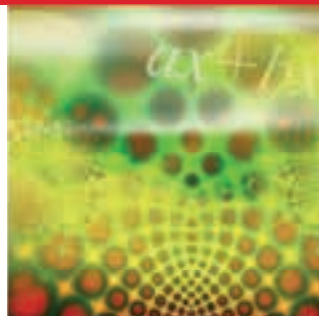


MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI TINERETULUI



Matematică

M2

Manual pentru clasa a XII-a

Neculai I. Nediță

Gina Caba

CORINT

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI TINERETULUI

Matematică

M2

Manual pentru clasa a XII-a

Neculai I. Nediță

Gina Caba

CORINT

Manualul a fost aprobat prin O.MEdCT nr. 1262/35 din 6.06.2007, în urma evaluării calitative și este realizat în conformitate cu programa analitică aprobată prin Ordin al ministrului educației și cercetării nr. 5959 din 22.12.2006.

Date despre autori:

NECULAI I. NEDIȚĂ, prof. dr., Colegiul Național de Informatică „Tudor Vianu”, București, coautor la manuale școlare pentru învățământul liceal, autor de auxiliare școlare pentru învățământul gimnazial și liceal.

GINA CABA, profesor, București, autor și coautor de manuale de matematică și auxiliare școlare pentru învățământul gimnazial și liceal.

Referenți:

Prof. grd. I **Nadia Simionescu**, Școala Superioară Comercială „N. Kretzulescu”

Prof. grd. I **Viorica Stoenescu**, Colegiul Tehnic „Edmond Nicolau”, București

Redactor: Alice Raluca Petrescu

Tehnoredactare computerizată: Alice Raluca Petrescu

Coperta: Valeria Moldovan

Editura CORINT

Difuzare:

Calea Plevnei nr. 145, sector 6, București, cod poștal 060012

Tel.: 021.319.88.22; 021.319.88.33; 0748.808.083; 0758.225.443; Fax: 021.319.88.66; 021.310.15.30.

E-mail: vanzari@edituracorint.ro

Magazin virtual: www.grupulcorint.ro

Redacția și administrația:

Str. Mihai Eminescu nr. 54 A, sector 1, București

Tel./fax: 021.319.47.97; 021.319.48.20

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

NEDIȚĂ, NECULAI I.

Matematică M2: manual pentru clasa a XII-a / Neculai

I. Nediță, Gina Caba, ... – București: Corint, 2007

ISBN 978-973-135-088-2

I. Caba, Gina

51(075.35)

ISBN: 978-973-135-088-2

Toate drepturile asupra acestei lucrări sunt rezervate Editurii CORINT,
parte componentă a GRUPULUI EDITORIAL CORINT.

2007

Tiparul executat la: FED PRINT S.A.

Partea I

Elemente de algebră

Capitolul 1. Grupuri	4
Capitolul 2. Inele și corpuri	40
Capitolul 3. Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (\mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{Z}_p , p prim)	51

1. Lege de compoziție internă, tabla operației

1.1. Noțiuni recapitulative

Au fost studiate mulțimile de numere: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ – mulțimea numerelor naturale; $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ – mulțimea numerelor întregi;

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ – mulțimea numerelor raționale; \mathbb{R} – mulțimea numerelor reale;

$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ – mulțimea numerelor complexe.

Mulțimile de numere studiate au proprietatea: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Ne reamintim produsul cartezian a două mulțimi. Fie A și B două mulțimi. Produsul cartezian al celor două mulțimi este: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.

EXEMPLE

1. Dacă $A = \{-2, 3\}$ și $B = \{1, 2, 5\}$, avem:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} = \{(-2, 1), (-2, 2), (-2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 5)\}.$$

2. Dacă $A = \{a, b\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

$$A \times B = \{(a, \alpha), (a, \beta), (a, \gamma), (b, \alpha), (b, \beta), (b, \gamma)\}.$$

Aceste mulțimi au fost dotate cu diferite operații. De exemplu, pe mulțimea numerelor naturale au fost definite operațiile de **adunare** și **înmulțire**:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} \text{ avem } x + y \in \mathbb{N} \text{ și } xy \in \mathbb{N}$$

pentru care am acceptat anumite proprietăți:

A1. $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$;

A2. $0 + x = x + 0 = x$, $\forall x \in \mathbb{N}$;

A3. $x + y = y + x$, $\forall x, y \in \mathbb{N}$;

I1. $(xy)z = x(yz)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$;

I2. $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$, $\forall x \in \mathbb{N}$;

I3. $xy = yx$, $\forall x, y \in \mathbb{N}$.

D. $x(y + z) = xy + xz$, $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$.

Odată cu studiul altor mulțimi, au fost acceptate alte proprietăți. Astfel, în mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi, operațiile de **adunare** și **înmulțire** satisfac în plus față de A1, A2, A3, I1, I2, I3, D și proprietatea:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0, \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Un studiu atent ne permite să stabilim unele caracteristici comune ale operațiilor cunoscute și să facem anumite generalizări.

Astfel, pe mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$, operația de adunare ne permite să definim aplicația:

$$\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, (x, y) \rightarrow \varphi(x, y),$$

prin care facem să corespundă la orice pereche ordonată (x, y) de numere naturale un număr natural, unic determinat, $\varphi(x, y) = x + y$ numit **suma** lui x cu y .

În mod analog, înmulțirea numerelor naturale ne permite să definim aplicația:

$$\Psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, (x, y) \rightarrow \Psi(x, y),$$

prin care la orice pereche ordonată (x, y) de numere naturale, asociem un număr natural unic determinat $\Psi(x, y) = xy$, numit **produsul** lui x cu y .

EXEMPLU

$$\varphi(5, 2) = 5 + 2 = 7, \varphi(3, 8) = 3 + 8 = 11,$$

respectiv

$$\Psi(5, 2) = 5 \times 2 = 10, \Psi(3, 8) = 3 \times 8 = 24.$$

Vom remarca faptul că observații similare pot fi făcute în studiul altor mulțimi.

Fie mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ a matricelor pătrate de ordin 2 cu coeficienți din \mathbb{R} .

Pentru operația de adunare am asociat fiecărei perechi ordonate (A, B) de matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ matricea $A + B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ prin aplicația: $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $(A, B) \rightarrow \varphi(A, B) = A + B$, numită **operația de adunare** a matricelor.

EXEMPLU

$$\text{Fie } A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

$$\text{Avem: } \varphi(A, B) = A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix},$$

$$\text{respectiv } \Psi(A, B) = AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}.$$

Considerând mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ putem defini aplicațiile:

$$\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (z_1, z_2) \rightarrow \varphi(z_1, z_2) = z_1 + z_2,$$

prin care, fiecărei perechi ordonate (z_1, z_2) de numere complexe, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, i se asociază numărul complex $z_1 + z_2$, aplicația este numită **operația de adunare** a numerelor complexe.

De asemenea, am asociat fiecărei perechi ordonate (z_1, z_2) de numere complexe, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, numărul complex $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$ prin aplicația:

$$\Psi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (z_1, z_2) \rightarrow \Psi(z_1, z_2) = z_1 z_2,$$

numită **operația de înmulțire** a numerelor complexe.

EXEMPLU

Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, unde $z_1 = x_1 + iy_1$, $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, și $z_2 = x_2 + iy_2$, $x_2, y_2 \in \mathbb{R}$. Avem:

$$\varphi(z_1, z_2) = z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

respectiv

$$\Psi(z_1, z_2) = z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Exemplele pot continua, considerând și alte mulțimi.

Observațiile asupra acestor aplicații ne permit să surprindem într-o schemă generală situații asemănătoare celor prezentate mai sus. Pentru aceasta vom considera o mulțime nevidă M și o aplicație

$$\varphi : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow \varphi(x, y),$$

în care este ignorată natura elementelor mulțimii M , cum și regula efectivă prin care oricărui cuplu (x, y) de elemente din M i se asociază un element unic $\varphi(x, y) \in M$.

Obținem astfel noțiunea de **lege de compoziție** pe mulțimea M .

1.2. Definiție. Exemple

Definiție

Fie M o mulțime nevidă. O aplicație φ definită pe produsul cartezian $M \times M$ cu valori în M ,

$$\varphi : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow \varphi(x, y),$$

se numește **lege de compoziție** pe M .

Elementul unic determinat $\varphi(x, y) \in M$ care corespunde cuplului $(x, y) \in M \times M$ prin aplicația φ se numește **compusul** lui x cu y prin legea de compoziție φ .

O **lege de compoziție** pe o mulțime M se mai numește **operație binară** pe M sau **operație algebrică** pe M . În cele ce urmează vom prefera să folosim pentru aplicația φ denumirea de **lege de compoziție**.

EXEMPLE

Prezentăm câteva exemple de legi de compoziție cunoscute:

1. **Adunarea pe \mathbb{Z}** : $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow \varphi(x, y) = x + y$.
2. **Înmulțirea pe \mathbb{Z}** : $\Psi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow \Psi(x, y) = xy$.
3. **Adunarea pe \mathbb{R}** : $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow \varphi(x, y) = x + y$.
4. **Înmulțirea pe \mathbb{R}** : $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow \Psi(x, y) = x \cdot y$.

1.2.1. Notății pentru o lege de compoziție

Notăția aditivă: $\varphi : M \times M \rightarrow M, \varphi(x, y) = x + y$. Elementul $x + y$ se numește **suma** lui x cu y , iar legea de compoziție φ se numește **adunare**.

Notăția multiplicativă: $\varphi : M \times M \rightarrow M, \varphi(x, y) = xy$. Elementul xy se numește **produsul** lui x cu y , iar legea de compoziție φ se numește **înmulțire**.

Vom remarca faptul că pentru o lege de compoziție vor fi utilizate diferite notații pentru compusul $\varphi(x, y)$ a lui x cu y , cum ar fi:

$$x * y, x \perp y, x \top y, x \circ y, x \wedge y, x \vee y, x \oplus y, x \odot y, x \otimes y, x \Delta y, x \nabla y \text{ etc.}$$

EXEMPLE

1. Folosind notația aditivă pentru $M \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\}$, avem legile de compoziție:

$$\varphi : M \times M \rightarrow M, \varphi(a, b) = a + b.$$

2. În notație multiplicativă, avem legile de compoziție:
 $\varphi : M \times M \rightarrow M, \varphi(a, b) = ab.$
3. Reuniunea pe $\mathcal{P}(E)$ mulțimea părților mulțimii E :
 $\varphi : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E), \varphi(X, Y) = X \cup Y.$
4. Intersecția pe $\mathcal{P}(E)$, mulțimea părților mulțimii E :
 $\varphi : \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E), \varphi(X, Y) = X \cap Y.$
5. Compunerea funcțiilor pe $\mathcal{F}(E)$, mulțimea funcțiilor definite pe E cu valori în E :
 $\varphi : \mathcal{F}(E) \times \mathcal{F}(E) \rightarrow \mathcal{F}(E), \varphi(f, g) = f \circ g.$

Considerând mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi și $n \in \mathbb{N}^*$, un număr natural, este cunoscută definiția împărțirii cu rest (a împărțirii euclidiene). Pentru orice $a \in \mathbb{Z}$ există $q, r \in \mathbb{Z}$, unic determinate, astfel încât $a = nq + r, 0 \leq r < n$.

Numărul r din această relație este cunoscut sub numele de restul împărțirii lui a prin n . Acest număr va fi notat

$$r = a \bmod n$$

și se citește „ a modulo n “. Acest număr se mai numește încă: **redusul modulo n** al numărului întreg a .

EXEMPLE

Dacă $n = 6$, avem:

$$\begin{array}{lll} 15 \bmod 6 = 3; & 18 \bmod 6 = 0; & -9 \bmod 6 = 3; \\ -13 \bmod 6 = 5; & 25 \bmod 6 = 1; & -11 \bmod 6 = 1. \end{array}$$

Acum putem defini legea de compoziție.

6. Adunarea modulo n . Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, definim **suma modulo n** a lui a cu b , notată $a \oplus b$ astfel:

$\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (a, b) \rightarrow \varphi(a, b) = a \oplus b$ prin $a \oplus b \stackrel{\text{def.}}{=} (a + b) \bmod n$, numită **adunarea modulo n** .

EXEMPLE

Dacă $n = 5$, avem:

$$\begin{array}{l} 3 \oplus 8 = (3 + 8) \bmod 5 = 11 \bmod 5 = 1; \\ (-4) \oplus 7 = (-4 + 7) \bmod 5 = 3 \bmod 5 = 3; \\ 9 \oplus (-12) = (9 + (-12)) \bmod 5 = (-3) \bmod 5 = 2; \\ 10 \oplus 4 = (10 + 4) \bmod 5 = 14 \bmod 5 = 4. \end{array}$$

7. Înmulțirea modulo n . Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, definim **produsul modulo n** al lui a cu b , notat cu $a \otimes b$ astfel:

$\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (a, b) \rightarrow \varphi(a, b) = a \otimes b$, prin $a \otimes b \stackrel{\text{def.}}{=} (ab) \bmod n$, numită **înmulțirea modulo n** .

EXEMPLE

Dacă $n = 5$, avem:

$$3 \otimes 7 = (3 \cdot 7) \bmod 5 = 21 \bmod 5 = 1;$$

$$4 \otimes 12 = (4 \cdot 12) \bmod 5 = 48 \bmod 5 = 3;$$

$$(-3) \otimes 8 = ((-3) \cdot 8) \bmod 5 = (-24) \bmod 5 = 1$$

$$(-4) \otimes (-13) = ((-4) \cdot (-13)) \bmod 5 = 52 \bmod 5 = 2.$$

Efectuați în clasă

Dacă $n = 6$, calculați:

1. a) $3 \oplus 13$; b) $4 \oplus 19$; c) $11 \oplus 17$; d) $(-3) \oplus 12$.

2. a) $5 \otimes 11$; b) $7 \otimes 14$; c) $8 \otimes (-5)$; d) $(-9) \otimes (-12)$.

1.2.2. Parte stabilă. Lege de compoziție indusă

Definiție

Fie M o mulțime pe care este dată o lege de compoziție φ :

$$\varphi : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow \varphi(x, y).$$

O submulțime H a lui M cu proprietatea:

$$\forall x, y \in H \Rightarrow \varphi(x, y) \in H$$

se numește **parte stabilă** a lui M în raport cu legea de compoziție φ .

Dacă H este o parte stabilă a lui M în raport cu legea de compoziție M , putem defini pe

H legea de compoziție: $\varphi' : H \times H \rightarrow H$, punând $\varphi'(x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} \varphi(x, y) \in H, \forall x, y \in H$, și se spune că φ' este **legea de compoziție indusă** pe H de către φ .

EXEMPLE

Vom nota $2\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ a numerelor întregi pare și $2\mathbb{Z} + 1 = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ mulțimea numerelor întregi impare. Avem $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ și $2\mathbb{Z} + 1 \subset \mathbb{Z}$.

1. Mulțimea $2\mathbb{Z}$ este o parte stabilă a lui \mathbb{Z} în raport cu operația de adunare a numerelor întregi.

Avem $M = \mathbb{Z}, H = 2\mathbb{Z}$ și legea de compoziție:

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow x + y.$$

Dacă $x, y \in 2\mathbb{Z}, x = 2k_1, y = 2k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, atunci $x + y = 2k_1 + 2k_2 = 2(k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}$, deci

$$+ : 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$$

(ceea ce exprimă faptul că suma a două numere întregi pare este un număr par), deci $H = 2\mathbb{Z}$ este parte stabilă a lui \mathbb{Z} în raport cu operația de adunare a numerelor întregi.

2. Mulțimea $2\mathbb{Z}$ este parte stabilă a lui \mathbb{Z} în raport cu operația de înmulțire a numerelor întregi.

Fie $x, y \in 2\mathbb{Z}, x = 2k_1, y = 2k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Atunci $xy = 2k_1 \cdot 2k_2 = 4k_1k_2 \in 2\mathbb{Z}$.

3. Mulțimea $2\mathbb{Z} + 1$ nu este parte stabilă a lui \mathbb{Z} în raport cu operația de adunare a numerelor întregi.

Fie $x, y \in 2\mathbb{Z} + 1$, $x = 2k_1 + 1$ și $y = 2k_2 + 1$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Rezultă $x + y = 2k_1 + 1 + 2k_2 + 1 = 2(k_1 + k_2 + 1) \notin 2\mathbb{Z} + 1$.

4. Mulțimea $2\mathbb{Z} + 1$ este parte stabilă a lui \mathbb{Z} în raport cu operația de înmulțire.

Pentru $x, y \in 2\mathbb{Z} + 1$, $x = 2k_1 + 1$ și $y = 2k_2 + 1$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, avem:

$$xy = (2k_1 + 1)(2k_2 + 1) = 2(2k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1,$$

deci $xy \in 2\mathbb{Z} + 1$, ceea ce demonstrează că $H = 2\mathbb{Z} + 1$ este parte stabilă a lui \mathbb{Z} în raport cu operația de înmulțire a numerelor întregi.

5. Pe mulțimea \mathbb{R} a numerelor reale definim legea de compoziție:

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y,$$

unde $x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - 2x - 2y + 6$.

Considerând submulțimea H a lui \mathbb{R} , $H = (2, \infty)$, să arătăm că submulțimea $(2, +\infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea de compoziție „*“.

Oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, rezultă că $x * y \in \mathbb{R}$, unde $x * y = xy - 2x - 2y + 6 \in \mathbb{R}$.

Pentru $H = (2, +\infty)$, deducem că $\forall x, y \in H$, rezultă $x * y \in H$. Fie $x, y \in (2, +\infty)$, deci $x > 2$, $y > 2$ sau $x - 2 > 0$, $y - 2 > 0$. Legea de compoziție „*“ se poate scrie sub forma: $x * y = (x - 2)(y - 2) + 2$, de unde deducem $\underbrace{(x - 2)(y - 2)}_{>0} + 2 > 2$, deci $x * y \in H$, ceea

ce demonstrează că $H = (2, +\infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea de compoziție.

1.2.3. Lege de compoziție internă

Legile de compoziție definite până acum sunt aplicații de forma:

$$\varphi : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow \varphi(x, y) \in M,$$

unde M este o mulțime nevidă. Aceste aplicații se mai numesc **legi de compoziție interne**.

Vom sublinia proprietatea unei legi de compoziție internă φ care este definită pe $M \times M$ cu valori în M astfel încât compusul a două elemente $x, y \in M$ este de asemenea un element din M , deci $\varphi(x, y) \in M$.

EXEMPLE

1. Fie $M = (-1, \infty)$ pe care definim aplicația $\varphi : M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow \varphi(x, y) = x * y$,

unde $x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy + x + y$.

Să dovedim că legea „*“ este o lege de compoziție internă.

Să dovedim că oricare ar fi $x, y \in M$, atunci $x * y \in M$. Putem scrie

$$x * y = xy + x + y = xy + x + y + 1 - 1 = (x + 1)(y + 1) - 1.$$

Din condiția $x, y \in (-1, \infty)$, deducem $x > -1$, $y > -1$, deci $x + 1 > 0$, $y + 1 > 0$, de unde rezultă $(x + 1)(y + 1) > 0$, prin urmare $(x + 1)(y + 1) - 1 > -1$, deci $x * y > -1$, de unde rezultă $x * y \in (-1, \infty)$.

2. Fie $M = (-1, 1)$ pe care este definită aplicația $\varphi : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow \varphi(x, y) = x * y$, unde $x * y \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{x+y}{1+xy}$. Vom arăta că aplicația „*” este o lege de compoziție, cu alte cuvinte

vom arăta că $\forall x, y \in (-1, 1)$ și compusul $x * y \in (-1, 1)$, deci $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$.

Această condiție este echivalentă cu sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} -1 < \frac{x+y}{1+xy}, \\ \frac{x+y}{1+xy} < 1 \end{cases}, \text{ echivalent cu sistemul } \begin{cases} \frac{x+y}{1+xy} + 1 > 0 \\ 1 - \frac{x+y}{1+xy} > 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} \frac{(x+1)(y+1)}{1+xy} > 0 & (1) \\ \frac{(x-1)(y-1)}{1+xy} > 0 & (2) \end{cases}.$$

Din condiția $x \in (-1, 1)$ rezultă $-1 < x < 1$ și obținem $-1 < x$, deci $x + 1 > 0$, respectiv $x < 1, x - 1 < 0$.

Analog pentru $y \in (-1, 1)$ rezultă $y + 1 > 0$ și $y - 1 < 0$ deci $(x + 1)(y + 1) > 0$ (1') și $(x - 1)(y - 1) > 0$ (1'').

Din $x, y \in (-1, 1)$, deducem $|x| < 1$ și $|y| < 1$, de unde rezultă $|x| |y| < 1$ sau $|xy| < 1$, deci $-1 < xy < 1$, adică $-1 < xy, 1 + xy > 0$ (1''') și obținem din (1') și (1''') respectiv (1'') și (1'''):

$$\frac{(x+1)(y+1)}{1+xy} > 0 \text{ și } \frac{(x-1)(y-1)}{1+xy} > 0,$$

ceea ce demonstrează că aplicația „*” este o lege de compoziție internă pe $M = (-1, 1)$.

Exerciții rezolvate

1. Fie $M = [3, +\infty)$ și aplicația $\varphi : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow \varphi(x, y) = x * y$,

unde $x * y \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$. Să demonstrăm că „*” este o lege de compoziție internă.

Soluție

Pentru orice $x, y \in [3, +\infty)$, rezultă $x \geq 3, y \geq 3$, deci $x^2 \geq 9, y^2 \geq 9$, de unde deducem

$x^2 + y^2 \geq 18$ sau $x^2 + y^2 - 9 \geq 9$, deci $\sqrt{x^2 + y^2 - 9} \geq 3$, ceea ce demonstrează că

$x * y = \sqrt{x^2 + y^2 - 9} \geq 3, x * y \in [3, +\infty)$.

2. Fie $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ și legea de compoziție: $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}), (A, B) \rightarrow AB$.

Dacă $H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q}) \mid A = \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix}, 4x^2 - 3y^2 = 1, x, y \in \mathbb{Q}\}$, să se demonstreze

că H este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

Soluție

Fie $A_1, A_2 \in H$, deci $A_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 & 3y_1 \\ y_1 & 2x_1 \end{pmatrix}, 4x_1^2 - 3y_1^2 = 1, x_1, y_1 \in \mathbb{Q}$, și $A_2 = \begin{pmatrix} 2x_2 & 3y_2 \\ y_2 & 2x_2 \end{pmatrix},$

$4x_2^2 - 3y_2^2 = 1, x_2, y_2 \in \mathbb{Q}$. Rezultă:

$$\begin{aligned}
 A_1 A_2 &= \begin{pmatrix} 2x_1 & 3y_1 \\ y_1 & 2x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_2 & 3y_2 \\ y_2 & 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1x_2 + 3y_1y_2 & 6x_1y_2 + 6x_2y_1 \\ 2x_2y_1 + 2x_1y_2 & 3y_1y_2 + 4x_1x_2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 2\left(2x_1x_2 + \frac{3}{2}y_1y_2\right) & 3(2x_1y_2 + 2x_2y_1) \\ (2x_1y_2 + 2x_2y_1) & 2\left(2x_1x_2 + \frac{3}{2}y_1y_2\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix}, \text{ unde } x, y \in \mathbb{Q}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Calculând } 4x^2 - 3y^2 &= 4\left(2x_1x_2 + \frac{3}{2}y_1y_2\right)^2 - 3(2x_1y_2 + 2x_2y_1)^2 = \\
 &= 4\left(4x_1^2x_2^2 + 6x_1x_2y_1y_2 + \frac{9}{4}y_1^2y_2^2\right) - 3\left(4x_1^2y_2^2 + 8x_1x_2y_1y_2 + 4x_2^2y_1^2\right) = \\
 &= 16x_1^2x_2^2 + 9y_1^2y_2^2 - 12x_1^2y_2^2 - 12x_2^2y_1^2 = 4x_1^2(4x_2^2 - 3y_2^2) - 3y_1^2(4x_2^2 - 3y_2^2) = \\
 &= (4x_1^2 - 3y_1^2)(4x_2^2 - 3y_2^2) = 1 \cdot 1 = 1,
 \end{aligned}$$

rezultă că H este parte stabilă pentru $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

1.3. Tabla unei legi de compoziție (tabla lui Cayley)

Fie M o mulțime finită $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Legea de compoziție $\varphi : M \times M \rightarrow M$, poate fi dată prin **tabla operației** φ , care constă dintr-un tabel cu n linii și n coloane, corespunzătoare celor n elemente ale lui M . În tabla legii de compoziție φ conține la intersecția liniei lui a_i cu coloana lui a_j elementul $\varphi(a_i, a_j)$:

φ	a_1	a_2	\dots	a_j	\dots	a_n
a_1				\vdots		
a_2				\vdots		
\vdots				\vdots		
a_i	\dots	\dots	\dots	$\varphi(a_i, a_j)$	\dots	\dots
\vdots				\vdots		
a_n				\vdots		

EXEMPLE

1. Fie $H = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$, $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, $\varepsilon^3 = 1$, adică mulțimea rădăcinilor de ordinul trei a unității. Avem $H \subset \mathbb{C}$. Întocmind tabla înmulțirii, legea de compoziție indusă pe H de înmulțirea numerelor complexe obținem:

\cdot	1	ε	ε^2
1	1	ε	ε^2
ε	ε	ε^2	1
ε^2	ε	1	ε^2

Rezultă că H este parte stabilă a lui \mathbb{C} în raport cu operația de înmulțire.

2. Fie $H = \{1, -1, i, -i\} \subset \mathbb{C}$. Operația indusă de înmulțirea numerelor complexe pe H

·	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	i
i	i	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

ne arată că submulțimea H a lui \mathbb{C} este parte stabilă a lui \mathbb{C} în raport cu operația de înmulțire a numerelor complexe.

Efectuați în clasă

1. Fie $M = [3, +\infty)$ și $\varphi : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow \varphi(x, y) = x * y$, unde $x * y = xy - 3x - 3y + 12$. Să se arate că „*” este o lege de compoziție internă.
2. Fie legea de compoziție $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$, unde $\varphi(x, y) = x * y \stackrel{\text{def.}}{=} \min(x, y)$ și $H = \{-5, -1, 0, 1\}$. Să se întocmească tabla operației induse pe H de legea „*” și să se arate că H este parte stabilă a lui \mathbb{Z} în raport cu legea „*”.

Temă

1. Fie mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C} = \{z \mid z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}$ și operația de înmulțire: $\varphi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (z_1, z_2) \rightarrow \varphi(z_1, z_2) = z_1 z_2$. Dacă $H = \mathbb{Z}[i] = \{z \mid z = x + iy, x, y \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că H este parte stabilă a lui \mathbb{C} în raport cu operația de înmulțire.
2. Fie $M = (1, +\infty) \subset \mathbb{R}$ și legea de compoziție $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y$, unde $x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy + x + y + 2$. Să se demonstreze că $H = M$ este parte stabilă pentru mulțimea \mathbb{Z} în raport cu legea „*”.
3. Fie $M = (-1, 1)$ și aplicația $\varphi : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$, unde $\varphi(x, y) = x * y \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{x - y}{1 - xy}$. Să se demonstreze că aplicația „*” este o lege de compoziție internă.
4. Fie aplicația: $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$, $\varphi(x, y) = x * y \stackrel{\text{def.}}{=} \max(x, y)$. Să se arate că $H = \{0, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{Z}$ este parte stabilă în raport cu legea „*”.
5. Fie $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și operația: $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), (A, B) \rightarrow AB$. Considerăm submulțimea $H = \{A(x) \mid A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\}$, să se arate că H este parte stabilă pentru $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

6. În mulțimea numerelor naturale nenule considerăm legea de compoziție: $\varphi : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, $(a, b) \rightarrow \varphi(a, b)$, unde $\varphi(x, y) = x * y \stackrel{\text{def.}}{=} \text{c.m.m.d.c.}(a, b)$. Dacă vom considera submulțimea lui \mathbb{N}^* , $H = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \text{ divide } 15\}$, să se arate că H este parte stabilă a lui \mathbb{N}^* în raport cu legea „*“.
7. Fie legea $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$, unde $\varphi(x, y) = x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - 2(x + y) + 6$. Să se demonstreze că $H = (1, 3)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea „*“.
8. Fie $\varphi : M_3(\mathbb{R}) \times M_3(\mathbb{R}) \rightarrow M_3(\mathbb{R})$, $(A, B) \rightarrow AB$. Considerând matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea $H = \{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subset M_3(\mathbb{R})$ să se arate că H este parte stabilă a mulțimii matricelor $M_3(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor și să se întocmească tabela operației pentru H .
9. Fie matricea $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Să se demonstreze că submulțimea $H = \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset M_2(\mathbb{R})$ este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.
10. Fie $H = \{a \in \mathbb{N} \mid a \text{ divide } 12\}$. Arătați că H este o parte stabilă a lui \mathbb{N} în raport cu legile de compoziție: $a \perp b \stackrel{\text{def.}}{=} \text{c.m.m.d.c.}(a, b)$, $a \top b \stackrel{\text{def.}}{=} \text{c.m.m.m.c.}(a, b)$, $a, b \in \mathbb{N}$. Alcătuiți tablele legilor induse.

