimea numerelor naturale soluția 3.
- 3) Ecuația $3 + x = 2$ nu are soluții în mulțimea numerelor naturale, deoarece avem $3 + x \geq 3$ pentru orice număr natural x .
- 4) Ecuația $3 \cdot x = 2$ nu are soluții în mulțimea numerelor naturale, deoarece 2 nu este divizibil prin 3.

În general

Ecuația $x + a = b$ ($a, b \in \mathbb{N}$) admite o soluție în mulțimea numerelor naturale dacă și numai dacă $b \geq a$. În acest caz soluția ecuației este numărul natural $b - a$.

Ecuația $a \cdot x = b$ ($a, b \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$) admite o soluție în mulțimea numerelor naturale dacă și numai dacă a este un divizor al lui b . În acest caz, soluția ecuației este $\frac{b}{a}$.

◆ Ce tipuri de ecuații liniare au soluții în \mathbb{Z} ?

Mulțimea numerelor naturale nu este suficient de „bogată” pentru a rezolva în ea orice ecuație de forma $a + x = b$ sau $a \cdot x = b$. Este nevoie să considerăm mulțimi de numere mai cuprinzătoare pentru a putea rezolva aceste ecuații.

Ecuația $x + a = b$ poate fi rezolvată în \mathbb{N} în cazul în care $b \geq a$ și are soluția $b - a$, deoarece în acest caz $b - a$ este un număr natural. Dacă $b < a$, diferența $b - a$ nu mai aparține lui \mathbb{N} , ci este un număr întreg negativ.

Este natural să încercăm să rezolvăm o ecuație de forma $x + a = b$ în mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi.

Să demonstrăm!

Ecuația $x + a = b$ are soluție în \mathbb{Z} oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Z}$; soluția acestei ecuații este $b - a$.

Ecuația $x + a = b$ este echivalentă cu ecuația $(x + a) + (-a) = b + (-a)$, unde $(-a)$ este opusul lui a .

Folosind asociativitatea adunării din \mathbb{Z} , faptul că $a + (-a) = 0$, precum și relația $b - a = b + (-a)$, deducem că soluția ecuației $x + a = b$ este $b - a$.

① Enunță probleme pentru a căror rezolvare suntem conduși la ecuațiile alăturate.

▲ Ecuațiile $x + a = b$ și $x = b - a$ sunt echivalente.

Ecuațiile $a \cdot x = b$ și $x = \frac{b}{a}$, $a \neq 0$, sunt echivalente.

② Rezolvă în \mathbb{Z} ecuațiile $x + 12 = 2$, $x + (-1) = -7$.

③ Explică de ce ecuația $x + a = b$ nu poate fi rezolvată în \mathbb{N} , pentru unele numere $a, b \in \mathbb{N}$.

◆ Ce tipuri de ecuații liniare au soluții în \mathbb{Q} ?

Să comparăm!

Pentru rezolvarea în \mathbb{Z} a ecuației $x + a = b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) am folosit existența în \mathbb{Z} a opusului $(-a)$ al lui a , precum și faptul că $b + (-a)$ este, la rândul său, un număr întreg.

În schimb, nici în \mathbb{Z} nu putem găsi o soluție a ecuației $3x = 2$. Este nevoie de o nouă extindere a mulțimii de numere în care lucrăm pentru a putea rezolva această ecuație și anume este nevoie de mulțimea \mathbb{Q} a numerelor raționale.

Să demonstrăm!

Ecuația $a \cdot x = b$ are soluție în \mathbb{Q} , oricare ar fi $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$.

Soluția acestei ecuații este $\frac{1}{a} \cdot b$.

Ecuația $a \cdot x = b$ este echivalentă cu ecuația $\frac{1}{a} \cdot (a \cdot x) = \frac{1}{a} \cdot b$, unde $\frac{1}{a}$ este inversul lui a .

Folosind asociativitatea înmulțirii din \mathbb{Q} și egalitatea $\frac{1}{a} \cdot a = 1$, obținem $a \cdot x = b$, deci $x = \frac{1}{a} \cdot b$.

Să analizăm!

Pentru a rezolva în \mathbb{Q} ecuația $a \cdot x = b$ ($a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$) am folosit existența în \mathbb{Q} a inversului $\frac{1}{a}$ al numărului nenul a , precum și faptul că $\frac{1}{a} \cdot b$ este, la rândul său, un număr rațional.

În \mathbb{Q} , orice număr are un opus și orice număr nenul are un invers. De aceea, în \mathbb{Q} putem rezolva atât ecuații de forma $x + a = b$ ($a, b \in \mathbb{Q}$), cât și ecuații de tipul $a \cdot x = b$ ($a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$). În concluzie, putem rezolva în \mathbb{Q} orice ecuație de forma $a \cdot x + b = c$ cu coeficienți $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$.

Obținem $x = \frac{1}{a} \cdot (c - b) = \frac{1}{a} \cdot c - \frac{1}{a} \cdot b$.

Să analizăm!

Unele probleme conduc la ecuații care nu sunt de tipul celor de mai sus, de exemplu, ecuațiile $x^3 = 2$; $3^x = 2$. Aceste ecuații nu admit soluții în mulțimea \mathbb{Q} , a numerelor raționale. Ele pot fi, însă, rezolvate în mulțimea \mathbb{R} , a numerelor reale.

Astfel, numărul real (irațional) $\sqrt[3]{2}$ este soluție a ecuației $x^3 = 2$, iar numărul real (irațional) $\log_3 2$ este soluție a ecuației $3^x = 2$.

Am văzut, așadar, cum necesitatea rezolvării unor ecuații simple în care apar numai numere naturale, ne conduce la considerarea unor mulțimi, mai bogate, în care aceste ecuații admit soluții. Astfel, pentru a putea rezolva toate ecuațiile de forma $x + a = b$, a fost nevoie să lucrăm în mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi. Toate ecuațiile de tipul $ax = b$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, pot fi rezolvate în mulțimea \mathbb{Q} a numerelor raționale. Toate ecuațiile de forma $x^n = a$, unde $n, a \in \mathbb{N}$, au o soluție în mulțimea numerelor reale. Observăm că mulțimile de numere au apărut și s-au dezvoltat din necesitatea rezolvării unor ecuații.

4 Stabilește ce proprietăți ale operațiilor cu numere raționale sunt folosite pentru a obține soluția ecuației $a \cdot x = b$, unde $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$.

▲ Există ecuații, cum ar fi $x^2 + 1 = 0$, care nu admit soluții în mulțimea numerelor reale.

Exerciții și probleme

- Rezolvă în \mathbb{Z} ecuațiile:
a) $x - 6 = 0$; $3x + 9 = 0$; $-x + 6 = 0$;
b) $4x - 8 = 0$; $6x + 24 = 0$; $-9x + 81 = 0$;
c) $6x - 2 = 10$; $13x + 5 = 18$; $4(x + 4) = 12$.
- Rezolvă în mulțimea numerelor întregi inecuațiile:
a) $x - 3 > 0$; $x + 3 < 0$; $2x \leq 18$
b) $-8x > 16$; $2x + 3 < 7$; $-5x + 1 \geq -14$
c) $x + 4 \leq -1$; $3(x + 2) > -9$; $7(2 - x) \geq -36$.
- Rezolvă ecuațiile în \mathbb{Q}_+ :
a) $x + \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$; b) $x - 0,7 = 1,8$; c) $2x + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$;
d) $(x + 0,8) \cdot \frac{1}{2} = 1,5$; e) $(4 - x) \cdot 1\frac{1}{4} = \frac{7}{8}$.
- Rezolvă ecuațiile în \mathbb{Q} :
a) $(3,7 + 0,3) \cdot x = 0,4$
b) $(31,5 - 1,5) \cdot x = 1,2$
c) $6,75 \cdot x + 0,50 \cdot x = 6,25x$
d) $x : 0,6^2 = 10,5$
e) $(6,32 + x) \cdot 10^3 = 7916,9$.
- Rezolvă în \mathbb{Q} :
a) $5,2 \cdot x = 11,96$ b) $4,59 : x = 4,5$
c) $x : 4,73 = 0,215$ d) $6,4 \cdot x - 3,9 \cdot x = 5$
e) $2,5 \cdot x + 4,5 \cdot x = 14,7$
f) $9,3 \cdot x + 6,2 \cdot x - 7,8 \cdot x = 30,8$.
- Suma a două numere zecimale este 324,21, iar unul dintre ele este de 100 ori mai mare decât celălalt. Află numerele.
- Diferența a două numere zecimale este 3, iar unul dintre ele este de 301 ori mai mic decât celălalt. Află numerele.
- Suma a două numere este 60,66. Unul dintre ele este de 5 ori mai mic decât celălalt. Află numerele.
- O grădină în formă de pătrat are perimetrul de 170,60 m. Află aria sa.
- Rezolvă în \mathbb{Z} inecuațiile:
a) $|3x + 2| \leq 5$; b) $|x + 7| \leq 0$; c) $4(x - |x|) + 4 \geq 0$.
- Rezolvă în \mathbb{Q} în ecuațiile:
a) $x + \frac{1}{11} = 5$ b) $x - 0,2 = \frac{1}{4}$
c) $x \cdot \frac{2}{5} = \frac{10}{3}$ d) $x : \frac{4}{7} = \frac{7}{4}$
- Află numerele întregi n pentru care:
a) $|n| \leq 2$ b) $|n - 3| \leq 0$
c) $|2(n - 3)| < 4$ d) $|2n - 8| - 3 < 1$.
- Determină numerele întregi a și b , știind că mulțimile $A = \{-3; 11; |a|; -5\}$ și $B = \{b; -|3|; 11; -(-5)\}$ sunt egale.
- Află $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât numerele întregi impare:
a) $-5, -3, x, 5, 7$ să fie ordonate crescător;
b) $5, 3, x, -5, -7, -9$ să fie ordonate descrescător.
- Reprezintă pe axa numerelor, în fiecare caz, elementele mulțimii, apoi scrie-le în ordine crescătoare, folosind semnul „ \leq “.
a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 3\}$;
b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 2 \leq |x| < 5\}$.
- Decide, fără să rezolvi, dacă există numere naturale care verifică ecuația:
a) $2x + 1 = 20038$
b) $3x + 7 = 127843$
c) $4x + 18 = 156787$.
- a) Avem o balanță și trei corpuri geometrice: un cub, o piramidă și un cilindru. Cum putem aranja cele trei obiecte în ordinea crescătoare a maselor lor, executând cântăriri cu balanța, fără să folosim greutateți marcate?
b) Avem o balanță și patru corpuri geometrice: un cub, un paralelipiped dreptunghic, o piramidă și un cilindru. Cum putem aranja obiectele în ordinea crescătoare a maselor lor, executând cântăriri cu balanța? Alcătuieste și rezolvă o problemă asemănătoare.
- Rezolvă în \mathbb{R} :
a) $|x| = -x$
b) $|2(x - 3)| = 8$
c) $||x - 1| - 2| = 1$
d) $|-3(2x + 4)| \leq 0$
e) $|5(2 - x)| < 5$.
- Stabilește pentru ce valori ale numărului întreg a ecuațiile de mai jos cu necunoscuta x admit soluții în mulțimea numerelor întregi:
a) $(a + 3)x = 2$
b) $(2a + 1)x = 3$
c) $(a^2 - 4)x = a - 2$



1 Explică de ce adunarea este lege de compoziție pe mulțimile \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} și \mathbb{R} . Este scăderea o operație algebrică pe \mathbb{N} ? Dar pe \mathbb{Z} ?

▲ Dacă o lege de compoziție admite element neutru, acesta este unic.

▲ Dacă legea de compoziție este notată cu „+”, pentru elementul neutru se folosește notația 0, iar pentru o lege de compoziție notată cu „·”, elementul neutru se notează cu 1.

2 Găsește un alt exemplu pentru a arăta că scăderea nu este operație asociativă.

◆ Ce proprietăți au operațiile cu numere?

Să analizăm!

În rezolvarea ecuațiilor în diferitele mulțimi de numere am utilizat două operații elementare: adunarea și înmulțirea, considerându-le ca legi de compoziție pe \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} sau \mathbb{R} . După cum am văzut, operațiile algebrice pot avea diferite proprietăți.

Să ne amintim!

O lege de compoziție „·” pe o mulțime M se numește *asociativă* dacă

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \text{ oricare ar fi } a, b, c \in M.$$

Un element e al lui M se numește *element neutru* pentru „·” dacă

$$a \cdot e = e \cdot a = a, \text{ oricare ar fi } a \in M.$$

Exemple și contraexemplu

- 1) Adunarea și înmulțirea pe \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , respectiv \mathbb{R} , sunt operații asociative.
- 2) Fie E o mulțime. Reuniunea și intersecția sunt legi de compoziție asociative pe $\mathcal{P}(E)$.
- 3) Pe \mathbb{Z} , operația de scădere nu este asociativă; de exemplu: $(4 - 2) - 5 \neq 4 - (2 - 5)$.
- 4) 0 este element neutru pentru adunare pe \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} și \mathbb{R} .
- 5) 1 este element neutru pentru înmulțire pe \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} și \mathbb{R} .
- 6) Fie E o mulțime. Mulțimea vidă $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ este element neutru pentru reuniune, deoarece $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$, pentru orice $A \in \mathcal{P}(E)$, iar $E \in \mathcal{P}(E)$ este element neutru pentru intersecție.

Să analizăm!

Pe mulțimea numerelor întregi, operațiile de adunare și înmulțire sunt comutative. Spre deosebire de acestea, operația de scădere pe \mathbb{Z} nu este comutativă; de exemplu: $3 - 5 \neq 5 - 3$.

Să ne amintim!

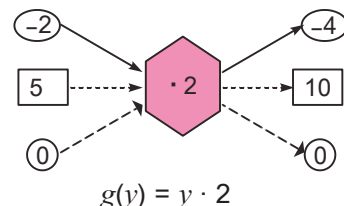
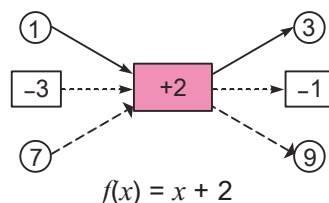
O lege de compoziție pe o mulțime M este *comutativă* dacă

$$a \cdot b = b \cdot a, \text{ oricare ar fi } a, b \in M.$$

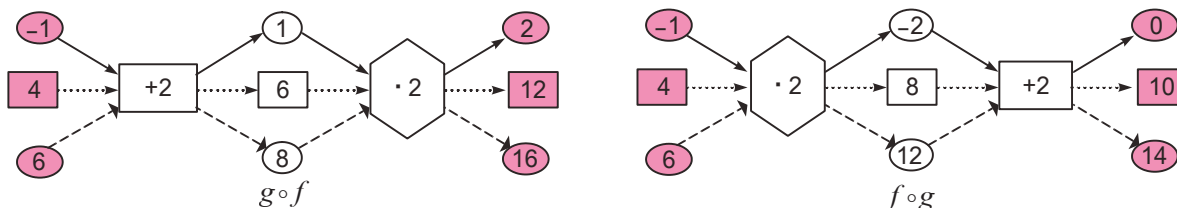
Exemple și contraexemplu

- 1) Adunarea și înmulțirea sunt comutative.
- 2) Reuniunea și intersecția sunt comutative.
- 3) Compunerea funcțiilor **nu** este, în general, comutativă.

Spre exemplu, să considerăm funcțiile f și g , descrise de „mașinile de calculat” din imagine:



Compunerea funcțiilor f și g are ca efect trecerea succesivă a unui număr prin cele două mașini:



Observăm că datele de intrare în „mașinile” $f \circ g$ și $g \circ f$ sunt aceleași, dar datele de ieșire diferă.

În concluzie $f \circ g \neq g \circ f$.

3 Explică, folosind diagrame, de ce $f \circ g \neq g \circ f$.

4 Exprimă prin formule legile de asociere descrise de funcțiile $f \circ g$ și $g \circ f$.

◆ Ce proprietăți au submulțimile în raport cu o operație algebrică?

Să analizăm!

Considerăm operația de adunare pe mulțimea numerelor întregi.

Observăm că:

- suma a două numere pare este tot un număr par;
- suma a două numere întregi negative este un număr întreg negativ.

Am pus astfel în evidență două submulțimi ale lui \mathbb{Z} pe care adunarea este în continuare lege internă.

Spre deosebire de aceste exemple, suma a două numere impare nu mai este un număr impar.

În general

Fie M o mulțime pe care am definit operația algebrică $*$ și fie \mathcal{P} o submulțime nevidă a lui M .

Spunem că \mathcal{P} este *parte stabilă* față de operația $*$ dacă, pentru orice $x, y \in \mathcal{P}$, avem $x * y \in \mathcal{P}$.

◆ Ce este un monoid?

Observăm că operațiile de adunare și înmulțire, considerate ca legi de compoziție pe \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} sau \mathbb{R} verifică atât proprietatea de asociativitate, cât și pe cea de comutativitate.

În general

Fie M o mulțime nevidă și „ $*$ ” o lege de compoziție pe M . Perechea $(M, *)$ este un *monoid* dacă legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă și admite element neutru. Un monoid $(M, *)$ este *comutativ* dacă legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă.

Exemple

- 1) $(\mathbb{N}, +)$; $(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{Q}, +)$; $(\mathbb{R}, +)$ sunt monoizi comutativi, având ca element neutru pe 0.
- 2) (\mathbb{N}, \cdot) ; (\mathbb{Z}, \cdot) ; (\mathbb{Q}, \cdot) ; (\mathbb{R}, \cdot) sunt monoizi comutativi având elementul neutru 1.
- 3) (\mathbb{N}^*, \cdot) ; (\mathbb{Z}^*, \cdot) ; (\mathbb{Q}^*, \cdot) ; (\mathbb{R}^*, \cdot) sunt monoizi comutativi, având elementul neutru 1.
- 4) Fie E o mulțime. Atunci $(\mathcal{P}(E), \cup)$ și $(\mathcal{P}(E), \cap)$ sunt monoizi comutativi, având elementele neutre \emptyset , respectiv E .
- 5) Fie $\mathcal{F} = \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$; atunci (\mathcal{F}, \circ) este un monoid necomutativ, având ca element neutru funcția identică a lui \mathbb{R} (adică funcția descrisă de corespondența $x \mapsto x$).

▲ Notația \mathbb{Z}^* indică mulțimea numerelor întregi nenule.

5 Arată că $(\mathcal{P}(E), \cup)$ este un monoid comutativ cu element neutru \emptyset .

▲ Pentru un monoid $(M, +)$ cu element neutru 0, inversul unui element $x \in M$ este notat cu $(-x)$ și se numește opusul lui x .

⚠ Dacă un element are invers, atunci acesta este unic.

⑥ Descrîe elementele inversabile ale monoizilor (\mathbb{Z}^*, \cdot) ; (\mathbb{Q}^*, \cdot) ; (\mathbb{R}^*, \cdot) .

⚠ Un grup în care operația este notată cu „+” se mai numește grup aditiv, iar un grup în care operația este notată cu „·” se mai numește grup multiplicativ.

⑦ Arată că E este unicul element inversabil în monoizul $(\mathcal{P}(E), \cap)$.

⚠ Denumirea de grup abelian provine de la numele matematicianului danez Niels Abel (1802-1829).

⑧ Justifică toate afirmațiile din exemplele alăturate.

⑨ Verifică această proprietate în cazul a trei vectori coliniari.

◆ Ce este un grup?

Să analizăm!

Comparând proprietățile adunării și înmulțirii pe mulțimile de numere, observăm că ceea ce distinge adunarea pe \mathbb{Z} de adunarea pe \mathbb{N} este existența opusului, iar ceea ce distinge înmulțirea pe \mathbb{Q} de înmulțirea pe \mathbb{Z} este existența elementului invers față de înmulțire, pentru numerele nenule. Aceasta arată că există o diferență fundamentală între monoizii $(\mathbb{N}, +)$ și $(\mathbb{Z}, +)$. Proprietatea anterioară diferențiază și monoizii (\mathbb{Z}^*, \cdot) și (\mathbb{Q}^*, \cdot) .

În general

Fie $(M, *)$ un monoid cu element neutru e .

Un element $x \in M$ se numește *inversabil* dacă există un element $y \in M$ astfel încât $x * y = y * x = e$.

Elementul y se numește *inversul lui x* și este notat cu x^{-1} .

Exemple și contraexemplu

1) În monoizul $(\mathbb{N}, +)$ singurul element inversabil este 0, iar opusul său este tot 0. Niciun element $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ nu este inversabil, deoarece pentru $x \neq 0$ nu putem găsi $y \in \mathbb{N}$ astfel încât $x + y = y + x = 0$.

2) În monoizul $(\mathbb{Z}, +)$ toate elementele sunt inversabile; aceeași proprietate este valabilă în monoizii $(\mathbb{Q}, +)$ și $(\mathbb{R}, +)$.

3) În monoizul (\mathbb{Z}, \cdot) singurele elemente inversabile sunt 1 și -1 .

4) În monoizii (\mathbb{Q}^*, \cdot) ; (\mathbb{R}^*, \cdot) toate elementele sunt inversabile.