1.4. Proprietăți ale operațiilor algebrice

În definiția unei operații algebrice (a unei legi de compoziție):

$$\varphi : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow \varphi(x, y)$$

a fost impusă o singură restricție și anume: prin legea φ , oricăror două elemente $x, y \in M$ cu alte cuvinte oricărei perechi ordonate $(x, y) \in M \times M$ îi corespunde un singur element $\varphi(x, y)$ din M și numai unul.

Natura elementelor mulțimii M și modul cum acționează legea de compoziție nu au importanță în definiția legii de compoziție.

Studiul legilor de compoziție, care se bazează numai pe definiție, nu conduce la obținerea unor rezultate deosebite. Din analiza legilor de compoziție se deduc proprietăți comune care se regăsesc în exemplele concrete studiate.

În cele ce urmează, vom studia în cazul general proprietăți ale unei legi de compoziție, cum ar fi, de exemplu, cele care au fost întâlnite la operațiile definite pe mulțimea numerelor complexe, adunarea sau înmulțirea:

- a) asociativitate;
- b) element neutru;
- c) elemente simetrizabile;
- d) comutativitate.

1.4.1. Asociativitatea

Definiție

O lege de compoziție

$$*: M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y,$$

se numește **asociativă** dacă:

$$(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in M.$$

Vom preciza că mulțimea M este o mulțime nevidă, care este dotată cu legea de compoziție „*“.

Utilizarea parantezelor în definiția asociativității pentru prima parte a egalității în expresia:

$$(x * y) * z$$

impune procedura de calcul: se determină compusul lui x cu y și apoi compusul elementului $(x * y)$ cu z în această ordine. Pentru expresia:

$$x * (y * z)$$

procedura de calcul este: se determină compusul lui y cu z și apoi compusul elementului x cu elementul $(y * z)$, în această ordine.

Vom preciza că în cazul în care legea de compoziție este dată în notație aditivă:

$$M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x + y,$$

proprietatea de asociativitate se scrie astfel:

$$(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in M.$$

Dacă legea de compoziție este dată în notație multiplicativă:

$$M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow xy,$$

proprietatea de asociativitate se scrie astfel:

$$(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in M.$$

EXEMPLE

1. Fie M una dintre mulțimile de numere $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Operația de adunare:

$$+ : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x + y,$$

este asociativă: $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in M$.

De asemenea, operația de înmulțire:

$$\cdot : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x \cdot y = xy, \text{ este asociativă:}$$

$$(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in M.$$

2. Fie mulțimea $M = (2, +\infty)$. Se definește aplicația: $* : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y$, unde $x * y \stackrel{\text{def}}{=} xy - 2x - 2y + 6$.

Să dovedim că este o lege de compoziție internă asociativă.

Putem scrie $x * y = (x - 2)(y - 2) + 2$. Din condiția $x, y \in M$, rezultă $x > 2$ și $y > 2$, deci $x - 2 > 0, y - 2 > 0$, deci $(x - 2)(y - 2) > 0$, de unde deducem $(x - 2)(y - 2) + 2 > 2$, deci $x * y \in M$.

Pentru a stabili dacă „*“ este asociativă $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in M$, vom calcula:

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= [(x - 2)(y - 2) + 2] * z = [(x - 2)(y - 2) + 2 - 2](z - 2) + 2 = \\ &= (x - 2)(y - 2)(z - 2) + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{și } x * (y * z) &= x * [(y - 2)(z - 2) + 2] = \\ &= (x - 2)[(y - 2)(z - 2) + 2 - 2] + 2 = (x - 2)(y - 2)(z - 2) + 2. \end{aligned}$$

Astfel am dovedit că legea de compoziție „*“ este asociativă.

3. Fie $M = (-1, 1)$ și aplicația : $M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y$, unde $x * y \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{x + y}{1 + xy}$.

Am demonstrat că este o lege de compoziție internă. Să verificăm că această lege este asociativă.

$$\text{Avem: } (x * y) * z = \frac{x + y}{1 + xy} * z = \frac{\frac{x + y}{1 + xy} + z}{1 + \frac{x + y}{1 + xy} \cdot z} = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + yz + zx}.$$

$$\text{Analog: } x * (y * z) = x * \frac{y + z}{1 + yz} = \frac{x + \frac{y + z}{1 + yz}}{1 + x \cdot \frac{y + z}{1 + yz}} = \frac{x + y + z + xyz}{1 + xy + yz + zx},$$

ceea ce probează proprietatea de asociativitate.

4. Fie mulțimea $M = (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ și aplicația $M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{xy}$.

Aplicația este o lege de compoziție internă; din condiția $x, y \in M$ rezultă $x * y = \sqrt{xy} \in M$.

Studiind proprietatea de asociativitate, deducem:

$$(x * y) * z = \sqrt{xy} * z = \sqrt{\sqrt{xy} \cdot z} = \sqrt{\sqrt{xyz^2}} = \sqrt[4]{xyz^2}, \text{ respectiv}$$

$$x * (y * z) = x * \sqrt{yz} = \sqrt{x \sqrt{yz}} = \sqrt{\sqrt{x^2 yz}} = \sqrt[4]{x^2 yz},$$

ceea ce dovedește că legea de compoziție „*“ nu este asociativă (legea studiată reprezintă media geometrică și rezultă că nu este asociativă).

5. Un exemplu de lege de compoziție asociativă este produsul matricelor.

Fie $M = \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), (A, B) \rightarrow AB$. Se știe că este verificată proprietatea de asociativitate: $(AB) \cdot C = A \cdot (BC), \forall A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Efectuați în clasă

1. Fie $M = (3, +\infty)$ și aplicația $* : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y$, unde $x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - 3x - 3y + 12$.

a) Arătați că aplicația „*“ este o lege de compoziție internă.

b) Verificați că este satisfăcută proprietatea de asociativitate.

2. Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Arătați că este verificată

proprietatea de asociativitate pentru operația de adunare și operația de înmulțire a matricelor: $(A + B) + C = A + (B + C)$ și $(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$.

3. Fie mulțimea $M = (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ și aplicația $M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{x + y}{2}$

(este definiția mediei aritmetice a două numere: $m_{\text{arit.}} = \frac{x + y}{2}, x, y \in \mathbb{R}_+^*$).

Arătați că nu este verificată proprietatea de asociativitate.

Temă

1. Fie $M = 2\mathbb{Z}$ mulțimea numerelor întregi pare. Să se demonstreze că operațiile de adunare și de înmulțire:
 $+$: $2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$, $(x, y) \rightarrow x + y$ și \cdot : $2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$, $(x, y) \rightarrow xy$
sunt legi de compoziție asociative.
2. Fie $M = 2\mathbb{Z} + 1$ mulțimea numerelor întregi impare.
Să se demonstreze că operația de înmulțire $\cdot : M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow xy$, este asociativă, dar operația de adunare nu este o lege de compoziție internă, deci $+$: $M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow x + y$, deci nu este asociativă.
3. Fie $M = (1, 2) \subset \mathbb{R}$ și legea de compoziție $*$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - x - y + 2$. Să se arate că M este o parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea „ $*$ ” și apoi să se verifice că legea indusă pe M este asociativă.
4. Fie $M = (-1, 1)$ și aplicația $*$: $M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{x + y}{1 + xy}$.
Să se verifice dacă „ $*$ ” este o lege de compoziție internă și apoi să se verifice asociativitatea.
5. Fie $M = \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ și aplicația $*$: $M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow x * y$, unde
 $x * y \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}$ este o lege de compoziție internă. Să se arate că această lege induce pe mulțimea $(1, +\infty)$ o lege de compoziție asociativă.
6. Fie $H = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, \det A = 1 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Să se arate că aplicația $\cdot : H \times H \rightarrow H$,
 $(A, B) \rightarrow A \cdot B \stackrel{\text{not}}{=} AB$ este o lege de compoziție internă (H este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor) asociativă.
7. Fie $M = \mathbb{Z}$ mulțimea numerelor întregi și legea
 \circ : $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \rightarrow x \circ y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y - xy$ numită **compunerea circulară**.
Să se arate că legea de compoziție „ \circ ” este asociativă.
8. Fie $M = [-1, +\infty) \subset \mathbb{R}$ și legea de compoziție $*$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y + xy$.
Să se arate că M este o parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea „ $*$ ” și este asociativă.
9. Fie $M = \mathbb{R}$ și legea de compoziție $*$: $M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} mx + y$, $m \in \mathbb{R}$.
Să se determine parametrul m astfel încât legea de compoziție să fie asociativă.
10. Fie $M = \mathbb{R}$ și legea: $M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow x \circ y = ax + by - 1$.
Să se determine a, b astfel încât legea „ \circ ” să fie asociativă.

1.4.2. Elementul neutru

Dacă M este una dintre mulțimile $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, atunci numerele 0 și 1 au proprietățile cunoscute:

$$0 + x = x + 0 = x, \forall x \in M,$$

respectiv

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \forall x \in M.$$

De asemenea, am văzut că pentru $M = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, elementele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

pentru operațiile de adunare și înmulțire a matricelor satisfac proprietățile:

$$O_2 + A = A + O_2 = A, \forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),$$

$$I_2 \cdot A = A \cdot I_2 = A, \forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Această proprietate va fi studiată în cazul general.

Definiție

Un element $e \in M$ se numește **element neutru** pentru o lege de compoziție $*$: $M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y$, dacă $e * x = x * e = x, \forall x \in M$.

Este foarte important rezultatul dat în următoarea teoremă referitor la unicitatea elementului neutru.

Teoremă

Dacă o lege de compoziție are element neutru, atunci acesta este unic.

Demonstrație

Presupunem că legea de compoziție $M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y$ admite două elemente neutre e și e' . Avem: $e * e' = e' * e = e'$ pentru că e este element neutru. De asemenea, $e' * e = e * e' = e$, pentru că și e' este element neutru. Din aceste egalități rezultă $e' = e$, ceea ce demonstrează că, în cazul în care există element neutru, el este unic determinat.

Observații:

Dacă legea de compoziție este dată în notație aditivă, elementul neutru se notează de regulă cu 0 și se numește **elementul zero**. Dacă legea de compoziție este dată în notație multiplicativă, elementul neutru se notează cu 1 și se numește **element unitate**. Avem:

$$0 + x = x + 0 = x, \forall x \in M,$$

respectiv $1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \forall x \in M$.

EXEMPLE

1. Fie $H = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$, $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, $\varepsilon^3 = 1$ și operația indusă de înmulțirea numerelor complexe. Din tabela înmulțirii pe H , rezultă:

\cdot	1	ε	ε^2
1	1	ε	ε^2
ε	ε	ε^2	1
ε^2	ε^2	1	ε

Deducem că elementul neutru este $e = 1$.

2. Fie legea de compoziție: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow x \circ y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y - xy$. Această lege de compoziție admite element neutru. Dacă $e \in \mathbb{Z}$ este element neutru: $e \circ x = x \circ e = x, \forall x \in \mathbb{Z}$. Putem scrie $x = e \circ x = e + x - ex, \forall x \in \mathbb{Z}$, de unde rezultă $e - ex = 0$ sau $e(1 - x) = 0$. Această relație este satisfăcută $\forall x \in \mathbb{Z}$ dacă $e = 0$. În acest caz avem $x \circ 0 = x + 0 - x \cdot 0 = x$, deci elementul neutru este $e = 0$.

Exerciții rezolvate

1. Fie mulțimea $M = \mathbb{R}$ și legea de compoziție $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - x - y + 2$. Să se studieze existența elementului neutru.

Soluție

Notând cu e elementul neutru, avem: $e * x = x * e = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Din $x = e * x$, deducem $x = ex - e - x + 2$ sau $2x - 2 - e(x - 1) = 0, (2 - e)(x - 1) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci $2 - e = 0, e = 2$. Avem $x * e = x * 2 = x \cdot 2 - x - 2 + 2 = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Fie $H = \mathbb{C} \setminus \{i\} \subset \mathbb{C}$ și legea: $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (z_1, z_2) \rightarrow z_1 \top z_2 \stackrel{\text{def.}}{=} z_1 z_2 - i(z_1 + z_2) + i - 1$. Să se arate că H este o parte stabilă a lui \mathbb{C} în raport cu legea de compoziție indusă și că această lege este asociativă și admite element neutru.

Soluție

Legea de compoziție „ \top ” poate fi scrisă sub forma: $z_1 \top z_2 = (z_1 - i)(z_2 - i) + i$.

Din condiția $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ rezultă $z_1 \neq i, z_2 \neq i$, de unde deducem $z_1 - i \neq 0$ și $z_2 - i \neq 0$, deci $(z_1 - i)(z_2 - i) \neq 0$ și avem $z_1 \top z_2 = (z_1 - i)(z_2 - i) + i \neq i, z_1 \top z_2 \in H$.

Pentru a studia asociativitatea: $(z_1 \top z_2) \top z_3 = z_1 \top (z_2 \top z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in H$, avem:
 $(z_1 \top z_2) \top z_3 = [(z_1 - i)(z_2 - i) + i] \top z_3 = [(z_1 - i)(z_2 - i) + i - i](z_3 - i) + i =$
 $= (z_1 - i)(z_2 - i)(z_3 - i) + i$.

Analog $z_1 \top (z_2 \top z_3) = z_1 \top [(z_2 - i)(z_3 - i) + i] =$
 $= (z_1 - i)[(z_2 - i)(z_3 - i) + i - i] + i = (z_1 - i)(z_2 - i)(z_3 - i) + i$,
 deci rezultă că legea „ \top ” este asociativă.

Pentru elementul neutru pe care îl vom nota cu e avem: $e \top z = z \top e = z, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.
 Din egalitatea $z = e \top z$, rezultă $z = (e - i)(z - i) + i$, și putem scrie: $z - i - (e - i)(z - i) = 0,$
 $(z - i)(1 - e + i) = 0, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$; deducem $e = 1 + i$. De asemenea, avem:
 $z \top e = (z - i)(e - i) + i = (z - i)(1 + i - i) + i = z - i + i = z, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

3. Fie mulțimea $M = (\sqrt{3}, +\infty)$ dotată cu legea de compoziție: $M \times M \rightarrow M,$
 $(x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - (x + y)\sqrt{3} + 3 + \sqrt{3}$. Să se arate că legea „ $*$ ” admite element neutru.

Soluție

Dacă notăm cu e elementul neutru, $e * x = x * e = x, \forall x \in M$, din egalitatea $x = e * x$ rezultă: $x = ex - (e + x)\sqrt{3} + 3 + \sqrt{3}, x - \sqrt{3} = (e - \sqrt{3})(x - \sqrt{3}), (x - \sqrt{3})(e - \sqrt{3} - 1) = 0,$
 $\forall x \in M$, de unde rezultă: $e = 1 + \sqrt{3}$. Efectuând calculele, rezultă

$$\begin{aligned} x * e &= (x - \sqrt{3})(e - \sqrt{3}) + \sqrt{3} = (x - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3} - \sqrt{3}) + \sqrt{3} = \\ &= x - \sqrt{3} + \sqrt{3} = x, \forall x \in M. \end{aligned}$$

4. Fie $M = 2\mathbb{Z}$ și legea indusă pe M de adunarea și înmulțirea numerelor întregi. Să se arate că legea de compoziție indusă pe mulțimea $2\mathbb{Z}$ în raport cu adunarea admite element neutru, dar nu admite element neutru în raport cu operația de înmulțire.

Soluție

Fie e_+ elementul neutru în raport cu operația de adunare: $e_+ + x = x + e_+ = x, \forall x \in 2\mathbb{Z}$.

Avem $e_+ = 0 = 2 \cdot 0$, astfel încât $0 + x = x + 0 = x, \forall x \in 2\mathbb{Z}$.

Pentru înmulțire: $e \cdot x = x \cdot e = x, \forall x \in 2\mathbb{Z}$, avem $e \cdot x = x$, deci $(e - 1)x = 0, \forall x \in 2\mathbb{Z}$, de unde rezultă $e = 1$, dar $1 \notin 2\mathbb{Z}$.

Efectuați în clasă

1. Fie $M = 2\mathbb{Z} + 1$ mulțimea numerelor întregi impare și operațiile:
 $+$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow x + y$ și \cdot : $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow xy$.
 Arătați că legea de compoziție indusă pe $2\mathbb{Z} + 1$ de adunarea numerelor întregi nu admite element neutru, dar legea de compoziție indusă pe $2\mathbb{Z} + 1$ de înmulțirea numerelor întregi, admite element neutru.
2. Fie mulțimea $M = (2, +\infty)$ și aplicația $*$: $M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} (x-2)(y-2) + 2$.
 Arătați că „ $*$ “ este o lege de compoziție internă care admite element neutru.
3. Fie $H = \{-1, 1, -i, i\} \subset \mathbb{C}$. Să se întocmească tabla înmulțirii pe H , indusă de înmulțirea numerelor complexe și să se determine elementul neutru.

Temă

1. Fie mulțimea $M = (-2, +\infty)$ și legea de compoziție $*$: $M \times M \rightarrow M,$
 $(x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy + 2x + 2y + 2$. Arătați că legea „ $*$ “ admite element neutru.
2. Fie $M = (-1, 1)$ și legea de compoziție $*$: $M \times M \rightarrow M,$
 $(x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{x+y}{1+xy}$. Determinați elementul neutru al legii „ $*$ “.
3. Fie $M = [5, 7]$ și aplicația $*$: $M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - 6x - 6y + 42$.
 Arătați că „ $*$ “ este o lege de compoziție cu element neutru.
4. Fie mulțimea $M = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ și legea de compoziție $*$: $M \times M \rightarrow M,$
 $(z_1, z_2) \rightarrow z_1 * z_2 \stackrel{\text{def.}}{=} z_1 z_2 + i(z_1 + z_2) - 1 - i$.
 Să se arate că legea „ $*$ “ admite element neutru.
5. Fie $M = [-2, +\infty)$ și aplicația $*$: $M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} 3xy + 6(x+y) + 10$.
 Arătați că „ $*$ “ este lege de compoziție internă și admite element neutru.
6. Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție „ $*$ “ prin: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - x - y - 2$.
 Cercetați existența elementului neutru.

7. Pe \mathbb{Q} se consideră legea de compoziție $*$: $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $(x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y - \frac{1}{2}xy$.
 Arătați că $M = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ este o parte stabilă a lui \mathbb{Q} în raport cu legea de compoziție „ $*$ ” și determinați elementul neutru.
8. Se definește pe \mathbb{C} legea de compoziție „ $*$ ” prin relația: $z_1 * z_2 = (1 - i)z_1z_2$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $i = \sqrt{-1}$. Să se găsească elementul neutru.
9. Pe \mathbb{Z} se definește legea de compoziție „ $*$ ” astfel: $x * y = xy - 3(x + y) + 12$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$. Să se determine elementul neutru.
10. Pe mulțimea $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ se consideră legea de compoziție $*$: $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \rightarrow x * y = e^{\ln x \cdot \ln y}$. Determinați elementul neutru u ale legii „ $*$ ”.

1.4.3. Elementele simetrizabile

Fie M o mulțime nevidă, înzestrată cu o lege de compoziție $M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow x * y$. Pentru această lege de compoziție vom presupune că este asociativă și admite element neutru, notat e .

Definiție

Un element $x \in M$ se numește **simetrizabil** în raport cu legea de compoziție „ $*$ ” (asociativă și cu element neutru)

$$* : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y$$

dacă există $x' \in M$ astfel încât $x' * x = x * x' = e$.

În cazul în care un element $x \in M$ este simetrizabil în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”, atunci simetricul x' este unic.

Teoremă

Dacă x' este simetricul elementului x , pentru legea de compoziție

$$* : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y,$$

atunci x' este unic.

Demonstrație:

Dacă x' și x'' ar fi elemente simetrice al elementului $x \in M$, atunci:

$$x' * x = x * x' = e, x' \text{ fiind simetric al elementului } x \in M.$$

De asemenea, $x'' * x = x * x'' = e$, x'' fiind presupus element simetric al lui $x \in M$.

Putem scrie: $x' = x' * e = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''$.

Observație:

Dacă legea de compoziție este dată în notație aditivă, simetricul unui element $x \in M$ se notează cu $-x$ și se numește **opusul** lui x : $(-x) + x = x + (-x) = 0$.

Dacă legea de compoziție este dată în notație multiplicativă, simetricul lui x în cazul în care există se notează cu x^{-1} și se numește **inversul** lui x ; $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$.

EXEMPLE

1. Fie $M = \mathbb{Z}$ și operația de adunare $+: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \rightarrow x + y$.

Orice element x este simetrizabil și simetricul său este $-x$, deci:

$$(-x) + x = x + (-x) = 0.$$

Pentru operația de înmulțire: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \rightarrow xy$, singurele elemente simetrizabile, (care admit elemente inverse) sunt -1 și 1 , deci $1^{-1} = 1$, $(-1)^{-1} = -1$.

2. Fie $M = (2, +\infty)$ și legea de compoziție:

$$*: M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - 2(x + y) + 6.$$

Determinăm elementele simetrizabile ale mulțimii M în raport cu legea „*“.

Într-adevăr „*“ este o lege de compoziție internă: $x * y = (x - 2)(y - 2) + 2 > 2$,

$\forall x, y \in (2, +\infty)$. Notând cu e elementul neutru avem: $e * x = x * e = x$, $\forall x \in M$. Avem: $e * x = x$, $(e - 2)(x - 2) + 2 = x$ sau $(e - 2)(x - 2) - (x - 2) = 0$, $(x - 2)(e - 3) = 0$, $\forall x \in (2, +\infty)$, de unde rezultă $e = 3 \in M$. Este verificată și condiția

$$x * e = x, x * e = x * 3 = (x - 2)(3 - 2) + 2 = x - 2 + 2 = x, \forall x \in M.$$

Notăm cu x' simetricul unui element $x \in M$. Avem: $x' * x = x * x' = 3$, $e = 3$, $\forall x \in M$.

Din egalitatea $x' * x = 3$, deducem: $(x' - 2)(x - 2) + 2 = 3$, $(x' - 2)(x - 2) = 1$, $x' - 2 = \frac{1}{x - 2}$, $x' = 2 + \frac{1}{x - 2} \in M$ sau $x' = \frac{2x - 3}{x - 2}$, $\forall x \in (2, +\infty)$. Este verificată și egalitatea: $x * x' = 3$.

Într-adevăr: $x * x' = x * \left(2 + \frac{1}{x - 2}\right) = (x - 2) \left(2 + \frac{1}{x - 2} - 2\right) + 2 = (x - 2) \frac{1}{x - 2} + 2 = 3$.

Unele proprietăți remarcabile sunt prezentate în următoarea teoremă:

Teoremă

Dacă $x, y \in M$ sunt elemente simetrizabile în raport cu o lege de compoziție $*: M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow x * y$ (asociativă și cu element neutru), atunci: $x * y$ și x' sunt inversabile și avem:

1. $(x * y)' = y' * x'$;
2. $(x')' = x$.

Demonstrație:

Vom dovedi că $y' * x'$ este simetricul lui $x * y$. Avem:

$$(y' * x') * (x * y) = y' * (x' * (x * y)) = y' * ((x' * x) * y) = y' * (e * y) = y' * y = e.$$

Analog $(x * y) * (y' * x') = x * (y * (y' * x')) = x * ((y * y') * x') = x * (e * x') = x * x' = e$.

Rezultă că elementul $x * y$ este simetrizabil și $(x * y)' = y' * x'$.

Pentru proprietatea $(x')' = x$, avem: $x' * x = x * x' = e$, deci x este simetricul lui x' , deci $(x')' = x$.

Observații:

Dacă legea de compoziție este dată în notație aditivă, proprietățile prezentate în teorema precedentă se transcriu astfel:

$$-(x + y) = (-y) + (-x), \text{ respectiv } -(-x) = x.$$

Dacă legea de compoziție este dată în notație multiplicativă, avem:

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}, \text{ respectiv } (x^{-1})^{-1} = x.$$

În cazul unei legi de compoziție notată aditiv se face următoarea convenție:

$$\boxed{x - y \stackrel{\text{def.}}{=} x + (-y)}.$$

Exercițiu rezolvat:

Fie mulțimea $M = \{z = a - b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 5b^2 = 1\}$ dotată cu legea:

$$\cdot : M \times M \rightarrow M, (z_1, z_2) \rightarrow z_1z_2.$$

Să se demonstreze că orice element $z \in M$ este simetrizabil.

Soluție

Fie $z_1, z_2 \in M$, deci $z_1 = a_1 - b_1\sqrt{5}$, $z_2 = a_2 - b_2\sqrt{5}$; $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$, $a_1^2 - 5b_1^2 = 1$, $a_2^2 - 5b_2^2 = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Rezultă } z_1z_2 &= (a_1 - b_1\sqrt{5})(a_2 - b_2\sqrt{5}) = (a_1a_2 + 5b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{5}, \text{ unde} \\ a_1a_2 + 5b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1 &\in \mathbb{Q} \text{ și } (a_1a_2 + 5b_1b_2)^2 - 5(a_1b_2 + a_2b_1)^2 = a_1^2a_2^2 + 10a_1a_2b_1b_2 + \\ &+ 25b_1^2b_2^2 - 5a_1^2b_2^2 - 10a_1b_1a_2b_2 - 5a_2^2b_1^2 = a_1^2a_2^2 + 25b_1^2b_2^2 - 5a_1^2b_2^2 - 5a_2^2b_1^2 = \\ &= a_1^2(a_2^2 - 5b_2^2) - 5b_1^2(a_2^2 - 5b_2^2) = (a_1^2 - 5b_1^2)(a_2^2 - 5b_2^2) = 1 \cdot 1 = 1, \end{aligned}$$

deci este o lege de compoziție internă.

Se verifică cu ușurință, proprietatea de asociativitate:

$$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in M.$$

Cercetând existența elementului neutru avem: $e = e_1 - e_2\sqrt{5}$, astfel încât:

$$ez = ze = z, \forall z \in M.$$

Din egalitatea: $ez = z$, rezultă pentru $z = a - b\sqrt{5}$, $(e_1 - e_2\sqrt{5})(a - b\sqrt{5}) = a - b\sqrt{5}$;
 $(e_1a + 5e_2b) - (e_1b + e_2a)\sqrt{5} = a - b\sqrt{5}$, deci:

$$\begin{cases} e_1a + 5e_2b = a \\ e_1b + e_2a = b \end{cases},$$

de unde rezultă $e_1 = 1$ și $e_2 = 0$, deci $e = 1 - 0 \cdot \sqrt{5} = 1$, unde $e_1, e_2 \in \mathbb{Q}$ și $e_1^2 - 5e_2^2 = 1$.

Pentru $z = a - b\sqrt{5} \in M$, $a, b \in \mathbb{Q}$, vrem să determinăm elementele simetrice ale lui x .

Notând $z^{-1} = x - y\sqrt{5}$, $x, y \in \mathbb{Q}$, elementul simetric a lui z , avem $z^{-1} \cdot z = z \cdot z^{-1} = 1$.

Din egalitatea: $z^{-1} \cdot z = 1$, rezultă $(x - y\sqrt{5})(a - b\sqrt{5}) = 1$, $(xa + 5yb) - (xb + ya)\sqrt{5} = 1$ și se obține sistemul:

$$\begin{cases} xa + 5yb = 1 \\ xb + ya = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \times a \\ \times (-5b) \end{array} \begin{array}{l} \times (-b) \\ \times a \end{array}$$

Adunând ecuațiile sistemului obținem ecuația $x(a^2 - 5b^2) = a$, cu soluția $x = a$; rezultă și $y = -b$. Obținem $z^{-1} = a + b\sqrt{5}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, $a^2 - 5b^2 = 1$, de unde rezultă că este verificată și egalitatea $zz^{-1} = 1$:

$$z \cdot z^{-1} = (a - b\sqrt{5})(a + b\sqrt{5}) = a^2 - 5b^2 = 1.$$

Efectuați în clasă:

Fie mulțimea $M = (-2, +\infty)$ și aplicația:

$$* : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} 3xy + 6(x + y) + 10.$$

Demonstrați că:

- legea „ $*$ “ este o lege de compoziție internă;
- legea „ $*$ “ este asociativă;
- legea „ $*$ “ admite element neutru;
- elementele mulțimii M sunt simetrizabile.

Temă

- Fie $H = \{-1, 1, i, -i\} \subset \mathbb{C}$. Demonstrați că înmulțirea numerelor complexe induce pe H o lege de compoziție internă și să se determine inversele elementelor lui H .
- Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{2}(1 + x + y - xy)$.
Să se arate că legea este asociativă și are element neutru. Care sunt elementele simetrizabile?
- Fie legea de compoziție: $* : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y - 2xy$.
Determinați mulțimea elementelor simetrizabile.
- Pe \mathbb{Z} se definește legea de compoziție „ $*$ “ astfel: $x * y = xy - 3(x + y) + 12, \forall x, y \in \mathbb{Z}$.
Să se determine elementul neutru și elementele care nu sunt simetrizabile.
- Pe mulțimea $M = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ se definește legea de compoziție: $x * y = \frac{4xy + 3}{4(x + y + 1)}$.
Determinați elementul neutru și elementele simetrizabile.
- Pe mulțimea $M = \mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție „ $*$ “ astfel:
 $* : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} 2xy - 3x - 3y + 6$.
Determinați mulțimea elementelor simetrizabile în raport cu „ $*$ “.

1.4.4. Comutativitatea

Proprietățile studiate până acum pentru o lege de compoziție definită pe o mulțime nevidă au fost făcute cu restricția pentru compusul a două elemente x și y , care este primul element și respectiv al doilea element.

O importanță deosebită au legile de compoziție pentru care compusul a două elemente oarecare este independent de ordinea în care se face compunerea acestora.

Definiție

O lege de compoziție

$$* : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y$$

se numește **comutativă**, dacă

$$x * y = y * x, \forall x, y \in M.$$

EXEMPLE

1. Dacă M este una dintre $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ operațiile de adunare și înmulțire sunt comutative: $x + y = y + x, \forall x, y \in M, xy = yx, \forall x, y \in M$.

2. Operația de înmulțire a numerelor complexe $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow (z_1, z_2) \rightarrow z_1 z_2$ induce pe mulțimea $H = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\} \subset \mathbb{C}, \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, parte stabilă a lui \mathbb{C} , o operație comutativă. Din tabla înmulțirii deducem că legea de compoziție indusă este comutativă, tabla fiind simetrică față de diagonala principală.

\cdot	1	ε	ε^2
1	1	ε	ε^2
ε	ε	ε^2	1
ε^2	ε^2	1	ε

3. Fie mulțimea $M = (2, +\infty)$ dotată cu legea de compoziție $* : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - 2x - 2y + 6$. Legea de compoziție „ $*$ ” este comutativă: $x * y = y * x, \forall x, y \in M$. Avem $x * y = xy - 2x - 2y + 6 = yx - 2y + 6 = y * x, \forall x, y \in M$.

Să observăm ca legea de compoziție „ $*$ ” este simetrică în x și y ceea ce pune în evidență faptul ca legea de compoziție este comutativă.

Efectuați în clasă

- Arătați că operația de adunare a numerelor întregi pare $+ : 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow x + y$ este comutativă.
- Fie mulțimea $M = (3, +\infty)$ dotată cu legea de compoziție $* : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - 3x - 3y + 12$. Arătați că legea „ $*$ ” este comutativă.
- Fie $M = (3, 5)$ dotată cu aplicația $* : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - 4(x + y) + 20$. Arătați că „ $*$ ” este o lege de compoziție internă comutativă.
- Fie $M = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, verificați că $AB \neq BA$.
- Fie $M = \mathbb{R}$ și legea de compoziție $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y = 2x + 3y$. Arătați că legea „ $*$ ” nu este comutativă.

Temă

- Pe mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi se definește legea de compoziție: $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow x \circ y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y - xy$ numită compunerea circulară. Arătați ca legea „ \circ ” este asociativă și comutativă.
- Fie $M = (-\infty, 1)$ dotată cu aplicația $* : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{xy - 2}{x + y - 3}$. Demonstrați că este o lege de compoziție comutativă.
- Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} x + 4y & 2y \\ -7y & x - 4y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 - 2y^2 = 1 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Să se demonstreze că operația de înmulțire indusă pe mulțimea M este comutativă.

4. Fie $M = \left\{ A_x = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2(1-x) & 2x-1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^+ \right\}$ și legea de compoziție $\cdot : M \times M \rightarrow M$, $(A_x, A_y) \rightarrow A_x A_y$. Să se demonstreze că legea de compoziție indusă de înmulțirea matricelor este o lege comutativă.
5. Fie mulțimea $M = (0, +\infty) - \{1\}$ și aplicația $* : M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} x^{\ln \sqrt[3]{y}}$. Să se demonstreze că este o lege de compoziție internă, comutativă.
6. Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy + ax + by$. Să se determine a și b astfel încât legea să fie asociativă și comutativă.
7. Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy + 2ax + by$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât legea de compoziție „*” să fie comutativă și asociativă.
8. Pe mulțimea \mathbb{R} se consideră legea de compoziție „*”: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} (1-a)x + ay - a$. Să se determine a astfel încât legea „*” să fie comutativă.
9. Fie legea $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} 2xy + ax + by$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât legea de compoziție „*” să fie comutativă și asociativă.
10. Pe mulțimea $M = (1, +\infty)$ se consideră operația $x * y = 1 + (x-1)^{\lg(y-1)}$. Să se arate că:
 a) legea „*” este o lege de compoziție pe M ; b) legea „*” este asociativă;
 c) legea „*” este comutativă.

Teste pentru verificarea cunoștințelor

- | A | B |
|---|---|
| 1. Fie mulțimea $M = \mathbb{Z}$ și legea de compoziție $* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \rightarrow x * y$, unde: $x * y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y - 2$. Să se demonstreze că legea „*”:
a) este asociativă; (1p)
b) admite element neutru; (1p)
c) elementele mulțimii sunt simetrizabile; (1p)
d) legea „*” este comutativă. (1p) | 1. Fie mulțimea $M = \mathbb{Z}$ și legea de compoziție $* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \rightarrow x * y$, unde: $x * y = x + y - 3$. Să se demonstreze că legea „*”:
a) este asociativă; (1p)
b) admite element neutru; (1p)
c) elementele mulțimii sunt simetrizabile; (1p)
d) legea este comutativă. (1p) |
| 2. Fie mulțimea $M = (0, +\infty) \setminus \{1\}$ și legea de compoziție $* : M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow x * y$, unde: $x * y = x^{5 \ln y}$. Să se demonstreze că legea „*”:
a) este asociativă; (2p)
b) admite element neutru; (1p)
c) elementele mulțimii sunt simetrizabile; (1p)
d) legea este comutativă. (1p) | 2. Fie mulțimea $M = (0, +\infty) \setminus \{1\}$ și legea de compoziție $* : M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow x * y$, unde: $x * y = x^{7 \ln y}$. Să se demonstreze că legea „*”:
a) este asociativă; (2p)
b) admite element neutru; (1p)
c) elementele mulțimii sunt simetrizabile; (1p)
d) legea este comutativă. (1p) |

Notă: Timpul efectiv de lucru este de 50 de minute pentru fiecare variantă. Se acordă 1 punct din oficiu.

2. Grup, exemple: grupuri numerice, grupuri de matrice, grupuri de permutări, \mathbb{Z}_n

2.1. Definiții și exemple

Definiție

O mulțime nevidă M este **monoid** în raport cu o lege de compoziție „ $*$ ” definită pe M , $*$: $M \times M \rightarrow M$, $(x, y) \rightarrow x * y$, dacă sunt satisfăcute următoarele axiome:

$$\mathbf{M}_1. (x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in M;$$

$$\mathbf{M}_2. \exists e \in M \text{ astfel încât } e * x = x * e = x, \forall x \in M.$$

Monoidul va fi notat $(M, *)$. Dacă, în plus, este satisfăcută și axioma:

$$\mathbf{M}_4. x * y = y * x = e, \forall x, y \in M,$$

spunem că monoidul este comutativ.

Una dintre structurile importante pe care le vom studia este structura de grup. Fie o mulțime nevidă pe care o vom nota cu G , dotată cu o lege de compoziție.

Definiție

Un cuplu $(G, *)$ format dintr-o mulțime nevidă G și o lege de compoziție pe G , $*$: $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \rightarrow x * y$ se numește **grup** dacă sunt satisfăcute următoarele axiome:

$$\mathbf{G}_1. (x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in G;$$

$$\mathbf{G}_2. \exists e \in G \text{ astfel încât } e * x = x * e = x, \forall x \in G;$$

$$\mathbf{G}_3. \forall x \in G, \exists x' \in G \text{ astfel încât } x' * x = x * x' = e.$$

Ansamblul de condiții G_1, G_2, G_3 poartă numele de **axiomele grupului**, unde G_2 asigură existența **elementului neutru al grupului G** . Elementul x' a cărui existență este asigurată de axioma G_3 se numește **simetricul** lui x .

Dacă, în plus, este satisfăcută și axioma

$$\mathbf{G}_4. x * y = y * x, \forall x, y \in G,$$

atunci $(G, *)$ se numește **grup abelian** sau **grup comutativ**.

2.1.1. Grupuri numerice

EXEMPLE

1. Fie mulțimea \mathbb{Z} dotată cu legea de compoziție

$$* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y - 1.$$

Perechea $(\mathbb{Z}, *)$ este grup abelian.

Legea „ $*$ ” este o lege de compoziție internă: $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, atunci $x * y = x + y - 1 \in \mathbb{Z}$ și este verificat ansamblul de axiome:

$$\mathbf{G}_1. (x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in \mathbb{Z}.$$

Avem $(x * y) * z = (x + y - 1) * z = (x + y - 1) + z - 1 = x + y + z - 2$, respectiv $x * (y * z) = x * (y + z - 1) = x + (y + z - 1) - 1 = x + y + z - 2$.

G₂. $\exists e \in G$ astfel încât $e * x = x * e = x, \forall x \in G$.

Din condiția $e * x = x$, rezultă $e + x - 1 = x$, deci $e = 1 \in \mathbb{Z}$.

Este verificată și condiția $x * e = x, x * 1 = x + 1 - 1 = x, \forall x \in \mathbb{Z}$.

G₃. $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists x' \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x' * x = x * x' = e$. Din condiția $x' * x = 1$, rezultă $x' + x - 1 = 1$, deci $x' = 2 - x, x' \in \mathbb{Z}$.

Este verificată și condiția $x * x' = 1; x * x' = x + (2 - x) - 1 = 1$.

Rezultă $(\mathbb{Z}, *)$ este grup. În plus, este verificată și axioma:

G₄. $x * y = y * x, \forall x, y \in \mathbb{Z}$. Avem: $x * y = x + y - 1 = y + x - 1 = y * x$, deci $(G, *)$ este grup abelian.

2. Fie $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$. Arătăm că aplicația $*$: $G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} x^{\ln y}$ este o lege de compoziție pe G și $(G, *)$ este grup comutativ.

Legea „*” este o lege de compoziție internă $x, y \in G \Rightarrow \ln y \in \mathbb{R}^*, \text{ deci } x^{\ln y} \in G$ și ansamblul de axiome din definiția grupului G_1, G_2, G_3 se verifică.

G₁. $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in G$. Avem $(x * y) * z = x^{\ln y} * z = (x^{\ln y})^{\ln z} = x^{\ln y \cdot \ln z}$, de unde rezultă $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z$.

G₃. Pentru a nu se crea confuzia elementului neutru cu baza logaritmului natural, vom nota elementul neutru cu e_* și avem: $\exists e_* \in G$ astfel încât $e_* * x = x * e_* = x, \forall x \in G$. Din egalitatea $e_* * x = x$, rezultă: $e_*^{\ln x} = x$ și deducem $\ln e_*^{\ln x} = \ln x, \ln x \cdot \ln e_* = \ln x$, deci

$$(\ln e_* - 1) \ln x = 0, \text{ unde } \ln x \neq 0 \text{ și rezultă } \ln e_* = 1, \text{ deci } \ln e_* = \ln e, e_* = e, \text{ unde } e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Este verificată și egalitatea $x * e_* = x$. Avem: $x * e_* = x * e = x^{\ln e} = x^1 = x, \forall x \in G$. Rezultă că $(G, *)$ este grup.

În plus, este verificată și axioma:

G₄. $x * y = y * x, \forall x, y \in G$. Într-adevăr, $x * y = x^{\ln y} = e^{\ln x^{\ln y}} = e^{\ln y \cdot \ln x} = e^{\ln y^{\ln x}} = y^{\ln x} = y * x$, de unde rezultă că $(G, *)$ este grup abelian.

2.1.2. Grupuri de funcții

EXEMPLU

Grupul lui Klein. Fie $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ și $K = \{1_E, u, v, w\}$, unde $1_E, u, v, w$ sunt funcțiile:

$$1_E : E \rightarrow E, 1_E(x) = (x_1, x_2),$$

$$u : E \rightarrow E, u(x) = (x_1, -x_2),$$

$$v : E \rightarrow E, v(x) = (-x_1, x_2),$$

$$w : E \rightarrow E, w(x) = (-x_1, -x_2),$$

oricare ar fi $x \in (x_1, x_2) \in E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Semnificațiile acestor funcții, dacă se consideră un sistem de axe de coordonate $(x_1 O x_2)$ sunt: $1_E(x)$ este funcția identică; $u(x)$ este simetria față de axa Ox_2 , $v(x)$ este simetria față de axa Ox_1 , iar $w(x)$ este simetria față de origine (fig. 1).

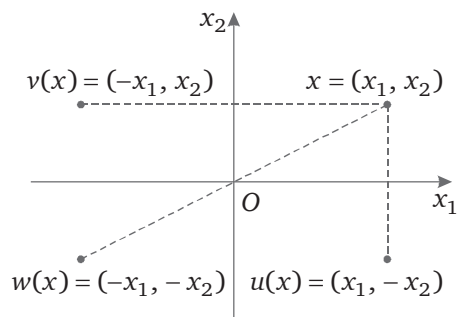


Fig. 1

Pentru orice $x \in E$, $x = (x_1, x_2)$, dacă compunem două funcții din $K = \{1_E, u, v, w\}$, se obține tot o funcție din K .

De exemplu:

$$\begin{aligned} (1_E \circ u)(x) &= 1_E(u(x)) = 1_E(x_1, -x_2) = (x_1, -x_2) = u(x), \\ (1_E \circ v)(x) &= v(x), \quad (1_E \circ w)(w) = w(x). \\ (u \circ v)(x) &= u(v(x)) = u((-x_1, x_2)) = (-x_1, -x_2) = w(x); \\ (v \circ w)(x) &= v(w(x)) = v((-x_1, -x_2)) = (x_1, -x_2) = u(x); \\ (w \circ u)(x) &= w(u(x)) = w((x_1, -x_2)) = (-x_1, x_2) = v(x); \\ (w \circ w)(x) &= w(w(x)) = w((-x_1, -x_2)) = (x_1, x_2) = 1_E(x). \end{aligned}$$

Dacă alcătuim tabla operației indusă pe K de compunerea funcțiilor, obținem:

\circ	1_E	u	v	w
1_E	1_E	u	v	w
u	u	1_E	w	v
v	v	w	1_E	u
w	w	v	u	1_E

Observație:

În cazul general al compunerii funcțiilor sunt verificate axiomele:

M_1 . Asociativitatea: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, $\forall f, g, h \in \mathcal{F}$.

M_2 . Element neutru: $\exists 1_E \in \mathcal{F}$ astfel încât $1_E \circ f = f \circ 1_E = f$, $\forall f \in \mathcal{F}$.

Putem spune că (\mathcal{F}, \circ) este o structură de **monoid**.

Pentru mulțimea funcțiilor $K = \{1_E, u, v, w\}$ sunt satisfăcute axiomele:

G_1 . $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, $\forall f, g, h \in K$.

G_2 . $\exists 1_E \in K$ astfel încât $1_E \circ f = f \circ 1_E = f$, $\forall f \in K$.

G_3 . $\exists f^{-1} \in K$ astfel încât $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = 1_E$, $\forall f \in K$.

Avem: $1_E^{-1} = 1_E$, $u^{-1} = u$, $v^{-1} = v$, $w^{-1} = w$.

În plus:

G_4 . $f \circ g = g \circ f$, $\forall f, g \in K$.

Această proprietate rezultă din observația că tabla operației lui K este simetrică în raport cu diagonala principală.

Funcțiile $1_E, u, v, w$ sunt bijective. Avem: $1_E \circ 1_E = 1_E$, $u \circ u = 1_E$, $v \circ v = 1_E$, $w \circ w = 1_E$.

Așadar, (K, \circ) este grup, numit **grupul lui Klein**. Am constatat că grupul lui Klein este comutativ.

Efectuați în clasă

Fie mulțimea $G = (2, +\infty)$ și aplicația:

$$* : G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x * y = xy - 2x - 2y + 6.$$

a) Arătați că „ $*$ ” este o lege de compoziție internă.

b) Arătați că (G, \circ) este grup abelian.

c) Calculați $x * x * x$ și apoi demonstrați că

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x - 2)^n + 2.$$

2.2. Reguli de calcul într-un grup

Proprietatea G_3 a unui grup ne arată că orice element al unui grup este simetrizabil în raport cu operația acestuia. Rezultă că un grup este un monoid în care este verificată și axioma G_3 .

În continuare, vom preciza câteva proprietăți importante ale grupurilor.

2.2.1. Simplificarea la stânga și la dreapta într-un grup

Teoremă

Într-un grup $(G, *)$ sunt adevărate regulile de simplificare la stânga și la dreapta:

$$a * b = a * c \Rightarrow b = c,$$

respectiv

$$b * a = c * a \Rightarrow b = c.$$

Demonstrație

Fie $a, b, c \in G$ astfel încât $a * b = a * c$ și a' simetricul elementului a , deci $a' * a = a * a' = e$.
Avem: $b = e * b = (a' * a) * b = a' * (a * b) = a' * (a * c) = (a' * a) * c = e * c = c$.

În mod analog demonstrăm și pentru simplificarea la dreapta. Presupunem $b * a = c * a$.
Avem: $b = b * e = b * (a * a') = (b * a) * a' = (c * a) * a' = c * (a * a') = c * e = c$.

2.2.2. Ecuații într-un grup

Teoremă

Fie $(G, *)$ un grup. Oricare ar fi $a, b \in G$ ecuațiile

$$a * x = b \text{ și } y * a = b$$

au soluții unice în G , anume:

$$x = a' * b, y = b * a',$$

unde a' este simetricul lui a .

Demonstrație

Să arătăm că $x = a' * b$ este soluție a ecuației $a * x = b$, unde a' este simetricul lui a , $a' * a = a * a' = e$. Avem: $a * x = a * (a' * b) = (a * a') * b = e * b = b$.

Unicitatea. Dacă x_1 și x_2 sunt soluții din G ale ecuației $a * x = b$, atunci $a * x_1 = b = a * x_2$, deci $a * x_1 = a * x_2$ și conform regulii de simplificare la stânga obținem $x_1 = x_2$. Rezultă că ecuația $a * x = b$ admite soluție unică în grupul $(G, *)$.

Procedând analog și pentru ecuația $y * a = b$, deducem: Dacă y_1 și y_2 sunt soluții din G ale ecuației $y * a = b$, avem: $y_1 * a = b = y_2 * a$, de unde rezultă $y_1 * a = y_2 * a$ și, folosind regula de simplificare la dreapta, obținem $y_1 = y_2$. Așadar, ecuația $y * a = b$ are cel mult o soluție în G . Această soluție este $y = b * a'$.

Într-adevăr, $y * a = (b * a') * a = b * (a' * a) = b * e = b$.

2.3. Grupuri de permutări

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, considerând mulțimea $E = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ și aplicațiile bijective $f: E \rightarrow E$, vom nota:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

și cu S_n mulțimea acestor funcții bijective ale cărei elemente se numesc *permutări de gradul n*.

Pentru oricare două elemente $\sigma, \tau \in S_1$ care sunt funcții, se definește operația de compunere definită a funcțiilor $(\sigma \circ \tau)(k) = \sigma(\tau(k))$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Pentru $n = 3$, $E = \{1, 2, 3\}$, elementele mulțimii S_3 , în număr de $3! = 6$, sunt:

$$1_E = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

și avem mulțimea $S_3 = \{e, \sigma, \pi, \alpha, \beta, \gamma\}$.

Elementele acestei mulțimi fiind funcții bijective, prin compunerea a două permutări se obține o funcție bijectivă.

EXEMPLU

Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculăm $(\sigma \circ \gamma)(k)$, $k \in \{1, 2, 3\}$.

Avem: $(\sigma \circ \gamma)(1) = \sigma(\gamma(1)) = \sigma(2) = 3 = \beta(1)$.

$(\sigma \circ \gamma)(2) = \sigma(\gamma(2)) = \sigma(1) = 2 = \beta(2)$.

$(\sigma \circ \gamma)(3) = \sigma(\gamma(3)) = \sigma(3) = 1 = \beta(3)$.

și am obținut: $\sigma \circ \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \beta$.

Întocmim tabela operației induse pe S_3 de către compunerea funcțiilor, numită *compunerea permutărilor* de trei obiecte.

Din analiza tablei compunerii permutărilor de trei obiecte, rezultă că „o” este o lege de compoziție internă. Precizăm că mulțimea funcțiilor în raport cu operația de compunere este *asociativă*. Pentru S_3 , avem: $1_E = e \in S_3$, unde e este elementul neutru și din tabela compunerii rezultă că orice element din S_3 este simetrizabil, anume:

\circ	e	σ	π	α	β	γ
e	e	σ	π	α	β	γ
σ	σ	π	e	γ	α	β
π	π	e	σ	β	γ	α
α	α	β	γ	e	σ	π
β	β	γ	α	π	e	σ
γ	γ	α	β	σ	π	e

$$e^{-1} = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \sigma^{-1} = \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \pi^{-1} = \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\alpha^{-1} = \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \beta^{-1} = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \gamma^{-1} = \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Fiind verificate axiomele G_1, G_2, G_3 din definiția unui grup, rezultă că (S_3, \circ) este grup, numit **grupul permutărilor de trei obiecte** sau **grupul simetric de grad 3**. Vom preciza că acest grup *nu este comutativ*. Din tabla operației lui S_3 deducem, de exemplu, că:

$$\alpha \circ \pi = \gamma \neq \beta = \pi \circ \alpha; \quad \pi \circ \beta = \gamma \neq \alpha = \beta \circ \pi.$$

În general, dacă $n > 1$ și $E = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, atunci mulțimea S_n a funcțiilor bijective de la E la E formează un grup în raport cu operația de compunere a funcțiilor, notată „ \circ ”; (S_n, \circ) se numește **grupul permutărilor de n obiecte** sau **grupul simetric de grad n** .

2.4. Grupuri de resturi modulo n (\mathbb{Z}_n)

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ și $a \in \mathbb{Z}$, conform definiției împărțirii cu rest rezultă că există $q, r \in \mathbb{Z}$ unic determinați astfel încât:

$$a = nq + r, \quad 0 \leq r < n.$$

Din relația precedentă, deducem că numărul r , unic determinat, este restul împărțirii lui a la n și se mai notează:

$$r = a \bmod n$$

numit și **redusul modulo n al lui a** .

Resturile posibile ale împărțirii numerelor întregi prin $n \in \mathbb{N}^*$ sunt:

$$0, 1, 2, \dots, r, \dots, n-1,$$

mulțime notată cu:

$$\mathfrak{R}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Operațiile induse pe \mathfrak{R}_n de către adunarea și înmulțirea modulo n sunt:

$$\oplus : \mathfrak{R}_n \times \mathfrak{R}_n \rightarrow \mathfrak{R}_n, (a, b) \rightarrow a \oplus b \stackrel{\text{def.}}{=} (a + b) \bmod n;$$

$$\otimes : \mathfrak{R}_n \times \mathfrak{R}_n \rightarrow \mathfrak{R}_n, (a, b) \rightarrow a \otimes b \stackrel{\text{def.}}{=} (ab) \bmod n.$$

Pentru $n = 3$, $\mathfrak{R}_3 = \{0, 1, 2\}$ tablele operațiilor induse pe \mathfrak{R}_3 de către adunarea și înmulțirea modulo 3 sunt cele alăturate:

\oplus	0 1 2	\otimes	0 1 2
0	0 1 2	0	0 0 0
1	1 2 0	1	0 1 2
2	2 0 1	2	0 2 1

Pentru $n = 4$, $\mathfrak{R}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, tablele operațiilor induse pe \mathfrak{R}_4 de către adunarea și înmulțirea modulo 4 sunt cele alăturate:

\oplus	0 1 2 3	\otimes	0 1 2 3
0	0 1 2 3	0	0 0 0 0
1	1 2 3 0	1	0 1 2 3
2	2 3 0 1	2	0 2 0 2
3	3 0 1 2	3	0 3 2 1

Analizând, pentru $n = 4$, $\mathfrak{R}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ vom observa că (\mathfrak{R}_4, \oplus) este o structură de grup abelian, unde sunt verificate axiomele G_1, G_2, G_3, G_4 și:

$$e = 0; \quad -0 = 0; \quad -1 = 3; \quad -2 = 2; \quad -3 = 1.$$

Precizăm că, în general, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathfrak{R}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, de unde rezultă că (\mathfrak{R}_n, \oplus) este o structură de grup abelian, numit **grupul resturilor modulo n** .

Pentru $a \in \mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{N}^*$ se definesc mulțimile:

$$C_0, C_1, \dots, C_r, \dots, C_{n-1}, \text{ unde:}$$

$$C_0 = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \bmod n = 0\} = \{nh \mid h \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z};$$

$$C_1 = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \bmod n = 1\} = \{nh + 1 \mid h \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z} + 1;$$

$$\dots$$

$$C_r = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \bmod n = r\} = \{nh + r \mid h \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z} + r;$$

...

$$C_{n-1} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \bmod n = n-1\} = \{nh + n-1 \mid h \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z} + n-1$$

și se numesc *clase de resturi modulo n*.

Clasa de resturi modulo r se notează cu C_r sau \hat{r} :

$$\hat{r} = C_r = n\mathbb{Z} + r, \quad r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

În acest fel, se obține **mulțimea claselor de resturi modulo n** , notată cu \mathbb{Z}_n :

$$\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}$$

Pe mulțimea \mathbb{Z}_n a claselor de resturi modulo n , se definesc operațiile de adunare și de înmulțire:

$$+ : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, \quad (\hat{a}, \hat{b}) \rightarrow \hat{a} + \hat{b} \stackrel{\text{def.}}{=} \widehat{a \oplus b}, \quad \cdot : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, \quad (\hat{a}, \hat{b}) \rightarrow \hat{a}\hat{b} \stackrel{\text{def.}}{=} \widehat{a \otimes b}.$$

Fie $n = 4$. Rezultă $\mathbb{Z}_4 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$ și tabla adunării este alături.

Analizând tabla adunării claselor de resturi modulo 4, deducem că sunt verificate axiomele G_1, G_2, G_3, G_4 ale unui grup comutativ, unde:

$$e = \hat{0}, \quad \hat{0} = \hat{0}, \quad \widehat{-1} = \hat{3}, \quad \widehat{-2} = \hat{2}, \quad \widehat{-3} = \hat{1}.$$

și tabla adunării este simetrică față de diagonala principală:

$$\hat{x} + \hat{y} = \hat{y} + \hat{x}, \quad \forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_n.$$

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

În general, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}$, avem că $(\mathbb{Z}_n, +)$, este o structură de grup abelian, numit **grupul claselor de resturi modulo n** pentru operația de adunare.

2.5. Grupuri de matrice

EXEMPLU

Fie mulțimea $M = \left\{ A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ și operația de înmulțire a matricelor:

$$\times : M \times M \rightarrow M, \quad (A_\alpha, B_\beta) \rightarrow A_\alpha \cdot B_\beta.$$

Se verifică axiomele grupului G_1, G_2, G_3 și G_4 , deci (M, \times) este grup abelian.

Efectuați în clasă

1. Pentru $n = 2$, $E_2 = \{1, 2\}$ să se scrie permutările lui S_2 și să se întocmească tabla compunerii.

2. Pentru $n = 6$, $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$, să se întocmească tabla adunării și să se verifice că

$(\mathbb{Z}_6, +)$ este o structură de grup abelian.

Observație: Stabiliți dacă (\mathbb{Z}, \cdot) este o structură de grup. Justificați.

Temă

1. Fie mulțimea $G = \mathbb{Q} \setminus \{3\}$, unde \mathbb{Q} este mulțimea numerelor raționale și legea de compoziție $*$: $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \rightarrow x * y$, unde: $x * y = x + y - \frac{1}{3}xy$.

Să se demonstreze că $(G, *)$ este grup abelian.

2. Fie mulțimea $G = (2, +\infty) \setminus \{3\}$ și aplicația $*$: $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \rightarrow x * y$, unde: $x * y = (x - 2)^{\frac{1}{2} \ln(y-2)} + 2$.

Să se demonstreze că $(G, *)$ este grup abelian.