5) Fie E o mulțime. În monoizul $(\mathcal{P}(E), \cup)$ singurul element inversabil este \emptyset . Aceasta se întâmplă deoarece $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ și pentru o mulțime $A \subset E$, nevidă, nu putem găsi $B \subset E$ astfel încât $A \cup B = \emptyset$.

Analog, în monoizul $(\mathcal{P}(E), \cap)$ singurul element inversabil este E .

Să analizăm!

În exemplele de mai sus, unii monoizi au proprietatea că *toate* elementele lor sunt inversabile în raport cu legea de compoziție dată, în timp ce în restul monoizilor doar unele elemente verifică această proprietate.

În general

Un monoid $(G, *)$ în care toate elementele sunt inversabile se numește *grup*. Un grup $(G, *)$ se numește *comutativ* (sau *abelian*) dacă legea de compoziție „*” este comutativă.

Exemple și contraexemplu

1) $(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{Q}, +)$; $(\mathbb{R}, +)$ sunt grupuri, în timp ce $(\mathbb{N}, +)$ nu este un grup.

2) (\mathbb{Q}^*, \cdot) , (\mathbb{R}^*, \cdot) sunt grupuri. În schimb, (\mathbb{Q}, \cdot) și (\mathbb{R}, \cdot) nu sunt grupuri. De asemenea, (\mathbb{Z}^*, \cdot) nu este un grup.

3) Dacă E este o mulțime nevidă, monoizii $(\mathcal{P}(E), \cup)$ și $(\mathcal{P}(E), \cap)$ nu sunt grupuri.

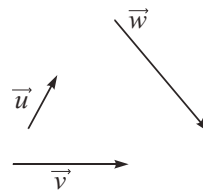
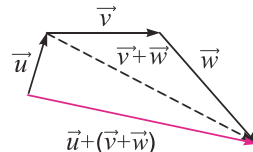
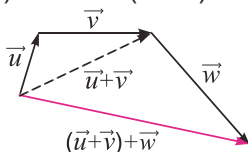
Să aplicăm!

Pe mulțimea \mathcal{V} a vectorilor din plan este definită operația algebrică de adunare a vectorilor. Această lege de compoziție are următoarele proprietăți:

a) Asociativitate

Dacă \vec{u} , \vec{v} și \vec{w} sunt trei vectori din plan, folosind regula triunghiului, deducem că are loc egalitatea

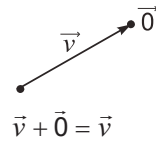
$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}).$$



b) Existența elementului neutru

Un vector este determinat de un segment orientat. Dacă originea și extremitatea acestui segment coincid, obținem vectorul nul, notat $\vec{0}$.

Vectorul nul $\vec{0}$ are proprietatea că oricare ar fi vectorul \vec{v} avem: $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$.

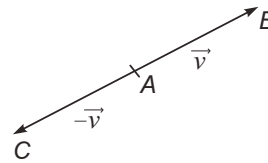


⚠ Un alt simetric pentru vectorul \overline{AB} este vectorul \overline{BA} .

c) Elemente simetrizabile:

Toate elementele mulțimii \mathcal{V} sunt simetrizabile față de „+”: dacă $\vec{v} = \overline{AB}$ este un vector din plan și C este simetricul lui B față de A, notăm $-\vec{v} = \overline{AC}$.

Avem $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$, deci vectorul $-\vec{v}$ este simetricul lui \vec{v} față de operația algebrică „+”.

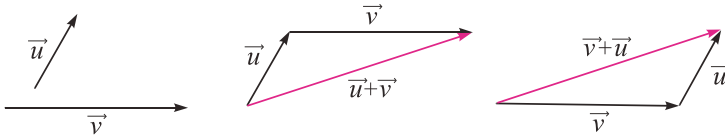


⑩ Verifică dacă vectorul \overline{BA} și vectorul \overline{AC} (definit alăturat) sunt vectori egali.

d) Comutativitate

Dacă \vec{u}, \vec{v} sunt doi vectori oarecare din plan, avem:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$

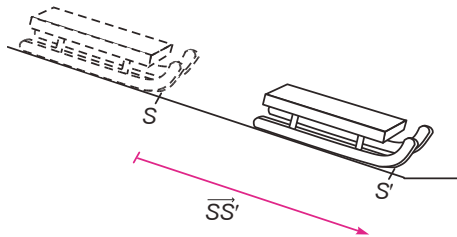


În concluzie, am demonstrat că $(\mathcal{V}, +)$ este un grup comutativ.

◆ **Ce alte exemple de grupuri cunoaștem?**

Să observăm!

Cu ajutorul vectorilor putem descrie anumite transformări ale figurilor geometrice. Observă desenele! Sania se deplasează din poziția S în poziția S'. Spunem că sania a efectuat o mișcare de translație de vector $\overline{SS'}$. Prin această translație, poziției inițiale S îi corespunde noua poziție S'.

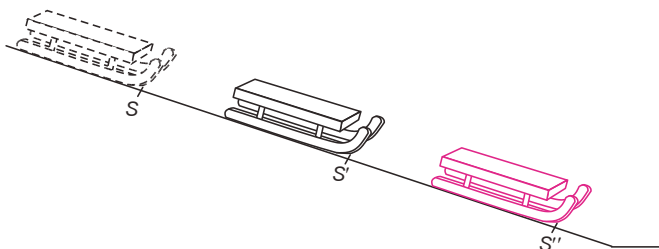


⚠ Cuvântul vector provine din latinescul „vehere”, care înseamnă a transporta, a duce.

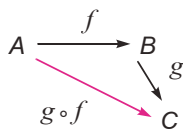
Să ne amintim!

O translație de vector \vec{a} asociază unei figuri geometrice \mathcal{F} o figură geometrică \mathcal{F}' , congruentă cu \mathcal{F} . Translația este o funcție care asociază fiecărui punct P al figurii \mathcal{F} un punct $P' \in \mathcal{F}'$ astfel încât $\overline{PP'} = \vec{a}$.

Dacă sania se mișcă întâi din poziția S în poziția S' prin translația de vector $\overline{SS'}$, iar apoi din S' în S'' prin translația de vector $\overline{S'S''}$ succesiunea celor două deplasări este tot o translație, corespunzătoare vectorului $\overline{SS''}$.



▲ Aplicarea succesivă a funcțiilor f și g se numește compunerea lui g cu f și se notează $g \circ f$. Rezultatul compunerii a două funcții este tot o funcție.



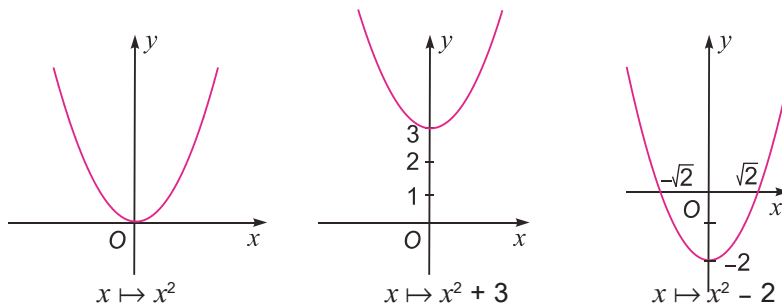
11 Explică modul în care au fost obținute graficele alăturate.

În general

Succeciunea a două translații este tot o translație. În acest fel, obținem o operație algebrică pe mulțimea \mathcal{T} a translațiilor din plan. \mathcal{T} este un grup în raport cu această lege.

Să aplicăm!

Putem folosi translația pentru a trasa graficul unor funcții. De exemplu, știind că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ are graficul de mai jos, putem reprezenta cu ușurință, prin translație, funcții precum $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 3$; $h(x) = x^2 - 2$.



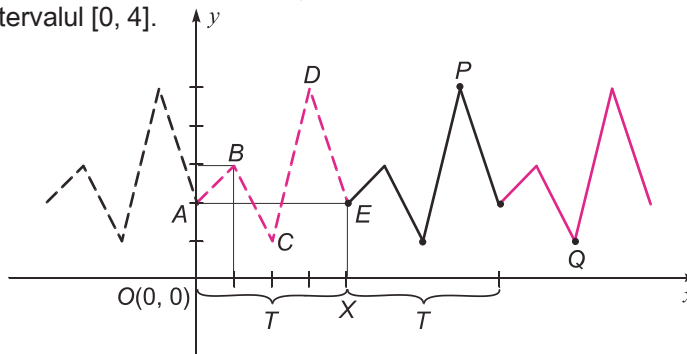
De asemenea, translația poate fi utilizată la trasarea graficului funcțiilor periodice.

Să ne amintim!

O funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește *periodică* dacă există un număr real nenul T astfel încât $f(x + T) = f(x)$, oricare ar fi numărul real x . Numărul T se numește *perioadă* a funcției f .

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu perioada T , pentru care cunoaștem graficul lui f pe intervalul $[0, T]$. „Translatând” acest grafic cu multipli întregi ai vectorului \overline{OX} (vector așezat de-a lungul axei Ox , și având lungimea T), obținem graficul lui f pe toată dreapta reală.

De exemplu, să considerăm o funcție având perioada $T = 4$; căreia îi cunoaștem graficul pe intervalul $[0, 4]$.



Translatând graficul funcției f cu vectorul \overline{OX} , unde $O(0, 0)$ și $X(4, 0)$, obținem graficul acestei funcții pe intervalul $[4, 8]$.

Efectuând încă o translație, de vector $2\overline{OX}$, obținem graficul pe intervalul $[8, 12]$. Continuând la fel, obținem graficul funcției f pe toată axa reală.

Să analizăm!

Am văzut că putem face o conexiune între proprietatea de periodicitate a funcțiilor și anumite transformări ale figurilor geometrice, mai precis translațiile. În mod analog, alte proprietăți ale funcțiilor pot fi puse în legătură cu alte transformări geometrice.

12 Presupunând că punctele din figură au coordonatele $A(0, 2)$; $B(1, 3)$; $C(2, 1)$; $D(3, 5)$; $E(4, 2)$; $X(4, 0)$, scrie ecuațiile dreptelor AB și BC .

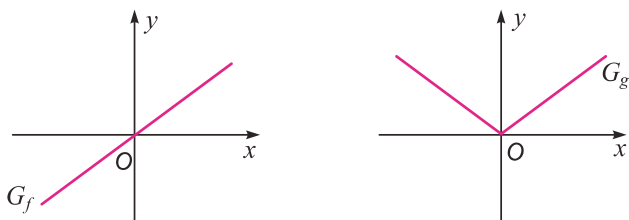
Calculează $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$ și $f\left(\frac{3}{2}\right)$. Ce coordonate au punctele P și Q ?

Să ne amintim!

O funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește:

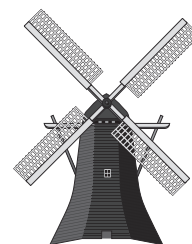
- a) *pară* dacă $f(-x) = f(x)$, oricare $x \in \mathbb{R}$;
- b) *impară*, dacă $f(-x) = -f(x)$, oricare $x \in \mathbb{R}$.

Astfel, funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = x$ este o funcție impară, în vreme ce funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = |x|$ este o funcție pară. Analizând graficele celor două funcții, observăm că graficul lui f este simetric față de punctul O , în timp ce graficul lui g este simetric față de axa Oy . Suntem, așadar, conduși, la alte tipuri de transformări ale figurilor geometrice: simetria centrală (față de un punct) și simetria axială (față de o dreaptă).



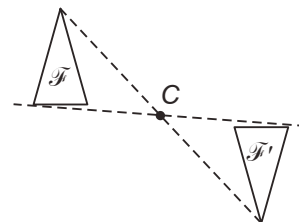
Să observăm!

Pentru a putea funcționa, o morișcă, elicea unui avion, paletelile morilor de vânt au o proprietate comună: ele sunt echilibrat distribuite față de axul de prindere.



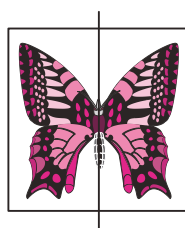
Să ne amintim!

- Două puncte se numesc *simetrice față de un punct* numit *centru* dacă sunt coliniare cu centrul și egal depărtate de acesta.
- O figură (sau un corp geometric) admite *centru de simetrie* dacă simetricul oricărui punct al său față de centru aparține figurii (sau corpului).
- Două figuri \mathcal{F} și \mathcal{F}' sunt *simetrice față de un punct* C dacă pentru orice punct $P \in \mathcal{F}$ există $P' \in \mathcal{F}'$ astfel încât $CP = CP'$, iar P, C și P' sunt coliniare. În acest caz, figura \mathcal{F}' este asociată figurii \mathcal{F} printr-o simetrie de centru C .



Să observăm!

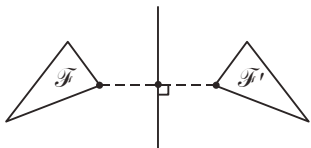
Ca și simetria centrală, simetria axială este frecvent întâlnită în natură.



▲ *Simetria centrală (simetria față de un punct) este o funcție care transformă o figură geometrică într-o figură congruentă cu ea însăși.*

Să ne amintim!

- Două puncte se numesc *simetrice față de o dreaptă* dacă sunt situate pe o perpendiculară pe acea dreaptă și sunt egal depărtate de ea.
- O figură (sau un corp geometric) admite *axă de simetrie* dacă simetricul oricărui punct al său față de axă aparține figurii (corpului).
- Două figuri \mathcal{F} și \mathcal{F}' sunt *simetrice față de o dreaptă* d dacă distanța de la un punct oarecare al figurii \mathcal{F} la dreapta d este egală cu distanța de la d la punctul corespunzător al figurii \mathcal{F}' .



! Simetria axială (simetria față de o dreaptă) este o funcție care transformă o figură geometrică într-o figură congruentă cu ea însăși.

14 Trasează graficul funcției $x \mapsto |x - 1|$ și identifică axa de simetrie a acestuia.

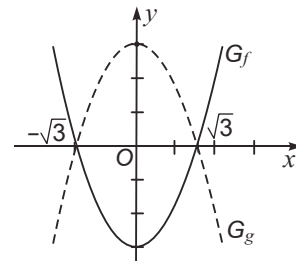
! Simetria axială este utilizată de constructorii de autoturisme pentru a proiecta modele utilizate în țările unde circulația se desfășoară pe stânga.

Proprietatea de simetrie ne ajută să trasăm rapid grafice de funcții sau să verificăm corectitudinea unora deja trasate.

Exemple

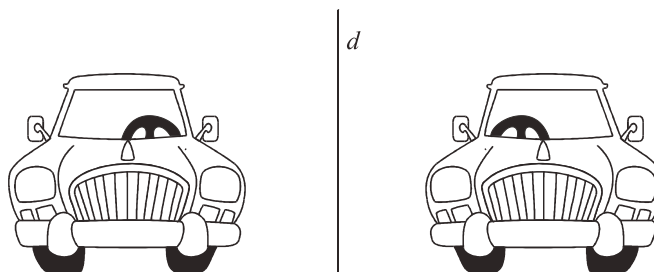
1) Funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3$ și $g(x) = 3 - x^2$ au graficele simetrice față de axa Ox .

2) Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1|$ are graficul simetric față de o dreaptă perpendiculară pe Ox , care trece prin punctul de abscisă 1.

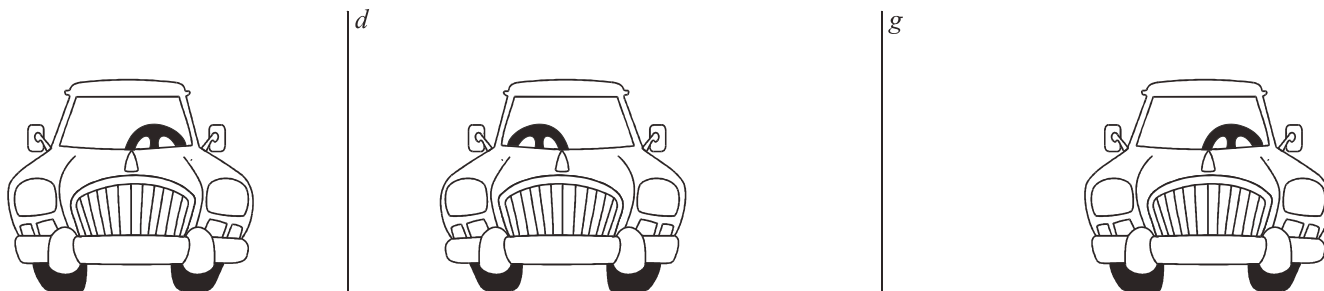


Să comparăm!

Am văzut că efectuând o succesiune de două translații obținem tot o translație. În schimb, succesiunea a două simetrii nu este, în general, o simetrie. Să considerăm de exemplu, un desen reprezentând un autoturism, care are volanul în partea stângă. Aplicându-i o simetrie axială, obținem imaginea unui autoturism cu volanul în partea dreaptă.



Aplicând succesiv două simetrii axiale unui astfel de desen, obținem din nou un autoturism cu volanul pe partea stângă, deci succesiunea a două simetrii axiale nu mai este o simetrie axială. De exemplu, în cazul în care axele celor două simetrii sunt drepte paralele, obținem figura de mai jos:



15 Ce transformare a fost obținută prin succesiunea celor două simetrii având axele paralele?

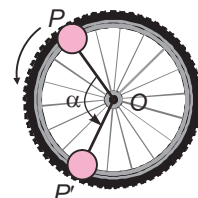
În general

O compunere a două simetrii axiale nu este o simetrie. De aceea, mulțimea simetriilor axiale ale planului nu formează un grup în raport cu operația de compunere.

Să observăm!

Când merge cu bicicleta, „ochiul de pisică” pus de Maria pe roată se deplasează, de exemplu, din poziția P în poziția P' .

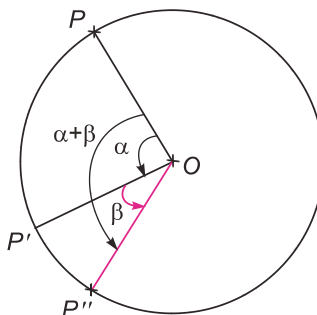
În limbaj matematic, spunem că „ochiul de pisică” a executat o mișcare de rotație de centru O și unghi α . Prin această mișcare, poziției inițiale P îi corespunde noua poziție P' .



Să ne amintim!

O rotație de centru O și unghi α în plan asociază unei figuri geometrice \mathcal{F} o figură geometrică \mathcal{F}' , congruentă cu \mathcal{F} . Rotația este o funcție care asociază unui punct $P \in \mathcal{F}$ punctul $P' \in \mathcal{F}'$ situat pe cercul de centru O și rază OP , astfel încât $m(\widehat{POP'}) = \alpha$.

O succesiune a două rotații *având același centru* este tot o rotație. Astfel, dacă prima rotație are centrul O și unghiul α , iar cea de-a doua rotație are centrul O și unghiul β , succesiunea lor este rotația de centru O și unghi $(\alpha + \beta)$.



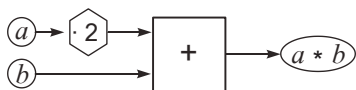
În general

Fie O un punct fixat în plan. Mulțimea rotațiilor de centru O formează un grup în raport cu operația de compunere.

16 Ce rotație este element neutru al grupului rotațiilor de centru O ? Cum poți descrie elementul invers al rotației de centru O și unghi α ?

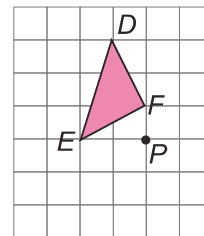
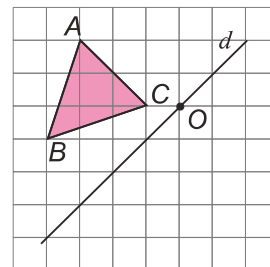
Exerciții și probleme

- Paul a inventat o nouă operație algebrică, notată „ \square ” și definită prin: $a \square b$ este media aritmetică a numerelor reale a și b .
 - Calculează $2 \square 4$ și $(-1) \square 5$.
 - Rezolvă în \mathbb{R} ecuația $x \square 3 = 1,5$.
 - Verifică dacă noua operație algebrică, inventată de Paul, este asociativă.
 - Inventează și tu o operație algebrică pe \mathbb{R} și propune colegilor o problemă.
- Exprimă printr-o formulă operația algebrică notată „ $*$ ”, care este descrisă prin desenul alăturat.



- Pe mulțimea numerelor întregi, definim o nouă operație algebrică, descrisă prin: $a \circ b = ab - a - b - 2$.
 - Arată că operația „ \circ ” este asociativă.
 - Verifică dacă numărul 2 este element neutru pentru 0.
 - Determină toate elementele inversabile din (\mathbb{Z}, \circ) .
 - Este (\mathbb{Z}, \circ) un grup?

- Observă figura alăturată și desenează simetricul triunghiului ABC față de O , apoi simetricul aceluiași triunghi față de dreapta d .
 - Desenează figura obținută prin rotația în jurul lui P a triunghiului DEF , cu un unghi de 90° .