3. Fie mulțimea numerelor întregi, $k \in \mathbb{Z}$ și aplicația $*$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \rightarrow x * y$, unde: $x * y = x + y + ky$.

Să se determine $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(\mathbb{Z}, *)$ să fie o structură de grup abelian.

4. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și legea de compoziție $*$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow x * y$, unde: $x * y = ax + by$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $(\mathbb{R}, *)$ să fie o structură de grup abelian.

5. Fie mulțimea $G = (-2, +\infty)$ și legea de compoziție $*$: $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \rightarrow x * y$, unde: $x * y = xy + 2(x + y) + 2$. Să se demonstreze că $(G, *)$ este o structură de grup abelian.

6. Fie $M = \mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\}$ și funcțiile $f_i: M \rightarrow M$, $i = 1, 2, 3, 4$, unde:

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{x-1}{x+1}, f_3(x) = -\frac{1}{x} \text{ și } f_4(x) = -\frac{x+1}{x-1}.$$

Considerând mulțimea $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ și operația de compunere a funcțiilor, notată cu „ \circ ” să se demonstreze că (G, \circ) este o structură de grup comutativ.

7. Fie mulțimea matricelor pătratice de ordinul doi $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 0 \right\}$.

Să se demonstreze că mulțimea M în raport cu operația de înmulțire a matricelor este o structură de grup.

8. Fie mulțimea $M = \left\{ A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ și operația de înmulțire a matricelor

$\times: M \times M \rightarrow M$, $(A_\alpha, B_\beta) \rightarrow A_\alpha \times B_\beta$. Demonstrați că (M, \times) este structură de grup.

9. Fie mulțimea matricelor pătratice de ordinul doi $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2y \\ 7 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q}, x^2 - 7y^2 = 1 \right\}$.

Să se demonstreze că (M, \times) este o structură de grup în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

10. Fie mulțimea $M = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$ și funcțiile $f_i : M \rightarrow M$, $i = 1, 2, 3$, unde:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{x + \sqrt{3}}{1 - x\sqrt{3}} \quad \text{și} \quad f_3(x) = \frac{x - \sqrt{3}}{1 + x\sqrt{3}}.$$

Notând $G = \{f_1, f_2, f_3\}$ și operația de compunere a funcțiilor cu „ \circ ” să se demonstreze că (G, \circ) este o structură de grup.

11. Fie mulțimea $G = (-3, 3)$ și legea de compoziție $* : G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \rightarrow x * y$, unde:
 $x * y = \frac{9(x+y)}{9+xy}$. Să se demonstreze că $(G, *)$ este o structură de grup abelian.

3. Morfisme și izomorfisme de grupuri

Definiție

Fie $(G, *)$ și (Γ, \circ) două grupuri. O funcție

$$f : G \rightarrow \Gamma$$

se numește **morfism de grupuri** dacă:

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y), \quad \forall x, y \in G.$$

EXEMPLE

1. Fie grupul aditiv al numerelor reale $(\mathbb{R}, +)$ și grupul multiplicativ al mulțimii numerelor reale strict pozitive (\mathbb{R}_+^*, \cdot) .

Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = e^x$, este un morfism de grupuri.

Condiția $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ este satisfăcută:

$$f(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \cdot f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Considerând aceleași grupuri $(\mathbb{R}, +)$ și (\mathbb{R}_+^*, \cdot) , funcția $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, cu $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, este un morfism de grupuri.

Condiția $f(xy) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$ este verificată:

$$f(xy) = \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*.$$

3. Fie grupul multiplicativ al numerelor reale, strict pozitive (\mathbb{R}_+^*, \cdot) și grupul (G, \cdot) , unde $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$ și „ \cdot ” este operația de înmulțire a matricelor.

Funcția: $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow G$, $f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ este un morfism de grupuri. Avem:

$$f(xy) = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = f(x) \cdot f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*.$$

În practică s-a constatat că numărul exemplurilor de grupuri este considerabil și din acest motiv se impune o clasificare a acestora în funcție de proprietatea lor. Două grupuri $(G, *)$ și (Γ, \circ) vor fi declarate ca fiind de *aceiași tip (izotipice)* dacă cele două grupuri G și Γ sunt la fel de bogate în elemente și operațiile celor două grupuri, mai puțin o bijecție $f: G \rightarrow \Gamma$, acționează la fel asupra elementelor celor două grupuri G și Γ .

Definiție

Fie $(G, *)$ și (Γ, \circ) două grupuri. O aplicație bijectivă $f: G \rightarrow \Gamma$ se numește **izomorfism** de grupuri dacă:

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in G.$$

Vom spune că grupul G este **izomorf** cu grupul Γ și scriem $G \simeq \Gamma$. În caz contrar spunem că grupul G **nu este izomorf** cu grupul Γ și scriem $G \neq \Gamma$.

Dacă vom reprezenta geometric cele două mulțimi G și Γ și imaginile elementelor x, y și $x * y$ prin obținem imaginea din figura 2.

Din cele arătate și din figura alăturată rezultă **imaginea compusului** a două elemente $f(x * y)$ este compusul imaginilor $f(x) \circ f(y)$.

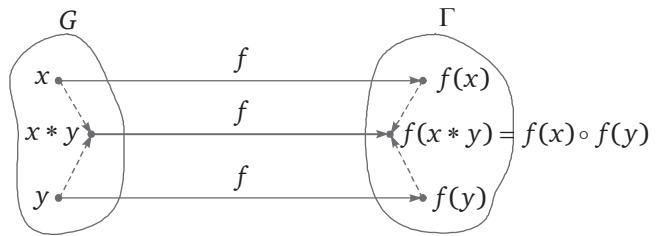


Fig. 2

EXEMPLE

Fie (\mathbb{R}_+^*, \cdot) , unde $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$, grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive și grupul $(\Gamma, *)$, unde $\Gamma = (-1, 1)$, iar legea de compoziție este:

$$\Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{x + y}{1 + xy}.$$

Să arătăm că aplicația: $f: (0, +\infty) \rightarrow (-1, 1), f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ este un izomorfism de la grupul (\mathbb{R}_+^*, \cdot) la grupul $(\Gamma, *)$.

În rezolvare vom considera că au fost studiate cele două grupuri (\mathbb{R}_+^*, \cdot) , (Γ, \circ) și vom analiza proprietatea de izomorfism. Pentru aceasta este necesar să demonstrăm că:

1. $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \Gamma, f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, este funcție bijectivă;

2. $f(xy) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Funcția $f(x) = \frac{1-x}{1+x}, f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \Gamma$ este bijectivă:

a) Injektivitatea: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ și $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $x_1 = x_2$.

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ și $f(x_1) = f(x_2)$, rezultă $\frac{1-x_1}{1+x_1} = \frac{1-x_2}{1+x_2}, (1-x_1)(1+x_2) =$

$= (1+x_1)(1-x_2), 1-x_1+x_2-x_1x_2 = 1+x_1-x_2-x_1x_2,$

deci $-x_1+x_2 = x_1-x_2$ sau $2(x_1-x_2) = 0$ și obținem $x_1 = x_2$, deci f este injectivă.

b) Surjectivitatea: $\forall y \in \Gamma$ există $x \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $f(x) = y$.

Din $y = \frac{1-x}{1+x}$, deducem $y(1+x) = 1-x \Rightarrow x = \frac{1-y}{1+y}$ și avem

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{1 - \frac{1-y}{1+y}}{1 + \frac{1-y}{1+y}} = \frac{1+y-1+y}{1+y+1-y} = \frac{2y}{2} = y.$$

Rezultă că funcția f este bijectivă

2. Este verificată și identitatea $f(xy) = f(x) * f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} \text{Avem } f(xy) &= \frac{1-xy}{1+xy}, \text{ respectiv } f(x) * f(y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} = \frac{\frac{1-x}{1+x} + \frac{1-y}{1+y}}{1 + \frac{1-x}{1+x} \times \frac{1-y}{1+y}} = \\ &= \frac{(1-x)(1+y) + (1+x)(1-y)}{(1+x)(1+y) + (1-x)(1-y)} = \frac{1-x+y-xy+1+x-y-xy}{1+x+y+xy+1-x-y+xy} = \\ &= \frac{2-2xy}{2+2xy} = \frac{2(1-xy)}{2(1+xy)} = \frac{1-xy}{1+xy}, \text{ deci } f(xy) = f(x) * f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

Astfel am demonstrat că grupul (\mathbb{R}_+^*, \cdot) este izomorf cu grupul $(\Gamma, *)$.

Un rezultat important este dat de următoarea

Teoremă

Fie $(G, *)$ și (Γ, \circ) două grupuri. Dacă $f: G \rightarrow \Gamma$ este un izomorfism, atunci și $f^{-1}: \Gamma \rightarrow G$ este izomorfism.

Demonstrație

Din ipoteză, funcția $f: G \rightarrow \Gamma$ este bijectivă, de unde rezultă că există inversa f^{-1} a funcției f , $f^{-1}: \Gamma \rightarrow G$ și f^{-1} este de asemenea bijectivă.

Fie $u, v \in \Gamma$. Cum f este aplicație bijectivă, există $x, y \in G$ unic determinați astfel încât $f(x) = u$ și $f(y) = v$. De asemenea, avem $f^{-1}(u) = x$ și $f^{-1}(v) = y$. Reprezentând geometric aplicația $f: G \rightarrow \Gamma$, rezultă

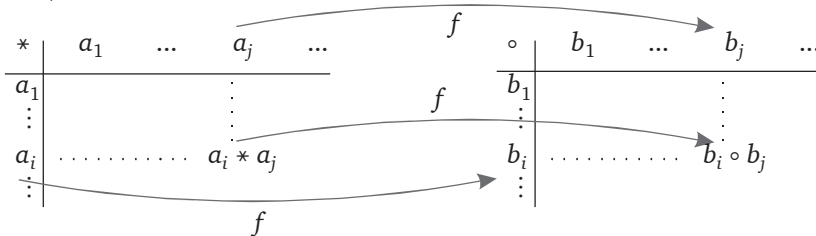


Fig. 3

Avem: $u \circ v = f(x) \circ f(y) = f(x * y)$, de unde $f^{-1}(u \circ v) = x * y = f^{-1}(u) * f^{-1}(v)$, $\forall u, v \in \Gamma$. Cum funcția $f^{-1}: \Gamma \rightarrow G$ este bijectivă și este îndeplinită condiția: $f^{-1}(u \circ v) = f^{-1}(u) * f^{-1}(v)$, $\forall u, v \in \Gamma$, rezultă că grupul (Γ, \circ) este izomorf cu grupul $(G, *)$ și scriem $(\Gamma, \circ) \simeq (G, *)$ sau $\Gamma \simeq G$.

EXEMPLU

În exemplul studiat mai înainte am arătat că grupurile (\mathbb{R}_+^*, \cdot) și $(\Gamma, *)$ sunt izomorfe, unde $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \Gamma, f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \mathbb{R}_+^* = (0, +\infty), \Gamma = (-1, 1)$ și $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.

Funcția f fiind bijectivă, este inversabilă și avem: $f^{-1}: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ și f^{-1} este bijectivă.

Avem $f^{-1}(y) = x = \frac{1-y}{1+y}$ sau $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Să arătăm că este îndeplinită și a doua condiție din definiția izomorfismului:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x * y) &= \frac{1 - x * y}{1 + x * y} = \frac{1 - \frac{x+y}{1+xy}}{1 + \frac{x+y}{1+xy}} = \frac{1 + xy - x - y}{1 + xy + x + y} = \frac{(1-x) - (1-x)y}{(1+x) + (1+x)y} = \\ &= \frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)} = \frac{1-x}{1+x} \times \frac{1-y}{1+y} = f(x) \cdot f(y). \end{aligned}$$

Rezultă că grupurile $(\Gamma, *)$ și (\mathbb{R}_+^*, \cdot) sunt izomorfe, $(\Gamma, *) \simeq (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$.

Efectuați în clasă

- Arătați că mulțimea $M = \mathbb{R}^*$, în raport cu operația de înmulțire $\cdot: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, (x, y) \rightarrow xy$, este grup abelian, notat prin (\mathbb{R}^*, \cdot) și numit grupul multiplicativ al numerelor reale, nenule.
- Arătați că $M = G = \left\{ \begin{pmatrix} 2-x & 1-x \\ 2(x-1) & 2x-1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este grup abelian în raport cu operația de înmulțire indusă pe G de înmulțirea matricelor, (G, \cdot) .
- Arătați că $f: \mathbb{R}^* \rightarrow G, f(x) = \begin{pmatrix} 2-x & 1-x \\ 2(x-1) & 2x-1 \end{pmatrix}$, cu $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2-x & 1-x \\ 2(x-1) & 2x-1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}$, este un izomorfism de grupuri, adică $(\mathbb{R}^*, \cdot) \simeq (G, \cdot)$.
- Arătați că $f^{-1}: G \rightarrow \mathbb{R}^*$, unde $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2-x & 1-x \\ 2(x-1) & 2x-1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}$, este, de asemenea, un izomorfism de grupuri, adică $(G, \cdot) \simeq (\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Temă

- Fie grupurile: $(\mathbb{R}, +)$ grupul aditiv al numerelor reale și (\mathbb{R}_+^*, \cdot) grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive.
Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*, f(x) = e^x$ este un izomorfism de grupuri.
Arătați că $f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ este, de asemenea, un izomorfism de grupuri.

2. a) Să se demonstreze că $(G, *)$ este grup, unde

$$G = (2, +\infty), * : G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - 2x - 2y + 6.$$

b) Să se demonstreze că (Γ, \circ) este grup, unde

$$\Gamma = (3, +\infty), \circ : \Gamma \times \Gamma \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x \circ y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - 3x - 3y + 12.$$

c) Arătați că $f : G \rightarrow \Gamma, f(x) = x + 1$ este un izomorfism de grupuri.

d) Arătați că $f^{-1} : \Gamma \rightarrow G$ este de asemenea un izomorfism de grupuri, unde $f(x) = x + 1$.

e) Arătați că $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \Gamma, f(x) = x + 3$ este un izomorfism între grupul (\mathbb{R}_+^*, \cdot) , numit grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive, și grupul (Γ, \circ) definit la subpunctul b) al acestui exercițiu.

3. Pe mulțimea \mathbb{Z} se definesc operațiile „*“ și „o“ astfel:

$$x * y = x + y + 1, \forall x, y \in \mathbb{Z} \quad \text{și} \quad x \circ y = x + y - 1, \forall x, y \in \mathbb{Z}.$$

Să se arate că $(\mathbb{Z}, *)$ și (\mathbb{Z}, \circ) sunt grupuri izomorfe.

4. Se consideră grupurile:

$$(M, \cdot), \text{ unde } M = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ 3x & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q}, x^2 + y^2 \neq 0 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ și}$$

$$(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), \cdot) \text{ unde } \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Să se arate că cele două grupuri sunt izomorfe.

5. Se consideră grupurile:

$$(\mathbb{R}, *), x * y = x + y - 2, \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ și}$$

$$(\mathbb{R}, \circ), x \circ y = x + y - 5, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \alpha x + \beta$, să stabilească un izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}, *)$ la grupul (\mathbb{R}, \circ) .

6. Fie $M = G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in 2\mathbb{Z} + 1 \right\}$ și aplicația $\cdot : G \times G \rightarrow G, (A, B) \rightarrow A \cdot B$. Să se

arate că (G, \cdot) este un grup abelian izomorf cu grupul aditiv al numerelor întregi $(\mathbb{Z}, +)$.

7. Fie $M = G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Să se arate că G în raport cu operația

indusă de înmulțirea matricelor formează grup abelian izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale $(\mathbb{R}, +)$.

8. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \ln x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x > 0 \right\}$ și aplicația $G \times G \rightarrow G, (A, B) \rightarrow AB$. Să se arate că (G, \cdot)

este grup izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive (\mathbb{R}_+^*, \cdot) .

9. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & iy \\ 0 & 0 & 0 \\ iy & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 0, i = \sqrt{-1} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Să se demonstreze

că (G, \cdot) este grup izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor complexe nenule.

10. Fie $G = \left\{ A_{\frac{1}{2}, x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & x & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Q}^* \right\}$ și $f: G \rightarrow \mathbb{Q}^*, f\left(A_{\frac{1}{2}, x}\right) = x$. Să se demonstreze

că (G, \cdot) este un grup izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor raționale nenule (\mathbb{Q}^*, \cdot) .

11. Se consideră legea de compoziție $*$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def}}{=} x + y - 1$.

a) Știind că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul $(\mathbb{R}, *)$, să se determine valorile a și b .

b) Pentru valorile a și b determinate la punctul a), arătați că $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}, *)$ la grupul $(\mathbb{R}, +)$.

Să se arate că $(\mathbb{C}, \perp), (\mathbb{C}, \tau)$ sunt grupuri izomorfe: $f: (\mathbb{C}, \perp) \rightarrow (\mathbb{C}, \tau), f(z) = iz$.

Teste pentru verificarea cunoștințelor

A

Fie grupurile:

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\text{și } \Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

Să se demonstreze că:

a) (G, \cdot) și (Γ, \cdot) sunt grupuri; **(4p)**

b) funcția $f: G \rightarrow \Gamma, f(z) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ este un morfism de grupuri; **(3p)**

c) funcția $f^{-1}: \Gamma \rightarrow G$ este un izomorfism de grupuri. **(2p)**

B

Fie grupurile (G, \circ) , unde $G = \{f_1, f_2, f_3\}$, iar „ \circ ” este legea de compunere a funcțiilor $f_i: M \rightarrow M, i = 1, 2, 3, f_1(x) = x,$

$$f_2(x) = \frac{x + \sqrt{3}}{1 - x\sqrt{3}} \text{ și } f_3(x) = \frac{x - \sqrt{3}}{1 + x\sqrt{3}},$$

$M = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, și grupul multiplicativ al rădăcinilor de ordinul trei ale unității (Γ, \cdot) , unde $\Gamma = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}, 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 1, \varepsilon^3 = 1$.

a) Să se demonstreze că cele două grupuri sunt izomorfe: $(G, \circ) \simeq (\Gamma, \cdot)$, precizând funcția $f: G \rightarrow \Gamma$. **(4p)**

b) Să se precizeze f^{-1} și să se arate că $f^{-1}: \Gamma \rightarrow G$ este morfism de grupuri. **(5p)**

Notă: Timpul efectiv de lucru este de 50 de minute pentru fiecare variantă. Se acordă 1 punct din oficiu.

Am studiat structura de grup și structura de monoid. Mulțimea G a fost dotată cu o lege de compoziție care verifică o listă specifică de proprietăți.

În continuare vom studia o nouă structură algebrică – **structura de inel**. Pentru această structură, mulțimea nenulă M va fi dotată cu două legi de compoziție. Mulțimea nevidă va fi notată cu A și operațiile vor fi notate aditiv și multiplicativ.

1. Inel, exemple: inele numerice ($\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), \mathbb{Z}_n , inele de matrice, inele de funcții reale

Definiție

O mulțime nevidă A luată împreună cu două legi de compoziție (adunarea și înmulțirea)

$$+ : A \times A \rightarrow A, (x, y) \rightarrow x + y$$

și $\cdot : A \times A \rightarrow A, (x, y) \rightarrow x \cdot y \stackrel{\text{not.}}{=} xy,$

se numește **inel** dacă:

G. $(A, +)$ este grup abelian;

M. (A, \cdot) este monoid;

D. înmulțirea este distributivă față de adunare, anume:

$$x(y + z) = xy + xz, (y + z)x = yx + zx, \forall x, y, z \in A.$$

Prima afirmație, $G. (A, +)$ este grup abelian, revine la faptul că **adunarea inelului** satisface axiomele:

G₁. $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in A,$

G₂. $\exists 0 \in A$ astfel încât $0 + x = x + 0 = x, \forall x \in A;$

G₃. $\forall x \in A, \exists x' \in A$ astfel încât $x' + x = x + x' = 0;$

G₄. $x + y = y + x, \forall x, y \in A.$

A doua afirmație $M) (A, \cdot)$ este monoid revine la faptul că **înmulțirea inelului** satisface axiomele:

M₁. $(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in A;$

M₂. $\exists 1 \in A$ astfel încât $1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \forall x \in A.$

Vom spune că $(A, +)$ este **grupul aditiv** al inelului A și ansamblul de condiții $G_1, G_2, G_3, G_4, M_1, M_2$ și D poartă numele de **axiomele inelului**.

Elementele 0 și 1 sunt unic determinate și se numesc **elementul zero**, respectiv **elementul unitate** ale inelului A . Dacă mulțimea A are un număr finit de elemente, inelul A se numește finit. Elementele $x \in A$ simetrizabile în raport cu înmulțirea lui A se numesc **elemente inversabile** sau **unități** ale mulțimii A .

Dacă înmulțirea inelului satisface și axioma

M₄. $xy = yx, \forall x, y \in A,$

se spune că A este **inel comutativ**.

EXEMPLU

Inelul \mathbb{Z} , al întregilor raționali.

Fie $+$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \rightarrow x + y$,
 \cdot : $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \rightarrow x \cdot y \stackrel{\text{not.}}{=} xy$.

Avem:

G. $(\mathbb{Z}, +)$ este grup abelian;

M. (\mathbb{Z}, \cdot) este monoid;

D. $x(y + z) = xy + xz$, $(y + z)x = yx + zx$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$.

În plus, față de ansamblul de axiome $G_1, G_2, G_3, G_4, M_1, M_2, D$ este satisfăcută și axioma:

M₄. $xy = yx$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$,

deci $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este un inel comutativ, numit **inelul întregilor raționali**.

1.1. Exemple de inele numerice

Fie mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{z = x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ și aplicațiile

$+$: $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] \times \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, $(z_1, z_2) \rightarrow z_1 + z_2$;
 \cdot : $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] \times \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, $(z_1, z_2) \rightarrow z_1 \cdot z_2 \stackrel{\text{not.}}{=} z_1 z_2$.

Arătăm că $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], +, \cdot)$ este o structură de inel comutativ.

Oricare ar fi $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, de forma

$$z_1 = x_1 + y_1\sqrt{3}, z_2 = x_2 + y_2\sqrt{3}, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z},$$

avem:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1\sqrt{3}) + (x_2 + y_2\sqrt{3}) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{3}, \text{ cu } x_1 + x_2, y_1 + y_2 \in \mathbb{Z},$$

deci $z_1 + z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$;

și

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1\sqrt{3}) \cdot (x_2 + y_2\sqrt{3}) = (x_1x_2 + 3y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{3}, \text{ cu}$$

$x_1x_2 + 3y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1 \in \mathbb{Z}$, deci $z_1z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Vom arăta că sunt verificate axiomele specifice structurii de inel.

G. $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], +)$ este grup abelian.

G₁. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Fie $z_1 = x_1 + y_1\sqrt{3}$, $z_2 = x_2 + y_2\sqrt{3}$, $z_3 = x_3 + y_3\sqrt{3}$, $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in \mathbb{Z}$. Avem:

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= [(x_1 + y_1\sqrt{3}) + (x_2 + y_2\sqrt{3})] + (x_3 + y_3\sqrt{3}) = \\ &= [(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{3}] + (x_3 + y_3\sqrt{3}) = (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3)\sqrt{3} = \\ &= [x_1 + (x_2 + x_3)] + [y_1 + (y_2 + y_3)]\sqrt{3} = (x_1 + y_1\sqrt{3}) + [(x_2 + x_3) + (y_2 + y_3)\sqrt{3}] = \\ &= z_1 + (z_2 + z_3). \end{aligned}$$

G₂. $\exists e \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ astfel încât $e + z = z + e = z$, $\forall z \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Fie $e = e_1 + e_2\sqrt{3}$, $z = x + y\sqrt{3}$, $e_1, e_2 \in \mathbb{Z}$, $x, y \in \mathbb{Z}$. Din egalitatea $e + z = z$, avem:

$$(e_1 + e_2\sqrt{3}) + (x + y\sqrt{3}) = x + y\sqrt{3}, (e_1 + x) + (e_2 + y)\sqrt{3} = x + y\sqrt{3},$$

de unde rezultă $\begin{cases} e_1 + x = x \\ e_2 + y = y \end{cases}$,

deci $e_1 = e_2 = 0$; $e = 0 + 0\sqrt{3} = 0$ și este verificată și egalitatea $z + e = z$.

Avem: $z + 0 = (x + y\sqrt{3}) + (0 + 0\sqrt{3}) = (x + 0) + (y + 0)\sqrt{3} = x + y\sqrt{3}$.

G₃. $\forall z \in \mathbb{Z}, \exists z' \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ astfel încât $z' + z = z + z' = 0$.

Fie $z = a + b\sqrt{3}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, și $z' = x + y\sqrt{3}$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

Avem:

$z' + z = 0$; $(x + y\sqrt{3}) + (a + b\sqrt{3}) = 0 + 0\sqrt{3}$; $(x + a) + (y + b)\sqrt{3} = 0 + 0\sqrt{3}$,

deci $\begin{cases} x + a = 0 \\ y + b = 0 \end{cases}$,

de unde obținem $x = -a, y = -b$, deci $z' = x + y\sqrt{3} = -a - b\sqrt{3} = -(a + b\sqrt{3}) = -z$.

De asemenea:

$z + z' = (a + b\sqrt{3}) + (-a - b\sqrt{3}) = [a + (-a)] + [b + (-b)]\sqrt{3} = 0 + 0\sqrt{3} = 0$.

G₄. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Avem:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + y_1\sqrt{3}) + (x_2 + y_2\sqrt{3}) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{3} = \\ &= (x_2 + x_1) + (y_2 + y_1)\sqrt{3} = (x_2 + y_2\sqrt{3}) + (x_1 + y_1\sqrt{3}) = z_2 + z_1. \end{aligned}$$

Rezultă că $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], +)$ este grup abelian.

M. $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], \cdot)$ este monoid.

M₁. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Avem:

$$\begin{aligned} (z_1 z_2) z_3 &= [(x_1 + y_1\sqrt{3})(x_2 + y_2\sqrt{3})](x_3 + y_3\sqrt{3}) = [(x_1 x_2 + 3y_1 y_2) + \\ &+ (x_1 y_2 + x_2 y_1)\sqrt{3}](x_3 + y_3\sqrt{3}) = (x_1 x_2 x_3 + 3x_3 y_1 y_2 + 3x_1 y_2 y_3 + 3x_2 y_1 y_3) + \\ &+ (x_1 x_2 y_3 + 3y_1 y_2 y_3 + x_1 x_3 y_2 + x_2 x_3 y_1)\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Efectuând calculele, rezultă $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

M₂. $\exists e \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ astfel încât $ez = ze = z, \forall z \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Fie $e = e_1 + e_2\sqrt{3}$. Avem din

$ez = z, (e_1 + e_2\sqrt{3})(x + y\sqrt{3}) = x + y\sqrt{3}$, deci $(e_1 x + 3e_2 y) + (e_1 y + e_2 x)\sqrt{3} = x + y\sqrt{3}$,

prin urmare $\begin{cases} e_1 x + 3e_2 y = x & | \times x & | \times (-y) \\ e_1 y + e_2 x = y & | \times (-3y) & | \times x \end{cases}$.

Înmulțind ecuațiile sistemului cu x și $3y$, respectiv cu $-y$ și x , obținem: $e_1 = 1, e_2 = 0$,

deci $e = 1 + 0\sqrt{3} = 1$ și este verificată egalitatea:

$z \cdot e = (x + y\sqrt{3})(1 + 0\sqrt{3}) = (x \cdot 1 + 3y \cdot 0) + (x \cdot 0 + y \cdot 1)\sqrt{3} = x + y\sqrt{3} = z$.

Rezultă că $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], \cdot)$ este monoid.

D. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3; (z_2 + z_3)z_1 = z_2 z_1 + z_3 z_1, \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Avem:

$$\begin{aligned}
 z_1(z_2 + z_3) &= (x_1 + y_1\sqrt{3})[(x_2 + y_2\sqrt{3}) + (x_3 + y_3\sqrt{3})] = \\
 &= (x_1 + y_1\sqrt{3})[(x_2 + x_3) + (y_2 + y_3)\sqrt{3}] = [x_1(x_2 + x_3) + 3y_1(y_2 + y_3)] + \\
 &+ [x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)]\sqrt{3} = [(x_2 + x_3)x_1 + 3(y_2 + y_3)y_1] + [(y_2 + y_3)x_1 + \\
 &+ (x_2 + x_3)y_1]\sqrt{3} = [(x_2 + x_3) + (y_2 + y_3)\sqrt{3}](x_1 + y_1\sqrt{3}) = \\
 &= [(x_2 + y_2\sqrt{3}) + (x_3 + y_3\sqrt{3})](x_1 + y_1\sqrt{3}) = (z_2 + z_3)z_1.
 \end{aligned}$$

În plus avem:

$$\mathbf{M}_4. z_1 z_2 = z_2 z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}].$$

Obținem că:

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 &= (x_1 + y_1\sqrt{3})(x_2 + y_2\sqrt{3}) = (x_1 x_2 + 3y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\sqrt{3} = \\
 &= (x_2 x_1 + 3y_2 y_1) + (x_2 y_1 + x_1 y_2)\sqrt{3} = (x_2 + y_2\sqrt{3})(x_1 + y_1\sqrt{3}) = z_2 z_1,
 \end{aligned}$$

de unde rezultă că monoidul $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], \cdot)$ este comutativ și deducem că inelul $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], +, \cdot)$ este comutativ.

1.2. Exemple de inele de matrice

$$\text{Fie } M = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Arătam că adunarea și înmulțirea definite pe mulțimea matricelor determină pe mulțimea M o structură de inel, adică $(M, +, \circ)$ este inel.

Mulțimea M este parte stabilă pentru $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor.

$$\text{Fie } A_1, A_2 \in M, A_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 3y_1 & x_1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 2y_2 & x_2 \end{pmatrix}, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}.$$

Avem:

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 3y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 3y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ 3(y_1 + y_2) & x_1 + x_2 \end{pmatrix} \in M.$$

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 3y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 3y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 + 3y_1 y_2 & x_1 y_2 + x_2 y_1 \\ 3(x_1 y_2 + x_2 y_1) & x_1 x_2 + 3y_1 y_2 \end{pmatrix} \in M.$$

Sunt verificate axiomele inelului.

G. $(M, +)$ este grup abelian.

G₁. $(A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3), \forall A_1, A_2, A_3 \in M$, proprietate verificată în cazul general pentru $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

G₂. $\exists e \in M$ astfel încât $e + A = A + e = A, \forall A \in M$. Avem $e = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

G₃. $\forall A \in M, \exists A' \in M$ astfel încât $A' + A = A + A' = O_2$.

Rezultă că:

$$A' = \begin{pmatrix} -x & -y \\ -3y & -x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix} = -A.$$

G₄. $A + B = B + A, \forall A, B \in M$, proprietate cunoscută în cazul general $M_2(\mathbb{R})$.

Deducem că $(M, +)$ este grup abelian.

M. (M, \cdot) este monoid. Avem:

M₁. $(A_1 A_2) A_3 = A_1 (A_2 A_3), \forall A_1, A_2, A_3 \in M$;

M₂. $\exists e \in M$ astfel încât $e \cdot A = A \cdot e = A, \forall A \in M$.

Avem $e = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_2 A = A I_2 = A, \forall A \in M$. Deci (M, \cdot) este monoid.

Este verificată și proprietatea de distributivitate.

D. $A_1(A_2 + A_3) = A_1 A_2 + A_1 A_3, \forall A_1, A_2, A_3 \in M$

și

$(A_2 + A_3)A_1 = A_2 A_1 + A_3 A_1, \forall A_1, A_2, A_3 \in M$.

Este cunoscută proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare, în cazul general al mulțimii $M_2(\mathbb{R})$.

1.3. Inelul claselor de resturi modulo n

Fie $n > 0$ un număr întreg. pentru orice $a \in \mathbb{Z}$, conform împărțirii cu rest, există $q, r \in \mathbb{Z}$, unic determinat astfel încât $a = nq + r, 0 \leq r < n$.

Numărul unic determinat din relația precedentă, numit **restul împărțirii lui a prin n** , s-a notat cu $a \bmod n$ și s-a numit încă **restul modulo n al lui a** .

Ca rezultat al împărțirii numerelor întregi prin $n > 0$ sunt posibile resturile:

$$0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Prin împărțirea lui a la n se obține restul r dacă și numai dacă a este de forma $nh + r$, cu $a \in \mathbb{Z}$. Mulțimile de numere $C_0, C_1, C_2, \dots, C_r, \dots, C_{n-1}$,

unde $C_0 = \{a \in \mathbb{Z} / a \bmod n = 0\} = \{nh / a \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}$,

$C_1 = \{a \in \mathbb{Z} / a \bmod n = 1\} = \{nh + 1 / a \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z} + 1$,

$C_2 = \{a \in \mathbb{Z} / a \bmod n = 2\} = \{nh + 2 / a \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z} + 2$,

.....

$C_r = \{a \in \mathbb{Z} / a \bmod n = r\} = \{nh + r / a \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z} + r$,

.....

$C_{n-1} = \{a \in \mathbb{Z} / a \bmod n = n - 1\} = \{nh + 1 / a \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z} + n - 1$,

se numesc **clase de resturi modulo n** .

Așadar, un număr întreg a aparține clasei C_r dacă și numai dacă a împărțit la n dă restul r :

$$a \in C_r \Leftrightarrow a \bmod n = r.$$

În particular, $r \in C_r$ pentru $r \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$. Clasa de resturi C_r se notează de regulă cu \hat{r} . Așadar,

$$\hat{r} = C_r = n\mathbb{Z} + r, r \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}.$$

Vom nota cu \mathbb{Z}_n mulțimea claselor de resturi modulo n :

$$\mathbb{Z}_n = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}.$$

Dacă $\widehat{a}, \widehat{b} \in \mathbb{Z}_n$, se definește suma $\widehat{a} + \widehat{b}$ și produsul $\widehat{a} \widehat{b}$ prin:

$$\widehat{a} + \widehat{b} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{a \oplus b}, \quad \widehat{a} \widehat{b} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{a \otimes b}.$$

Se definesc astfel pe \mathbb{Z}_n , două legi de compoziție:

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, (\widehat{a}, \widehat{b}) \rightarrow \widehat{a} + \widehat{b} \text{ și } \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, (\widehat{a}, \widehat{b}) \rightarrow \widehat{a} \widehat{b}$$

numite **adunarea**, respectiv **înmulțirea** claselor de resturi modulo n .

Caz particular: Pentru $n = 4$, avem $\mathbb{Z}_n = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}\}$ și tablele de resturi modulo 4 sunt:

+	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$
$\widehat{1}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$
$\widehat{2}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$
$\widehat{3}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$

×	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$
$\widehat{1}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$
$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{2}$
$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{3}$	$\widehat{2}$	$\widehat{1}$

Proprietate

Adunarea și înmulțirea claselor de resturi modulo n conferă mulțimii \mathbb{Z}_n o structură de inel comutativ, numit **inelul claselor de resturi modulo n** .

Se verifică axiomele din definiția inelului.

Astfel, pentru $n = 4$, avem inelul $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ al claselor de resturi modulo 4. Vom observa că în efectuarea calculelor în inelul \mathbb{Z}_4 , putem apela la tablele celor două operații.

Un interes aparte îl prezintă inelul $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ al claselor de resturi modulo 2 datorită aplicațiilor pe care le are în tehnică (codificarea informației, aritmetica calculatoarelor) și în logică. Tabelele operațiilor din acest inel sunt:

+	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$
$\widehat{1}$	$\widehat{1}$	$\widehat{0}$

×	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$
$\widehat{1}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$

1.4. Exemple de inele de funcții

Fie mulțimea funcțiilor $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ înzestrată cu operațiile de adunare și înmulțire a funcțiilor.

Tripletul $(\mathcal{M}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ formează *inelul funcțiilor* definite pe \mathbb{R} cu valori în \mathbb{R} .

Conform proprietăților funcțiilor, există și alte inele de funcții, cum ar fi, de exemplu:

$(\mathcal{M}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ — inelul funcțiilor mărginite;

$(\mathcal{C}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ — inelul funcțiilor continue;

$(\mathcal{D}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ — inelul funcțiilor derivabile.

Efectuați în clasă

1. Fie mulțimea $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{z = x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ și aplicațiile:
 $+$: $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \times \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $(z_1, z_2) \rightarrow z_1 + z_2$,
 \cdot : $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \times \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $(z_1, z_2) \rightarrow z_1 \cdot z_2 \stackrel{\text{not.}}{=} z_1 z_2$.
 Să se demonstreze că $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ este o structură de inel comutativ.
2. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și operațiile induse pe M de adunarea și înmulțirea matricelor $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Să se arate că $(M, +, \cdot)$ este inel.

Temă

1. Pe mulțimea \mathbb{C} a numerelor complexe se consideră operațiile:
 $+$: $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $(z_1, z_2) \rightarrow z_1 + z_2$ (adunarea numerelor complexe) și
 $*$: $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $(z_1, z_2) \rightarrow z_1 * z_2$, unde

$$z_1 * z_2 \stackrel{\text{def.}}{=} x_1 x_2 + y_1 y_2 i$$
, cu $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.
 Să se arate că $(\mathbb{C}, +, *)$ este inel comutativ.
2. Fie mulțimea $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & x \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 Arătați că în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $(A, +, \cdot)$ este o structură de inel.
3. Se consideră mulțimile:
 $A_1 = \{x + y\sqrt{7} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ și $A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 7y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}$.
 Să se demonstreze că $(A_1, +, \cdot)$ și $(A_2, +, \cdot)$ sunt inele.
4. Fie mulțimile:
 $A_1 = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$, $A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x+2y & 2y \\ -2y & x-2y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 Demonstrați că operațiile de adunare și înmulțire induse determină structuri de inele:
 $(A_1, +, \cdot)$ și $(A_2, +, \cdot)$.
5. Pe mulțimea $A_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se definesc operațiile „+” și „·”:
 $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
 și
 $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2)$.
 Să se arate că tripletul $(A, +, \cdot)$ este inel.

2. Corp, exemple: corpuri numerice (\mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C}), \mathbb{Z}_p (p prim)

O altă structură algebrică în care mulțimea nevidă M este dotată cu două legi de compoziție este structura de **corp**. Inelele care au proprietatea că orice element diferit de 0 (elementul neutru al inelului aditiv) este simetrizabil în raport cu înmulțirea sunt cunoscute sub numele de **corpuri**.

Definiție

Un inel $(K, +, \cdot)$ se numește **corp** dacă $0 \neq 1$ și orice element $x \in K, x \neq 0$ este simetrizabil în raport cu înmulțirea:

$$\forall x \in K, x \neq 0 \Rightarrow \exists x^{-1} \in K \text{ astfel încât } x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1.$$

Un corp K se numește **comutativ** dacă **înmulțirea sa este comutativă**.

EXEMPLE

1. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ corpul numerelor raționale.
2. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ corpul numerelor reale.
3. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ corpul numerelor complexe. În raport cu operația de înmulțire, $\forall x \neq 0$, $x \in \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ există $x^{-1} = \frac{1}{x}$, astfel încât $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$.
4. Fie mulțimea $K = (0, +\infty)$ și operațiile:

$$\begin{aligned} \perp : K \times K &\rightarrow K, (x, y) \rightarrow x \perp y \stackrel{\text{def.}}{=} xy \\ \top : K \times K &\rightarrow K, (x, y) \rightarrow x \top y = x^{\ln y}. \end{aligned}$$

Tripletul (K, \perp, \top) este corp comutativ.

Exerciții rezolvate

1. Fie $K = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\}$. Să se arate că mulțimea K este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor și că formează corp în raport cu operațiile induse.

Soluție

Fie $A_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 2y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \in K, A_2 = \begin{pmatrix} x_2 & 2y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} \in K$. Rezultă:

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} x_1 & 2y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & 2y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 + 2y_1y_2 & 2(x_1y_2 + x_2y_1) \\ x_1y_2 + x_2y_1 & x_1x_2 + 2y_1y_2 \end{pmatrix},$$

$$x_1x_2 + 2y_1y_2 \in \mathbb{Q}, x_1y_2 + x_2y_1 \in \mathbb{Q}, \text{ deci } A_1A_2 \in K.$$

G. $(K, +)$ este grup abelian.

G₁. $(A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3), \forall A_1, A_2, A_3 \in K$, proprietate cunoscută în cazul general.

G₂. $\exists e \in K$ astfel încât $e + A = A + e = A, \forall A \in K$.

Avem $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2 \in K$, astfel încât $A + O_2 = A$.

G₃. $\exists A' \in K$ astfel încât $A' + A = A + A' = O_2, \forall A \in K$.

Rezultă $A' = \begin{pmatrix} -x & -2y \\ -y & -x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} = -A, A + A' = A + (-A) = O_2$.

G₄. $A + B = B + A, \forall A, B \in K$.

Proprietățile G_1, G_2, G_3, G_4 sunt adevărate în general.

M. (K, \cdot) este monoid și toate elementele diferite de O_2 sunt simetrizabile (inversabile).

M₁. $(A_1 A_2) A_3 = A_1 (A_2 A_3), \forall A_1, A_2, A_3 \in K$.

M₂. $\exists e \in K$ astfel încât $eA = Ae = A, \forall A \in K$.

Avem $e = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K$ și $AI_2 = A$.

M₃. $\forall A \in K$ și $A \neq O_2, \exists A^{-1} \in K$ astfel încât $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_2$.

Fie $A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 2b^2 \neq 0$, și $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{Q}$. Avem: $A^{-1} \cdot A = I_2$,

$$\begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ax + 2by & 2(bx + ay) \\ bx + ay & ax + 2by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ deci } \begin{cases} ax + 2by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}.$$

Rezolvând sistemul de ecuații avem:

$$x = \frac{a}{a^2 - 2b^2}, y = -\frac{b}{a^2 - 2b^2}, a, b \in \mathbb{Q} \text{ și } a^2 - 2b^2 \neq 0, \text{ deci}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 - 2b^2} & -\frac{2b}{a^2 - 2b^2} \\ -\frac{b}{a^2 - 2b^2} & \frac{a}{a^2 - 2b^2} \end{pmatrix} \in K \text{ și } AA^{-1} = I_2,$$

Deci (K, \cdot) este monoid și toate elementele din K diferite de O_2 sunt inversabile.

D. $A_1(A_2 + A_3) = A_1A_2 + A_1A_3, (A_2 + A_3)A_1 = A_2A_1 + A_3A_1$. Avem:

$$\begin{aligned} A_1(A_2 + A_3) &= \begin{pmatrix} x_1 & 2y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_2 & 2y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 & 2y_3 \\ y_3 & x_3 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & 2y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 + x_3 & 2(y_2 + y_3) \\ y_2 + y_3 & x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1(x_2 + x_3) + 2y_1(y_2 + y_3) & 2(y_1(x_2 + x_3) + x_1(y_2 + y_3)) \\ y_1(x_2 + x_3) + x_1(y_2 + y_3) & x_1(x_2 + x_3) + 2y_1(y_2 + y_3) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1x_2 + 2y_1y_2 + x_1x_3 + 2y_1y_3 & 2(x_1y_2 + x_2y_1) + 2(x_1y_3 + x_3y_1) \\ x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 & x_1x_2 + 2y_1y_2 + x_1x_3 + 2y_1y_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1x_2 + 2y_1y_2 & 2(x_1y_2 + x_2y_1) \\ x_1y_2 + x_2y_1 & x_1x_2 + 2y_1y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1x_3 + 2y_1y_3 & 2(x_1y_3 + x_3y_1) \\ x_1y_3 + x_3y_1 & x_1x_3 + 2y_1y_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & 2y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & 2y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & 2y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 & 2y_3 \\ y_3 & x_3 \end{pmatrix} = A_1A_2 + A_1A_3. \end{aligned}$$

Analog se arată: $(A_2 + A_3)A_1 = A_2A_1 + A_3A_1$.

Rezultă că tripletul $(K, +, \cdot)$ este corp.

2. Pe mulțimea $K = (0, +\infty)$ se definesc aplicațiile:

$$\cdot : K \times K \rightarrow K, (x, y) \rightarrow x \cdot y \stackrel{\text{not.}}{=} xy \quad \text{și} \quad * : K \times K \rightarrow K, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} x^{\ln y}.$$

Să se arate că tripletul $(K, \cdot, *)$ este corp comutativ.

Soluție

Cele două aplicații sunt legi de compoziție interne, $\forall x, y \in (0, +\infty)$, avem $xy \in (0, +\infty)$ și $x * y = x^{\ln y} \in (0, +\infty)$.

Cuplul (K, \cdot) este grup abelian.

G. (K, \cdot) verifică axiomele grupului abelian:

G₁. $(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in K;$

G₂. $\exists e \in K$ astfel încât $ex = xe = x, \forall x \in K.$

Elementul neutru este $e = 1 \in K, 1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \forall x \in K.$

G₃. $\forall x \in K, \exists x' \in K$ astfel încât $x' \cdot x = x \cdot x' = 1.$

Pentru orice $x \in K$, avem $x' = x^{-1} = \frac{1}{x}$ astfel încât $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$

G₄. $xy = yx, \forall x, y \in K.$

Rezultă că acest cuplu, (K, \cdot) , este grup abelian, grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive, $(\mathbb{R}_+^*, \cdot).$

M. $(K, *)$ este monoid și toate elementele diferite de 1, care este elementul neutru pentru înmulțire, sunt simetrizabile.

Se verifică axiomele M₁, M₂, M₄ și M₃ ale unui monoid comutativ $(K, *)$ și axioma D de distributivitate. Rezultă că tripletul $(K, \cdot, *)$ este corp comutativ.

Corpul \mathbb{Z}_p al claselor de resturi modulo p (p prim)

Inelele $(\mathbb{Z}, +, \$)$ și $(\mathbb{Z}_4, +, \$)$ nu sunt corpuri. Nu oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$ este inversabil în raport cu înmulțirea din \mathbb{Z} . În inelul $(\mathbb{Z}_4, +, \$)$, nu orice $x \in \mathbb{Z}_4$ este inversabil în raport cu operația de înmulțire, unde avem $\hat{2} \times \hat{2} = \hat{0}$ și se știe că nu există divizori ai lui zero într-un corp.

Dacă $p > 0$ este un număr prim, atunci inelul \mathbb{Z}_p este corp.

Într-adevăr, elementele lui \mathbb{Z}_p sunt: $\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{p-1}$.

Pentru orice $a \in \mathbb{Z}_4, 1 \nmid a < p, p$ prim, avem $(a, p) = 1$. Pentru p prim, singurii divizori pozitivi ai lui p sunt 1 și p . Cum $1 \nmid a < p, p$ nu divide pe a , deci a și p admit un singur divizor comun pozitiv, și anume pe 1, deci $(a, p) = 1$. Deducem de aici că orice clasă $\hat{a} \in \mathbb{Z}_p, \hat{a} \neq \hat{0}$, este inversabilă în raport cu înmulțirea, deci \mathbb{Z}_p este corp.

În particular, \mathbb{Z}_3 este corp. Faptul că orice clasă

$\hat{a} \in \mathbb{Z}_3, \hat{a} \neq \hat{0}$, este inversabilă în raport cu înmulțirea se observă și pe tabela înmulțirii din \mathbb{Z}_3 :

$$(\hat{1})^{-1} = \hat{1}, (\hat{2})^{-1} = \hat{2}.$$

Tabela adunării din \mathbb{Z}_3

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$

Tabela înmulțirii din \mathbb{Z}_3

×	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{0}$
$\hat{1}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{2}$	$\hat{1}$

Temă

1. Fie aplicațiile:

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt[3]{x^3 + y^3};$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x \cdot y \stackrel{\text{not.}}{=} xy.$$

Să se arate că tripletul $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ este o structură de corp comutativ.

2. Pe mulțimea \mathbb{R} se definesc aplicațiile:

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y - 2,$$

$$\Delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x \Delta y \stackrel{\text{def.}}{=} 2(xy - 2x - 2y + 5).$$

Să se arate că $(\mathbb{R}, *, \Delta)$ este corp.

3. Pe mulțimea \mathbb{Q} se definesc aplicațiile:

$$\Delta : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, (x, y) \rightarrow x \Delta y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y - 7;$$

$$\nabla : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, (x, y) \rightarrow x \nabla y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - 7(x + y) + 56.$$

Să se arate că tripletul $(\mathbb{Q}, \Delta, \nabla)$ este o structură de corp comutativ.

4. Pe mulțimea \mathbb{R} se definesc aplicațiile:

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y - 1,$$

$$\perp : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x \perp y = 2xy - 2x - 2y + 3.$$

Să se arate că tripletul $(\mathbb{R}, *, \perp)$ este o structură de corp.

5. Fie $K = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2 & z_1 \end{pmatrix} \mid z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Să se arate că împreună cu adunarea și înmulțirea matricelor tripletul $(K, +, \cdot)$ este corp.

6. Fie $K = \left\{ \begin{pmatrix} x + y & y \\ -5y & x - 2y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Să se arate că tripletul $(K, +, \cdot)$ este corp comutativ.

7. Fie mulțimea $K = (0, +\infty)$ și aplicațiile:

$$\cdot : K \times K \rightarrow K, (x, y) \rightarrow x \cdot y \stackrel{\text{not.}}{=} xy,$$

$$* : K \times K \rightarrow K, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} x^{\ln \sqrt[3]{y}}.$$

Arătați că tripletul $(K, \cdot, *)$ este o structură de corp comutativ.

8. Fie mulțimea $K = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Arătați că tripletul $(K, +, \cdot)$ este corp comutativ.

9. Se consideră mulțimile:

$$K_1 = \mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{x + y\sqrt{5} \mid x, y \in \mathbb{Q}\} \text{ și } K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 5y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Să se arate că tripletele $(K_1, +, \cdot)$ și $(K_2, +, \cdot)$ sunt corpuri.

10. Se consideră tripletele $(\mathbb{R}, +, \times)$ și $(\mathbb{R}, \circ, *)$, unde

$$\circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x \circ y = x + y - 2 \text{ și}$$

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y = xy - 2x - 2y + 6.$$

Să se demonstreze că $(\mathbb{R}, \circ, *)$ este o structură de corp.

11. În mulțimea matricelor $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{C} \right\}$.

a) Să se verifice dacă $I_2 \in G$ și $O_2 \in G$.

b) Să se arate că dacă $\begin{vmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{vmatrix} = 0$, atunci $z = 0$ oricare ar fi $z \in \mathbb{C}$.

c) Să se arate că dacă $A_1, A_2 \in G$, atunci $A_1 A_2 \in G$.

d) Să se arate că dacă $A \in G, A \neq O_2$, atunci matricea A este inversabilă și $A^{-1} \in G$.

e) Să se găsească o matrice $X \in G$ cu proprietatea că $X \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} X$.

f) Să se arate că dacă $A, B \in G$ și $A \times B = O_2$, atunci $A = O_2$ sau $B = O_2$.

g) Să se arate că mulțimea $H = G \setminus \{O_2\}$ împreună cu operația de înmulțire a matricelor determină o structură de grup comutativ. Stabiliți dacă $(G, +, \times)$ este corp.

Teste pentru verificarea cunoștințelor

A

1. Pe mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi definim legile de compoziție:
 $x \perp y = x + y + 3, \forall x, y \in \mathbb{Z}$ și
 $x \top y = xy + 3x + 3y + 6, \forall x, y \in \mathbb{Z}$.
 Să se demonstreze că $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ este o structură de inel. (4p)

2. Fie mulțimea $K = (0, +\infty)$ și aplicațiile
 $\times : K \times K \rightarrow K, (x, y) \rightarrow x \times y = xy,$
 $* : K \times K \rightarrow K, (x, y) \rightarrow x * y = x^{1/y}.$
 Să se demonstreze că $(K, \times, *)$ este o structură de corp comutativ. (5p)

B

1. Fie $A = \{x + y\sqrt{5} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ o mulțime dotată cu operațiile de adunare și înmulțire.
 Să se demonstreze că $(A, +, \times)$ este o structură de inel comutativ. (4p)

2. Se consideră mulțimile

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\} \text{ și } K = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Să se demonstreze că $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \times)$ și $(K, +, \times)$ sunt corpuri. (5p)

Notă: Timpul efectiv de lucru este de 50 de minute pentru fiecare variantă. Se acordă 1 punct din oficiu.

INELE DE POLINOAME CU COEFICIENTI ÎNTR-UN CORP COMUTATIV ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, p$ prim)

1. Forma algebrică a unui polinom; operații (adunarea, înmulțirea, înmulțirea cu un scalar)

1.1. Definiții și exemple

Fie $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, n \in \mathbb{N}$, un șir infinit de numere complexe cu proprietatea că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_k = 0$, oricare ar fi $k \geq n$. Fie, de asemenea, un simbol numit **nedeterminată** pe care îl vom nota cu X .

Definiție

Se numește **polinom** în nedeterminata X cu coeficienți complecși expresia formală $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n + \dots$

Numărul $a_k, k \in \mathbb{N}$, se numește **coeficientul de rang k** al polinomului f , iar expresia de forma a_kX^k se numește **monom** în variabila X și coeficientul a_k .

Vom nota mulțimea polinoamelor cu coeficienți complecși în nedeterminata X cu $\mathbb{C}[X]$. De asemenea, vom nota:

$\mathbb{R}[X]$ mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali în nedeterminata X ;

$\mathbb{Q}[X]$ mulțimea polinoamelor cu coeficienți raționali;

$\mathbb{Z}[X]$ mulțimea polinoamelor cu coeficienți întregi;

Se știe că $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ și deducem proprietatea $\mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

Vom scrie un polinom f cu coeficienți complecși în nedeterminata X sub forma

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$$

numită **forma algebrică**. Vom conveni ca termenii a_kX^k să fie omiși dacă $a_k = 0$, iar dacă $a_k = 1$ vom scrie X^k în loc de $1 \times X^k$.

De exemplu, putem scrie:

$$f = 1 + 3 \times X + 0 \times X^2 - 4 \times X^3 + 0 \times X^4 + \dots = 1 + 3X - 4X^3$$

$$g = 0 + 0 \times X + 2X^2 + 1 \times X^3 + 3 \times X^4 + 0 \times X^5 + \dots = 2X^2 + X^3 + 3X^4$$

$$h = 1 + 1 \times X + 3 \times X^2 + 1 \times X^3 + 0 \times X^4 + \dots = 1 + X + 3X^2 + X^3$$

1.2. Egalitatea a două polinoame

Definiție

Fiind date polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X]$,

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n \text{ și } g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \dots + b_mX^m,$$

vom spune că cele două polinoame sunt **egale** și vom scrie $f = g$ dacă $a_k = b_k$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.

EXEMPLE

1. Polinoamele $f = 1 + 2X^2 + 5X^4$ și $g = 5X^4 + 2X^2 + 1$ sunt egale.

Cele două polinoame au toți coeficienții de același rang egali.

Într-adevăr: $a_0 = b_0 = 1$, $a_1 = b_1 = 0$, $a_2 = b_2 = 2$, $a_3 = b_3 = 0$ și $a_4 = b_4 = 5$.

2. Determinați parametrii λ și μ astfel încât polinoamele $f = 3 + \lambda X + X^2 + 5X^3 + \dots$, $g = 3 + 4X + X^2 + \mu X^3 + \dots$ să fie egale.

Din condiția ca cele două polinoame să aibă coeficienții egali rezultă $\lambda = 4$ și $\mu = 5$, deci $f = g = 3 + 4X + X^2 + 5X^3$.

1.3. Gradul unui polinom

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f \neq 0$, $f = a_0 + a_1 + \dots + a_n X^n + \dots$ un polinom.

Definiție

Se numește **gradul polinomului** f cel mai mare număr natural n cu proprietatea $a_n \neq 0$.

Dacă $\text{grad } f = n$, monomul $a_n X^n$ se numește **termenul principal** al polinomului f , iar a_n **coeficientul dominant**. Dacă $a_n = 1$ se spune că f este **polinom unitar** sau **polinom monic**. Coeficientul a_0 se numește **termenul liber** al polinomului f .

Pentru polinomul 0 (nul), $0 = 0 + 0 \times X + \dots + 0 \times X^n + \dots$, nu se definește gradul. Polinoamele de grad zero și polinomul 0 se numesc **polinoame constante**.

Exerciții rezolvate

1. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = (\lambda^2 + 5\lambda + 6)X^3 + (\lambda^2 + 3\lambda + 2)X^2 + (\lambda + 2)X + 5$. Să se determine gradul polinomului f în funcție de parametrul λ .

Soluție

Dacă $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$, deci $\lambda \in \{-3, -2\}$, coeficientul lui X^3 este zero.

Rezultă că $\text{grad } f = 3$ dacă $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$. Pentru $\lambda = -3$, rezultă $f = 2X^2 - X + 5$, deci $\text{grad } f = 2$. Pentru $\lambda = -2$, $f = 5$, deci $\text{grad } f = 0$.

2. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = (\lambda + 1)X^3 + (\lambda^2 + 2\lambda + 2)X^2 + (\lambda^2 + 1)X + \lambda^2 + 4\lambda$. Să se arate că există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\text{grad } f = 2$ și coeficientul dominant să fie 1.

Soluție

Din condiția ca $\text{grad } f = 2$ și $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 1$, rezultă $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, $(\lambda + 1)^2 = 0$, deci $\lambda = -1$, de unde rezultă $f = X^2 + 2X - 3$.