- Considerăm toate transformările planului care invariază punctul O și care păstrează distanțele dintre puncte: o astfel de transformare se numește izometrie. Simetriile față de punctul O sau față de dreapta d , ca și rotația în jurul lui P , cu care ai lucrat la punctele a) și b) ale problemei, sunt izometrii. Demonstrează că o succesiune de două izometrii (adică o compunere de izometrii) este tot o izometrie.
- Arată că izometriile formează un grup necomutativ, în raport cu operația de compunere a izometriilor. Care este inversa simetriei față de dreapta d , în acest grup?

Aplicăm și dezvoltăm!

Structurile algebrice pot fi utilizate pentru a modela diferite contexte. Putem analiza proprietățile unor mulțimi în raport cu anumite operații care structurează acea mulțime. Cele două exemple care urmează te ajută să înțelegi mai bine cum funcționează structura de grup și cum descrie ea comportarea unor „obiecte” de natură geometrică.

◆ Ce este grupul „cosițelor”?

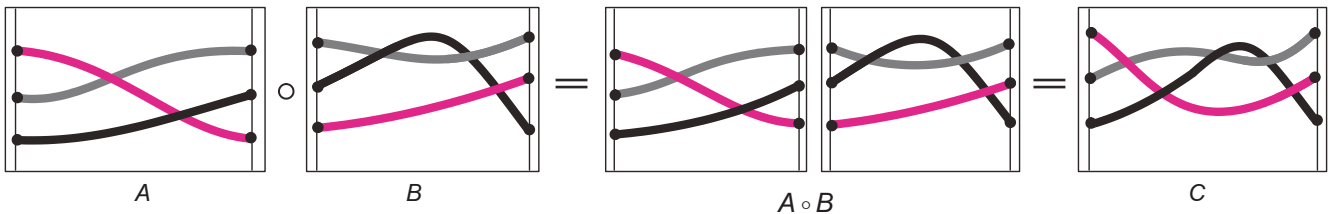
Modelele artistice realizate prin împletire par să nu aibă nici o legătură cu matematica. Vom arăta totuși că o categorie anume de astfel de împletituri formează în mod natural un grup. Să numim „cosiță” modele de forma celor alăturate, realizate prin împletirea câtorva fire ce unesc două laturi ale unui gherghef (în desene, apar trei, respectiv patru fire în împletitură).



În continuare, lucrăm doar cu cosițe având același număr de fire: acestea vor fi elementele grupului nostru.

Definim operația de „lipire” (concatenare, punere în contact) a cosițelor: date două cosițe, ele determină o nouă cosiță prin concatenarea laturilor celor două gherghefuri.

Exemplu:



1 Ce legătură este între desenul C și desenul $A \circ B$?

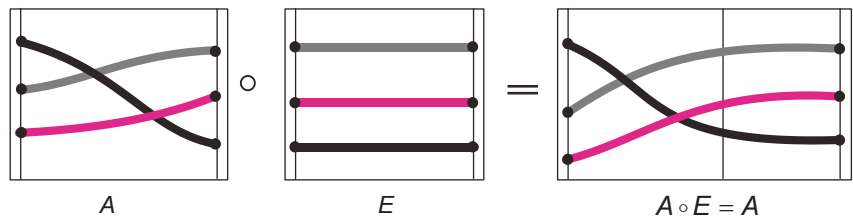
2 Verifică pe un caz particular că operația de lipire a cosițelor este asociativă.

3 „Cosița despletită” este element neutru, deoarece $E \circ X = X \circ E = X$, pentru orice cosiță X. Verifică afirmația pe un caz particular, folosind un desen.

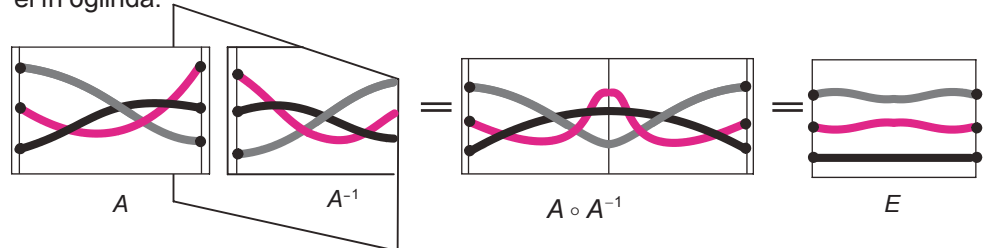
4 Pentru cosița A din desen, verifică egalitatea $A^{-1} \circ A = E$.

5 Demonstrează că grupul cosițelor cu n fire este necomutativ, pentru $n \geq 3$.

Este ușor de văzut că operația de lipire a cosițelor are ca element neutru „cosița despletită” E:



Pe de altă parte, orice cosiță poate fi „despletită”, prin concatenare cu imaginea ei în oglindă:



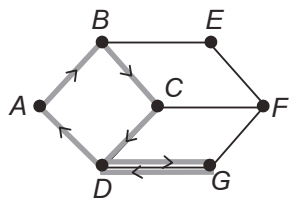
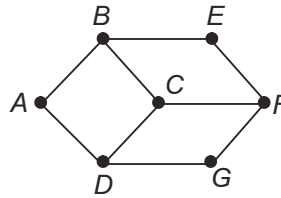
Toate verificările anterioare sugerează faptul că mulțimea cosițelor cu un număr fixat de fire formează un grup față de operația de concatenare a cosițelor.

◆ Cum putem asocia un grup unui graf?

Fie G un graf conex și A un nod fixat al grafului.

Considerăm mulțimea tuturor drumurilor în graf care pornesc și se termină în punctul A ; un astfel de drum este, evident, un circuit al grafului G , dar noi avem nevoie de evidențierea originii și a extremității acestor drumuri închise.

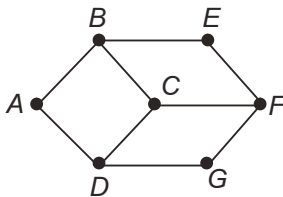
De exemplu, pentru graful din figura alăturată, un drum care pornește și se termină în A este descris de succesiunea de noduri: $ADCFGDCFGDCBA$.



Desigur, un circuit este și $ABCDGDA$. Deoarece muchia DG este parcursă succesiv, în cele două sensuri ale sale (ca și cum ne-am fi rătăcit în drumul pe graf!), simplificăm circuitul anterior și spunem că el este echivalent cu circuitul $ABCD A$.

Așadar, într-un circuit, ștergem o muchie atunci când este parcursă succesiv, în sensuri diferite, pentru a obține un circuit echivalent cu cel inițial.

Definim operația de „lipire” (concatenare, continuare) a circuitelor cu originea și extremitatea în A , astfel: circuitul \mathcal{C}_1 concatenat cu circuitul \mathcal{C}_2 înseamnă circuitul $\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_2$, obținut prin parcurgerea lui \mathcal{C}_1 , urmată de parcurgerea lui \mathcal{C}_2 .



De exemplu, dacă
 $\mathcal{C}_1 = ADGFCBA$, iar
 $\mathcal{C}_2 = ABEFCDA$, atunci

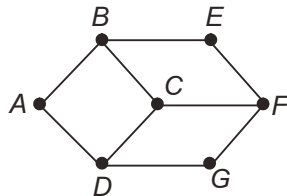
$$\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_2 = \underbrace{ADGFCB}_{\mathcal{C}_1} \underbrace{A}_{A} \underbrace{BEFCDA}_{\mathcal{C}_2} =$$

$$= ADGFCBEFCDA$$

Este ușor de verificat că operația de lipire a circuitelor este asociativă.

Observăm în plus că „circuitul” nul \mathcal{N} (adică circuitul de lungime 0, în care, de fapt, nu plecăm din nodul A) este element neutru pentru operația de lipire a circuitelor.

Orice circuit are un invers față de operația de lipire. De exemplu, inversul circuitului $\mathcal{C} = ABEFCBA$ este circuitul $\mathcal{C}^{-1} = ABCFEBA$:



$$\mathcal{C} \circ \mathcal{C}^{-1} = \underbrace{ABEFCB}_{\mathcal{C}} \underbrace{A}_{A} \underbrace{BCFEBA}_{\mathcal{C}^{-1}} = ABEFCBCFEBA = \dots = ABA = \mathcal{N}.$$

Toate afirmațiile și verificările anterioare ne arată că mulțimea circuitelor unui graf G având originea și extremitatea în nodul A formează un grup față de operația de concatenare a circuitelor. Prin tradiție, acest grup este notat $\pi(G; A)$.

6 Simplifică circuitul $ABCFGFEBCBA$, ștergând o muchie atunci când este parcursă succesiv în cele două sensuri. Putem oare șterge muchia BC din acest circuit?

7 Pentru circuitele din exemplul alăturat, calculează $\mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_1$, apoi $\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_1$.

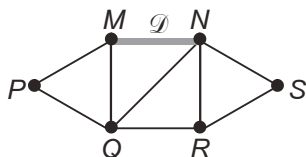
8 Verifică egalitatea $\mathcal{C}^{-1} \circ \mathcal{C} = \mathcal{N}$. Cum crezi că a fost obținut circuitul \mathcal{C}^{-1} , pornind de la \mathcal{C} ?

9 Fie G un graf care nu este graf arbore. Demonstrează că grupul circuitelor cu originea într-un nod fixat al grafului G este grup necomutativ.

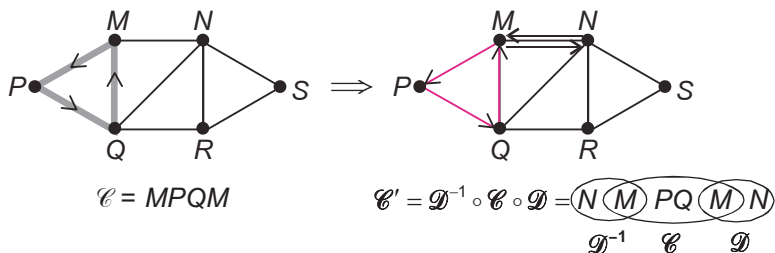
Să analizăm!

Fie M și N două noduri ale grafului conex G .

Dacă fixăm drumul \mathcal{D} , cu originea în M și extremitatea în N , avem o modalitate naturală să transformăm circuitele cu originea și extremitatea în M , în circuite cu originea și extremitatea în N .



De exemplu, pentru graful G din figură și drumul \mathcal{D} marcat pe desen, transformăm circuitele astfel:



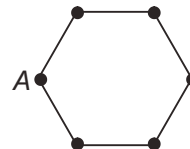
10 Alege un alt drum \mathcal{D} între M și N și explică modul în care circuitul \mathcal{C} se transformă într-un circuit din $\pi(G; N)$.

În acest mod, grupul $\pi(G; M)$ se identifică cu grupul $\pi(G; N)$. Deci grupul π nu depinde de nodul fixat; spunem că acest grup este un invariant al grafului. π se numește grupul cicililor grafului G .

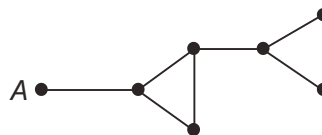
Exerciții și probleme

1. Fie $n \in \mathbb{Z}$ un număr întreg și $\mathcal{M}_n = \{k \cdot n \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, \dots\}$ mulțimea multiplilor întregi ai lui n . Arată că \mathcal{M}_n este grup în raport cu adunarea.
2. Arată că mulțimea numerelor reale pozitive este grup în raport cu înmulțirea.
3. Explică de ce adunarea numerelor pozitive nu admite element neutru.
4. Studiază proprietățile adunării pe mulțimea $[0, \infty)$.
5. Stabilește dacă ridicarea la putere admite element neutru în mulțimea \mathbb{N}^* .
6. Pentru $x, y \in \mathbb{Z}$ definim $x \circ y = x + y - xy$. Studiază proprietățile acestei operații.
7. Desenează două cosițe cu 3 fire A și B și determină apoi elementele $A \circ B$ și $B \circ A$ din grupul cosițelor. Precizează dacă $A \circ B = B \circ A$.
8. Desenează o cosiță cu 4 fire și determină inversa acesteia, în grupul cosițelor.

9. Pentru graful G din figura de mai jos, arată că elementele din $\pi(G; A)$ sunt perfect caracterizate de numere întregi, adică oricărui element din $\pi(G; A)$ i se asociază în mod unic un element din \mathbb{Z} și reciproc.



10. Descrie grupul $\pi(G; A)$ pentru graful din imagine.



11. a) Fie R_O mulțimea rotațiilor în jurul punctului O în sensul în care se mișcă acele ceasului. Demonstrează că R_O este un grup față de compunerea rotațiilor.
b) Determină inversa rotației cu 60° , în grupul (R_O, \circ) .
12. Demonstrează că orice grup cu patru elemente este comutativ.

Am reușit...?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...

- ◆ să recunosc structuri algebrice care sunt grupuri
- ◆ să determin proprietăți ale unei structuri algebrice date
- ◆ să utilizez proprietățile unor grupuri în probleme diverse
- ◆ să demonstrez proprietăți ale unor grupuri?

Test de verificare

- Din lista următoare de mulțimi înzestrate cu operații algebrice, încercuiește-le pe cele care determină un grup. $(\mathbb{N}, +)$; (\mathbb{N}, \cdot) ; $(\mathbb{Z}, +)$; (\mathbb{Z}, \cdot) ; (\mathbb{Z}^*, \cdot) ; $(\mathbb{R}, +)$; (\mathbb{R}, \cdot) ; (\mathbb{R}^*, \cdot) ; $(\mathbb{N}, +, \cdot)$.
- Fie T mulțimea numerelor raționale care se pot reprezenta ca fracții cu numitorul putere a lui 3:
$$T = \left\{ \frac{m}{3^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$
. Identifică ce structuri algebrice definesc pe T operațiile uzuale de adunare și de înmulțire.
- Compară modul de rezolvare a ecuațiilor $x + a = b$ în \mathbb{Z} , respectiv $x \cdot a = b$ în \mathbb{Q}^* , apoi precizează cum se rezolvă ecuația $X \circ A = B$ în grupul cosițelor cu trei fire. Verifică pe un exemplu algoritmul găsit.
- Pe mulțimea \mathbb{N} a numerelor naturale definim operația $x \square y =$ cel mai mare divizor comun al numerelor x și y .
 - Calculează $6 \square 8$ și $10 \square 0$.
 - Exprimă, folosind operația dată, următoarea proprietate: cel mai mare divizor comun al numerelor naturale a, b, c, d se poate calcula „din aproape în aproape”, adică se înlocuiesc primele două numere cu cel mai mare divizor comun al lor și se continuă în același mod.
- Fie E o mulțime nevidă. În monoidul $(\mathcal{P}(E), \cap)$, considerăm ecuația $X \cap A = B$. Deoarece $A \cap A = A$, deducem că ecuația are soluție dacă și numai dacă $B \subset A$. Folosește același raționament pentru a studia ecuația $Y \cup A = B$ în monoidul $(\mathcal{P}(E), \cup)$.
- Fie $(G, *)$ un grup în care are loc proprietatea: $x^2 = e$, pentru orice $x \in G$. Demonstrează că $(G, *)$ este un grup comutativ.
- Pe mulțimea numerelor întregi, definim o nouă operație algebrică, descrisă prin: $a \circ b = ab - a - b - 2$.
 - Arată că operația „ \circ ” este asociativă.
 - Verifică dacă numărul 2 este element neutru pentru \circ .
 - Determină toate elementele inversabile din (\mathbb{Z}, \circ) .
 - Este (\mathbb{Z}, \circ) un grup?

Lectură

Printre primele cercetări care au dus la dezvoltarea teoriei grupurilor s-au numărat lucrările despre grupuri de substituții (permutări) ale unei mulțimi finite M : o substituție a lui M este o funcție care „schimbă” între ele elementele acestei mulțimi. Proprietățile fundamentale ale substituțiilor au fost analizate de către matematicianul francez Augustin Louis Cauchy (1789-1857).

De o deosebită importanță sunt contribuțiile lui Evariste Galois, cel care a utilizat primul termenul de „grup” (1830). Galois a pus în evidență legătura strânsă dintre teoria ecuațiilor algebrice și teoria grupurilor de substituții, arătând că fiecărei astfel de ecuații îi corespunde un grup, care conține informații despre proprietățile esențiale ale ecuației. În afară de teoria ecuațiilor algebrice, alte domenii ale matematicii care au stimulat dezvoltarea teoriei grupurilor au fost teoria numerelor și geometria.



Evariste Galois
(1811-1832)

Unitatea de învățare 7

Test inițial de autoevaluare

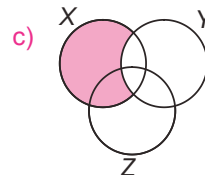
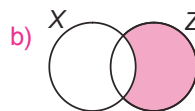
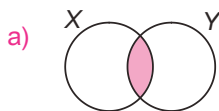
Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Calcul rapid

- Efectuează:
a) $998 \cdot 15 + 2 \cdot 15$ b) $1002 \cdot 34 - 68$ c) $25 \cdot 417 \cdot 4$
- Calculează:
a) $\frac{1+11+111+1111}{2+22+222+2222}$ b) $1 + 2 + 3 - 4 + \dots + 99 - 100$.

Operații cu mulțimi

- Dacă $A = \{1; 2; 3\}$ și $B = \{2; 4; 5; 6\}$, calculează:
a) $A \cap B$; b) $A \cup B$; c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$.
- Scrie patru submulțimi ale mulțimii $A = \{2; 4; 6\}$.
- Exprimă mulțimile evidențiate prin culoare, în funcție de mulțimile X , Y și Z .



Mulțimi de numere

- Subliniază numerele raționale din lista următoare:
 $3; 0,25; -\frac{1}{7}; \sqrt{2}; \sqrt{9}; 2\sqrt{5} - \sqrt{20}; 0; \sqrt{3}$.
- Scrie un număr rațional cuprins între $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$.
- Notăm $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Precizează care dintre următoarele numere aparțin lui $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$:
 $-3 + 0,5\sqrt{2}; \sqrt{2} - 1; \sqrt{8}; \sqrt{18} + \sqrt{50} + 3; 4; \sqrt{3} + 1$.

Aproximări

- Aproximează prin lipsă la ordinul sutimilor numerele:
 $0,(5); \frac{1}{7}; \sqrt{2}; 3,21$.
- Calculează partea întregă a numerelor:
 $3,72; -2,84; \sqrt{3}; \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
- Fie a un număr real pozitiv, care aproximează numărul $\sqrt{2}$. Arată că $\frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$ este o aproximare mai bună pentru $\sqrt{2}$.
- Precizează primele trei cifre după virgulă ale sumei $x + y$, dacă $x = 3,141618\dots$ și $y = 1,26897\dots$. Explică rezultatul obținut.

Proprietăți ale operațiilor algebrice

Ne amintim și explorăm!

Pe mulțimile de numere \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} am definit două operații algebrice elementare: adunarea și înmulțirea. De regulă, nu mai acordăm prea mare atenție acestor operații, deoarece lucrăm cu ele încă din clasele primare și ne-am obișnuit să folosim, uneori fără să ne dăm seama, proprietățile lor. De exemplu, atunci când avem de calculat suma $214 + 193$, ni se pare evident că putem aranja calculele în oricare din următoarele moduri:

$$214 + \frac{183}{397} \quad \text{sau} \quad \frac{214}{397} + \frac{183}{397} \quad \text{sau} \quad \frac{10^2 + 8 \cdot 10 + 3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 4}{3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 7}$$

Am definit însă și alte operații algebrice, cum ar fi: reuniunea, intersecția sau diferența mulțimilor; adunarea sau înmulțirea matricelor; conjuncția sau disjuncția propozițiilor. Pentru a înțelege aceste operații, ale căror proprietăți nu ne sunt încă familiare, este util să comparăm proprietățile acelor operații pe care le cunoaștem mai bine.

◆ Ce proprietăți au adunarea și înmulțirea numerelor?

Să analizăm!

Legile de compoziție pot avea diferite proprietăți. Spre exemplu, operațiile de adunare și înmulțire verifică pe mulțimile \mathbb{N} , \mathbb{Q} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} proprietățile prezentate în tabelul de mai jos.

Operație	Mulțime	\mathbb{N}	\mathbb{Z}	\mathbb{Q}	\mathbb{R}
Adunarea	Asociativitate	✓	✓	✓	✓
	Element neutru (0)	✓	✓	✓	✓
	Existența opusului ($-a$)		✓	✓	✓
	Comutativitate	✓	✓	✓	✓
Înmulțirea	Asociativitate	✓	✓	✓	✓
	Element neutru (1)	✓	✓	✓	✓
	Existența inversului ($\frac{1}{a}$, $a \neq 0$)			✓	✓
	Comutativitate	✓	✓	✓	✓
Distributivitatea înmulțirii față de adunare		✓	✓	✓	✓

Analizând tabelul, observăm că adunarea și înmulțirea au unele proprietăți comune, atunci când sunt definite pe cele patru mulțimi de numere. Diferențe apare doar în ceea ce privește existența opusului și a inversului.