Efectuați în clasă

1. Determinați valorile parametrilor λ și μ astfel încât polinoamele $f = (\lambda + 2)X^3 + 5X^2 + (\lambda + 2)X + 3$ și $g = X^3 + (\mu + 2)X^2 + X + 3$ să fie egale.
2. Studiați gradul polinomului $f = (m^3 + 3m + 2)X^3 + (m^2 + 5m + 4)X^2 + (m^2 - 1)X + m + 2$ în raport cu parametrul m .

1.4. Operații cu polinoame

Definim pe mulțimea $\mathbb{C}[X]$ două operații algebrice: adunarea polinoamelor și înmulțirea polinoamelor.

1.4.1. Adunarea polinoamelor

Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_rX^r + \dots$, $g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \dots + b_rX^r + \dots$

Definiție

Se numește **suma** polinomului f cu polinomul g , notată $f + g$, polinomul:

$$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + \dots + (a_n + b_n)X^n + \dots$$

EXEMPLE

1. Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = 3X^3 + 2X^2 - 5X + 2$, $g = -2X^3 + X^2 + 4X - 3$. Suma celor două polinoame este: $f + g = (3 - 2)X^3 + (2 + 1)X^2 + (-5 + 4)X + 2 - 3 = X^3 + 3X^2 - X - 1$ și deducem că $\text{grad}(f + g) = 3 = \text{grad} f = \text{grad} g$.

2. Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = 2X^3 + 7X^2 - 3X + 5$ și $g = -4X^2 + 2X - 3$. Suma celor două polinoame f și g este: $f + g = 2X^3 + (7 - 4)X^2 + (-3 + 2)X + 5 - 3 = 2X^3 + 3X^2 - X + 2$; rezultă $\text{grad}(f + g) = \text{grad} f = 3 > 2 = \text{grad} g$.

3. Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = 2iX^2 + 3X - 2$ și $g = 3iX^3 + X^2 - 3X + i$.
Rezultă $f + g = 3iX^3 + (1 + 2i)X^2 + i - 2$ și $\text{grad}(f + g) = \text{grad} g = 3 > 2 = \text{grad} f$.

4. Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = -5(i - 2)X^4 + 3iX^3 + 2X^2 - iX + i - 2$, $g = 5(2 - i)X^4 - 3iX^3 + (i - 2)X^2 + (1 + 2i)X + 3 - 2i$. Rezultă $f + g = iX^2 + (1 + i)X + 1 - i$, $\text{grad}(f + g) = 2 < 4 = \text{grad} f = \text{grad} g$.

Proprietate

Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$, $g = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \dots + b_1X + b_0$ astfel încât $\text{grad} f = n$, $\text{grad} g = m$. Atunci

$$\text{grad}(f + g) \leq \max\{\text{grad} f, \text{grad} g\}.$$

Într-adevăr, $f + g = a_nX^n + \dots + (a_m + b_m)X^m + \dots + a_0 + b_0$, dacă $n > m$, deci $\text{grad}(f + g) = n > m$. De asemenea, $f + g = b_mX^m + \dots + (a_n + b_n)X^n + \dots + a_0 + b_0$, $\text{grad}(f + g) = m$, dacă $m > n$.

În cazul în care $m = n$, $f + g = (a_n + b_n)X^n + (a_{n-1} + b_{n-1})X^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)X + a_0 + b_0$ și $\text{grad}(f + g) = n$, dacă $a_n + b_n \neq 0$ sau $\text{grad}(f + g) < n$, dacă $a_n + b_n = 0$.

1.4.1.1. Opusul unui polinom

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_1X + a_0$. Se numește **opusul** polinomului f și se notează $-f$ polinomul $-f = (-a_n)X^n + (-a_{n-1})X^{n-1} + \dots + (-a_1)X + (-a_0)$.

Rezultă $f + (-f) = (-f) + f = 0$.

Într-adevăr, $(-f) + f = ((-a_n) + a_n)X^n + ((-a_{n-1}) + a_{n-1})X^{n-1} + \dots + ((-a_1) + a_1)X + (-a_0) + a_0 = 0 \times X^n + 0 \times X^{n-1} + \dots + 0 \times X + 0 = 0$ și, analog, $f + (-f) = 0$.

1.4.1.2. Proprietăți ale operației de adunare a polinoamelor

A1. Asociativitatea: $(f + g) + h = f + (g + h), \forall f, g, h \in \mathbb{C}[X]$.

A2. Elementul neutru: $f + 0 = 0 + f = f, \forall f \in \mathbb{C}[X]$.

A3. Opusul unui polinom: $f + (-f) = (-f) + f = 0, \forall f \in \mathbb{C}[X]$ (orice polinom are opus).

A4. Comutativitatea: $f + g = g + f, \forall f, g \in \mathbb{C}[X]$

Demonstrație

Vom demonstra proprietatea 3. Fie $f \in \mathbb{C}[X], f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$.
Rezultă $-f = (-a_n)X^n + (-a_{n-1})X^{n-1} + \dots + (-a_1)X + (-a_0)$, deci

$$\begin{aligned} f + (-f) &= (a_n + (-a_n))X^n + (a_{n-1} + (-a_{n-1}))X^{n-1} + \dots + (a_1 + (-a_1))X + a_0 + (-a_0) \\ &= 0 \times X^n + 0 \times X^{n-1} + \dots + 0 \times X = 0 = ((-a_n) + a_n)X^n + ((-a_{n-1}) + a_{n-1})X^{n-1} + \dots + \\ &+ ((-a_1) + a_1)X + (a_0)X + a_0 = (-f) + f. \end{aligned}$$

Se demonstrează ușor și celelalte proprietăți.

1.4.2. Scăderea polinoamelor

Definiție

Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$ două polinoame.

Se numește **diferența** celor două polinoame polinomul:

$$f - g \stackrel{\text{def.}}{=} f + (-g), \forall f, g \in \mathbb{C}[X].$$

EXEMPLE

1. Fie $f, g \in \mathbb{C}[X], f = 3X^4 + 2X^3 - 5X + 7$ și $g = 5X^4 - 3X^3 + 2X^2 + 3X - 2$. Vom scrie $-f, -g$ și vom calcula $f - g$ și $g - f$. Arătați că $f + g = g + f$.

$$\begin{aligned} \text{Rezultă } -f &= (-3)X^4 + (-2)X^3 - (-5)X + (-7) = -3X^4 - 2X^3 + 5X - 7, \\ -g &= (-5)X^4 - (-3)X^3 + (-2)X^2 + (-3)X - (-2) = -5X^4 + 3X^3 - 2X^2 - 3X + 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f - g &= f + (-g) = (3 - 5)X^4 + (+2 + 3)X^3 + (0 - 2)X^2 + (-5 - 3)X + 7 + 2 = \\ &= -2X^4 + 5X^3 - 2X^2 - 8X + 9; \quad g - f = g + (-f) = (5 - 3)X^4 + (-3 - 2)X^3 + (2 + 0)X^2 + \\ &+ (3 + 5)X - 2 - 7 = 2X^4 - 5X^3 + 2X^2 + 8X - 9, \text{ de unde rezultă că } f - g \neq g - f. \end{aligned}$$

$$\text{Pentru } f + g = (3 + 5)X^4 + (2 - 3)X^3 + (0 + 2)X^2 + (-5 + 3)X + 7 - 2 = (5 + 3)X^4 + (-3 + 2)X^3 + (2 + 0)X^2 + (3 - 5)X - 2 + 7 = g + f.$$

2. Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X], f = \lambda X^2 + (\alpha + 1)X + \beta + 3$ și $g = X^2 - 3X + 7$.

Vom determina parametrii λ, α, β astfel încât $f + g = g + f = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Rezultă } f + g &= (\lambda + 1)X^2 + (\alpha + 1 - 3)X + \beta + 3 + 7 = (\lambda + 1)X^2 + (\alpha - 2)X + \beta + \\ &+ 10 = 0, \text{ deci } \lambda + 1 = 0, \alpha - 2 = 0 \text{ și } \beta + 10 = 0. \text{ Obținem } \lambda = -1, \alpha = 2, \beta = -10, \\ f &= -X^2 + 3X - 7 = -g. \end{aligned}$$

Efectuați în clasă

1. Stabiliți gradul polinomului $f \in \mathbb{C}[X], f = X^3 + 2X^2 + X(X^3 + 2X^2) - X^2(3 + X^2 + 3X) + 5$.
2. Să se determine gradul polinomului $f \in \mathbb{C}[X], f = (\lambda^2 - 1)X^4 + (\lambda^2 + 3\lambda + 2)X^2 + (\lambda - 1)X + \lambda + 2, \lambda$ fiind parametru real.
3. Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X], f = X^2 + 5X + 2, g = -2X^2 + 6X + 1$.
Calculați $-f, -g, f + g, f - g, f - g$ și $g - f$.

4. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X], f = (m + 1)X^2 + (m^2 - 1)X, g = -(m - 1)X^2 + X + 3m$. Calculați $-f, -g, f + g, f - g$ și $g - f$.
5. Stabiliți gardul polinomului $f \in \mathbb{C}[X], f = (X^2 - 1)X^3 + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)X^2 + (\lambda^2 + 3\lambda + 2)X + \lambda - 1$ știind că $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.4.3. Înmulțirea polinoamelor

Fie $f, g \in \mathbb{C}[X], f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n, g = b_0 + b_1X + b_2X^2 + \dots + b_mX^m$.

Definiție

Se numește **produsul** polinomului f cu g polinomul

$$fg = c_0 + c_1X + c_2X^2 + \dots + c_{m+n}X^{m+n},$$

$$\text{unde } \begin{cases} c_0 = a_0b_0 \\ c_1 = a_0b_1 + a_1b_0 \\ c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 \\ \dots \\ c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \dots + a_kb_0 \\ \dots \\ c_{n+m} = a_nb_m \end{cases}$$

Dacă $f = 0$ sau $g = 0$, atunci $fg = 0$. Dacă $f \neq 0$ și $g \neq 0$, atunci a_nb_m este coeficientul termenului principal al produsului fg și $\text{grad } fg = \text{grad } f + \text{grad } g$.

Operația de înmulțire a polinoamelor are proprietăți asemănătoare operației de adunare a polinoamelor:

I1. Asociativitatea: $(fg)h = f(gh), \forall f, g, h \in \mathbb{C}[X]$.

I2. Elementul neutru: $1 \times f = f \times 1 = f, \forall f \in \mathbb{C}[X]$.

I3. Comutativitatea: $fg = gf, \forall f, g \in \mathbb{C}[X]$.

În raport cu operația de adunare a polinoamelor este satisfăcută și proprietatea:

D. Distributivitatea înmulțirii față de adunare: $f(g + h) = fg + fh$.

Operațiile cu polinoame au proprietăți asemănătoare operațiilor cu numere.

Exerciții rezolvate

1. Fie $f, g \in \mathbb{C}[X], f = 2X^3 - 3X^2 + X - 2$ și $g = 3X^2 + 2X - 1$, să se calculeze fg .

Soluție

Efectuând calculele, putem scrie:

$$\begin{aligned} f \times g &= (2X^3 - 3X^2 + X - 2)(3X^2 + 2X - 1) = \\ &= \underline{6X^5 - 9X^4 + 3X^3 - 6X^2 +} \\ &\quad + 4X^4 - 6X^3 + 2X^2 - 4X - \\ &\quad \quad - 2X^3 + 3X^2 - X + 2 = \\ &= \underline{6X^5 - 5X^4 - 5X^3 - X^2 - 5X + 2} \end{aligned}$$

2. Fie $f, g, h \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^2 + 1$, $g = X^2 + 2X + 3$, $h = 3X^2 - 2X + 2$.
Verificați proprietatea de asociativitate $(fg)h = f(gh)$.

Soluție

$$fg = (X^2 + 1)(X^2 + 2X + 3) = \begin{array}{r} X^4 \quad \quad \quad + X^2 + \\ \quad \quad \quad + 2X^3 \quad \quad + 2X + \\ \quad \quad \quad \quad \quad + 3X^2 \quad \quad + 3 = \\ \hline = X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2X + 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (fg)h &= (X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2X + 3)(3X^2 - 2X + 2) = \\ &= \begin{array}{r} 3X^6 + 6X^5 + 12X^4 + 6X^3 + 9X^2 - \\ - 2X^5 - 4X^4 - 8X^3 - 4X^2 - 6X + \\ \quad \quad \quad + 2X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 4X + 6 = \\ \hline = 3X^6 + 4X^5 + 10X^4 + 2X^3 + 13X^2 - 2X + 6. \end{array} \end{aligned}$$

De asemenea:

$$gh = (X^2 + 2X + 3)(3X^2 - 2X + 2) = \begin{array}{r} 3X^4 + 6X^3 + 9X^2 - \\ - 2X^3 - 4X^2 - 6X + \\ \quad \quad \quad + 2X^2 + 4X + 6 = \\ \hline = 3X^4 + 4X^3 + 7X^2 - 2X + 6 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(gh) &= (X^2 + 1)(3X^4 + 4X^3 + 7X^2 - 2X + 6) = \\ &= \begin{array}{r} (3X^4 + 4X^3 + 7X^2 - 2X + 6)(X^2 + 1) = \\ \hline = 3X^6 + 4X^5 + 7X^4 - 2X^3 + 6X^2 + \\ \quad \quad \quad + 3X^4 + 4X^3 + 7X^2 - 2X + 6 = \\ \hline = 3X^6 + 4X^5 + 10X^4 + 2X^3 + 13X^2 - 2X + 6 \end{array} \end{aligned}$$

3. Fie $f, g, h \in \mathbb{C}[X]$, $f = iX + 2$, $g = 2X^2 - iX + 1$, $h = X^2 + 2X + i$.
Să se verifice proprietatea $f(g + h) = fg + fh$.

Soluție

Efectuând calculele obținem:

$$g + h = \begin{array}{r} 2X^2 \quad \quad - iX + 1 + \\ \quad \quad \quad + X^2 \quad \quad + 2X \quad \quad + i = \\ \hline = 3X^2 + (2 - i)X + 1 + i \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(g + h) &= (iX + 2)(3X^2 + (2 - i)X + 1 + i) = \\ &= \begin{array}{r} 3X^2 + (2 - i)X + 1 + i \\ iX + 2 \\ \hline = 3iX^3 + (2i + 1)X^2 + (i - 1)X + \\ \quad \quad \quad + 6X^2 + (4 - 2i)X + 2 + 2i = \\ \hline = 3iX^3 + (2i + 7)X^2 + (3 - i)X + 2 + 2i. \end{array} \end{aligned}$$

De asemenea:

$$\begin{aligned} fg &= (iX + 2)(2X^2 - iX + 1) = (2X^2 - iX + 1)(iX + 2) = \\ &= \begin{array}{r} 2iX^3 + X^2 + iX + \\ \quad \quad \quad + 4X^2 - 2iX + 2 = \\ \hline = 2iX^3 + 5X^2 - iX + 2 \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} fh &= (iX + 2)(X^2 + 2X + i) = (X^2 + 2X + i)(iX + 2) = \\ &= iX^3 + 2iX^2 - X + \\ &\quad + 2X^2 + 4X + 2i = \\ &= iX^3 + (2 + 2i)X^2 + 3X + 2i, \end{aligned}$$

astfel încât:

$$\begin{aligned} fg + fh &= 2iX^3 + 5X^2 - iX + 2 + \\ &\quad + iX^3 + (2 + 2i)X^2 + 3X + 2i = \\ &= 3iX^3 + (2i + 7)X^2 + (3 - i)X + 2 + 2i. \end{aligned}$$

Menționăm că proprietățile întâlnite la operațiile cu numere se regăsesc și la operațiile cu polinoame. Vom preciza unele din aceste proprietăți. Fie $f, g, h \in \mathbb{C}[X]$. Avem:

$$f(-g) = (-f)g = -fg \text{ (regula semnelor);}$$

$$(f + g)^2 = f^2 + 2fg + g^2;$$

$$(f - g)^2 = f^2 - 2fg + g^2;$$

$$(f + g)(f - g) = f^2 - g^2;$$

$$f(g - h) = fg - fh;$$

$$f^3 + g^3 = (f + g)(f^2 - fg + g^2);$$

$$f^3 - g^3 = (f - g)(f^2 + fg + g^2);$$

$$(f + g)^n = C_n^0 f^n + C_n^1 f^{n-1} g + \dots + C_n^k f^{n-k} g^k + \dots + C_n^n g^n, n \in \mathbb{N}^* \text{ (binomul lui Newton).}$$

Efectuați în clasă

1. Se dau $f = X^2 - 3X + 2$, $g = X + 5$. Calculați fg .
2. Fie $f = 5X^2 - 2X + 7$. Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f = a(X - 2)^2 + b(X - 2) + c$.
3. Calculați $(X + 2)^2$ și $(X + 2)^3$.

Temă

1. Calculați fg dacă:

a) $f = X^2 - X + 1$, $g = X^2 + X + 1$;	b) $f = X^2 + iX + 1$, $g = X^2 - iX + 1$;
c) $f = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$, $g = X + 1$;	d) $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, $g = X - 1$;
e) $f = (1 + i)X + (1 - i)$, $g = X^2 + (1 - i)X + 2i$;	
f) $f = -iX^2 + (1 + i)X + (1 - i)$, $g = iX^2 + (1 - i)X + (1 + i)$.	
2. Calculați $f(g + h)$ și $f(g - h)$ dacă $f = X^2 + 3X + 2$, $g = X^2 - 3X + 2$, $h = 2X + 1$.
3. Calculați $(f + g)^2$, $(f - g)^2$ și $f^2 - g^2$ dacă $f = 2X + 1$, $g = -X + 2$.
4. Determinați a, b, c astfel încât polinomul $f = 2X^2 + 3X - 4$ să se scrie sub forma $f = a(X + 2)^2 + b(X + 2) + c$.
5. Dacă $f = 3(X + 3)^2 + 2(X + 3) + 1$, determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f = a(X - 3)^2 + b(X - 3) + c$.

2. Teorema împărțirii cu rest; împărțirea cu $X - a$; schema lui Horner

2.1. Teorema împărțirii cu rest a polinoamelor

În mulțimea numerelor întregi \mathbb{Z} este cunoscută teorema împărțirii cu rest (a împărțirii euclidiene):

Teoremă

Oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{N}^*$, există $q, r \in \mathbb{Z}$, unic determinați, astfel încât:

$$a = nq + r, 0 \leq r < n,$$

unde q se numește **câtul** și r **restul** împărțirii euclidiene a lui a prin n .

Această proprietate se regăsește și în mulțimea polinoamelor.

Vom nota cu $K[X]$ mulțimea polinoamelor cu coeficienți în corpul K și nedeterminata X , unde corpul K poate fi $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sau \mathbb{Z}_p, p prim.

Teoremă

Fie f și g două polinoame din $K[X]$, $g \neq 0$. Oricare ar fi polinomul $f \in K[X]$, există polinoamele $q, r \in K[X]$ unic determinate astfel încât:

$$f = g \times q + r,$$

cu $\text{grad } r < \text{grad } g$, dacă $r \neq 0$.

Demonstrație. Vom demonstra existența și unicitatea polinoamelor q și r .

Existența. Dacă $f = 0$, atunci se ia $q = 0$ și $r = 0$; avem: $f = g \times 0 + 0 = 0$.

Dacă $f \neq 0$, presupunem $\text{grad } f = n$ și $\text{grad } g = m$. Avem:

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0, a_n \neq 0, \text{ și}$$

$$g = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x^1 + b_0 x^0, b_m \neq 0.$$

Dacă $n < m$, relația $f = g \times q + r$ este verificată dacă considerăm $q = 0$ și $r = f$. Să presupunem că $\text{grad } f = n > m = \text{grad } g$ și relația:

$$f = g \times q + r,$$

este adevărată pentru polinomul $f_1 \in K[X]$, $f_1 \neq 0$, unde $\text{grad } f_1 < n$. Vom considera polinomul $f_1 \in K[X]$ definit astfel:

$$(*) f_1 = f - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} \times g.$$

Deducem că termenul principal al polinomului $\frac{a_n}{b_m} X^{n-m} g$ este:

$$\frac{a_n}{b_m} X^{n-m} b_m X^m = a_n X^n.$$

Deducem că polinoamele f și $\frac{a_n}{b_m} X^{n-m} g$ au același termen principal și deci:

$\text{grad } f_1 < n = \text{grad } f$, dacă $f_1 \neq 0$.

Repetând raționamentul, deducem că există două polinoame $q_1, r_1 \in K[X]$ astfel încât

$$f_1 = g \times q_1 + r_1,$$

unde $\text{grad } r_1 < \text{grad } g$, dacă $r_1 \neq 0$ și obținem: $f = g \left(\frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + q_1 \right) + r_1$,

și relația (*) este adevărată, cu: $q = \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + q_1$ și $r = r_1$.

Unicitatea. Să demonstrăm unicitatea lui q și r din relația (*).

Fie $q', r' \in K[X]$ astfel încât

$$f = g \times q' + r',$$

și $\text{grad } r' < \text{grad } g$, dacă $r' \neq 0$.

Din $f = g \times q + r = g \times q' + r'$, rezultă $g(q - q') = r - r'$.

Dacă $r \neq r'$, atunci $q - q' \neq 0$ și avem:

$\text{grad } g = m > \text{grad}(r' - r) = \text{grad } g + \text{grad}(q' - q) \geq \text{grad } g = m$, dacă $m > m$.

Contradicție: Atunci este adevărat că $r = r'$ și din $\text{grad}(q - q') = r - r' = 0$, $g \neq 0$, rezultă că $q = q'$.

Polinoamele q și r din enunțul teoremei se numesc **câtul**, respectiv **restul** împărțirii euclidiene a polinoamelor f prin polinomul $g \neq 0$.

Rezultă că este necesar să se demonstreze **existența** și **unicitatea** polinoamelor q și r . În cele ce urmează vom utiliza algoritmul care rezultă din demonstrația teoremei și vom prezenta pentru cazuri particulare determinarea lui q și r .

EXEMPLE

1. Fie $f, g \in \mathbb{C}[X], f = 2X^5 - 5X^4 + 11X^3 - 11X^2 + 15X - 7, g = X^2 - 2X + 3$. Având în vedere relația $f = gq + r$, unde $\text{grad } r < \text{grad } g$, deducem că $\text{grad } q = \text{grad } f - \text{grad } g = 5 - 2 = 3$. Coeficientul dominant al lui q se determină astfel încât înmulțit cu coeficientul dominant al lui g să dea coeficientul dominant al lui f ; prin scădere obținem un polinom $f - gq$ cu gradul mai mic. Algoritmul se repetă pentru acest polinom $f - gq$ până se obține un polinom de grad mai mic decât gradul lui g .

Procedând în mod analog cu cazul împărțirii euclidiene a numerelor întregi, schematic calculele pentru determinarea lui q și r pot fi organizate astfel:

$$\begin{array}{r|l}
 2X^5 - 5X^4 + 11X^3 - 11X^2 + 15X - 7 & X^2 - 2X + 3 \\
 \underline{-2X^5 + 4X^4 - 6X^3} & \hline
 -X^4 + 5X^3 - 11X^2 + 15X - 7 & \\
 \underline{X^4 - 2X^3 + 3X^2} & \\
 / & 3X^3 - 8X^2 + 15X - 7 \\
 \underline{-3X^3 + 6X^2 - 9X} & \\
 / & -2X^2 + 6X - 7 \\
 \underline{2X^2 - 4X + 6} & \\
 / & 2X - 1
 \end{array}$$

Rezultă $q = 2X^3 - X^2 + 3X - 2$ și $r = 2X - 1$.

Folosind relația de definiție a împărțirii $f = gq + r$, putem face proba:

$$\begin{aligned} gq &= qg = (2X^3 - X^2 + 3X - 2)(X^2 - 2X + 3) = \\ &= 2X^5 - X^4 + 3X^3 - 2X^2 - \\ &\quad - 4X^4 + 2X^3 - 6X^2 + 4X + \\ &\quad + 6X^3 - 3X^2 + 9X - 6 = \\ &= 2X^5 - 5X^4 + 11X^3 - 11X^2 + 13X - 6, \end{aligned}$$

deci:

$$\begin{aligned} gq + r &= 2X^5 - 5X^4 + 11X^3 - 11X^2 + 13X - 6 + \\ &\quad + 2X - 1 = \\ &= 2X^5 - 5X^4 + 11X^3 - 11X^2 + 15X - 7 = f \end{aligned}$$

2. Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = 3X^5 - X^4 - \frac{3}{2}X^3 + 3X^2 - 3X + 2$ și $g = 2X^3 - 2X + 3$. Determinăm câtul și restul împărțirii lui f la g .

Efectuând calculele, obținem:

$$\begin{array}{r|l} 3X^5 - X^4 - \frac{3}{2}X^3 + 3X^2 - 3X + 2 & 2X^3 - 2X + 3 \\ -3X^5 & + 3X^3 - \frac{9}{2}X^2 \\ \hline & / -X^4 + \frac{3}{2}X^3 - \frac{3}{2}X^2 - 3X \\ & X^4 & - X^2 + \frac{3}{2}X \\ \hline & / \frac{3}{2}X^3 - \frac{5}{2}X^2 - \frac{3}{2}X + 2 \\ & -\frac{3}{2}X^3 & + \frac{3}{2}X - \frac{9}{4} \\ \hline & / -\frac{5}{2}X^2 & - \frac{1}{4} \end{array}$$

$$\text{Rezultă } q = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{3}{4}, r = -\frac{5}{2}X^2 - \frac{1}{4}.$$

Efectuați în clasă

Să se facă proba împărțirii de la exemplul 2.

Exercițiul rezolvat

Să se determine polinomul $f = 2X^3 + aX^2 + bX + 8$ astfel încât împărțit la polinomul $g = X^2 - 2X + 3$ să dea restul $r = 3X + 2$.

Soluție

Câtul împărțirii polinomul f la g are gradul 1. Coeficientul dominant al lui q este 2, deci avem $q = 2X + \lambda$. Din relația $f = gq + r$ deducem:

$$\begin{aligned} gq &= (X^2 - 2X + 3) \times (2X + \lambda) = \\ &= 2X^3 - 4X^2 + 6X + \\ &\quad + \lambda X^2 - 2\lambda X + 3\lambda = \\ &= 2X^3 + (\lambda - 4)X^2 + 2(3 - \lambda)X + 3\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{astfel: } gq + r &= 2X^3 + (\lambda - 4)X^2 + 2(3 - \lambda)X + 3\lambda + \\ &\quad + 3X + 2 = \\ &= 2X^3 + (\lambda - 4)X^2 + (9 - 2\lambda)X + 3\lambda + 2 = \\ &= \frac{2X^3}{2X^3} + \frac{(\lambda - 4)X^2}{aX^2} + \frac{(9 - 2\lambda)X + 3\lambda + 2}{bX + 8} = f. \end{aligned}$$

$$\text{Rezultă } \begin{cases} \lambda - 4 = a \\ 9 - 2\lambda = b, \lambda = 2, a = -2, b = 5, \text{ deci } f = 2X^3 - 2X^2 + 5X + 8. \\ 3\lambda + 2 = 8 \end{cases}$$

Efectuați în clasă

Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = 3X^4 + 2X^3 - 5X^2 + 3X + 2$ și $g = X^2 - X + 2$.

a) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la g .

b) Să se facă proba împărțirii ($f = gq + r$).

Temă

- Aflați câtul și restul împărțirii euclidiene a polinomului $f = 5X^5 + 3X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 3X + 2$ prin $g = X^3 + 2X^2 - 3$.
- Să se afle câtul și restul împărțirii euclidiene a polinomului $f = 2X^5 + X^4 - 5X^2 - 8X + 1$ prin $g = X^2 - 3$.
- Să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f prin g dacă $f = X^4 + 2iX^3 + (1 + 2i)X^2 + 2iX + 1$ și $g = X^2 + X + 1$.
- Se cere q și r astfel încât $f = g \times q + r$ dacă $f = iX^4 - (1 + i)X^2 + 3iX - (i + 1)$ și $g = X + 2i$.
- Fie $f \in \mathbb{C}[X]$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq \beta$. Să se demonstreze că restul împărțirii polinomului f prin $(X - \alpha)(X - \beta)$ este: $r = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} X + \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{\alpha - \beta}$.

2.2. Valoarea unui polinom

Definiție

Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ și $\alpha \in \mathbb{C}$, vom nota $f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0$. Numărul $f(\alpha) \in \mathbb{C}$ se numește **valoarea** polinomului f pentru $\alpha \in \mathbb{C}$.

De asemenea, se mai spune că $f(\alpha)$ este valoarea polinomului f și se obține atribuind nedeterminatei X valoarea $\alpha \in \mathbb{C}$.