Mai precis: în timp ce unele numere naturale nu au opus în \mathbb{N} , orice număr întreg, rațional sau real are un opus în mulțimea respectivă. Deosebiri de aceeași natură apar și pentru înmulțire: în timp ce unele numere naturale sau întregi nu au invers în \mathbb{N} , respectiv în \mathbb{Z} , chiar dacă sunt numere nenule, orice număr rațional sau real nenul are un invers în \mathbb{Q} , respectiv în \mathbb{R} .

❶ Stabilește dacă scăderea este lege de compoziție pe \mathbb{Z} .

❷ Explică de ce în unele căsuțe ale tabelului alăturat nu apare semnul „✓”.

⚠ Tocmai inexistența opusului sau a inversului în una dintre mulțimile de numere a generat apariția unor mulțimi mai cuprinzătoare.

❸ Precizează: un număr natural care nu are opus în \mathbb{N} ; un număr întreg nenul, care are invers în \mathbb{Z} .

◆ Ce legături există între adunarea și înmulțirea numerelor?

O analiză detaliată a modului în care am definit adunarea și înmulțirea numerelor poate fi utilă în înțelegerea legăturilor dintre aceste operații.

Să analizăm!

Pe mulțimea numerelor naturale, înmulțirea este definită ca o *adunare repetată*: în loc de $3 + 3 + 3 + 3 + 3$, notăm pe scurt $3 \cdot 5$.

Asociativitatea adunării pe \mathbb{N} determină astfel distributivitatea înmulțirii față de adunarea pe \mathbb{N} . De exemplu:

$$3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = \underbrace{(3+3)}_{2 \text{ termeni}} + \underbrace{(3+3+3+3)}_{4 \text{ termeni}} = \underbrace{3+3+3+3+3+3}_{6 \text{ termeni}} = 3 \cdot 6,$$

adică $3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 3 \cdot (2 + 4)$.

Pe mulțimea numerelor întregi, putem defini de asemenea înmulțirea ca o adunare repetată, atunci când unul dintre factori este număr natural. Pentru a defini însă produsul $(-3) \cdot (-4)$, folosim următoarea analogie: „chiar dacă nu știu cum să definesc înmulțirea pe \mathbb{Z} , cer doar ca aceasta să rămână distributivă față de adunare”.

De aceea, $(-3) \cdot (-4)$ se calculează astfel:

Știm: $(-3) \cdot 0 = 0$ și $(-3) \cdot 4 = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12$

Folosim distributivitatea: $(-3) \cdot [4 + (-4)] = (-3) \cdot 4 + (-3) \cdot (-4)$

Deci: $(-3) \cdot (-4) = 12$, deoarece $0 = -12 + 12$

Aceași analogie poate fi folosită pentru a defini înmulțirea pe \mathbb{Q} .

De exemplu, $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}$ se calculează astfel:

Știm: $\frac{4}{5} \cdot 1 = \frac{4}{5}$

Folosim distributivitatea: $\frac{4}{5} \cdot 1 = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}$

Deci: $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$, deoarece $\frac{4}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{4+4+4}{15} = \frac{4}{5}$

Întrucât înmulțirea pe \mathbb{N} se definește prin adunare repetată, în lista de proprietăți ale înmulțirii este necesar să apară o proprietate care leagă înmulțirea de adunare. Aceasta ne permite să extindem înmulțirea din \mathbb{N} , la alte mulțimi de numere.

Așadar, în definirea înmulțirii, ca operație algebrică pe \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} sau \mathbb{R} este esențială distributivitatea înmulțirii față de adunare.

Exerciții și probleme

1. Folosește definiția înmulțirii pe \mathbb{N} ca adunare repetată, pentru a justifica egalitatea: $(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5)$.
2. Justifică regula semnelor la înmulțirea în \mathbb{Z} .
3. Calculează și justifică rezultatul obținut:
 - a) $2006 \cdot 2008 \cdot 2009 \cdot 2007 - 2009 \cdot 2008 \cdot 2007 \cdot 2006$;
 - b) $120 \cdot 140 \cdot 160 \cdot 180 - 16 \cdot 60 \cdot 70 \cdot 80 \cdot 90$.
4. Stabilește dacă adunarea numerelor raționale este distributivă față de înmulțirea acestora.
5. Studiază proprietățile operației algebrice de împărțire a numerelor raționale nenule.
6. Pe mulțimea \mathbb{R} definim legea de compoziție „*” prin formula $x * y = 2x + 2y$.
 - a) Calculează $1 * 3$.
 - b) Este * o lege de compoziție asociativă? Dar comutativă?
 - c) Calculează $4 \cdot (1 * 3)$ și $4 * 12$. Ce observi?
 - d) Demonstrează că înmulțirea numerelor reale este distributivă față de operația „*”.



Analizăm și generalizăm!

◆ Ce este un inel?

Să analizăm!

Să privim din nou tabelul cu proprietățile operațiilor cu numere. Observăm că pe fiecare dintre mulțimile \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} sunt definite două operații (adunarea și înmulțirea). Comparând între ele proprietățile acestor operații, între \mathbb{N} , pe de o parte și \mathbb{Z} , (sau \mathbb{Q} , sau \mathbb{R}) pe de altă parte, apare o diferență, și anume: unele dintre elementele lui \mathbb{N} nu au opus.

Pe mulțimea numerelor întregi, cele două operații au următoarele proprietăți:

i) $(\mathbb{Z}, +)$ este grup comutativ, adică:

- „+” este operație asociativă: $(x + y) + z = x + (y + z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$;
- „+” este operație comutativă: $x + y = y + x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$.
- „+” admite element neutru: $0 + x = x + 0 = x$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$;
- orice număr întreg are un opus: $x + (-x) = (-x) + x = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$.

ii) (\mathbb{Z}, \cdot) este monoid, adică:

- „·” este operație asociativă: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$;
- „·” admite element neutru: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$.

iii) Înmulțirea este distributivă față de adunare:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x, \quad \text{pentru orice } x, y, z \in \mathbb{Z}.$$

Aceste proprietăți sunt verificate de adunare și înmulțire, și atunci când le considerăm operații algebrice definite pe \mathbb{Q} sau pe \mathbb{R} .

Spunem că adunarea și înmulțirea definesc pe fiecare dintre mulțimile \mathbb{Z} , \mathbb{Q} sau \mathbb{R} o structură algebrică, denumită *inel*.

În general

Fie A o mulțime nevidă, pe care am definit două operații algebrice, notate „+” și „·”. Spunem că $(A, +, \cdot)$ este un *inel* dacă:

- (i) $(A, +)$ este grup comutativ
- (ii) (A, \cdot) este monoid
- (iii) legea de compoziție „·” este distributivă față de „+”

Un inel $(A, +, \cdot)$ se numește *comutativ* dacă legea de compoziție „·” este comutativă.

1 Verifică dacă mulțimea numerelor impare formează un inel cu adunarea și înmulțirea.

◆ Ce alte exemple de inele cunoaștem deja?

Așa cum este de așteptat, studiul inelelor, ca structuri algebrice, a pornit de la exemplele cele mai simple și anume de la inelele $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Noțiunea s-a dovedit utilă atunci când s-a constatat că și alte operații algebrice definesc o structură de inel.

2 Arată că $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sunt inele comutative.

Exemplul 1: Inelul matricelor pătratice

Pe mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, a matricelor pătratice de ordinul n cu elemente numere reale, am definit operațiile de adunare și de înmulțire a matricelor. Am demonstrat deja că:

i) adunarea matricelor este operație algebrică asociativă și comutativă:

• matricea $O_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ este element neutru pentru adunarea matricelor.

• orice matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ are ca opus matricea $-A = (-a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

ii) • înmulțirea matricelor este operație algebrică asociativă;

• matricea $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ este element neutru pentru înmulțirea matricelor

iii) înmulțirea este distributivă față de adunare.

Toate aceste proprietăți arată că $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ este un inel.

Considerăm matricele $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), n \geq 2.$

Observăm că $X \cdot Y \neq Y \cdot X$, ceea ce arată că inelul $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ nu este inel comutativ.

Exemplul 2: Inelul numerelor cu reprezentare zecimală finită

Știm că orice număr rațional are o reprezentare zecimală care poate fi: cu număr finit de zecimale nenule, periodică simplă sau periodică mixtă.

Să notăm \mathbb{Q}_{fin} mulțimea acelor numere raționale care au, în reprezentare zecimală, un număr finit de cifre nenule.

Astfel, 0,25, -13 și $\frac{7}{8}$ sunt elemente ale mulțimii \mathbb{Q}_{fin} , dar 0,(3) și $\frac{1}{7}$ nu se găsesc în această mulțime.

Observăm că adunarea și înmulțirea sunt operații algebrice pe \mathbb{Q}_{fin} .

De exemplu, pentru numerele 2,15 și 3,2 din \mathbb{Q}_{fin} avem:

$$2,15 + 3,2 = 5,35 \in \mathbb{Q}_{\text{fin}},$$

$$2,15 \cdot 3,2 = 6,88 \in \mathbb{Q}_{\text{fin}}.$$

Toate proprietățile adunării și înmulțirii se păstrează atunci când, în loc să operăm cu numere raționale alese la întâmplare, lucrăm doar cu numere zecimale care au un număr finit de zecimale nenule. De aceea, $(\mathbb{Q}_{\text{fin}}, +, \cdot)$ este un inel comutativ.

◆ Ce este un corp?

Să comparăm!

Considerăm inelele $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Vrem să precizăm, în fiecare dintre aceste inele, elementele inversabile.

În inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, numerele 1 și -1 sunt inversabile față de înmulțire, deoarece $1 \cdot 1 = 1$ și $(-1) \cdot (-1) = 1$. Orice alt număr întreg (diferit de 1 și de -1) nu mai este inversabil; de exemplu, 4 nu este inversabil pentru că nu există un număr întreg t astfel încât $4 \cdot t = 1$.

Spre deosebire de inelul \mathbb{Z} , orice număr nenul din \mathbb{Q} sau din \mathbb{R} este inversabil față de înmulțire. De exemplu, inversul în \mathbb{Q} al lui $\frac{3}{7}$ este $\frac{7}{3}$, iar inversul în \mathbb{R} al lui $\sqrt{2} + 1$ este $\sqrt{2} - 1$, deoarece:

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3} = 1$$

$$(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) = 1.$$

Această proprietate a elementelor nenule din \mathbb{Q} și \mathbb{R} definește o nouă structură algebrică: inelele $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sunt corpuri.

În general

Fie A o mulțime nevidă pe care am definit operațiile algebrice „+” și „·”, împreună cu care A formează un inel.

Spunem că inelul $(A, +, \cdot)$ este un *corp* dacă orice element nenul din A este inversabil față de operația „·”.

3 Scrie matricele X și Y din exemplul alăturat în cazurile $n = 2$ și $n = 3$. Verifică în aceste cazuri că $X \cdot Y \neq Y \cdot X$.

! Numerele reale se aproximează, de obicei, cu numere din \mathbb{Q}_{fin} .

4 Precizează trei aproximări diferite ale numerelor: $\sqrt{2}$ și π .

! Dacă a și b sunt numere raționale care au m , respectiv n zecimale după virgulă, atunci $a \cdot b$ are cel mult $m + n$ zecimale după virgulă.

5 Calculează $0,517 + 1,24$ și $0,517 \cdot 1,24$.

6 Calculează $(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})$. Care este inversul în \mathbb{R} al numărului $\sqrt{3} + \sqrt{5}$? Propune un exercițiu asemănător.

! Dacă $(A, +, \cdot)$ este un inel, iar 0 este elementul neutru pentru operația „+”, atunci element nenul din A înseamnă element diferit de 0.

7 Ce înseamnă element nenul în inelul $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$?

Să demonstrăm!

Inelul $(A, +, \cdot)$ este un corp dacă și numai dacă (A^*, \cdot) este un grup, unde $A^* = A \setminus \{0\}$.

Presupunem mai întâi că $(A, +, \cdot)$ este un corp și arătăm că (A^*, \cdot) este grup. Trebuie să demonstrăm doar că înmulțirea este lege internă pe A^* ...

Fie $x, y \in A^*$; presupunem prin absurd că $x \cdot y \notin A^*$, deci că $x \cdot y = 0$.

Înmulțind la stânga cu inversul lui x , obținem:

$x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0$, deci $y = 0$... Contradicția obținută arată că $x \cdot y \in A^*$.

Reciproc, dacă (A^*, \cdot) este un grup, atunci orice element nenul din A este inversabil față de înmulțire. Deci $(A, +, \cdot)$ este corp.

◆ Ce alte corpuri există?

Studiul corpurilor, ca structuri algebrice, a pornit de la corpurile $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Noțiunea s-a dovedit utilă atunci când s-a constatat că există și alte exemple de corpuri.

Exemplul 1

Fie $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Astfel, $0, 5 + 2\sqrt{2}, -1 + 0, 3\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, dar $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Adunarea și înmulțirea definesc pe $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ o structură de inel comutativ. De exemplu:

• Pentru $2 - 3\sqrt{2}$ și $4 + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ avem $(2 - 3\sqrt{2}) + (4 + \sqrt{2})$;

$(2 - 3\sqrt{2}) \cdot (4 + \sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

• 0 este element neutru pentru adunare, 1 este element neutru pentru înmulțire, iar $0, 1 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$;

• opusul lui $3 - 1,7\sqrt{2}$ este $-3 + 1,7\sqrt{2}$, iar numerele $3 - 1,7\sqrt{2}$ și $-3 + 1,7\sqrt{2}$ sunt în $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Să considerăm numerele nenule $2 - 3\sqrt{2}$ și $4 + \sqrt{2}$. Observăm că

$$\frac{1}{2 - 3\sqrt{2}} = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{(2 - 3\sqrt{2})(2 + 3\sqrt{2})} = -\frac{1}{7} - \frac{3}{14}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

$$\frac{1}{4 + \sqrt{2}} = \frac{4 - \sqrt{2}}{(4 + \sqrt{2})(4 - \sqrt{2})} = \frac{1}{7} - \frac{1}{14}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

Deoarece $(2 - 3\sqrt{2}) \cdot \left(-\frac{1}{7} - \frac{3}{14}\sqrt{2}\right) = 1$ și $(4 + \sqrt{2}) \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14}\sqrt{2}\right) = 1$, deducem că numerele $2 - 3\sqrt{2}$ și $4 + \sqrt{2}$ sunt inversabile în $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Aceeași concluzie are loc pentru orice număr nenul din $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$: inversul lui

$a + b\sqrt{2}$ ($a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0$ sau $b \neq 0$) este $\frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}$.

De aceea, $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ este un corp comutativ.

Exemplul 2

Fie $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Astfel, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in C$, dar $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \notin C$.

Adunarea și înmulțirea definesc pe C o structură de inel comutativ.

8 Enunță toate proprietățile ce ar trebui verificate pentru a arăta că „+” și „·” definesc o structură de inel pe $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

9 În $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, calculează opusul și inversul numărului $4 + 5\sqrt{2}$.

▲ În $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, folosim raționalizarea pentru a calcula inversul unui număr nenul.

De exemplu:

• Pentru $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \in C$ avem $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \in C$;

• $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sunt elemente neutre pentru adunarea, respectiv pentru înmulțirea matricelor, iar $O; I \in C$;

• Opusul lui $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ este $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, iar matricele $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ sunt în C .

Să considerăm matricea nenulă $X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Atunci matricea $\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$ este

inversa lui X în mulțimea C . Mai general, dacă $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ (cu $a \neq 0$ sau $b \neq 0$),

inversa lui X față de înmulțirea matricelor este $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} & \frac{-b}{a^2 + b^2} \\ \frac{b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \end{pmatrix}$.

De aceea, $(C, +, \cdot)$ este un corp comutativ.

10 Efectuează calculele din exemplul alăturat.

11 În corpul $(C, +, \cdot)$ calculează opusul și inversul elementului $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exerciții și probleme


- Fie P mulțimea numerelor întregi pare.
 - Subliniază elementele lui P din lista următoare:
12; -7; $\frac{4}{3}$; 0,2; 242; -164; 0.
 - Arată că adunarea și înmulțirea sunt legi interne pe mulțimea P .
 - Este $(P, +, \cdot)$ un inel? Justifică răspunsul.
- Notăm cu A mulțimea acelor numere raționale care se pot scrie ca fracție cu numitorul o putere de 2.
 - Arată că $\frac{21}{6} \in A$ și $\frac{2}{15} \notin A$.
 - Demonstrează că adunarea și înmulțirea sunt operații algebrice pe A .
 - Verifică dacă $(A, +, \cdot)$ este inel comutativ.
 - Demonstrează că 4 este element inversabil în A , dar $\frac{3}{2}$ nu este inversabil în A .
 - Este $(A, +, \cdot)$ un corp?
- Fie B mulțimea acelor numere raționale care se pot scrie ca fracție cu numitorul impar.
 - Arată că $-5 \in B$, $\frac{14}{6} \in B$, dar $0,125 \notin B$.
 - Demonstrează că adunarea și înmulțirea sunt operații algebrice pe B .
 - Verifică dacă $(B, +, \cdot)$ este inel comutativ.
 - Demonstrează că -5 este inversabil în B , dar $\frac{2}{3}$ nu este inversabil în B .
 - Este $(B, +, \cdot)$ un corp?
- Notăm $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Demonstrează că $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ este un corp.
- Notăm cu T mulțimea matricelor „triunghiulare”, adică mulțimea matricelor de forma $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$, cu $x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Scrie o matrice din T și o altă matrice care nu este element al lui T .
 - Arată că adunarea și înmulțirea matricelor sunt operații algebrice pe T .
 - Demonstrează că $(T, +, \cdot)$ este un inel necomutativ.
 - Observă că $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Justifică apoi că $(T, +, \cdot)$ nu este corp.
- Arată că mulțimea $A_{10} = \left\{ \frac{m}{10^p} \mid m \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N} \right\}$ este inel în raport cu adunarea și înmulțirea.

Structuri algebrice pe mulțimea părților unei mulțimi



Aplicăm și dezvoltăm!

Notațiile folosite pentru diferite operații algebrice sunt convenții general acceptate. Uneori însă, folosim același simbol pentru legi de compoziție foarte diferite. De exemplu, simbolul „+” (plus) este folosit pentru:

- adunarea numerelor: $2,13 + 0,4 = 2,43$
- adunarea matricelor: $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
- adunarea vectorilor: 

O situație oarecum asemănătoare este întâlnită și în definirea structurilor algebrice. De exemplu, am definit inelul ca fiind o mulțime nevidă, pe care sunt date două operații algebrice, notate „+” și „·”, ce îndeplinesc câteva proprietăți specifice. Notațiile „+” și „·” folosite în definiție sunt însă doar notații convenționale. Nu înseamnă că într-un inel prima operație este neapărat adunare și a doua este înmulțire. Există inele în care operațiile sunt foarte diferite de acestea două.

Să demonstrăm!

Fie $M = \{1; 2; 3\}$ și P mulțimea părților lui M .
Pe mulțimea P definim operațiile algebrice: „ Δ ” (diferența simetrică) și „ \cap ” (intersecția). Vrem să demonstrăm că (A, Δ, \cap) este un inel comutativ.

- Să facem mai întâi câteva precizări.
 P este o mulțime de mulțimi. De exemplu:
 $\{1; 2\} \in P, \emptyset \in P, \{3\} \in P$, dar $3 \notin P$ și $\{1; 5\} \notin P$.
Pe mulțimea P operațiile acționează astfel:
 $\{1; 2\} \Delta \{2; 3\} = (\{1; 2\} \setminus \{2; 3\}) \cup (\{2; 3\} \setminus \{1; 2\}) = \{1; 3\}$
 $\{1; 2\} \cap \{2; 3\} = \{2\}$.

Pentru a înțelege ce avem de demonstrat, vom scrie toate proprietățile unui inel (în care folosim simbolurile „+” și „·” pentru cele două operații) și vom transcrie aceste proprietăți, înlocuind „+” cu „ Δ ” și „·” cu „ \cap ”.

$(A, +, \cdot)$ este inel comutativ dacă:

- $(A, +)$ este grup comutativ, adică:
 - $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(\forall)x, y, z$
 - $x + y = y + x$, $(\forall)x, y$
 - $(\exists)e$, $(\forall)x : x + e = x$
 - $(\forall)x$, $(\exists)x' : x + x' = e$
- (A, \cdot) este monoid, adică:
 - $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $(\forall)x, y, z$
 - $x \cdot y = y \cdot x$, $(\forall)x, y$
 - $(\exists)u$, $(\forall)x : x \cdot u = x$
- „ \cdot ” este distributivă față de „+”:
 $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $(\forall)x, y, z$

Pentru a demonstra că (P, Δ, \cap) este inel comutativ, trebuie să verificăm dacă:

- (P, Δ) este grup comutativ, adică:
 - $(X \Delta Y) \Delta Z = X \Delta (Y \Delta Z)$, $(\forall)X, Y, Z$
 - $X \Delta Y = Y \Delta X$, $(\forall)X, Y$
 - $(\exists)E$, $(\forall)X : X \Delta E = X$
 - $(\forall)X$, $(\exists)X' : X \Delta X' = E$
- (P, \cap) este monoid, adică:
 - $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$, $(\forall)X, Y, Z$
 - $X \cap Y = Y \cap X$, $(\forall)X, Y$
 - $(\exists)U$, $(\forall)X : X \cap U = X$
- „ \cap ” este distributivă față de „ Δ ”:
 $X \cap (Y \Delta Z) = (X \cap Y) \Delta (X \cap Z)$, $(\forall)X, Y, Z$.

1 Calculează $2,13 \cdot 0,4$ și

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Reprezintă simbolul „·”, folosit mai sus, o singură operație algebrică?

▲ $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ se numește diferența simetrică a mulțimilor X și Y .

2 Mulțimea P are 8 elemente. Explicitează toate elementele lui P .

3 Calculează $\emptyset \Delta \{1; 3\}$ și $\emptyset \cap \{1; 3\}$.

4 Denumeste fiecare dintre proprietățile din definiția inelului.

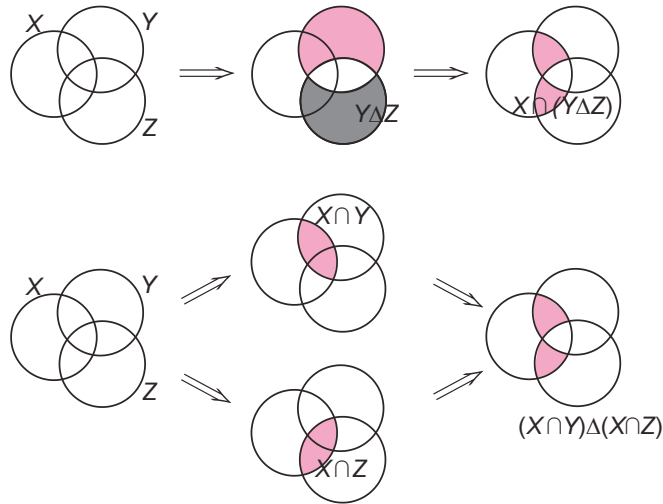
5 Definiția elementului neutru e al unui grup $(A, +)$ este următoarea: pentru orice $x \in A$, $x + e = x$ și $e + x = x$. De ce crezi că ultima egalitate nu a mai fost scrisă la i)?

6 Compară egalitățile de la iii). Una din ele folosește mai puțin paranteze. De ce crezi că au fost acestea neglijate?

Este ușor de văzut că $E = \emptyset$ și $U = \{1; 2; 3\}$ sunt elemente neutre pentru operațiile „ Δ ”, respectiv „ \cap ”. Toate celelalte proprietăți pot fi justificate folosind definițiile sau diagrame Venn-Euler.

7 Folosește diagrame Venn-Euler pentru a demonstra că, pentru orice trei mulțimi X, Y, Z , avem $(X \Delta Y) \Delta Z = X \Delta (Y \Delta Z)$.

De exemplu, egalitatea $X \cap (Y \Delta Z) = (X \cap Y) \Delta (X \cap Z)$ este justificată prin diagramele următoare:



8 Notează elementele lui P cu X_1, X_2, \dots, X_8 . Alcătuieste tablele celor două operații definite pe mulțimea P .

Deducem că (P, Δ, \cap) este un inel comutativ.

Exerciții și probleme

1. Fie A mulțimea numerelor raționale care pot fi reprezentate prin fracții cu numitorul impar. Astfel, $\frac{16}{12} \in A$, deoarece $\frac{4}{3}$ este o altă scriere a numărului $\frac{16}{12}$, și această fracție are numitorul impar.

 - Demonstrează că adunarea și înmulțirea sunt legi de compoziție pe A .
 - Arată că $(A, +, \cdot)$ este inel comutativ.
 - Demonstrează că $\frac{10}{6}$ este element inversabil în A , iar $\frac{10}{3}$ nu este inversabil. Este $(A, +, \cdot)$ un corp?
 - Caracterizează toate elementele inversabile din inelul A .
 - Arată că suma a două elemente neinversabile din A rămâne element neinversabil în A . Are inelul \mathbb{Z} o proprietate analogă?
2. Pe mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ definim operațiile „+” și „ \cdot ” astfel:

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$$

$$(a; b) \cdot (c; d) = (ac; bd)$$
 - Dă trei exemple de elemente din $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$.
 - Arată că $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}, +, \cdot)$ este inel comutativ.
3. Considerăm mulțimea M a matricelor de forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ cu } x \in \mathbb{R}.$$
 - Scrive o matrice din M și o matrice care nu este în M .
 - Arată că înmulțirea matricelor este o operație algebrică pe M .
 - Demonstrează că (M, \cdot) este grup comutativ.
4. Pe mulțimea $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definim legile de compoziție:

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$$

$$(a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc).$$
 - Efectuează $(1; 0) + (0; 1)$; $(1; 0) \cdot (0; 1)$; $(0; 1) + (0; -1)$; $(0; 1) \cdot (0; 1)$; $(2; 3) \cdot (2; -3)$.
 - Arată că $(E, +, \cdot)$ este corp comutativ.
5. Fie T mulțimea numerelor raționale care se pot reprezenta ca fracții cu numitorul putere a lui 2:

$$T = \left\{ \frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Identifică ce structură algebrică definesc pe T operațiile uzuale de adunare și de înmulțire.
6. Fie $M = \{1; 2\}$ și P mulțimea părților lui M .

 - Arată că mulțimea P are patru elemente. Scrie explicit aceste elemente.
 - Demonstrează că operațiile „ Δ ” (diferența simetrică) și „ \cap ” (intersecția) determină pe mulțimea P un inel comutativ.
 - Este inelul (P, Δ, \cap) un corp?

7. Notăm cu A mulțimea tuturor funcțiilor numerice (adică funcțiile definite pe \mathbb{R} , cu valori în \mathbb{R}).
- Demonstrează că operațiile de adunare și de înmulțire a funcțiilor definesc pe A o structură de inel comutativ.
 - Este $(A, +, \cdot)$ un corp?
 - Precizează elementele neutre (notate 0 , respectiv 1) din inelul A .
 - Determină două funcții $f, g \in A \setminus \{0\}$ astfel încât $f \cdot g = 0$.

8. Considerăm matricea $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculează X^2 și X^3 , apoi precizează o regulă de calcul pentru X^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Arată că mulțimea $G = \{X^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este grup față de operația de înmulțire a matricelor.

9. Notăm cu S mulțimea submulțimilor finite și nevide ale lui \mathbb{Z} . Pentru $A, B \in S$, definim $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$, $A \cdot B = \{x \cdot y \mid x \in A, y \in B\}$. De exemplu, dacă $A = \{1; 3\}$, $B = \{-1; 1; 2\}$, atunci $A + B = \{0; 2; 3; 4; 5\}$, $A \cdot B = \{-3; -1; 1; 2; 3; 6\}$.
- Arată că „+” și „·” sunt operații algebrice pe S și că $Z = \{0\}$ este element neutru pentru „+”.
 - Determină elementul neutru (notat U) pentru operația „·”.
 - Justifică dacă operația „·” este distributivă față de „+”.
 - Este $(S, +, \cdot)$ un inel?

Am reușit...?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...

- ◆ să identific structuri algebrice prin verificare proprietățile acestora
- ◆ să compar proprietăți algebrice ale unor operații, în scopul identificării unor algoritmi
- ◆ să exprim proprietăți ale operațiilor algebrice?



Test de verificare

- Fie $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ mulțimea numerelor reale care se pot scrie sub forma $m + n\sqrt{2}$, unde $m, n \in \mathbb{Z}$.
 - Demonstrează că adunarea și înmulțirea sunt operații algebrice pe $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
 - Arată că $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ este inel comutativ, care nu este corp.
 - Demonstrează că $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap (0; 0,001) \neq \emptyset$.
- Observă modul de rezolvare a ecuației $2x + 3 = 0$ în \mathbb{R} , apoi rezolvă ecuația $(A \cap X) \Delta B = \emptyset$, unde $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 3\}$ și $X \subset \{1; 2; 3; 4\}$.
- Pe mulțimea \mathbb{Q} a numerelor raționale definim operația algebrică descrisă prin: $x * y = \max\{x; y\}$.
 - Calculează $3 * 7$ și $201 * 3$.
 - Exprimă, folosind operația dată, următoarea proprietate: pentru a determina cel mai mare dintre mai multe numere date, putem face comparații „din aproape în aproape”.

Lectură

Structurile algebrice au apărut și s-au dezvoltat pornind de la concepte geometrice. La baza noțiunii de grup au stat transformările geometrice, vectorii și permutările. Ulterior, prin analogie și generalizare, proprietățile acestor mulțimi au căpătat un caracter abstract, pur algebric.

Procesul de degajare a noțiunilor fundamentale ale algebrei, în spiritul prezentării axiomatice, a durat mai bine de un secol. Totuși, aceste noțiuni nu au apărut din neant: evoluția s-a datorat, în mare măsură, nevoilor practice sau celorlalte ramuri ale matematicii. Babilonienii și, mai târziu, grecii au studiat probleme de algebră, în particular metodele de rezolvare a unor ecuații simple. O contribuție majoră la dezvoltarea algebrei au avut-o, în Evul Mediu, arabii. Ulterior, în perioada Renașterii, matematicienii italieni Leonardo din Pisa (sec. XII) și François Viète (1540-1603) au impus simbolismul actual din algebră. În secolul al XIX-lea, operațiile algebrice și proprietățile lor au început să fie studiate din ce în ce mai mult, conducând la degajarea noțiunilor de grup, inel și corp.

Unitatea de învățare 8

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Alege răspunsurile corecte!

Calcul numeric

- $(-2) \cdot (-3) + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 5 = \dots$
a) 15; b) 1; c) -11; d) -6.
- Dacă $x - 0,3 = 2$, atunci $x = \dots$
a) 0,6; b) 1,7; c) 2,3; d) 3,2.

Proprietăți ale operațiilor algebrice

- Elementul neutru pentru adunarea numerelor întregi este:
a) 0; b) 1; c) -1; d) -2.
- Simetricul lui 4 față de înmulțirea numerelor reale este:
a) -4; b) 1; c) 0; d) 0,25.

Calcul matriceal

Efectuează operațiile:

- $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Determinanți

- Calculează folosind regula lui Sarrus:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

- Dezvoltă după o linie, apoi calculează:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Sisteme de ecuații

- Rezolvă prin metoda Gauss sistemele:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \\ -x - 2y + 4z = 0 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + y + 4z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ 4x - y + 3z = 2 \end{cases}$$

- Aplică formulele lui Cramer și rezolvă sistemele:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x - y = 0 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \end{cases}$$

Matrice și coduri

Observăm și explorăm!

◆ Cum se poate codifica un mesaj?

Radu și Ștefan au inventat un cod prin care își pot transmite diferite „mesaje secrete”. Pentru aceasta, ei au atribuit literelor alfabetului numere consecutive, repetând fiecare număr și alternând semnele + și -, ca în exemplul de mai jos:

A	B	C	D	E	F	...
1	-1	2	-2	3	-3	

În acest mod, frazele au putut fi transformate în șiruri de numere, în care cifra zero semnifică spațiul liber dintre două cuvinte. Astfel, propoziția: „Mergi la cinema?” a fost codificată „7,3, - 9,4,5,0, - 6,1,0,2,5, - 7,3,7,1”.

Din păcate, codul lor a fost aflat și de alți colegi și, de aceea, Radu și Ștefan s-au gândit să folosească încă o „cheie” de codificare.

Pentru aceasta, ei au ales matricea $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și au folosit această „cheie”

și operații cu matrice pentru a codifica și mai mult mesajul:

$$\text{Mergi la cinema?} \rightarrow \boxed{7 \ 3 \ -9 \ 4 \ 5 \ 0 \ -6 \ 1 \ 0 \ 2 \ 5 \ -7 \ 3 \ 7 \ 1} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & -10 & 4 & 3 \\ 12 & -10 & -5 & 11 & 8 \\ 12 & -4 & -6 & 11 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{7 \ 9 \ -10 \ 4 \ 3 \ 12 \ -10 \ -5 \ 11 \ 8 \ 12 \ -4 \ -6 \ 11 \ 6}$$

Acum însă, cei doi băieți au o altă problemă: cum s-ar putea decodifica un mesaj?

Să analizăm!

În codul inventat de Radu și Ștefan, frazele sunt transformate în matrice; astfel, fraza „Mergi la cinema?” se transformă într-o matrice $X \in \mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{R})$, așezând pe linii numerele corespunzătoare literelor.

Mesajul transmis conține însă doar elementele matricei $T = C \cdot X$, unde C este „cheia”, adică matricea 3×3 de mai sus. De aceea, pentru decodificare, trebuie rezolvată ecuația matriceală $C \cdot X = T$ (în care C este „cheia” cunoscută de ambii băieți, T este matricea transmisă, iar matricea X este necunoscuta).

Să comparăm!

$$\begin{aligned} -2,5 + (2,5 + x) &= -2,5 + 7,2 \\ 0 + x &= 4,7 \\ x &= 4,7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,4 \cdot (2,5 \cdot x) &= 0,4 \cdot 7,2 \\ 1 \cdot x &= 2,88 \\ x &= 2,88 \end{aligned}$$

⚠ Pentru simplificare, Radu și Ștefan nu au folosit diacritice și au ignorat literele X și Y (folosite rar în limba română). Astfel, ei au codificat doar 23 de litere.

❶ Ce număr au atribuit Radu și Ștefan literei L? Ce literă corespunde numărului -7?

❷ Codifică mesajul „Cheia este C”, folosind metoda prezentată.

⚠ În transmiterea datelor, s-a folosit mult timp codul Morse. În acest cod, fiecare literă este transformată într-o succesiune de puncte și linii.

❸ Explică modul în care se rezolvă ecuația $3x + 0,4 = 1,6$.

Ecuția $2,5 + x = 7,2$ se rezolvă adunând în ambii membri numărul real $-2,5$.

Ecuția $2,5 \cdot x = 7,2$ se rezolvă înmulțind ambii membri cu numărul real $0,4$.

În cele două exemple de mai sus, am rezolvat două ecuații în mulțimea numerelor reale. În rezolvare, sunt folosite câteva proprietăți comune ale operațiilor de adunare și de înmulțire, și anume:

Asociativitate: pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$ avem:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad | \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Element neutru: pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem:

$$0 + 0 = 0 + a = a \quad | \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

Opus/invers:

dat $a \in \mathbb{R}$, există $-a \in \mathbb{R}$

astfel încât $a + (-a) = (-a) + a = 0$

dat $a \in \mathbb{R}^*$, există $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$

astfel încât $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.

4 Determină: opusul lui 2,5; inversul lui 2,5. Cum verifici dacă ai răspuns corect?

Știm că înmulțirea matricelor pătratice de ordin n este și ea o operație asociativă și că I_n este element neutru la înmulțire. De aceea, pentru a rezolva o ecuație de tipul $C \cdot X = T$, unde C este o matrice pătratică, este necesar să determinăm inversa matricii C .

În general

▲ Dacă B este inversa matricii A , atunci A este inversa lui B .

Spunem că o matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este matrice inversabilă (sau nesară) dacă există o matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Inversa unei matrice A (dacă există!) se notează A^{-1} .

Exerciții și probleme

1. Anca și Elena au propus următorul mod de codificare a unei fraze:

• au atribuit literelor alfabetului numere naturale consecutive:

A	B	C	D	E	...
1	2	3	4	5	...

• au folosit cheia $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

• au transformat fraza dată într-o matrice cu două linii, completând mai întâi prima linie, apoi a doua linie.

• au înmulțit cheia C cu matricea obținută și au scris din nou elementele rezultatului sub forma unui șir de numere.

Cum au codificat cele două fete fraza „Merg la cinema”?

2. Marcel s-a gândit la un mod de codificare a mesajelor în care „cheia” este matricea I_3 , dar Cătălin susține că acest cod este prea simplu. Îi dai dreptate? De ce?

3. Corina susține că inversa matricii $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ este

matricea $B = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. Ce crezi, are dreptate?

4. a) Alex susține că inversa matricii $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ este

matricea $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dar Mihai spune că inversa este

matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. S-ar putea oare ca amândoi băieții

să aibă dreptate? De ce?

b) Ileana a scris: „Inversa matricii $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ este

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, iar opusa matricii A este $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.”

Verifică dacă Ileana a calculat corect!

5. Fie $O \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ matricea nulă de ordinul 2. Arată că O nu este matrice inversabilă.

6. a) Fie $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculează A^2 și A^3 .

b) Demonstrează că A este matrice inversabilă și că $A^{-1} = A^2$.

c) Rezolvă ecuația $A \cdot X = B$, unde $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, iar

$X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este necunoscuta ecuației.



Analizăm și generalizăm!

◆ Care matrice sunt inversabile?

Să comparăm!

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; vrem să justificăm dacă A este inversabilă și, în caz afirmativ, să calculăm inversa matricei A . Pentru aceasta, trebuie să argumentăm dacă există o matrice $X = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A \cdot X = I_2$ și $X \cdot A = I_2$.

Explicităm prima egalitate:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y & 2z - t \\ x + 3y & z + 3t \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = I_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} 2z - t = 0 \\ z + 3t = 1 \end{cases}$$

Rezolvând cele două sisteme, obținem: $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$.

Un calcul direct ne arată că și $X \cdot A = I_2$. Deci A este matrice inversabilă și inversa ei este matricea X de mai sus.

Să aplicăm același procedeu de calcul pentru a justifica dacă matricea

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -0,5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ este inversabilă.}$$

Conform definiției, B este matrice inversabilă dacă există o matrice $Y = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $B \cdot Y = I_2$ și $Y \cdot B = I_2$. Explicităm prima egalitate:

$$B \cdot Y = I_2 \Rightarrow \dots \begin{cases} 2m - p = 1 \\ m - 0,5p = 0 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} 2n - q = 0 \\ n - 0,5q = 1 \end{cases}$$

Un calcul simplu ne arată că aceste sisteme sunt incompatibile, deci matricea B nu este inversabilă.

Matricile A și B sunt foarte asemănătoare: doar unul dintre elementele lor este diferit. Ce proprietate a acestor matrice ar putea oare să influențeze existența sau inexistența inversei?

Observăm că pentru determinarea inversei unei matrice încercăm să rezolvăm câteva sisteme de ecuații; inversa există dacă și numai dacă aceste sisteme sunt toate compatibile. Am învățat că, în rezolvarea unui sistem de ecuații liniare, un rol important îl are matricea formată din coeficienții necunoscutelor. Mai precis, dacă această matrice este pătratică (adică dacă numărul de ecuații ale sistemului este egal cu numărul de necunoscute) și dacă determinantul matricei este diferit de zero, atunci sistemul are soluție. Aceasta explică de ce, în exemplul anterior, A este matrice inversabilă, iar B nu este inversabilă: deosebirea esențială constă în faptul că $\det(A) \neq 0$, dar $\det(B) = 0$.

În general

O matrice pătratică este inversabilă dacă și numai dacă determinantul ei este diferit de zero.

▲ Problema inversabilității unei matrice se pune doar pentru matricele pătratice.

1 Fie $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Observă că}$$

$M \cdot N = I_3$. Putem deduce că $N = M^{-1}$?

2 Compară sistemul obținute în calculul matricei Y cu sistemul obținut în calculul lui X . Ce asemănări observi? Prin ce se deosebesc ele?

3 Efectuează toate calculele și verifică dacă matricea B este inversabilă.

◆ Cum calculăm inversa unei matrice?

Să observăm!

Pentru a calcula inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, am rezolvat sistemele $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$

și $\begin{cases} 2z - t = 0 \\ z + 3t = 1 \end{cases}$; soluțiile acestor sisteme sunt chiar coloanele matricei inverse A^{-1} .

Observăm că în cele două sisteme, ecuațiile au aceiași coeficienți. De aceea, putem rezolva cele două sisteme în același timp, făcând simultan aceleași transformări echivalente. Explicităm în continuare aceste rezolvări.

▲ **Notăția** $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$ înseamnă că din linia a doua scădem linia întâi înmulțită cu $\frac{1}{2}$ și scriem rezultatul pe linia a doua.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} 2z - t = 0 \\ z + 3t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ \frac{7}{2}y = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} 2z - t = 0 \\ \frac{7}{2}t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ y = -\frac{1}{7} \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} 2z - t = 0 \\ t = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{6}{7} \\ y = -\frac{1}{7} \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} 2z = \frac{2}{7} \\ t = \frac{2}{7} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = -\frac{1}{7} \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} z = \frac{1}{7} \\ t = \frac{2}{7} \end{cases}$$

4 Cum se codifică înmulțirea primei ecuații a unui sistem cu 4? Dar adunarea primelor două ecuații ale sistemului?

5 Ce crezi că înseamnă notația $L_1 \leftarrow L_1 + 5L_2$?

▲ **Metoda de rezolvare** folosită în determinarea soluțiilor celor două sisteme se numește „metoda eliminării totale”.

▲ **Notăția** $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ înseamnă că se înlocuiește linia întâi cu suma dintre L_1 și L_2 .

Folosim „pivotul” 2 și reducem variabila x , respectiv z , din a doua ecuație. Codificăm transformarea prin: $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$.