EXEMPLE

1. Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = 3X^3 - 8X^2 + 5X - 3$ și $\alpha = 2$, atunci valoarea polinomului f atribuind nedeterminatei X valoarea $2 \in \mathbb{C}$ este:

$$f(2) = 3 \times 2^3 - 8 \times 2^2 + 5 \times 2 - 3 = 24 - 32 + 10 - 3 = -1.$$

2. Dacă $f = iX^2 - (1 + i)X - 3 + 2i$ și $\alpha = 1 - i \in \mathbb{C}$, valoarea polinomului f în $\alpha = 1 - i$, este: $f(1 - i) = i(1 - i)^2 - (1 + i)(1 - i) - 3 + 2i = i(1 - 2i - 1) + (1 + 1) - 3 + 2i = 2 + 2 - 3 + 2i = 1 + 2i$.

2.3. Valoarea sumei a două polinoame și valoarea produsului a două polinoame

Pentru $f, g \in \mathbb{C}[X]$ și $\alpha \in \mathbb{C}$, avem

$$(f + g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha) \quad \text{și} \quad (fg)(\alpha) = f(\alpha) \times g(\alpha)$$

Într-adevăr, fie $f = X^2 - 3iX + 5$ și $g = 2X^2 - 3$. Pentru $\alpha = i \in \mathbb{C}$, avem:
 $f + g = 3X^2 - 3iX + 2$, $(f + g)(i) = 3 \times i^2 - 3 \times i \times i + 2 = -3 + 3 + 2 = 2$ și
 $f(i) = i^2 - 3i \times i + 5 = -1 + 3 + 5 = 7$, $g(i) = 2 \times i^2 - 3 = 2 \times (-1) - 3 = -5$,
 de unde rezultă $f(i) + g(i) = 7 - 5 = 2 = (f + g)(i)$.

De asemenea,

$$\begin{aligned} fg &= (X^2 - 3iX + 5)(2X^2 - 3) = \\ &= 2X^4 - 6iX^3 + 10X^2 - \\ &\quad - 3X^2 + 9iX - 15 = \\ &= 2X^4 - 6iX^3 + 7X^2 + 9iX - 15, \end{aligned}$$

deci $(fg)(i) = 2 \times i^4 - 6i \times i^3 + 7i^2 + 9i \times i - 15 = 2 - 6 - 7 - 9 - 15 = -35$,
 respectiv $f(i) \times g(i) = 7 \times (-5) = -35$, deci $(fg)(i) = f(i) \times g(i)$.

Efectuați în clasă

Dacă $f = 2X^2 - 3X + 5$ și $g = X^2 + 2$, verificați că $(f + g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$ și $(fg)(\alpha) = f(\alpha) \times g(\alpha)$ pentru $\alpha = -2$.

2.4. Funcția polinomială asociată unui polinom

Definiție

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$. Polinomului f îi vom asocia o funcție $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dată prin $\tilde{f}(\alpha) = f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$; \tilde{f} se numește **funcția polinomială asociată polinomului f** .

În cazul $f \in \mathbb{R}[X]$ funcția polinomială asociată polinomului f este:

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(\alpha) = f(\alpha), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

EXEMPLE

1. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^2 - 5X + 4$. Funcția polinomială asociată polinomului f este $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = x^2 - 5x + 4$.
2. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = -X^2 + 4X - 1$. Funcția polinomială asociată polinomului f este $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = -x^2 + 4x - 1$.
3. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 4X$. Funcția polinomială asociată polinomului f este $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = x^3 - 4x$.

Mulțimea valorilor funcțiilor polinomiale asociate polinomului f din exemplele 1, 2 și 3 sunt prezentate în desenele din figura 1 (a, respectiv b și c de pe pagina 64).

Efectuați în clasă

Dacă $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^2 - X - 6$, să se scrie funcția polinomială asociată și să se vizualizeze mulțimea valorilor posibile ale acestei funcții.

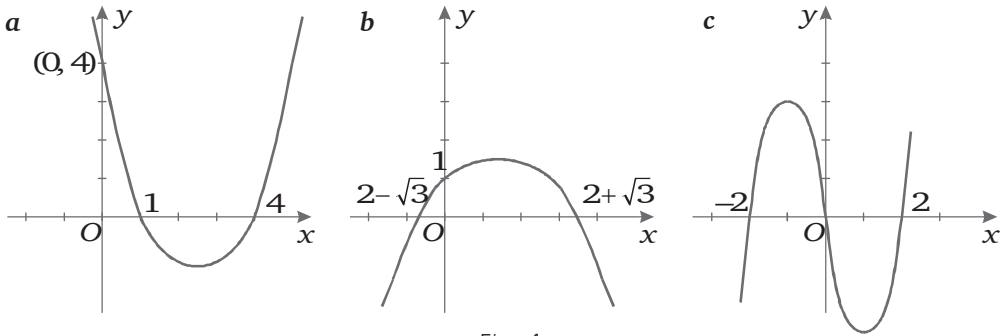


Fig. 1

2.5. Rădăcina unui polinom

Definiție

Fiind dat un polinom $f \in \mathbb{C}[X]$, un număr $\alpha \in \mathbb{C}$ se numește **rădăcină** a polinomului f dacă $f(\alpha) = 0$.

EXEMPLE

1. Dacă $f \in \mathbb{R}[X], f = X^2 - 5X + 6$, atunci numărul $\alpha = 2 \in \mathbb{R}$ este rădăcină a polinomului f .
Într-adevăr, $f(\alpha) = f(2) = 2^2 - 5 \times 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$.

2. Fie $f \in \mathbb{R}[X], f = \frac{1}{2}X^3 + \frac{5}{2}X^2 - X - 3$. Numărul $\alpha = -1 \in \mathbb{R}$ este rădăcină a polinomului f .

Într-adevăr, $f(-1) = \frac{1}{2}(-1)^3 + \frac{5}{2}(-1)^2 - (-1) - 3 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} + 1 - 3 = 2 + 1 - 3 = 0$.

3. Fie $f \in \mathbb{C}[X], f = X^4 + 3X^2 + 2$. Numărul $\alpha = -i \in \mathbb{C}$ este rădăcină a polinomului f .
Avem $f(i) = i^4 + 3i^2 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$.

4. Fie $f \in \mathbb{C}[X], f = 2X^2 - 3iX - 3 - i$. Numărul $\alpha = 1 + i \in \mathbb{C}$ este rădăcină a polinomului f .
Într-adevăr, $f(\alpha) = f(1 + i) = 2(1 + i)^2 - 3i(1 + i) - 3 - i = 2(1 + 2i - 1) - 3i + 3 - 3 - i = 4i - 4i = 0$.

Efectuați în clasă

Verificați că α este rădăcină a polinoamelor în cazurile următoare:

a) $f = X^2 - 7X + 12, \alpha = 4;$

b) $f = 3X^2 - 5X + 8, \alpha = -1;$

c) $f = iX^3 - 2X^2 + 1, \alpha = i;$

d) $f = X^3 - 2\sqrt{2}X^2 - \sqrt{2}X + 2 + 2\sqrt{2}, \alpha = \sqrt{2};$

e) $f = (X^2 + 1)^2 + X + i, \alpha = -i.$

2.6. Împărțirea cu $X - a$, unde $a \in \mathbb{C}$, teorema restului

Aplicând teorema împărțirii euclidiene pentru polinomul $f \in \mathbb{C}[X], f = X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 2X - 1$ prin $g = X - 1$, obținem:

$$\begin{array}{r|l}
 X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 2X - 1 & X - 1 \\
 -X^4 + X^3 & \hline
 \hline
 / - 2X^3 + 5X^2 & \\
 2X^3 - 2X^2 & \\
 \hline
 3X^2 - 2X & \\
 -3X^2 + 3X & \\
 \hline
 / X - 1 & \\
 -X + 1 & \\
 \hline
 / / &
 \end{array}$$

Am găsit câtul împărțirii lui f la $X - 1$, $q = X^3 - 2X^2 + 3X + 1$ și $r = 0$. Observăm că $\alpha = 1$ este rădăcina a polinomului, $f(1) = 0$.

Un rezultat important este dat de teorema următoare.

Teorema restului

Fiind date polinoamele $f \in \mathbb{C}[X]$ și $g = X - a$, $a \in \mathbb{C}$, restul împărțirii euclidiene a lui f prin $X - a$ este $f(a)$.

Demonstrație

Ținând seama că $g = X - a$, deci $\text{grad } g = 1$, rezultă că restul împărțirii lui f prin $X - a$ este un polinom constant. Deducem că există $q \in \mathbb{C}[X]$ și $r \in \mathbb{C}$ astfel încât $f = (X - a)q + r$. Pentru $a \in \mathbb{C}$, considerând valoarea fiecărui polinom din egalitatea precedentă, rezultă: $f(a) = (a - a)q(a) + r$ și deducem $r = f(a)$.

2.7. Schema lui Horner

Un procedeu, diferit de algoritmul de împărțire a unui polinom f prin polinomul $X - \alpha = g$ pentru a determina câtul și restul este dat de **schema lui Horner**.

Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$, unde $g = X - a$. Din teorema împărțirii euclidiene avem $f = gq + r$, unde $\text{grad } g = 1$. Rezultă $\text{grad } q = \text{grad } f - 1 = n - 1$ și $\text{grad } r = 0$ deci putem scrie:

$$q = b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \dots + b_1X + b_0,$$

iar relația $f = gq + r$ devine:

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 = (X - a)(b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \dots + b_1X + b_0).$$

Efectuând calculele și grupând termenii asemenea rezultă:

$$\begin{aligned}
 & b_{n-1}X^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})X^{n-1} + (b_{n-3} - ab_{n-2})X^{n-2} + \dots + (b_0 - ab_1)X + (r - ab_0) = \\
 & = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \dots + a_1X + a_0.
 \end{aligned}$$

Conform definiției egalității a două polinoame identificăm coeficienții acestor polinoame:

$$\begin{cases}
 b_{n-1} = a_n \\
 b_{n-2} - ab_{n-1} = a_{n-1} \\
 b_{n-3} - ab_{n-2} = a_{n-2} \\
 \dots\dots\dots \\
 b_0 - ab_1 = a_1 \\
 r - ab_0 = a_0
 \end{cases}, \tag{1}$$

de unde deducem:

$$\begin{cases} b_{n-1} = a_n \\ b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1} \\ b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2} \\ \dots \\ b_0 = a_1 + ab_1 \\ r = a_0 + ab_0 \end{cases} \quad (1')$$

Am determinat astfel coeficienții polinomului cât. Acești coeficienți pot fi trecuți într-un tabel, numit **schema lui Horner**:

	X^n	X^{n-1}	X^{n-2}	...	X^1	X^0
	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
a	a_n	$a_{n-1} + ab_{n-1}$	$a_{n-2} + ab_{n-2}$...	$a_1 + ab_1$	$a_0 + ab_0$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-2}	...	b_0	r

de unde deducem: $q = b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \dots + b_1X + b_0$ și $r = f(a)$.

EXEMPLU

Utilizând schema lui Horner, să se determine câtul și restul împărțirii polinomului $f = X^5 - 3X^4 + 5X^3 - 3X^2 + 2X - 6$ la $X - 2$.

Întocmind schema lui Horner, obținem:

	X^5	X^4	X^3	X^2	X	X^0
	1	-3	5	-3	2	-6
2	1	-1	3	3	8	10
	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	r

Am obținut câtul $q = X^4 - X^3 + 3X^2 + 3X + 8$ și restul $r = 10$.

Exerciții rezolvate

1. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = 2X^3 - 9X^2 + 13X - 10$ și $\alpha = 1$.

a) Să se afle câtul și restul împărțirii lui f la $X - 1$.

b) Să se scrie polinomul f sub forma $f = a(X - 1)^3 + b(X - 1)^2 + c(X - 1) + d$ folosind schema lui Horner și metoda coeficienților nedeterminați.

Soluție

a)

	X^3	X^2	X	X^0
	2	-9	13	-10
1	2	-7	6	-4

Rezultă $q = 2X^2 - 7X + 6$ și $r = -4$, deci $f = (X - 1)(2X^2 - 7X + 6) - 4$.

b) Pentru $f = a(X - 1)^3 + b(X - 1)^2 + c(X - 1) + d$, putem scrie:

$$\begin{aligned} f &= aX^3 - 3aX^2 + 3aX - a + \\ &\quad + bX^2 - 2bX + b + \\ &\quad + cX - c + \\ &\quad + d = \\ &= aX^3 + (-3a + b)X^2 + (3a - 2b + c)X - a + b - c + d = \\ &= 2X^3 \qquad - 9X^2 \qquad + 13X \qquad - 10. \end{aligned}$$

Rezultă sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} a = 2 \\ -3a + b = -9 \\ 3a - 2b + c = 13 \\ -a + b - c + d = -10 \end{cases},$$

care admite soluția $a = 2, b = -3, c = 1, d = -4$, deci $f = 2(X-1)^3 - 3(X-1)^2 + (X-1) - 4$.

Utilizând schema lui Horner, avem:

	X^3	X^2	X	X^0
	2	-9	13	-10
1	2	-7	6	-4
1	2	-5	1	
1	2	-3		

deci $f = 2(X-1)^3 - 3(X-1)^2 + (X-1) - 4$.

2. Fie $f, g \in \mathbb{C}[X], f = X^4 - 4X^3 + 2X^2 + X + 6$ și $g = X^2 - 5X + 6$.

Folosind schema lui Horner, să se arate că g este divizor al lui f .

Soluție

Putem scrie $g = (X-2)(X-3)$. Întocmind schema lui Horner, rezultă:

	X^4	X^3	X^2	X	X^0
	1	-4	2	1	6
2	1	-2	-2	-3	0
3	1	1	1	0	

deci $f = (X-2)(X-3)(X^2 + X + 1) = (X^2 - 5X + 6)(X^2 + X + 1) = (X^2 + X + 1)g$.

Efectuați în clasă

1. Fie $f \in \mathbb{C}[X], f = 3X^3 - 5X^2 + 4X - 6, \alpha = -1$. Folosind schema lui Horner, să se afle câtul și restul împărțirii polinomului f la $X + 1$.
2. Fie $f \in \mathbb{C}[X], f = 5X^2 - 7X + 3$. Să se scrie f sub forma $f = a(X-2)^2 + b(X-2) + c$, folosind:
 - a) metoda coeficienților nedeterminați;
 - b) schema lui Horner.

Temă

1. Aplicând schema lui Horner să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f prin g .
 - a) $f = 3X^3 - 2X^2 - 6X + 1, g = X - 1;$
 - b) $f = X^5 - 3X^3 - 6X + 2, g = X + 1;$
 - c) $f = X^4 - 2X^3 + X^2 - X - 2, g = X - 2;$
 - d) $f = 2X^4 - X^3 + 2X^2 - 2, g = X + 2;$
 - e) $f = 4X^4 - 6X^3 + 2X^2 + 4X - 1, g = X + \frac{1}{2};$
 - f) $f = 2X^3 + 8X^2 - 4X + 2, g = 2X + 1;$
 - g) $f = 2X^3 - 3X^2 + 4X - 6, g = X + 1;$
 - h) $f = 2X^5 - 7X^4 + 6X^3 - 8X^2 + 9X + 10, g = X - 2;$
 - i) $f = X^6 - X^5 + 3X^3 - 6X + 2, g = X + 1;$
 - j) $f = X^5 + \sqrt{3}X^4 - 5X^3 + 2\sqrt{3}X^2 - 6X - 4\sqrt{3}, g = X - \sqrt{3}.$
2. Fie $f = 2X^3 - 3X^2 - X + 1, \alpha = 2$. Determinați restul împărțirii lui f la $X - \alpha$.

3. Divizibilitatea polinoamelor, teorema lui Bézout, c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. al unor polinoame, descompunerea unui polinom în factori ireductibili

3.1. Divizibilitatea polinoamelor

Fiind date polinoamele $f, g \in \mathbb{C}[X]$ am văzut că restul și câtul împărțirii euclidiene a lui f prin g sunt unic determinate.

Definiție

Dacă $f, g \in \mathbb{C}[X]$ se spune că polinomul g **divide** polinomul f dacă există un polinom $q \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât $f = g \times q$.

Dacă polinomul g divide polinomul f vom nota $g \mid f$ și se spune că g **este divizor al lui f** sau **f este multiplu al lui g** . Se mai spune că f se divide prin g .

Exercițiu rezolvat

Să se stabilească dacă polinomul $f = 4X^5 - 6X^4 + 13X^3 - 5X^2 + 10X - 8$ se divide prin $g = X^2 - X + 2$.

Soluție

Pentru a stabili dacă polinomul g este un divizor al polinomului f vom face împărțirea lui f la g .

$$\begin{array}{r|l}
 4X^5 - 6X^4 + 13X^3 - 11X^2 + 10X - 8 & X^2 - X + 2 \\
 \underline{-4X^5 + 4X^4 - 8X^3} & \\
 / - 2X^4 + 5X^3 - 11X^2 & \\
 \quad \underline{+ 2X^4 - 2X^3 + 4X^2} & \\
 \quad \quad / \quad 3X^3 - 7X^2 + 10X & \\
 \quad \quad \quad \underline{- 3X^3 + 3X^2 - 6X} & \\
 \quad \quad \quad \quad / \quad - 4X^2 + 4X - 8 & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \underline{4X^2 - 4X + 8} & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad / \quad / \quad / &
 \end{array}$$

rezultă că $g \mid f$ și $q = 4X^3 - 2X^2 + 3X - 4$.

Efectuați în clasă

Verificați relația $gq = f$.

3.2. Teorema lui Bézout

Din teorema restului, deducem că fiind dat polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$ și $a \in \mathbb{C}$, polinomul $g = X - a$ divide polinomul f dacă și numai dacă restul împărțirii euclidiene a lui f prin $X - a$ este egal cu zero.

Teorema lui Bézout

Un polinom $f \in \mathbb{C}[X]$ se divide prin polinomul $X - a$, $a \in \mathbb{C}$, dacă și numai dacă $f(a) = 0$.

Teorema poate fi enunțată și astfel:

$X - a$ este divizor al polinomului f dacă și numai dacă a este rădăcină a polinomului f .

EXEMPLE

1. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 + 3X^2 + 5X + 3$ și $a = -1$. Rezultă $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 5(-1) + 3 = -1 + 3 - 5 + 3 = 0$, deci $(X + 1) \mid f$.

2. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 + (3 + \sqrt{2})X^3 + (3\sqrt{2} - 2)X^2 + (1 - 2\sqrt{2})X + \sqrt{2}$ și $a = -\sqrt{2}$. Efectuând calculele, obținem: $f(a) = f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^4 + (3 + \sqrt{2})(-\sqrt{2})^3 + (3 - \sqrt{2})(-\sqrt{2})^2 + (1 - 2\sqrt{2})(-\sqrt{2}) + \sqrt{2} = 4 - (3 + \sqrt{2}) \times 2\sqrt{2} + 2(3\sqrt{2} - 2) - (1 - 2\sqrt{2})\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4 - 6\sqrt{2} - 4 + 6\sqrt{2} - 4 - \sqrt{2} + 4 + \sqrt{2} = 0$.

Rezultă că $g = X + \sqrt{2}$ este divizor al polinomului f .

3. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 + (4 + 3i)X - 6$ și $a = -2i \in \mathbb{C}$. Calculând valoarea polinomului f pentru $a = -2i$, obținem: $f(a) = f(-2i) = (-2i)^3 + (4 + 3i)(-2i) - 6 = 8i - 8i + 6 - 6 = 0$.

Rezultă că $X + 2i$ este divizor al polinomului f .

4. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^2 - 4X + 1$ și $a = 2 - \sqrt{3} \in \mathbb{C}$. Valoarea polinomului f pentru $a = 2 - \sqrt{3}$, este: $f(a) = f(2 - \sqrt{3}) = (2 - \sqrt{3})^2 - 4(2 - \sqrt{3}) + 1 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 - 8 + 4\sqrt{3} + 1 = 0$, de unde rezultă că f se divide prin $X - 2 + \sqrt{3}$.

5. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$ și $a = -1 \in \mathbb{C}$. Deducem: $f(a) = f(-1) = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 \neq 0$, ceea ce demonstrează că $X + 1$ nu este divizor al lui f .

Vom remarca faptul că generalizarea teoremei lui Bézout are o importanță deosebită. Putem enunța următoarea teoremă.

Teoremă

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f \neq 0$ și $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, $a_1 \neq a_2$. Polinomul f se divide prin $(X - a_1)(X - a_2)$ dacă și numai dacă $f(a_1) = 0$ și $f(a_2) = 0$.

Demonstrație

Presupunem că polinomul f se divide prin $(X - a_1)(X - a_2)$, deci există $q \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât $f = (X - a_1)(X - a_2)q$. De aici deducem că $f(a_1) = f(a_2) = 0$.

Reciproc, dacă presupunem $f(a_1) = 0$ și $f(a_2) = 0$ și aplicăm teorema lui Bézout din $f(a_1) = 0$ rezultă $f = (X - a_1)g$ cu $g \in \mathbb{C}[X]$. Din condiția $f(a_2) = 0$, deducem: $0 = f(a_2) = (a_2 - a_1)g(a_2)$, unde $a_2 - a_1 \neq 0$. Rezultă $g(a_2) = 0$ și aplicând teorema lui Bézout putem scrie: $g = (X - a_2)q$ cu $q \in \mathbb{C}[X]$ deci: $f = (X - a_1)(X - a_2)q$.

EXEMPLU

Fie $f \in \mathbb{C}[X], f = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$. Să se arate că f se divide prin $X^2 - 3X + 2$. Vom observa că putem scrie $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$ și $f(1) = f(2) = 0$.

De asemenea, efectuând împărțirea:

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2 & X^2 - 3X + 2 \\ -X^4 + 3X^3 - 2X^2 & \\ \hline & X^2 - 3X + 2 \\ & -X^2 + 3X - 2 \\ & \hline & / \quad / \quad / \end{array}$$

deducem că $(X^2 - 3X + 2) | f$ și putem scrie:

$$f = (X^2 - 3X + 2)(X^2 + 1) = (X - 1)(X - 2)(X - i)(X + i).$$

Efectuați în clasă

1. Fie polinomul $f \in \mathbb{C}[X], f = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$. Arătați că f se divide prin g dacă:
 - a) $g = (X - i)(X + i)$;
 - b) $g = X^2 - (1 + i)X + i$;
 - c) $g = X^2 - (2 + i)X + 2i$;
 - d) $g = (X - 1)(X + i)$;
 - e) $g = (X - 2)(X + i)$.
2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X], f = X^4 + 1, g = X^2 - mX + n$. Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât $g | f$.

3.3. Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) și cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.) al polinoamelor

3.3.1. Noțiuni pregătitoare

Fie $f, g \in K[X], g \neq 0$. Conform teoremei împărțirii euclidiene, avem:

$$(*) \quad f = gq + r, \text{ grad } r < \text{grad } g.$$

Vom arăta, pentru $f \neq 0$, că:

$$\text{dacă } d \in K[X], d \neq 0, \text{ și } d | f, d | g, \text{ atunci } d | r.$$

Fie $f = df_1$ și $g = dg_1$. Deducem că:

$$df_1 = dg_1q + r,$$

și putem scrie $d(f_1 - g_1q) = r$, de unde rezultă că $d | r$.

De asemenea, vom demonstra că:

$$\text{dacă } d | r \text{ și } d | g, \text{ atunci } d | f.$$

Fie $r = dr'$ și $g = dg'$. Din (*), rezultă că

$$f = dg'q + dr',$$

de unde deducem că $f = d(g'q + r')$ și $d | f$.

3.3.2. Cel mai mare divizor comun a două polinoame (c.m.m.d.c.)

Definiție

Fie K unul dintre corpurile comutative $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ sau \mathbb{Z}_p, p prim.

Fiind date două polinoame $f, g \in K[X]$. Un polinom $d \in K[X]$ se numește **cel mai mare divizor comun** al polinoamelor f și g dacă sunt verificate condițiile:

- (a) $d|f$ și $d|g$, (b) dacă $h|f$ și $h|g$, atunci $h|d$.

Notăție. Pentru **cel mai mare divizor comun** al polinoamelor $f, g \in K[X]$ se notează cu **c.m.m.d.c.**(f, g) sau, simplu, (f, g).

Pentru două polinoame $f, g \in K[X]$ pentru a dovedi existența c.m.m.d.c. vom studia cazul în care $\text{grad } f \geq \text{grad } g, g \neq 0$.

Dacă $g|f$, atunci $\text{c.m.m.d.c.}(f, g) = f$.

Vom studia acum existența c.m.m.d.c. al polinoamelor $f, g \in K[X]$, care au: $\text{grad } f \geq \text{grad } g$ și $g \nmid f$.

Am arătat, conform teoremei împărțirii euclidiene a polinoamelor $f, g \in K[X]$, că există $q_1, r_1 \in K[X], r_1 \neq 0$, astfel încât:

$$(1) f = gq_1 + r_1, r_1 \neq 0, \text{grad } r_1 < \text{grad } g.$$

Analog, rezultă că:

$$(2) g = r_1q_2 + r_2, r_2 \neq 0, \text{grad } r_2 < \text{grad } r_1,$$

$$(3) r_1 = r_2q_3 + r_3, r_3 \neq 0, \text{grad } r_3 < \text{grad } r_2,$$

.....

$$(n) r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n, r_n \neq 0, \text{grad } r_n < \text{grad } r_{n-1},$$

$$(n+1) r_{n-1} = r_nq_{n+1} + 0, r_{n+1} = 0.$$

Din relațiile:

$$\text{grad } g > \text{grad } r_1 > \text{grad } r_2 > \dots,$$

deducem că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $r_i \neq 0$ pentru $1 \leq i \leq n$ și $r_{n+1} = 0$.

Din relațiile de împărțiri cu rest (1), (2), ..., (n+1) se obține un algoritm cunoscut sub numele de **algoritmul lui Euclid** pentru polinoamele f și g , iar r_n se numește **ultimul rest diferit de zero** din algoritmul lui Euclid pentru polinoamele f și g .

Vom arăta că polinomul $d = r_n$ verifică condițiile (a) și (b) din definiția c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g .

Din relația (n+1) din algoritmul lui Euclid, deducem:

$$d = r_n | r_{n-1} \stackrel{(n)}{\Rightarrow} r_n | r_{n-2} \stackrel{(n-1)}{\Rightarrow} \dots \stackrel{(2)}{\Rightarrow} r_n | g \stackrel{(1)}{\Rightarrow} r_n | f,$$

și condiția (a) este verificată.

Dacă $h|f$ și $h|g$, atunci deducem:

$$h | r_1 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} h | r_2 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \dots \stackrel{(n-1)}{\Rightarrow} h | r_{n-1} \stackrel{(n)}{\Rightarrow} h | r_n, r_n \neq 0,$$

și este verificată și condiția (b) din definiția c.m.m.d.c. al polinoamelor $f, g \in K[X]$.

Rezultă că $d = \text{c.m.m.d.c.}(f, g) = r_n$, care este ultimul rest diferit de zero din algoritmul lui Euclid pentru f și g .

EXEMPLE

1. Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + 5X^2 + 8X + 4$ și $g = X^2 - X - 6$.
 Determinăm $d = (f, g)$.

Din algoritmul lui Euclid, obținem:

$$\begin{array}{r|l} X^3 + 5X^2 + 8X + 4 & X^2 - X - 6 \\ -X^3 + X^2 + 6X & \\ \hline / 6X^2 + 14X + 4 & \\ -6X^2 + 6X + 36 & \\ \hline / 20X + 40 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} X^2 - X - 6 & 20X + 40 \\ -X^2 - 2X & \\ \hline / -3X - 6 & \\ 3X + 6 & \\ \hline / / & \end{array}$$

Rezultă $d = (f, g) = 20X + 40 = 20(X + 2)$ sau c.m.m.d.c. $(f, g) = X + 2$.

Obținem:

$$\begin{aligned} f &= gq_1 + r_1, \\ q_1 &= X + 6, \\ r_1 &= 20X + 40. \end{aligned}$$

Obținem:

$$\begin{aligned} g &= r_1q_2 + r_2, \\ q_2 &= \frac{1}{20}X - \frac{3}{20}, \\ r_2 &= 0. \end{aligned}$$

Observație:

Pentru polinoamele f și g anterioare, avem: $f = (X + 1)(X + 2)^2$ și $g = (X + 2)(X - 3)$,
 de unde deducem $(f, g) = X + 2$.

2. Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$, $f = \hat{2}X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{2}X + \hat{4}$ și $g = \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{1}$.

Determinăm $d = (f, g)$.