În fiecare sistem, rezolvăm a doua ecuație, prin împărțire cu $\frac{7}{2}$. Codificăm transformarea prin: $L_2 \leftarrow \frac{2}{7}L_2$.

Reducem variabila y , respectiv t , din prima ecuație a fiecărui sistem. Codificăm transformarea prin: $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$.

În fiecare sistem, rezolvăm prima ecuație, prin împărțire cu 2. Codificăm transformarea prin: $L_1 \leftarrow 0,5L_1$.

Am obținut astfel soluțiile celor două sisteme, deci putem scrie matricea A^{-1} .

Transformările efectuate pentru rezolvarea celor două sisteme au urmărit inițial obținerea unui sistem „scară”, în care matricea asociată este cea alăturată.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Ulterior, am continuat transformările, pornind de la ultima ecuație, până când am rezolvat complet sistemele. În acel moment, matricea sistemelor obținute a devenit I_2 .

Aceste observații ne arată că putem organiza calculele în felul următor:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 0,5L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 \cdot \frac{2}{7}} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array} \right)$$

matricea A matricea I_2

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 : 2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array} \right)$$

matricea I_2 matricea A^{-1}

Să aplicăm!

Utilizăm procedeul descris mai sus pentru a calcula inversa matricei

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}. \text{ (În calculele făcute am marcat de fiecare dată „pivotul” folosit.)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4}L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 \cdot 4} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3}]{L_2 \leftarrow L_2 : 4} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 19 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & 0 & 28 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 : 4} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 19 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -1 & 4 \end{array} \right).$$

Am obținut: $X^{-1} = \begin{pmatrix} 19 & 2 & -8 \\ 7 & 1 & -3 \\ -9 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$

În general

Inversa unei matrice pătratice nesingulare se poate calcula folosind metoda eliminării totale. Pentru aceasta, așezăm una lângă alta matricea dată și matricea unitate, într-un tabel cu două compartimente. Transformăm simultan liniile celor două matrice, până când în primul compartiment apare matricea unitate. În acest moment, inversa matricei date apare în al doilea compartiment al tabelului.

◆ Cum procedăm în situații particulare?

În calculul inversei unei matrice prin metoda eliminării totale descrisă mai sus, pot interveni situații pe care nu le-am întâlnit în exemplele anterioare. Câteva dintre aceste situații sunt analizate în continuare.

Exemplul 1

Vrem să calculăm inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Observăm că, la primul pas, nu putem folosi numărul din colțul din stânga-sus ca pivot, deoarece acest număr este 0. Putem continua însă calculele în două moduri:

- adunăm linia a doua la prima linie, pentru a obține un pivot nenul:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

sau

- schimbăm între ele linia 1 cu linia 3, pentru a obține un pivot nenul:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

6 Explică ce urmăresc transformările făcute la primul pas.

7 La ce concluzie ai ajunge dacă, după efectuarea câtorva transformări ai obține în partea stângă o linie formată doar din zerouri?

8 Verifică egalitățile: $X \cdot X^{-1} = I_3$ și $X^{-1} \cdot X = I_3$, care arată corectitudinea calculelor făcute.

▲ Într-un sistem de ecuații liniare, pivotul determină reducerea unei necunoscute dintr-o ecuație a sistemului.

9 Descrie și alte transformări prin care ajungi la un pivot nenul în colțul din stânga sus. Continuă calculele pentru a obține A^{-1} .

Exemplul 2

Ne propunem să calculăm inversa matricei $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Transformările făcute pe linii ne conduc la situația:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Observăm că metoda eliminării totale nu poate fi continuată, din cauza zerourilor de pe a doua coloană marcate prin culoare. În acest caz, putem deduce că, de fapt, matricea B nu este inversabilă.

$$\text{Într-adevăr: } \det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

⚠ În calculul $\det(B)$ folosim aceleași transformări ca și în metoda eliminării totale.

⑩ Explică egalitatea marcată în text prin ?.

◆ Ce alte metode putem folosi pentru calculul inversei?

Să observăm!

Determinantul unei matrice poate fi calculat prin dezvoltarea acestuia după o linie sau după o coloană. Astfel, dacă dezvoltăm după linia a doua un determinant de ordinul trei, obținem:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Același determinant se dezvoltă după coloana a treia astfel:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Observăm că, indiferent cum dezvoltăm un determinant (după o linie sau după o coloană), elementul a_{ij} se înmulțește cu determinantul obținut prin ștergerea liniei și coloanei lui a_{ij} în determinantul inițial. Determinantul astfel obținut se numește *minorul* corespunzător elementului a_{ij} și se notează, de obicei, A_{ij} .

De exemplu: în dezvoltarea după prima linie sau după a doua coloană, a_{12} se va

$$\text{înmulți cu } A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ adică cu } A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}. \text{ Numărul } A_{12} = a_{21}a_{33} -$$

$a_{23}a_{31}$ este deci minorul corespunzător lui a_{12} . Cu aceste notații, dezvoltarea determinantului după linia a treia se poate scrie:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31} \cdot A_{31} - a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33}.$$

Să demonstrăm!

Fie $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $X = (a_{ij})$. Notăm $d = \det(X)$ și A_{ij} minorul corespunzător elementului a_{ij} . Atunci:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot A_{11} - a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} &= d \\ a_{21} \cdot A_{11} - a_{22} \cdot A_{12} + a_{23} \cdot A_{13} &= 0 \\ a_{31} \cdot A_{11} - a_{32} \cdot A_{12} + a_{33} \cdot A_{13} &= 0. \end{aligned}$$

⚠ În dezvoltarea unui determinant după o linie sau după o coloană se ține cont de „regula tablei de șah” în alegerea semnelor:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

⑪ Folosește notația A_{ij} pentru a descrie dezvoltarea determinantului după prima coloană. Explică modul în care sunt alese semnele termenilor.

⑫ În cele trei relații din enunț apar minorii A_{11} , A_{12} , A_{13} . Scrie alte trei relații de tipul celor din enunț, referitoare la minorii A_{12} , A_{22} , A_{32} . Va trebui să consideri dezvoltarea determinantului după o coloană.

Prima relație reprezintă dezvoltarea determinantului după linia întâi.

Fie $Y = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, matricea obținută din X prin înlocuirea primei linii cu a

doua linie. Știm că $\det(Y) = 0$, deoarece Y are două linii egale. Pe de altă parte, prin dezvoltarea determinantului după prima linie obținem:

$$0 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot A_{11} - a_{22} \cdot A_{12} + a_{23} \cdot A_{13}.$$

Am demonstrat astfel a doua egalitate din enunț. Analog se demonstrează și a treia egalitate.

Să aplicăm!

Egalitățile anterioare conduc la un algoritm pentru calculul inversei unei matrice

pătratică. Explicăm algoritmul pentru matricea $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Pas 1. Calculăm $\det(X) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \dots = -7$.

Deoarece $\det(X) \neq 0$, matricea X este inversabilă. Continuăm algoritmul.

Pas 2. În matricea X , schimbăm între ele liniile cu coloanele. Obținem astfel matricea transpusă a lui X , notată X^t :

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Pas 3. În matricea X^t înlocuim fiecare element cu minorul corespunzător, ținând cont de „regula tablei de șah” în alegerea semnelor. Obținem astfel matricea adjunctă a lui X , notată X^* .

$$X^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X^* = \begin{pmatrix} -9 & -1 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \\ -11 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

În X^t , 3 se înlocuiește cu $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$, iar 0 se înlocuiește cu $-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$.

Pas 4. Împărțim elementele matricei X^* la $\det(X)$ și obținem astfel inversa matricei X , notată X^{-1} . Obținem astfel:

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{11}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

În general

Inversa unei matrice pătratică cu determinant nenul se obține împărțind elementele matricei adjuncte la determinantul matricei inițiale. Calculul inversei se face după schema:

$$X \Rightarrow X^t \Rightarrow X^* \Rightarrow X^{-1}.$$

13 Efectuează calculele pentru a justifica fiecare afirmație din demonstrația alăturată.

14 Justifică egalitatea $\det(X) = -7$. La ce concluzie ai fi ajuns dacă obțineam $\det(X) = 0$?

▲ Matricea X^t și matricea X sunt simetrice față de diagonală principală.

15 Pentru exemplul analizat, explică modul în care au apărut în X^* numerele -11 și -2 .

16 Calculează $X \cdot X^{-1}$ și $X^{-1} \cdot X$, pentru a te convinge că am obținut într-adevăr matricea inversă.

17 Aplică algoritmul pentru o matrice pătratică X de ordinul 3, cu elementele a_{ij} . Explică de ce matricea obținută la sfârșit este inversa lui X .

◆ Ce structură algebrică determină matricile inversabile?

Să comparăm!

Pe mulțimea numerelor reale am definit două operații algebrice: adunarea și înmulțirea. $(\mathbb{R}, +)$ este un grup, dar (\mathbb{R}, \cdot) are doar o structură de monoid (deoarece 0 nu este element inversabil). Înmulțirea determină însă o structură de grup pe mulțimea \mathbb{R}^* , în care apar doar numerele reale inversabile.

Tot două operații algebrice am definit și pe mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, a matricelor pătratice de ordinul n . $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ este un grup, dar $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ are doar o structură de monoid (deoarece matricile cu determinantul 0 nu sunt inversabile).

Cu ce structură algebrică este oare înzestrată mulțimea matricilor inversabile?

Să demonstrăm!

Notăm $GL_n(\mathbb{R})$ mulțimea matricilor inversabile de ordinul n ($n \geq 2$). Atunci $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ este un grup necomutativ.

Fie $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ două matrice inversabile de ordinul n . Există deci matricile pătratice A' și B' , de ordin n , astfel încât:

$$A \cdot A' = I_n, \quad A' \cdot A = I_n, \quad B \cdot B' = I_n, \quad B' \cdot B = I_n.$$

Demonstrăm că $B' \cdot A'$ este inversa matricei $A \cdot B$. Într-adevăr:

$$(A \cdot B) \cdot (B' \cdot A') = A \cdot (B \cdot B') \cdot A' = A \cdot I_n \cdot A' = (A \cdot I_n) \cdot A' = I_n \text{ și, analog,}$$

$$(B' \cdot A') \cdot (A \cdot B) = I_n.$$

Deducem că produsul a două matrice inversabile este tot o matrice inversabilă, adică înmulțirea matricilor este o operație algebrică pe $GL_n(\mathbb{R})$. Deoarece înmulțirea matricilor este asociativă, $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ este element neutru la înmulțire și orice matrice din $GL_n(\mathbb{R})$ este (prin definiție!) inversabilă, deducem că $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ este un grup.

Pentru $n = 2$, observăm că $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sunt matrice inversabile, dar

$X \cdot Y \neq Y \cdot X$. Analog, putem găsi două matrice inversabile de ordinul n (cu $n > 2$), care nu comută la înmulțire. De aceea, grupul $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ nu este comutativ pentru $n \geq 2$.

⚠ Grupul $GL_n(\mathbb{R})$ se numește grupul general liniar de ordinul n .

18 Ce poți spune despre grupul $(GL_1(\mathbb{Z}), \cdot)$? Fă-i o descriere mai simplă!

19 Fie $Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Arată că}$$

$Z, T \in GL_3(\mathbb{Z})$ și că $Z \cdot T \neq T \cdot Z$. Găsește două matrice inversabile, de ordin 4, care nu comută la înmulțire.

Exerciții și probleme

1. Fie $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Scrie sistemele de ecuații

la care ajungi, dacă vrei să calculezi, pornind de la definiție, inversa lui P . Calculează P^{-1} .

2. Arată că matricea $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ nu este inversabilă.

3. Determină numărul real x , știind că matricea $\begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ nu este inversabilă.

4. Modifică matricea $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, aplicând succesiv

următoarele transformări:

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_3; \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3; \quad L_2 \leftarrow L_2 \cdot 4; \quad L_1 \leftrightarrow L_3.$$

Ce matrice ai obținut?

5. Calculează inversele matricilor următoare, folosind metoda eliminării totale.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Pentru $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, scrie matricea transpusă A^t ,

apoi calculează $A + A^t$ și $A \cdot A^t$.

7. Fie $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Dezvoltă $\det(M)$ după coloana a treia.
- Calculează minorul lui M , corespunzător numărului 5 (5 este elementul de pe poziția (2; 2)).
- Justifică dacă M este matrice inversabilă.

8. Notăm $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Demonstrează că $\det(A) = 7$.
- Scrive matricea A^t .

c) Adjuncta matricei A este $A^* = \begin{pmatrix} 2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & -3 \\ \dots & -2 & \dots \end{pmatrix}$.

Completează spațiile libere. Verifică dacă numerele ce apar în matricea A^* au fost calculate corect.

- Calculează inversa lui A .
- Cum verifici dacă inversa a fost calculată corect?

9. a) Scrie „regula tablei de șah” pentru o matrice de ordinul 4.

b) Calculează determinantul matricei $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- c) Determină X^t , X^* și X^{-1} .

10. Notăm $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ și $B = A^2$.

- Calculează matricea B , apoi $\det(A)$ și $\det(B)$.
- Compară $\det(A)$ și $\det(B)$; ce observi?
- Calculează A^{-1} și B^{-1} . Ce relație crezi că există între acest două matrice? Justifică afirmațiile făcute!
- Demonstrează că, dacă $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice inversabilă, atunci X^2 este și ea matrice inversabilă.

11. Găsește o matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care:

a) $M^t = M$; b) $M^{-1} = M$.

12. Să presupunem că $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $X^2 = 0$.

- Demonstrează că X nu este matrice inversabilă;
- Arată că $I_3 + X$ este inversabilă și inversa ei este $I_3 - X$.
- Verifică afirmațiile anterioare pentru

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

13. Notăm $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.

- Demonstrează că înmulțirea matricelor este lege de compoziție internă pe mulțimea \mathcal{F} .

- b) Verifică dacă (\mathcal{F}, \cdot) este grup comutativ.

14. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculează $A \cdot B$ și $B \cdot A$.
- Determină: A^t , B^t , $(A \cdot B)^t$, $A^t \cdot B^t$, $B^t \cdot A^t$.
- Compară rezultatele obținute și formulează o ipoteză generală. Verifică această ipoteză pe un nou exemplu, apoi demonstrează-o pentru cazul general.

15. Notăm $O_2 = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid X \cdot X^t = I_2\}$.

- Verifică dacă matricele următoare aparțin mulțimii O_2 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- Demonstrează că, dacă $X, Y \in O_2$, atunci $X \cdot Y \in O_2$.
- Arată că (O_2, \cdot) este grup necomutativ. (Acest grup se mai numește *grupul ortogonal*.)

16. a) Fie $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Demonstrează că $X^2 - 5X + 6I_2 = 0$.

- Arată că orice matrice $Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, soluție a ecuației $Z^2 - 5Z + 6I_2 = 0$, este matrice inversabilă.

17. Notăm cu $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ mulțimea matricelor pătratice, de ordin 2, cu elemente numere întregi.

- Explicitează proprietățile ce ar trebui verificate pentru a demonstra că $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ este un inel.

- Verifică dacă $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ este element inversabil în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

- Demonstrează că A este element inversabil în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ dacă și numai dacă $\det(A) \in \{-1; +1\}$.

18. Găsește inversele matricelor următoare.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

19. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Calculează $A \cdot B$, $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(A \cdot B)$.
- Verifică dacă $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- Fie x, y două numere naturale, care se scriu fiecare ca o sumă de două pătrate perfecte. Demonstrează că $x \cdot y$ are aceeași proprietate.
- Arată că, dacă $A \neq O_2$, atunci A este matrice inversabilă. Calculează A^{-1} .



Aplicăm și dezvoltăm!

1 Rezolvă ecuația $x^2 - 3x = 1$, $x \in \mathbb{R}$, apoi rezolvă în mulțimea \mathbb{Q} aceeași ecuație.

2 Rezolvă fiecare dintre ecuațiile următoare:

$$3^{x+1} = 3^x + 6, x \in \mathbb{R};$$

$$\sqrt{x+2} = 3, x \in [-2; \infty);$$

$$\log_5(x-2) = 1, x \in [2; \infty).$$

3 Ionel susține că propoziția $x^2 + 3x - 1 = 0, x \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ este o ecuație matriceală. Ce crezi, are el dreptate?

4 Încercând să rezolve o problemă, Otilia a dat următorul exemplu de ecuație matriceală:

$$X + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este corect exemplul dat de Otilia?

Pentru a rezolva ecuația $x + 1,7 = 2,4, x \in \mathbb{R}$, adunăm în ambii membri numărul $-1,7$; acesta este opusul numărului $1,7$ față de adunare:

$$x + 1,7 + (-1,7) = 2,4 + (-1,7)$$

$$x + 0 = 0,7$$

$$x = 0,7$$

◆ Ce este o ecuație matriceală?

Să observăm!

Considerăm următoarele propoziții:

$$2q + 1 = q + 3, q \in \mathbb{Q}; \quad (x - 1)(x + 2) = 10, x \in \mathbb{Z}; \quad t^2 - 3t = 1, t \in \mathbb{R}.$$

Toate acestea sunt *ecuații algebrice*, în care necunoscutele q, x , respectiv t , sunt numere. Am învățat însă și alte tipuri de ecuații. De exemplu:

$2x + 3y - 4 = 0, x, y \in \mathbb{R}$, este o *ecuație liniară* în două variabile;

$X \cup \{1; 2\} = \{1; 2; 3\}$, este o *ecuație cu mulțimi*;

$2^x = 4^{x-1}, x \in \mathbb{R}$, este o *ecuație exponențială*;

$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 5, x \in [1; \infty)$, este o *ecuație irațională*;

$\log_2(x+1) = 7, x \in (-1; \infty)$, este o *ecuație logaritmică*.

În toate aceste cazuri, a rezolva ecuația dată înseamnă a determina mulțimea tuturor soluțiilor ecuației. De exemplu, pentru $x^2 + x = 6, x \in \mathbb{R}$, nu este suficient să observăm că numărul 2 este soluție. O rezolvare completă a ecuației date presupune răspunsul următor: mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{2; -3\}$.

Operațiile algebrice definite pentru matrice au proprietăți asemănătoare operațiilor cu numere sau cu mulțimi. De aceea, are sens să considerăm propoziții de tipul:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R});$$

$$Z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}).$$

Acestea sunt ecuații matriceale, în care necunoscutele sunt matrice.

◆ Cum rezolvăm ecuații matriceale?

Să comparăm!

Ecuațiile de forma $x + a = b$ se rezolvă analog în \mathbb{R} sau în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pentru a rezolva ecuația $X + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,3 & 0 \\ -1 & 0,5 \end{pmatrix}, X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, adunăm în

ambii membri matricea $-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, opusa matricei $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ față de adunare:

$$X + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,3 & 0 \\ -1 & 0,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X + O_2 = \begin{pmatrix} 0,3 & 1 \\ -3 & -3,5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0,3 & 1 \\ -3 & -3,5 \end{pmatrix}$$

În rezolvarea celor două ecuații am folosit metode asemănătoare, deoarece operațiile de adunare a numerelor reale, respectiv de adunare a matricelor, au aceleași proprietăți: sunt asociative, admit elemente neutre și orice element (număr sau matrice) are un opus față de adunare.

Pentru a compara metodele de rezolvare a ecuațiilor de forma $a \cdot x = b$ în \mathbb{R} sau în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, este nevoie de o discuție suplimentară.

Ecuațiile $2 \cdot x = 3$ și $x \cdot 2 = 3$ ($x \in \mathbb{R}$) sunt echivalente (cele două propoziții reprezintă aceeași ecuație), deoarece înmulțirea numerelor reale este comutativă. Nu același lucru se întâmplă cu ecuațiile matriciale de forma $A \cdot x = B$ sau $x \cdot A = B$: înmulțirea matricelor nu este comutativă.

Să considerăm, de exemplu, ecuațiile următoare:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ respectiv } X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

În timp ce matricea $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ este soluție a primei ecuații, un calcul simplu arată că ea nu este soluție a celei de-a doua ecuații. Deci ecuațiile date nu sunt echivalente.

Să comparăm!

Pentru a rezolva ecuația $2,5 \cdot x = 3$, $x \in \mathbb{R}$, înmulțim ambii membri ai ecuației cu numărul 0,4; acesta este inversul numărului 2,5 față de înmulțire:

$$0,4 \cdot (2,5 \cdot x) = 0,4 \cdot 3$$

$$(0,4 \cdot 2,5) \cdot x = 1,2$$

$$1 \cdot x = 1,2$$

$$x = 1,2$$

Pentru a rezolva ecuația $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

înmulțim *la stânga* ambii membri ai ecuației cu

matricea $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; aceasta este inversa matricei

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ față de înmulțire:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

În rezolvarea celor două ecuații, am folosit metode asemănătoare, deoarece operațiile de înmulțire a numerelor reale, respectiv de înmulțire a matricelor, au aceleași proprietăți: sunt asociative și admit elemente neutre. În ambele cazuri, am obținut o singură soluție. Rezolvarea a fost posibilă deoarece coeficienții necunoscutelor (adică numărul 2,5, din prima ecuație, respectiv matricea $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, din a doua ecuație) sunt elemente inversabile față de înmulțire. Cum procedăm dacă această condiție nu este îndeplinită?

5 Rezolvă ecuația

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Precizează mai întâi tipul matricei X .

6 Arată că matricea $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

este o soluție a ecuației

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dar nu}$$

este o soluție a ecuației

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7 Verifică afirmația: matri-

cea $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ este inversa

matricei $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

8 Observă modul de rezolvare din exemplul alăturat, apoi rezolvă ecuația

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să observăm!

Ecuția $0 \cdot x = 0$, $x \in \mathbb{R}$, are o infinitate de soluții.

Ecuția $0 \cdot x = 3$, $x \in \mathbb{R}$, nu are soluție.

Aceste situații se pot întâlni și în rezolvarea ecuațiilor matriceale.

Exemplul 1

Considerăm ecuația $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Matricea $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ nu este inversabilă, deci nu putem aplica un algoritm de rezolvare

a ecuației date. Putem însă să transformăm ecuația matriceală într-un sistem.

Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$; atunci $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$,

deci $\begin{cases} x+2z=3 \\ 2x+4z=6 \end{cases}$ și $\begin{cases} y+2t=2 \\ 2y+4t=4 \end{cases}$.

Observăm că primul sistem are mulțimea de soluții $S_1 = \{(3-2a; a) \mid a \in \mathbb{R}\}$, iar al doilea sistem are mulțimea de soluții $S_2 = \{(2-2b; b) \mid b \in \mathbb{R}\}$.

Deducem că soluțiile ecuației matriceale date sunt matricele de tipul

$\begin{pmatrix} 3-2a & 2-2b \\ a & a \end{pmatrix}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

Așadar, ecuația dată are o infinitate de soluții.

Exemplul 2

Considerăm ecuația $Y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Fie $Y = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$. Ecuația matriceală conduce la sistemele:

$\begin{cases} m+2n=3 \\ 2m+4n=6 \end{cases}$ și $\begin{cases} p+2q=1 \\ 2p+4q=3 \end{cases}$.

Observăm că, în timp ce primul sistem este compatibil nedeterminat (având mulțimea de soluții $\{(3-2a; a) \mid a \in \mathbb{R}\}$), al doilea sistem este incompatibil.

Așadar, ecuația matriceală dată nu are soluție.

◆ Cum se poate decodifica un mesaj?

La începutul acestei Unități de învățare, am prezentat modul în care Radu și Ștefan au codificat un mesaj. Reamintim cum au procedat ei.

• Au atribuit literelor alfabetului numere consecutive, repetând fiecare număr și alternând semnele + și -:

A	B	C	D	E	F	...
1	-1	2	-2	3	-3	

• Au transformat mesajul într-un șir de numere (în care 0 semnifică spațiul liber dintre două cuvinte) și au aranjat șirul într-o matrice X cu trei linii.

9 Determină mulțimea soluțiilor ecuației

$$Y \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

10 Determină mulțimea soluțiilor ecuației

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Au folosit matricea $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pe post de „cheie” de codificare și au obținut

matricea $T = C \cdot X$.

- Mesajul transmis este șirul de elemente din matricea T (citite pe linii).

Să analizăm!

Într-una din zile, Radu și Ștefan au transmis mesajul următor:

-1	-10	-4	-11	17	2	3	16	-6	-11	2	2	11	-6	-2
----	-----	----	-----	----	---	---	----	----	-----	---	---	----	----	----

Primul pas în decodificarea acestui mesaj îl constituie rezolvarea ecuației matriceale $C \cdot X = T$, adică a ecuației:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -10 & -4 & -11 & 17 \\ 2 & 3 & 16 & -6 & -11 \\ 2 & 2 & 11 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

11 Arată că C este matrice inversabilă și calculează matricea C^{-1} .

„Cheia” codului, adică matricea C , este o matrice inversabilă. De aceea, ecuația $C \cdot X = T$ are soluția unică $X = C^{-1} \cdot T$.

$$\text{Deducem: } X = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 1 & -11 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -9 \\ 3 & 11 & 10 & 5 & -10 \end{pmatrix}.$$

12 Ce mesaj ți-au transmis Radu și Ștefan? Arată-le că știi să-l decodifici și scrie mesajul pe caietul tău.

Citind elementele lui X pe linii cu ajutorul codului, putem afla mesajul inițial.

Exerciții și probleme

- Rezolvă ecuațiile următoare, evidențiind de fiecare dată proprietățile folosite.
 - $3x - 1 = x + 5, x \in \mathbb{R}$.
 - $\sqrt[3]{x+2} = -2, x \in \mathbb{R}$.
 - $2^{3x-1} = 4, x \in \mathbb{R}$.
 - $(x - 3)(2x + 1) = 0, x \in \mathbb{R}$.
- Justifică dacă matricea $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este soluție a următoarelor ecuații:
 - $2 \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
 - $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
 - $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$
- Rezolvă ecuațiile matriceale următoare, evidențiind de fiecare dată proprietățile folosite.
 - $3 \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
 - $2 \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
 - $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
 - $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
- Considerăm ecuația matriceală $A \cdot X = B$, unde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, iar matricea necunoscută X este o matrice de tip $(2, 1)$.
 - Demonstrează că A este o matrice inversabilă și calculează matricele A^{-1} și $A^{-1}B$.
 - Arată că ecuația $A \cdot X = B$ conduce la sistemul $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ și rezolvă acest sistem.
 - Compară răspunsurile de la a) și b). Interpretează geometric rezultatele obținute.

Am reușit... ?!?

Parcurgând această unitate de învățare am reușit...

- ◆ să identific condiții pentru ca o matrice să fie inversabilă
- ◆ să aplic algoritmi de calcul matriceal
- ◆ să exprim sisteme de ecuații liniare în formă matriceală și să determin astfel soluțiile sistemelor
- ◆ să aplic în situații diverse regulile de calcul matriceal?

Test de verificare

1. a) Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Demonstrează că

$$A \cdot (A^2 - I_2) = 2I_2.$$

b) Dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $X \cdot (X^2 - I_2) = 2I_2$, arată că X este inversabilă.

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Demonstrează că

A este matrice inversabilă și calculează A^{-1} .

3. Considerăm sistemul:
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = -1 \end{cases}$$

a) Arată că sistemul este echivalent cu ecuația

$$\text{matriceală: } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Rezolvă sistemul dat, folosind metodele de rezolvare pentru ecuații matriceale.

4. Un atelier de mobilă produce două tipuri de biblioteci, B_1 și B_2 . În fabricarea acestora se folosesc plăci de lemn, balamale și șuruburi de conectare, așa cum se sugerează în tabelul alăturat.

	Plăci de lemn (m ²)	Balamale (buc)	Șuruburi (buc)
B1	5	12	100
B2	6	18	140

Piese componente pot fi procurate din trei surse diferite, notate S_1, S_2, S_3 . Directorul de producție a calculat prețul materialelor pentru fiecare tip de bibliotecă, în funcție de sursa de aprovizionare.

	S_1	S_2	S_3
B1	446	463	479
B2	574	604	614

Cât costă fiecare dintre componentele bibliotecilor la cele trei surse de aprovizionare?

- Exprimă printr-o ecuație matriceală problema dată.
- Răspunde la întrebarea din enunț.

Lectură

Istoria cunoscută a criptografiei începe acum aproximativ 4000 de ani când un scrib egiptean folosește pentru prima dată hieroglife ușor modificate pentru a ilustra povestea stăpânului său. Prin aceasta el deschide drumul către "scrierea secretă".

Una dintre formele cele mai simple de codificare a mesajelor a fost folosită de împăratul roman, Iulius Caesar, pentru a comunica cu generalii săi. Se spune că Iulius Caesar folosea o deplasare cu 3 poziții la dreapta a alfabetului, producând astfel o transformare care a fost foarte eficientă în vremea aceea deoarece foarte puțini dintre inamicii săi puteau citi sau scrie, fără să mai luăm în calcul metodele criptanalitice. În ciuda faptului că este un cifru relativ ușor de "spart" a supraviețuit o perioadă destul de îndelungată, fiind folosit de armata rusă până în jurul anului 1915.

Utilizarea criptografiei s-a extins în perioada celor două războaie mondiale. Era criptografiei moderne începe odată cu publicarea lucrării "Communication Theory of Secrecy Systems" de către Claude Elwood Shannon în jurnalul tehnic al Bell Systems în anul 1949. Cu această lucrare, se pun bazele matematice ale criptografiei. Ca principiu general, pentru criptarea textului se alege aleator o matrice pătratică inversabilă, care va reprezenta cheia de criptare. Pentru decriptare, este necesară descoperirea unor ecuații matriceale tot mai complicate.

Probleme recapitulative

1. Calculează:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Calculează A^2, A^3, A^4 .

b) Observă regularitatea, anticipează valoarea lui A^5 , apoi convinge-te prin calcul dacă ai sau nu dreptate!

3. Pentru fiecare dintre următorii determinanți, folosește dezvoltarea după prima linie pentru a-i calcula.

$$a) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Notăm $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Calculează $A + B$ și $A \cdot B$.

b) Compară $\det(A \cdot B)$ și $\det(A + B)$ cu $\det(A)$ și $\det(B)$. Formulează o regulă generală.

c) Verifică regula propusă pentru alte două matrice pătratice, de același ordin.

5. Transformă determinanții următori, conform relațiilor indicate:

$$a) \begin{vmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} : L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 ;$$

$$b) \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} : C_1 \leftarrow C_1 - C_2$$

6. Aplică regula lui Sarrus și calculează determinanții:

$$a) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

7. Folosește regula lui Cramer și rezolvă sistemele:

$$a) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

8. Decide dacă sistemele următoare sunt compatibile:

$$a) \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 0 \\ 3x + y = 2 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y = 1 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$$

9. Exprimă printr-o ecuație matriceală sistemele următoare.

$$a) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 4y = 0 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 2 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

10. Decide care dintre matricele următoare sunt inversabile:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}; \quad c) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Justifică dacă matricele următoare sunt inversabile. În caz afirmativ, calculează inversele.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$c) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

12. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Rezolvă

ecuațiile matriceale: $A \cdot X = B$; $Y \cdot A = B$; $B \cdot Z = A$; $T \cdot B = A$.

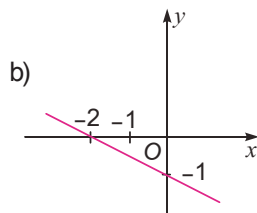
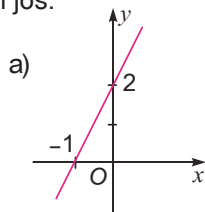
13. În sistemul cartezian xOy , considerăm punctele $A(1; 2)$, $B(-1; 3)$, $C(2; -1)$.

a) Explicitează ecuația dreptei AB .

b) Justifică dacă A, B, C sunt coliniare.

c) Calculează aria triunghiului ABC .

14. Scrie ecuațiile dreptelor reprezentate în figura de mai jos.



15. Să notăm cu M mulțimea matricelor de ordinul 3, cu elemente numere naturale.

- Demonstrează că adunarea și înmulțirea matricelor sunt operații algebrice pe M .
- Arată că $(M, +)$ și (M, \cdot) sunt monoizi.
- Determină elementele simetrizabile din cei doi monoizi de la b).

16. Demonstrează că

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ x & a_2 & 0 & 0 \\ y & z & a_3 & 0 \\ u & v & t & a_4 \end{pmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$$

17. Pentru $a \in \mathbb{R}$, notăm $M_a = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$.

- Explicitează mulțimile M_2 și M_{-2} .
- Demonstrează că M_a este parte stabilă față de adunarea numerelor reale dacă și numai dacă $a \geq 0$.
- Ce condiție trebuie să îndeplinească numărul a pentru ca M_a să fie parte stabilă față de înmulțirea numerelor reale?

- Arată că $\{0; 1\}$ este parte stabilă a lui \mathbb{Z} , în raport cu înmulțirea.
 - Determină toate submulțimile finite ale lui \mathbb{Z} , care sunt părți stabile față de operația de înmulțire.

19. Pe mulțimea \mathbb{R} a a numerelor reale definim legea de compoziție: $x * y = x^2 + y^3$.

Stabilește dacă această lege este asociativă sau comutativă. Admite legea „ $*$ ” element neutru?

20. Considerăm mulțimea nodurilor care se pot face cu o sfoară. (În imagine apare un element al acestei mulțimi.)



Pe mulțimea nodurilor considerăm operația de „continuare”: date nodurile N și M , considerăm nodul NM obținut prin „lipirea” extremității lui N cu originea lui M . Studiază proprietățile acestei operații.

21. Fie A mulțimea numerelor raționale care pot fi reprezentate sub formă de fracție ireductibilă cu numărătorul divizibil prin 3.

- Arată că adunarea și înmulțirea sunt legi de compoziție pe A .
- Studiază proprietățile celor două operații pe A și identifică structurile algebrice care apar.

22. Fie T mulțimea numerelor raționale care au o prezentare cu cel mult trei zecimale semnificative. Justifică dacă $(T, +, \cdot)$ este un inel.

23. Notăm cu D mulțimea numerelor întregi care au cel puțin o cifră egală cu 2. Justifică dacă $(D, +)$ este un monoid.

24. Dovedește că -2 este soluție comună a ecuației $|2x - 3| = 7$ și a inecuației $|-5(x + 4)| \leq 10$.

25. Află $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\frac{17}{3x+2} \in \mathbb{Z}$ și $\frac{7}{x+2} \in \mathbb{Z}$.

26. Pe mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale considerăm legea de compoziție $x * y = xy - 3x - 3y + 12$.

- Calculează $2 * 4$ și $0 * (-5)$.
- Demonstrează că $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$.
- Arată că „ $*$ ” este o operație algebrică asociativă și comutativă și că 4 este element neutru pentru „ $*$ ”.
- Stabilește dacă $(\mathbb{R}, *)$ este un grup.
- Rezolvă ecuația $2 * x = 8$.

27. Reprezintă într-un sistem de axe ortogonale perechile (x, y) de numere întregi, care sunt soluții ale ecuației $(x + 2) \cdot (y - 3) = 3$.

28. Determină $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât legea de compoziție „ \circ ” definită pe mulțimea numerelor reale prin relația $x \circ y = ax + by$ să fie asociativă, comutativă și să admită element neutru.

29. Considerăm mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a matricelor pătrate de ordinul 2, pe care definim operația algebrică $X * Y = X \cdot Y - Y \cdot X$

a) Pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, calculează $A * B$ și $B * A$. Compară rezultatele obținute. Ce observi?

b) Pentru A și B de mai sus, calculează $(A * B) * A$.

c) Arată, folosind proprietățile operațiilor cu matrice, că pentru orice $X, Y, Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ are loc egalitatea $(X * Y) * Z + (Y * Z) * X + (Z * X) * Y = 0$.

d) Este legea de compoziție „ $*$ ” asociativă? Dar comutativă?

e) Arată că legea de compoziție „*” este distributivă față de adunarea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Este $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, *)$ un inel?

30. Arată că adunarea și înmulțirea matricelor definesc o structură de inel pe mulțimea

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$
 a matricelor „diagonale” cu

două linii și două coloane. Determină elementele din D inversabile în raport cu operația de înmulțire.

31. Află suma a 100 numere întregi consecutive, știind că 30 dintre ele sunt negative.

32. Calculează suma:

$$S = 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^5 + \dots + 2001 \cdot (-1)^{2001}.$$

33. Găsește trei numere întregi consecutive a căror sumă să fie 0.

34. Află $x \in \mathbb{N}$, astfel încât $\frac{-15}{3-x} \in \mathbb{Z}$.

35. Arată că numărul întreg m de forma:

$$m = a(a+1)(a+2) - 12$$
 se divide cu 3, oricare ar fi numărul întreg a .

36. Calculează produsul:

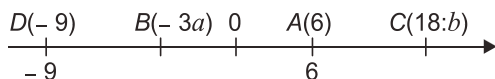
$$p = (2002 - 1) \cdot (2001 - 2) \cdot \dots \cdot (1 - 2002).$$

37. Dacă $a + 2b + 3c = 5$ și $b + 2c = 10$, află $a + b + c$.

38. Află numerele întregi a astfel încât:

$$(2a + 11) \mid (6a + 22).$$

39. În figura de mai jos avem: $[OA] \equiv [OB]$ și $[OC] \equiv [OD]$. Află numerele întregi a și b .



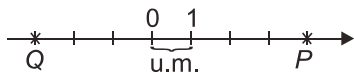
40. Așază paranteze în următoarele exerciții astfel încât rezultatul operațiilor să fie 0.

a) $-15 + 15 \cdot 25 + 72 : 4$; b) $-4 \cdot 8 + 64 : 2 : 5 - 9$.

41. Un număr întreg se înmulțește cu -8 , apoi rezultatul se adună cu 50, numărul obținut se împarte la -6 , din câtul împărțirii se scade de 3 ori numărul inițial și se obține -25 . Află numărul.

42. Dintre cinci numere întregi consecutive, cel din mijloc este 1. Care sunt celelalte?

43. Examinează figura de mai jos.



- a) Care sunt abscisele punctelor P și Q ?
- b) Care dintre punctele P și Q este mai depărtat de punctul O ? De ce?

44. Bogdan s-a decis să pună toate numerele întregi dintre 0 și 109 într-un tabel. Iată o parte din tabelul completat. Care dintre următoarele părți nu pot face parte din tabel?

0	2	4	6	8
1	3	5	7	9
10	12	14	16	18
11	13	15	17	19
20	22	24	26	28
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

45. Perechii $(4, 7)$ îi asociem numărul -3 , perechii $(7, 4)$ îi asociem numărul 3. În acest fel, perechile de numere naturale pot fi ordonate. Ordonează crescător perechile: $(17, 25)$; $(39, 20)$; $(48, 20)$; $(101, 119)$; $(1231, 1021)$.

46. Arată că numărul $\frac{3}{4} + \frac{33}{44} + \frac{333}{444} + \frac{3333}{4444}$ este natural.

47. Dovedește că $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024} < 1$.

48. Determină cifrele $a, b, c, a < b < c$, astfel încât numărul $A = \overline{0, ab(c) + 0, bc(a) + 0, ca(b)}$ să fie natural.

49. Partea zecimală a numărului a se obține din scrierea în continuare a termenilor șirului: 5, 15, 1115, 3115, 132115, ... Cum este numărul a : periodic simplu, periodic mixt, neperiodic? Justifică.

50. Precizează care dintre următoarele propoziții sunt adevărate. Motivează.

a) $\underbrace{13 + 13 + \dots + 13}_{\text{de } 725 \text{ de ori}} > \underbrace{725 + 725 + \dots + 725}_{\text{de } 13 \text{ de ori}}$;

b) $3 \times 3 \times 3 \times 3 = \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{\text{de } 27 \text{ de ori}}$.

Modifică propozițiile date astfel încât cea adevărată să devină falsă și cea falsă să devină adevărată. Alcătuieste exerciții asemănătoare.

51. (Numere pătraticе.) Compară:

- a) $1 + 3$ cu 4;
- b) $1 + 3 + 5$ cu 9;
- c) $1 + 3 + 5 + 7$ cu 16;
- d) $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ cu 25;
- e) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$ cu 36;
- f) $1 + 3 + \dots + 13$ cu 49.

Formulează și rezolvă un exercițiu asemănător celor anterioare. Există vreo legătură între suma $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ și numărul termenilor ei? Dacă răspunsul este „da”, precizează care este legătura. Completează propoziția:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = \dots$$

Răspunsuri

Pag. 6. Test inițial de autoevaluare. 1. a) 8; b) -36; c) -3; d) $\frac{4}{15}$; e) 8,6; f) $3\sqrt{2}$. 2. a) 2007; b) 14. 3. a) A; b) F; c) A; d) F. 4. a) 350; b) 17 lei; c) 31,25%. 5. a. 6. c. 7. a) A; b) F; c) F; d) A; e) A. 8. a) A; b) F; c) F; d) F; e) A. 9. a) $A = (-\infty; 3]$; $B = (1; +\infty)$; $C = [0; 2)$. b) $A \cap B = (1; 3]$; $A \cup B = \mathbb{R}$; $A \setminus C = (-\infty; 0) \cup [2; 3]$.

Pag. 8. 1. $18x + 4 = 20x - 10$, $x = 7$ zile, 130 mașini. 2. $3x - \frac{x}{2} < 10$; $x \in \{0; 1; 2; 3\}$. 3. $2(L - 20 + l + x) = 200$ m.

4. $l = \frac{40}{100} \cdot L$, $l + L = 35$, $l \cdot L = ?$, $A = 250 \text{ dm}^2$. 5. $2 \cdot \frac{2}{5}x + x = 24$, $x = 13\frac{1}{3}$; $13 : 20$. 6. $\frac{5}{8}x + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8} \cdot x + 15 = x$, $x = 200$ mere. **Pag. 17. 1.** a, b, d, e. 2. a) -4; b) $\frac{2}{5}$; c) \emptyset . 3. a) $x = 1, y = 1$; b) $x = \frac{6}{5}, y = -\frac{4}{5}$. 4. a, b. 5. a) $x \in (1; +\infty)$; b) $x \in (-\infty; 4]$. 6. a) $x \leq \frac{1}{2}$; b) $x \in [-4; 1]$. 7. a) $x = -\frac{7}{2}, y = -\frac{1}{6}$; b) \emptyset . 8. a) 2; -3; b) $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right)$; c) $x \in (-\infty; 3)$.

Pag. 19. 1. a) $x = \frac{2}{3}$; b) \emptyset . 2. $\left(\frac{7}{11}, 7\right)$. 3. a) $\left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$; b) $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; c) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$. 4. $x \in [-2; 5]$.

Pag. 19. Test de verificare. 2. $x \in [-2; 1)$. 3. $\overline{4abcde} = 4 \cdot \overline{abcde}4$. 4. Nu.

Pag. 20. Test inițial de autoevaluare. 3. a) P; b) N; c) M; d) R; e) S; f) Q. 4. 70° . 5. $\frac{12}{5}$. 6. a); b); d). 7. $\frac{3}{5}$.

8. a) $[1; +\infty)$; b) $(-3; +\infty)$. 9. a) Orice inecuație echivalentă cu $x > 1$ are ca mulțime de soluții mulțimea indicată.

Pag. 29. 3. De exemplu, sistemul $2x - y = -3$; $x + y = 0$. 4. $(1, -1)$. 5. a) $(-1; -2)$; b) $\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$; c) $(0; 1)$.

6. a) De exemplu, $3x + y = 5$; b) De exemplu, $3x + y = 6$. 9. a) $x - y = 0$, $2x + y - 1 = 0$; b) $x - y + 1 = 0$, $2x - 3y = 0$; c) $x - y = 0$, $y + 1 = 0$. 10. a) 1; b) 0. 11. $\left(2; -\frac{4}{3}\right)$. 12. b) De exemplu, $x + 2y - 2 < 0$. **Pag. 32. 3.** a) $2, 2x - 4$; b) între

70 și 74 de albume. 4. d). 7. $x < 30^\circ$. 14. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$. 15. $m = 0$; nu.

Pag. 33. Test de verificare. De exemplu: 1. $2x - 5 = 4x - 9$; b) $2x - 5 < 4x - 9$; c) $x + y - 1 = 0$. d) $x + y - 1 < 0$. 3. 0.

Pag. 34. Test inițial de autoevaluare. 1. a) 10^7 ; b) 10^3 ; c) 10^{12} . 2. a) 1002; b) 325. 3. a) $3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$; b) $1 \cdot 10^3 + 5$. 4. a) 260; b) 30; c) 1370; d) Scriind $999 = 1000 - 1$ și folosind proprietatea de distributivitate avem $999 \cdot 46 = (1000 - 1) \cdot 46 = 46000 - 46 = 45954$. e) $99 \cdot 101 = (100 - 1)(100 + 1) = 100^2 - 1 = 9999$. 5. c). 6. b), d), a), c).

7. a) $[0; 1)$; b) $[0; 5]$; c) $[-1; 5]$; d) \mathbb{R} . 8. a) 18; b) 20; c) 8. 10. a) F; b) A; c) F; d) A; e) A. **Pag. 39. 1.** 11103; 1013; 2011.

Pag. 47. 1. 1; -2; 16. 3. Nu. 5. a) Nu, deoarece $(2 \cdot 1) \cdot 5 = 32$, iar $2 \cdot (1 \cdot 5) = 2$. b) Nu; c) Nu. 6. a) $4 \Delta 6 = 2$; $4 \Delta 9 = 1$; e) 12. 7. a) Cum x este o cifră, ultima cifră a produsului $x \cdot 1$ este chiar x . b) ultima cifră a lui $3 \cdot 7$ este 1. c) 1; 3; 7; 9. **Pag. 50. 1.** a) $A \setminus B = \{1\}$; $A \Delta B = \{1\}$. b) $x = \{1\}$ este soluție unică. c) Ecuația are patru soluții: $\{1\}$; $\{1; 2\}$; $\{1; 3\}$; $\{1; 2; 3\}$. 2. a) 313; b) $x \in \{12, 17\}$. c) Elementul neutru este 0. Se arată că operația algebrică \oplus nu este asociativă, indicând x, y, z numere naturale astfel ca $(x \oplus y) \oplus z \neq x \oplus (y \oplus z)$. 3. $x = 4$; $y = 6$. 4. a) 11; 5. b), c) Se demonstrează prin verificări directe. d) $x = -6$.

Pag. 51. Test de verificare. 1. a) 0,25; 0,1010101...; $\sqrt{9}$; $\frac{3}{4}$. b) Prima și ultima. 2. a) Se folosește faptul că pentru orice număr real a are loc egalitatea $|a| = |-a|$. b) Operația nu este asociativă. De exemplu, avem $(1 * 2) * 3 = 2$, iar $1 * (2 * 3) = 0$. Operația $*$ admite pe 0 ca element neutru. c) Pentru orice $x \in M$, simetricul lui x este x , deoarece $x * x = 0$. 3. a) $\{2\}$; 2. b) Pentru a demonstra distributivitatea reuniunii față de intersecție pot fi folosite diagramele Venn-Euler. Pentru a demonstra distributivitatea operației \textcircled{M} față de \textcircled{D} pot fi utilizate descompunerea în factori primi și distributivitatea operației care asociază la două numere reale pe cel mai mare dintre ele față de cea care îl asociază pe cel mai mic. c) $x = 6$. 4. $S = (-\infty, -1)$.

Pag. 52. Test inițial de autoevaluare. 1. a) 14; b) 0,6; c) 5. 2. a) $4x$; b) $3x^2$; c) 0. 7. a) 1148833 (se folosește comutativitatea înmulțirii); b) 1148833 (se folosește distributivitatea înmulțirii față de adunare). 8. a); c). 9. a) adevărat; b) adevărat; c) fals; d) fals. 10. Există două numere reale x, y cu proprietatea $x^2 + y^2 < 4$. **Pag. 62.** 1. $x = -3$; $y = -1$; $z = 3$. 4. $\bar{x} \cdot y = 2x \cdot y$. 6. $a = \frac{1}{2}$. 13. $x = 2$; $y = 0$.

Pag. 65. Test de verificare. 1. Liniile corespund anilor, iar coloanele țărilor.

Pag. 66. Test inițial de autoevaluare. 1. c). 2. a). 3. d). 4. $x = \frac{1}{5}$; $y = \frac{2}{5}$. 6. a) t^2 ; b) t^3 ; c) $x = -\frac{b}{a}$; d) Dacă $m^2 \geq 44$, atunci $x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 44}}{2}$, în caz contrar ecuația nu admite soluții reale. 7. a) 21; b) $\frac{15}{2}$; c) 9. 8. a) A, B, D, F;

b) C, E, H; c) D, F, G. d) B, F, G, J. **Pag. 68.** 1. a) De exemplu $x + y + z = 0$; $2x + y - z = 7$; $3x - 2y + 2z = -7$.

2. a) Prima ecuație poate fi înmulțită cu 6, a doua cu 2 și cea de-a treia cu 1. 3. a) $x = -1$; $y = -1$; $z = 3$. c) $x = 2$; $y = \frac{1}{2}$; $z = 1$. e) $x = 0$; $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $z = 0$. 4. a) sistemul are soluție unică: $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; b) sistemul este compatibil

nedeterminat; c) sistemul este incompatibil. 5. a) $x = \frac{16}{25}$; $y = \frac{19}{25}$; $z = \frac{7}{5}$; $t = \frac{2}{25}$. **Pag. 77.** 1. a) Ecuația are o soluție

un număr rațional, care nu este număr natural ($x = -\frac{2}{3}$). c) Sistemul este incompatibil. 2. a) $x = \frac{18}{5}$; $y = \frac{17}{5}$;

b) $x = -1$; $y = -6$; $z = -11$. 4. a) 28; b) 60; c) -7; d) 1. 5. b) 0 (prima și a doua linie sunt proporționale); d) 0 (a doua și a treia coloană sunt proporționale). 6. a) 0; b) 0; c) -216. 7. a) $-4(a-b)(b-c)(c-a)$; b) $2(y-x)(x-z)(z-y)$.

8. b) $\Delta = -259$; $\Delta_x = 777$; $\Delta_y = -1295$; $\Delta_z = -518$, deci $x = -3$; $y = 5$; $z = 2$.

Pag. 80. 1. a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; b) 3; c) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 2. $AB = 2\sqrt{5}$; $AC = \sqrt{10}$; $BC = \sqrt{10}$; 45° . 3. a) 6. 4. a) $A \in d$, deoarece

$1 - 2 + 1 = 0$. b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 5. a) Da. b) $m = 5$.

Pag. 81. Test de verificare. 1. Linia întâi și linia a treia sunt proporționale (coincid). 2. a) După transformare, linia a doua are elementele 0, 5, 10. b) $D = -5$. 3. (1; 1). 4. a) $\frac{17}{2}$. b) $AB: 2x - 3y + 7 = 0$, $AC: 3x + 4y + 2 = 0$, iar $BC: 5x + y - 8 = 0$. c) Nu; AB, AC și BC nu au un punct comun.

Pag. 82. Test inițial de autoevaluare: 1. a) -25; b) -2; c) 13; d) 4; e) -1; f); g) $-\frac{1}{3}$; h) $\frac{7}{12}$. 2. a) -8; b) 9; c) 2; d) -2; e) 7; f) $\frac{1}{3}$; g) $\frac{1}{3}$; h) 25; i) 3; j) 1. 3. A, F, A, F, F. 5. a) $x = -8$; b) $x = 2$; c) $x = 2$; d) $x = -\frac{1}{4}$; e) $x \in \{-1, 2\}$;

f) $x = -2$. 6. a) $x = 3$; b) $x = 9$; c) $x = 1$; d) $x = 3$. 9. b). **Pag. 85.** 1. a) $x = 6$; $x = -3$; $x = 6$; b) $x = 2$; $x = -4$; $x = 9$;

c) $x = 2$; $x = 1$; $x = -1$. 2. a) $x \in \{4, 5, 6, \dots\}$; $x \in \{\dots, -6, -5, -4\}$; $x \in \{\dots, 7, 8, 9\}$; b) $x \in \{\dots, -5, -4, -3\}$; $x \in \{\dots, -2, -1, 0, 1\}$; $x \in \{\dots, 1, 2, 3\}$; c) $x \in \{\dots, -7, -6, -5\}$; $x \in \{-4, -3, -2, \dots\}$; $x \in \{\dots, 5, 6, 7\}$. 3. a) $x = \frac{1}{15}$; b) $x = 2,5$;

c) $x = \frac{1}{16}$; d) $x = 2,2$; e) $x = 3,3$. 4. a) $x = 0,1$; b) $x = \frac{1}{25}$; c) $x = 0$; d) $x = \frac{378}{100}$; e) $x = 1,5969$. 5. a) $x = 2,3$; b) $x = \frac{51}{50}$;

c) $x = 1,01695$; d) $x = 2$; e) $x = 2,1$; f) $x = 4$. 6. 321 și 3,21. 7. $-\frac{1}{100}$ și $-\frac{301}{100}$, respectiv $\frac{1}{100}$ și $\frac{301}{100}$. 8. 10, 11 și

50, 55. 9. 1819,0225 m². 10. a) $x \in \{-2; -1; 0; 1\}$; b) $x = -7$; c) $x \in \mathbb{N}$. 11. a) $x = \frac{54}{11}$; b) $x = \frac{9}{20}$; c) $x = \frac{25}{3}$; d) $x = 1$.

12. a) $n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; b) $n = 3$; c) $n \in \{2; 3; 4\}$; d) $n \in \{3, 4, 5\}$. 13. $(a, b) = (5, -5)$ sau $(a, b) = (-5, -5)$.

14. a) $x \in \{-1; 1; 3\}$; b) $x \in \{1; -1; -3\}$. 15. a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; b) $B = \{-4, -3, -2, 2, 3, 4\}$. 16. a) nu; b) da; c) nu. 18. a) $x \in \{-\infty, 0\}$; b) $x \in \{-1; 7\}$; c) $x \in \{-2, 0, 2, 4\}$; d) $x = -2$; e) $x \in (1, 3)$. **Pag. 93.** 1. a) 3 și 2; b) $x = 0$.

c) Nu. 2. $a * b = 2a + b$. **Pag. 96.** 4. Asociativă; 0 este element neutru; singurul element inversabil este 0; comutativă.

5. Nu. 6. Asociativă; 0 este element neutru; elementele simetrizabile sunt 0 și 2; comutativă. 9. A da un circuit în graful G cu originea și extremitatea în A înseamnă a „parcure” graful de un număr de ori, plecând din A și ajungând tot în A . Alegem un sens de parcurgere ca fiind sensul pozitiv (spre exemplu sensul acelor ceasului). În acest fel, fiecărui circuit în G îi va corespunde un număr întreg, care indică de câte ori a fost parcurs graful. 11. Compunerea

rotației de unghi α cu rotația de unghi β este rotația de unghi $\alpha + \beta$. Rotația de unghi nul este element neutru al grupului. Fixând o rotație de unghi α și alegând α' astfel încât $\alpha + \alpha' : 360^\circ$, rezultă că rotația de unghi α' este inversa rotației de unghi α în R_0 .

Pag. 97. Test de verificare. 1. $(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{R}, +)$; (\mathbb{R}^*, \cdot) . **2.** $(T, +)$ este grup, iar (T, \cdot) este monoid.

4. a) 2 și 10. **5.** Pentru $x, y \in G$ avem $(xy)^2 = e$, deci $x * y * x * y = e$. Înmulțind cu x și ținând cont de ipoteza $x^2 = e$, deducem că $y * x * y = x$. Înmulțind la stânga cu y și folosind relația $y^2 = e$ rezultă $x * y = y * x$, deci $(G, *)$ este comutativ, deoarece x și y au fost alese arbitrare.

Pag. 98. Test inițial de autoevaluare. 1. a) 15000; b) 34000; c) 41700. **2.** a) $\frac{1}{2}$; b) 2450. **3.** a) $\{2\}$; b) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$;

c) $\{1; 3\}$; d) $\{4; 5; 6\}$. **4.** \emptyset ; $\{2\}$; $\{4\}$; $\{2; 6\}$. **5.** a) $X \cap Y$; b) $Z \setminus X$; c) $X \setminus Y$. **6.** a) 3; 0,25; $-\frac{1}{7}$; $\sqrt{9} = 3$; $2\sqrt{5} - \sqrt{20} = 0$; 0. b) 1,5. **7.** Toate cu excepția ultimului. **8.** 0,55; 0,14; 1,41; 3,14. **9.** 3; -3; 1; 3. **Pag. 100. 3.** a) 0; b) 0. **4.** a) Nu.

6. a) 8; b) Este comutativă, nu este asociativă. **Pag. 104. 1.** a) 12, 242; -164; 0; c) Nu. **2.** a) $\frac{21}{6} = \frac{7}{2} \in A$; $\frac{2}{15}$ nu poate fi scris ca o fracție cu numitorul o putere a lui 2. d) Inversul lui 4 este $\frac{1}{4} \in A$. Nu există $a \in A$ astfel ca $\frac{3}{2} \cdot a = 1$.

e) Nu. **Pag. 106. 2.** a) $(-1; 2)$; $(0; \frac{3}{4})$; $(-2, -\frac{5}{3})$. b) Elementul neutru față de operația „+” este $(0; 0)$, iar față de

operația „·” este $(1, 1)$. **4.** a) $(1, 1)$; $(0, 1)$; $(1, 0)$; $(-1, 0)$; $(13, 0)$. b) $e_1 = (0, 0)$, $e_2 = (1, 0)$, $-(a, b) = (-a, -b)$,

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right). \text{ 5. Inel.}$$

Pag. 107. Test de verificare. 1. a) Suma, respectiv produsul, dintre două elemente ale lui $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ aparțin lui $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

b) De exemplu, $1 + \sqrt{2}$ nu este inversabil în $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. **2.** $X = \{1; 3\}$ sau $X = \{1; 3; 4\}$. **3.** a) 7 și 201.

Pag. 108. Test inițial de autoevaluare. 1. b). **2.** c). **3.** a). **4.** d). **9.** a) -3; b) 10. **10.** a) -5; b) 10. **11.** a) $(2; -\frac{7}{3}; -\frac{2}{3})$.

12. $(\frac{2}{7}; \frac{4}{7})$; b) $(1, 2, 2)$. **Pag. 110. 1.** 13, 2, 9, -7, -5, -1, 0, 13, 11, 36, 35, 10, 38, 3. **3.** Da. **4.** a) Mihai are dreptate.

Nu pot avea amândoi dreptate, deoarece inversa unei matrice, dacă există, este unică. **6.** b) Se folosește faptul că $A^3 = I_3$. c) X se determină înmulțind ambii membri ai ecuației la stânga cu A^{-1} . **Pag. 116. 1.** $a_{11} = 1$; $a_{12} = 0$; $a_{11} + 3a_{21} = 0$; $a_{12} + 3a_{22} = 1$. **3.** 8. **5.** a) Pot fi efectuate transformările $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$; $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$; $L_2 \leftarrow -L_2$. **7.** b) -12; c) Nu.

10. a) $\det(A) = 7$; $\det(B) = 49$, $\det(B) = (\det(A))^2$; c) $B^{-1} = (A^{-1})^2$; d) Fie Y inversa lui X , deci $X \cdot Y = I_n$; $I_n = X \cdot Y =$

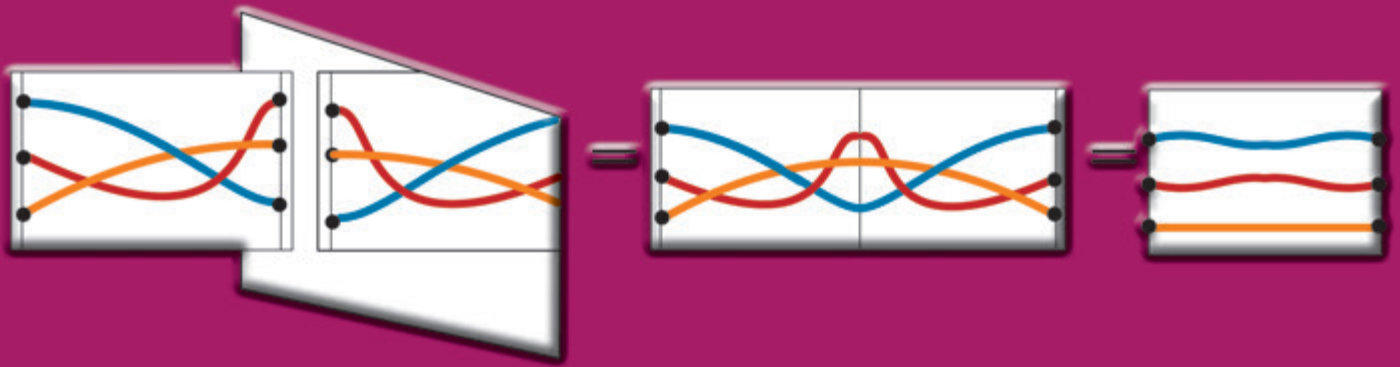
$= (X \cdot I_n) \cdot Y = X \cdot I_n \cdot Y = X(X \cdot Y) \cdot Y = (X \cdot X) \cdot (Y \cdot Y) = X^2 \cdot Y^2$, deci X^2 este inversabilă și $(X^2)^{-1} = (X^{-1})^2$.

Pag. 122. Test de verificare. 1. b) Inversa lui X este $\frac{1}{2}(X^2 - I_2)$. **2.** $\det A = 6$, deci A este matrice inversabilă.

3. a) Se folosește regula de înmulțire a matricelor.

Bibliografie

- Bell, E. T., *Men of Mathematics*, Penguin Books, 1953
- Câmpan, F., *Probleme celebre*, Ed. Albatros, 1972
- Gardner, M., *Amuzamente matematice*, Ed. Științifică, 1968
- Gardner, M., *Alte amuzamente matematice*, Ed. Științifică, 1970
- Popescu, T., *Retrospectivă matematică - repere evolutive*, Ed. Litera, 1980
- Rusu, E., *De la Thales la Einstein*, Ed. Albatros, 1971
- Singer, M., Voica, C., Neagu M., *Statistică și probabilități. Curs introductiv pentru elevi, studenți și profesori*, Ed. Sigma, București, 2003
- Tarasov, L., *This amazingly symmetrical world*, Mir Publishers, 1986
- Ion, I. D. Radu, N., *Algebră*, EDP, București, 1981
- Minguin-Debray, M., *L'atelier des polyèdres*, ACL - Les Editions du Kangourou, Paris



	Făină	Ulei	Roşii	Paste	Sare
Magazin 1	12	35	30	14	2
Magazin 2	14	34,5	31	15	2
Magazin 3	13	36	29	16	2

$$\begin{pmatrix} 12 & 35 & 30 & 14 & 2 \\ 12 & 35 & 30 & 14 & 2 \\ 14 & 34,5 & 31 & 15 & 2 \\ 14 & 34,5 & 31 & 15 & 2 \\ 13 & 36 & 29 & 16 & 2 \\ 13 & 36 & 29 & 16 & 2 \end{pmatrix}$$