Utilizând algoritmul lui Euclid, obținem:

$$\begin{array}{r|l} \hat{2}X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{2}X + \hat{4} & \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{1} \\ \hat{3}X^4 + \hat{3}X^3 + \hat{4}X^2 & \\ \hline / X^3 + \hat{3}X^2 + \hat{2}X & \\ \hat{4}X^3 + \hat{4}X^2 + \hat{2}X & \\ \hline / \hat{2}X^2 + \hat{4}X + \hat{4} & \\ \hat{3}X^2 + \hat{3}X + \hat{4} & \\ \hline / \hat{2}X + \hat{3} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{1} & \hat{2}X + \hat{3} \\ \hat{3}X^2 + \hat{2}X & \\ \hline / \hat{4}X + \hat{1} & \\ X + \hat{1} & \\ \hline / / & \end{array}$$

Obținem:

$$\begin{aligned} f &= gq_1 + r_1, \\ q_1 &= X^2 + \hat{3}X + \hat{1}, \\ r_1 &= \hat{2}X + \hat{3}. \end{aligned}$$

Obținem:

$$\begin{aligned} g &= r_1q_2 + r_2, \\ q_2 &= X + \hat{2}, \\ r_2 &= \hat{0}. \end{aligned}$$

Rezultă: $(f, g) = \hat{2}X + \hat{3}$.

Observații:

1. Fie $f, g \in K[X]$ și succesiunea de relații:

$$\begin{aligned} f &= gq_1 + r_1, \text{ grad } r_1 < \text{grad } g, \\ g &= r_1q_2 + r_2, \text{ grad } r_2 < \text{grad } r_1, \\ r_1 &= r_2q_3 + 0, \end{aligned}$$

adică $d = r_2 = (f, g)$.

Putem scrie:

$$r_2 = g - r_1q_2 = g - (f - gq_1)q_2 = g(-q_2) + g(1 + q_1q_2)$$

și deducem că există două polinoame $u, v \in K[X]$ astfel încât:

$$d = fu + gv,$$

proprietate care este adevărată pentru oricare două polinoame $f, g \in K[X]$.

2. Dacă $f, g \in K[X]$ și $d = \text{c.m.m.d.c.}(f, g) = 1$, atunci se spune că f este **prim** cu g .

Vom observa că există și proprietatea următoare.

Proprietate

Fie $f, g \in K[X]$. Avem $\text{c.m.m.d.c.}(f, g) = 1$ dacă și numai dacă există $u, v \in K[X]$ astfel încât:

$$fu + gv = 1.$$

Următoarele proprietăți ale celui mai mare divizor comun al două polinoame $f, g \in K[X]$ sunt analoge cu proprietățile cunoscute pentru cel mai mare divizor comun al numerelor întregi.

Proprietate

Fie $f, g \in K[X]$, $d = (f, g)$ și $h \in K[X]$.

Au loc relațiile următoare:

1. $(hf, hg) = hd$;
2. $(f, g) = 1$ și $(f, h) = 1 \Rightarrow (f, gh) = 1$;
3. $f|gh$ și $(f, g) = 1 \Rightarrow f|h$.

3.3.3. Cel mai mic multiplu comun a două polinoame (c.m.m.m.c.)

Definiție

Fie două polinoame $f, g \in K[X]$. Un polinom $m \in K[X]$ se numește **cel mai mic multiplu comun** al polinoamelor f și g dacă sunt verificate condițiile:

- (a') $f|m$ și $g|m$,
- (b') dacă $f|h$ și $g|h$, atunci $m|h$.

Notăție. Pentru **cel mai mic multiplu comun** al polinoamelor $f, g \in K[X]$ se notează cu $\text{c.m.m.m.c.}(f, g)$ sau, simplu, $[f, g]$.

Proprietate

Oricare ar fi $f, g \in K[X]$, există relația:

$$fg = (f, g) \cdot [f, g].$$

EXEMPLU

Fie polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + 5X^2 + 8X + 4$ și $g = X^2 - X - 6$.

Folosind algoritmul lui Euclid, obținem:

$$d = (f, g) = X + 2.$$

$$\text{Deducem: c.m.m.m.c.}(f, g) = X^4 + 12X^3 - 7X^2 - 20X - 12.$$

Observație:

Pentru polinoamele f și g anterioare, avem: $f = (X + 1)(X + 2)^2$ și $g = (X + 2)(X - 3)$, de unde deducem că:

$$d = (f, g) = X + 2 \text{ și } m = [f, g] = (X + 1)(X + 2)^2(X - 3) = X^4 + 12X^3 - 7X^2 - 20X - 12.$$

$$\text{Deci: } m = \frac{fg}{d} = \frac{(X + 1)(X + 2)^3(X - 3)}{X + 2} = (X + 1)(X + 2)^2(X - 3).$$

Proprietate

Dacă $f \in K[X]$ este un polinom și $a \in K$, $a \neq 0$, atunci polinoamele f și af au același divizor în $K[X]$.

Observație:

O consecință a acestei proprietăți este că, așa cum este precizat în exemplul 1 de la determinarea celui mai mare divizor comun, unde $r_1 = 20X + 40$, avem $d = X + 2$.

Temă

1. Pentru $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = (X - 1)(X - 2)^2$ și $g = (X - 1)(X + 3)$ să se determine (f, g) și $[f, g]$.
2. Să se determine (f, g) și $[f, g]$ pentru f și g date în următoarele forme:
 - a) $f = X^3 + 3X^2 + 4X + 2$ și $g = X^2 + 3X + 2$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$;
 - b) $f = X^3 - 3X^2 + 4X - 2$ și $g = X^2 - X$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$;
 - c) $f = X^4 + 3X^3 + X^2 - 2$ și $g = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$;
 - d) $f = X^4 + X^2 + 1$ și $g = X^3 + X^2$, $f, g \in \mathbb{Z}_2[X]$.

3.4. Descompunerea unui polinom în factori ireductibili

Am văzut că, fiind dat un polinom $f \in \mathbb{C}[X]$, nenul și $\alpha \in \mathbb{C}$, conform teoremei lui Bézout, α este rădăcina a polinomului f dacă și numai dacă $X - \alpha$ divide f .

Astfel, fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = 2X^3 - 5X^2 + 2X + 1$ și $\alpha = 1 \in \mathbb{C}$, de unde rezultă $f(1) = 2 - 5 + 2 + 1 = 0$, deci $(X - 1) \mid f$. Rezultă că există un polinom $q \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât $f = gq$.

Acest polinom poate fi determinat:

a) **Împărțind polinomul f la $g = X - 1$:**

$$\begin{array}{r|l} 2X^3 - 5X^2 + 2X + 1 & X - 1 \\ \hline -2X^3 + 2X^2 & \\ \hline / & -3X^2 + 2X \\ & 3X^2 - 3X \\ \hline & / & -X + 1 \\ & & X - 1 \\ \hline & & / & / \end{array}$$

deci $q = 2X^2 - 3X - 1, f = (X - 1)(2X^2 - 3X - 1)$;

b) **Folosind metoda coeficienților nedeterminați:**

$$\begin{aligned} f &= (X - 1)(aX^2 + bX - c) = \\ &= aX^3 + bX^2 + cX - \\ &\quad - aX^2 - bX - c = \\ &= \frac{aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c}{=} \\ &= \frac{2X^3 - 5X^2 + 2X + 1,}{=} \end{aligned}$$

$$\text{de unde rezultă } \begin{cases} a = 2 \\ b - a = -5 \\ c - b = 2 \\ -c = 1 \end{cases}, \text{ astfel: } a = 2, b = -3, c = -1;$$

$$f = 2X^3 - 5X^2 + 2X + 1 = (X - 1)(2X^2 - 3X - 1); q = 2X^2 - 3X - 1;$$

c) **Folosind schema lui Horner, deducem:**

	X^3	X^2	X	X^0
	2	-5	2	1
1	2	-3	-1	0

deci $q = 2X^2 - 3X - 1$ și $r = 0$.

Definiție

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $\text{grad } f > 1$. Dacă există $\alpha \in \mathbb{C}$ astfel încât $f(\alpha) = 0$, atunci f este **reductibil** peste \mathbb{C} . Rezultă că există $q \in \mathbb{C}[X]$ astfel încât $f = (X - \alpha)q$.

Am văzut în exemplul precedent că $f = 2X^3 - 5X^2 + 2X + 1$ este reductibil, unde $\alpha = 1$ și $f = (X - 1)(2X^2 - 3X - 1), q = 2X^2 - 3X - 1$.

Vom remarca faptul că studiul ireductibilității unui polinom $f \in \mathbb{C}[X]$ (sau $\mathbb{R}[X], \mathbb{Q}[X], \mathbb{Z}[X]$) se face peste $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ sau \mathbb{Z} .

EXEMPLE

1. Polinomul $f \in \mathbb{Z}[X], f = X^2 - 2$ nu este reductibil peste \mathbb{Z} sau \mathbb{Q} , dar este reductibil peste $\mathbb{R}, f = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$.

2. Polinomul $f \in \mathbb{Z}[X], f = X^2 + 4$ nu este reductibil peste \mathbb{Z}, \mathbb{Q} sau \mathbb{R} , dar este reductibil peste $\mathbb{C}, f = (X - 2i)(X + 2i)$.

3. Polinomul $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = X^4 + X^2 + 1$, este reductibil peste \mathbb{Z} , $f = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$. Cunoscând că $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, spunem că f este reductibil în oricare din mulțimile \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} sau \mathbb{C} . Mai mult, polinoamele $X^2 - X + 1$ și $X^2 + X + 1$ nu sunt reductibile în \mathbb{Z} , \mathbb{Q} sau \mathbb{R} , dar sunt reductibile în \mathbb{C} . Astfel $X^2 + X + 1 = (X - \varepsilon)(X - \varepsilon^2)$, unde ε , ε^2 sunt rădăcinile cubice complexe ale unității $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ și $\varepsilon^3 = 1$.

4. Polinomul $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = X^4 - 10X^2 + 9$ este reductibil în \mathbb{Z} . Avem:
 $f = (X^2 - 1)(X^2 - 9) = (X - 1)(X + 1)(X - 3)(X + 3)$.

Un rezultat important este dat de următoarea proprietate.

Proprietate

Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $\text{grad } f = 2$, $f = a_2X^2 + a_1X + a_0$, atunci:

1) f este reductibil peste \mathbb{C} ,

și 2) f este reductibil peste \mathbb{R} dacă și numai dacă $\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 \geq 0$.

Demonstrație

De la studiul funcției de gradul al doilea $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, funcție polinomială atașată polinomului $f = aX^2 + bX + c$, unde am folosit notația $a_2 = a$, $a_1 = b$, $a_0 = c$, se știe că:

1) $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ sunt soluțiile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$ și avem: f

$= a(X - x_1)(X - x_2)$, deci f este reductibil peste \mathbb{C} .

2) Dacă $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, atunci ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are soluțiile reale x_1, x_2 și $f = a(X - x_1)(X - x_2)$, deci f este reductibilă peste \mathbb{R} .

Vom observa că dacă $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ și polinomul f ar fi reductibil peste \mathbb{R} , atunci am avea $f = f_1 \cdot f_2$, unde $f_1, f_2 \in \mathbb{R}[X]$ și $\text{grad } f_1 = \text{grad } f_2 = 1$. Rezultă că f are rădăcini reale (rădăcinile lui f_1 și f_2), în contradicție cu ipoteza $\Delta < 0$.

Exerciții rezolvate

1. Polinomul $f = 2X^n - (n + 1)X^{n-1} + nX^{n-2} - 1$ se divide prin $g = X - 1$, deci este reductibil.

Soluție

$f(1) = 2 - (n + 1) + n - 1 = 0$, deci $(X - 1) \mid f$.

2. Fie $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = (X - 1)(X - 2) + 1$. Demonstrați că f este ireductibil peste \mathbb{Z} , dar este reductibil peste \mathbb{C} .

Soluție

$f = (X - 1)(X - 2) + 1 = X^2 - 3X + 3$.

Ecuația $x^2 - 3x + 3 = 0$ are $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 12 = -3 < 0$, deci $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$. Rezultă

$x_{1,2} = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}$, deci $f = \left(X - \frac{3 - i\sqrt{3}}{2}\right) \left(X - \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}\right)$, adică f este reductibil peste \mathbb{C} .

3. Să se determine numerele reale a și b astfel încât polinomul $f = aX^4 + bX^3 + 1$ să se dividă cu $g = (X - 1)^2$.

Soluție

Dacă $X - 1 \mid f$, atunci $f(1) = 0$, deci $a + b + 1 = 0$ și avem $b = -(a + 1)$,

$$f = aX^4 - (a + 1)X^3 + 1 = aX^4 - aX^3 - X^3 + 1 = aX^3(X - 1) - (X^3 - 1) = aX^3(X - 1) - (X - 1)(X^2 + X + 1) = (X - 1)(aX^3 - X^2 - X - 1).$$

Din condiția $(X - 1)^2 \mid f$, rezultă $(X - 1) \mid h$, unde $h = aX^3 - X^2 - X - 1$, deci $h(1) = 0$, $h(1) = a - 1 - 1 - 1 = a - 3 = 0$, $a = 3$, de unde $b = -(a + 1) = -4$. Deci

$$f = 3X^4 - 4X^3 + 1 = (X - 1)(3X^3 - X^2 - X - 1) = (X - 1)[(X^3 - X^2) + (X^3 - X) + (X^3 - 1)] = (X - 1)[X^2(X - 1) + X(X + 1)(X - 1) + (X - 1)(X^2 + X + 1)] = (X - 1)^2(3X^2 + 2X + 1).$$

4. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = aX^n + bX^{n-1} + 1$. Să se determine numerele reale a, b astfel încât f să se dividă prin $g = (X - 1)^2$.

Soluție

Din condiția $(X - 1) \mid f$ rezultă $f(1) = 0$, deci $f(1) = a + b + 1 = 0$, $b = -(a + 1)$ deci

$$f = aX^n - (a + 1)X^{n-1} + 1 = a(X^n - X^{n-1}) - X^{n-1} + 1 = aX^{n-1}(X - 1) - (X^{n-1} - 1) = aX^{n-1}(X - 1) - (X - 1)(X^{n-2} + X^{n-3} + \dots + X + 1) = (X - 1)[aX^{n-1} - (X^{n-2} + X^{n-3} + \dots + X + 1)] = (X - 1) \times h.$$

Având în vedere condiția $(X - 1)^2 \mid f$, rezultă $(X - 1) \mid h$, deci $h(1) = 0$.

Rezultă: $h(1) = a \times 1^{n-1} - (1^{n-2} + \dots + 1^1 + 1) = a - (n - 1) = 0$,

deci $a = n - 1$ și $b = -(a + 1) = -(n - 1 + 1) = -n$,

prin urmare $f = (n - 1)X^n - nX^{n-1} + 1$ și $(X - 1)^2 \mid f$.

Efectuați în clasă

- Arătați că $f = X^2 - 7X + 6$ este reducibil în \mathbb{Z} .
- Arătați că $f = X^2 + 2X + 2$ nu este reducibil în \mathbb{Z} , \mathbb{Q} și \mathbb{R} , dar este reducibil în \mathbb{C} .
- Să se arate că $f = X^n - nX^{n-1} + n - 1$ este reducibil în \mathbb{Z} .
- Să se descompună în factori ireducibili în \mathbb{Z} polinomul $f = X^4 - 5X^2 + 4$.
- Să se descompună în factori ireducibili în \mathbb{Z} polinomul $f = X^4 - 29X^2 + 100$.

Temă

1. Descompuneți în factori ireducibili polinoamele:

a) $f = X^4 - 1$, peste \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} și \mathbb{C} ; b) $f = X^4 + 1$, peste \mathbb{R} și \mathbb{C} ;
 c) $f = X^4 - X^2 + 1$, peste \mathbb{R} și \mathbb{C} ; d) $f = X^6 - 1$, peste \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} și \mathbb{C} ;
 e) $f = X^6 + 1$, peste \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} și \mathbb{C} .

- Fie $f = mX(X^n - 1) - nX(X^m - 1)$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că f este reducibil și poate fi descompus sub forma $(X - 1)^2 g$ și să se determine polinomul g .
- Fie $f = (X - 1)^n - (X + 3)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ este divizibil prin $X + 1$, dar nu se divide prin $(X + 1)^2$.
- Să se arate că $f = X^{2n} + (X + 1)^{2n} - (X - 3)^{2n} - X^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ se divide prin $X - 1$.
- Fie polinomul $f = X^n - nX + n - 1$. Să se demonstreze că f se divide prin $X - 1$.
Se divide prin $(X - 1)^2$?
- Fie $f = X^5 + m^2X^4 - m^2X^3 - mX^2 + mX - 1$. Să se demonstreze că f se divide prin $X - 1$.
- Fie $f = X^{2n} - nX^8 + nX^4 - 1$. Să se arate că f se divide prin $g = X^2 - 1$.

8. Fie $f = (X - 1)^{n+3} + X^{2n+3}$. Să se arate că f se divide prin $g = X^2 - X + 1$.
9. Fie $f = X^{12n} + X^{3n+1} + 1$. Să se arate că f se divide prin $g = X^2 + X + 1$.
10. Fie $f = (X + 1)^{3n+2} + X^2 + 2$ și $g = X^2 + 3x + 3$. Să se demonstreze că $g \mid f$.

4. Rădăcini ale polinoamelor; relațiile lui Viète pentru polinoame de grad cel mult 4

4.1. Rădăcini complexe ale polinoamelor

Am demonstrat că fiind dat un polinom $f \in \mathbb{R}[X]$, $\text{grad } f = 2$, $f = aX^2 + bX + c$, rădăcinile polinomului sunt reale dacă și numai dacă $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

Dacă $\Delta < 0$, atunci rădăcinile polinomului $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$ și sunt

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Vom remarca faptul că rădăcinile sunt complexe conjugate, deci $x_2 = \bar{x}_1$.

Vom enunța fără demonstrație **teorema fundamentală a algebrei**, denumită și **teorema lui d'Alembert-Gauss** în cinstea celor care au formulat-o.

Teorema lui d'Alembert-Gauss

Orice polinom cu coeficienți complecși de grad mai mare sau egal cu unu are cel puțin o rădăcină în \mathbb{C} .

Pe baza teoremei fundamentale vom preciza **proprietățile**:

1. Un polinom $f \in \mathbb{C}[X]$ este ireductibil dacă și numai dacă $f = a_1X + a_0$, $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, $a_1 \neq 0$.
2. Un polinom $f \in \mathbb{R}[X]$ este ireductibil dacă și numai dacă $f = a_1X + a_0$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 \neq 0$, sau $f = a_2X^2 + a_1X + a_0$, $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_2 \neq 0$ și $\Delta = a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$.

EXEMPLE

1. Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$, $f = 3X + 5$ și $g = 2iX + 3$. Aceste polinoame sunt de gradul întâi și sunt ireductibile în \mathbb{C} . Rădăcinile celor două polinoame sunt $x' = -\frac{5}{3}$, respectiv $x'' = \frac{3}{2}i$ deci $f(x') = f\left(-\frac{5}{3}\right) = 0$, $g(x'') = g\left(\frac{3}{2}i\right) = 0$.

2. Fie $f = X^2 - 3$. Rădăcinile polinomului sunt $x_1 = -\sqrt{3}$ și $x_2 = \sqrt{3}$ prin urmare $f = (X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})$, deci f este ireductibil peste \mathbb{Z} și \mathbb{Q} , dar este reductibil peste \mathbb{R} .

3. Fie $f = 4X^2 + 9$. Rădăcinile polinomului sunt $x_1 = -\frac{3}{2}i$, $x_2 = \frac{3}{2}i$, deci $f = 4\left(X - \frac{3}{2}i\right)\left(X + \frac{3}{2}i\right) = (2X - 3i)(2X + 3i)$.

4. Polinomul $f = X^2 - 4X + 6$ admite rădăcinile $x_1 = 2 - \sqrt{2}$, $x_2 = 2 + \sqrt{2}$ și putem scrie $f = (X - 2 + \sqrt{2})(X - 2 - \sqrt{2})$, ceea ce dovedește că f nu este reducibil în \mathbb{Z} și \mathbb{Q} , dar este reducibil în \mathbb{R} .

5. Polinomul $f = X^2 + 2X + 5$, admite rădăcinile $x_1 = -1 + 2i$, $x_2 = -1 - 2i$, deci $f = (X + 1 - 2i)(X + 1 + 2i)$; f nu este reducibil în $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ și este reducibil în \mathbb{C} .

Vom preciza, de asemenea, unele proprietăți importante în studiul polinoamelor:

Teorema de descompunere în factori ireductibili

Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$ (sau $f \in \mathbb{R}[X]$), atunci polinomul f se scrie ca un produs finit de polinoame ireductibile din $\mathbb{C}[X]$ (respectiv $\mathbb{R}[X]$)

Descompunerea este unică, abstractie făcând de ordinea factorilor.

Consecințe importante sunt și **proprietățile** următoare:

1) Orice polinom de grad $n \geq 1$, $f \in \mathbb{C}[X]$ are n rădăcini.

Rădăcini multiple. Dacă $(X - \alpha)^k \mid f$ și $(X - \alpha)^{k+1} \nmid f$, $k \in \mathbb{N}$, numărul k se numește **ordinul de multiplicitate** a rădăcinii α .

2) Dacă x_1, x_2, \dots, x_n sunt rădăcinile polinomului $f \in \mathbb{C}[X]$, $\text{grad } f = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$, atunci: $f = a_n (X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_n)$.

O aplicație a acestor proprietăți se regăsește în studiul relațiilor care există între rădăcinile unui polinom și coeficienții săi.

4.2. Relațiile între rădăcinile și coeficienții unui polinom sau relațiile lui Viète pentru polinoame de grad cel mult 4

În cele ce urmează vom studia aceste relații în cazurile particulare pentru $n \in \{2, 3, 4\}$, unde $f \in \mathbb{C}[X]$ și $n = \text{grad } f$.

4.2.1. Relațiile lui Viète pentru polinoame de grad 2

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $\text{grad } f = 2$, $f = a_2 X^2 + a_1 X + a_0$, $a_2 \neq 0$ și $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ rădăcinile polinomului f , deci $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Putem scrie $f = a_2 (X - x_1)(X - x_2) = a_2 [X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1 x_2]$. Rezultă:

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2} \\ S_2 = x_1 x_2 = \frac{a_0}{a_2} \end{cases}$$

cunoscute ca suma S și produsul P ale rădăcinilor ecuației de gradul al doilea și avem:

$$f = a_2 X^2 + a_1 X + a_0 = a_2 (X - x_1)(X - x_2) = a_2 (X^2 - SX + P)$$

Exerciții rezolvate

1. Fiind dat polinomul $f = X^2 - 3X + 4$, să se scrie suma și produsul rădăcinilor x_1, x_2 .
Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2$ și $x_1^3 + x_2^3$.

Soluție

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 3 \\ P = x_1x_2 = 4 \end{cases}$$

Pentru a calcula $x_1^2 + x_2^2$ putem scrie:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P = 9 - 8 = 1, \\ \text{respectiv } x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1x_2) = \\ &= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] = S(S^2 - 3P) = 3(9 - 12) = -9. \end{aligned}$$

Să observăm că sumele $x_1^2 + x_2^2$ și $x_1^3 + x_2^3$ pot fi calculate și astfel:

Vom scrie că x_1 și x_2 sunt rădăcinile polinomului f :

$$\begin{cases} x_1^2 - 3x_1 + 4 = 0 & (1) \\ x_2^2 - 3x_2 + 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 3(x_1 + x_2) + 8 = 0,$$

$$\text{deci } x_1^2 + x_2^2 = 3(x_1 + x_2) - 8 = 3 \times 3 - 8 = 9 - 8 = 1.$$

Înmulțind relațiile (1) și (2) cu x_1 , respectiv cu x_2 , obținem:

$$\begin{aligned} x_1^3 - 3x_1^2 + 4x_1 &= 0 \\ x_2^3 - 3x_2^2 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\hline x_1^3 + x_2^3 - 3(x_1^2 + x_2^2) + 4(x_1 + x_2) = 0,$$

$$\text{de unde rezultă } x_1^3 + x_2^3 = 3(x_1^2 + x_2^2) - 4(x_1 + x_2) = 3 \times 1 - 4 \times 3 = 3 - 12 = -9.$$

2. Fie polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^2 + mX - m + 1$, unde m este un parametru real. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât suma pătratelor rădăcinilor să fie egală cu 10.

Soluție

Ecuția corespunzătoare polinomului f este o ecuație de gradul al doilea

$$x^2 + mx + m - 1 = 0. \text{ Calculând rădăcinile ecuației, obținem } x_1 = -m + 1 \text{ și } x_2 = -1 \text{ și}$$

$$\text{deducem } x_1^2 + x_2^2 = 10, (-m + 1)^2 + 1 = 10, -m + 1 = \pm 3, \text{ deci } m \in \{-2, 4\}.$$

Dacă $m = -2$, ecuația este $x^2 - 2x - 3 = 0$, care admite rădăcinile $x_1 = -1, x_2 = 3$, pentru care avem: $x_1^2 + x_2^2 = 1 + 9 = 10$.

Dacă $m = 4$, ecuația este: $x^2 + 4x + 3 = 0$, cu rădăcinile $x_1 = -1, x_2 = -3$, care satisfac relația $x_1^2 + x_2^2 = 1 + 9 = 10$.

Efectuați în clasă

1. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^2 - 5X + 6$. Să se determine $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$, $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$.
2. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, unde $f = X^2 + (m - 1)X + m$ și m este parametru. Determinați parametru m astfel încât $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 19$.

4.2.2. Relațiile lui Viète pentru polinoame de grad 3

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $\text{grad } f = 3$, $f = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ și x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului f . Putem scrie:

$$f = a_3(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3) = a_3[X^3 - (x_1 + x_2 + x_3)X^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)X - x_1x_2x_3]$$

De aici deducem:

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} \\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3} \\ S_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3} \end{cases}$$

Exerciții rezolvate

1. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - 3X^2 + 2X - 1$. Să se calculeze: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ și $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

Soluție

Cu ajutorul formulelor lui Viète, deducem:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 3; S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2.$$

Din $S_1 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 3^2$, rezultă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 9$,

deci $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9 - 2S_2 = 9 - 2 \times 2 = 5$.

Pentru a calcula suma $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ putem proceda în mod analog,

$S_1^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 = 27$, dar calculele sunt mai simple dacă vom scrie că

$$x_1, x_2, x_3 \text{ sunt rădăcinile polinomului } f: \begin{cases} x_1^3 - 3x_1^2 + 2x_1 - 1 = 0 \\ x_2^3 - 3x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0 \\ x_3^3 - 3x_3^2 + 2x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Adunând aceste relații, rezultă:

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1 + x_2 + x_3) - 3 &= 0, \text{ deci } x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \\ &= 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1 + x_2 + x_3) + 3 = 3 \times 5 - 2 \times 3 + 3 = 15 - 6 + 3 = 12. \end{aligned}$$

2. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 - 5X^2 + (m + 6)X - m - 2 = 0$.

- a) Să se determine parametrul m știind că suma pătratelor rădăcinilor este egală cu 3.
b) Știind că suma a două rădăcini este de 4 ori a treia rădăcină, să se determine rădăcinile polinomului.

Soluție

- a) Din $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 5$ și $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = m + 6$, deducem:

$$S_1^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 25, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 25 \text{ sau}$$

$$3 + 2(m + 6) = 25, \text{ de unde rezultă } m = 5 \text{ astfel încât } f = X^3 - 5X^2 + 11X - 7.$$

- b) Scriind formulele lui Viète pentru polinomul dat, rezultă

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = m + 6, \text{ astfel încât } 4x_1 = x_2 + x_3. \\ S_3 = x_1x_2x_3 = m + 2 \end{cases}$$

Din S_1 obținem $x_1 + 4x_1 = 5$, deci $x_1 = 1$ și deducem că $f(1) = 0$, $1 - 5 + (m + 6) - m - 2 = 0$, $\forall m \in \mathbb{C}$.

Din S_2 rezultă: $x_1(x_2 + x_3) + x_2x_3 = m + 6$; $1 \times 4 + x_2x_3 = m + 6$, deci $x_2x_3 = m + 2$, relație care se obține și din S_3 .

Din schema lui Horner:

$$\begin{array}{r|rrrr} & X^3 & X^2 & X & X^0 \\ & 1 & -5 & m+6 & -m-2 \\ \hline 1 & 1 & -4 & m+2 & 0 \end{array}$$

deci $f = (X - 1)(X^2 - 4X + m + 2)$, cu rădăcinile $x_1 = 1$, $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2 - m}$, astfel încât $x_2 + x_3 = 4 = 4x_1$, $\forall m \in \mathbb{C}$.

În particular, pentru $m = 5$ se obține $f = X^3 - 5X^2 + 11X - 7$, polinomul rezultat la punctul a).

Vom observa că $x_{2,3} \in \mathbb{R}$ dacă $m \in (-\infty, 2]$.

Observații

Pentru $n = 3$, relațiile lui Viète pot fi scrise sub forme avantajoase dacă rădăcinile x_1, x_2, x_3 satisfac anumite condiții.

- a) Dacă rădăcinile x_1, x_2, x_3 sunt în progresie aritmetică: $\div x_1, x_2, x_3$, putem scrie:
 $\div x_1, x_1 + r, x_2 + 2r$, unde r este rația progresiei aritmetice, sau
 $\div x_1 - r, x_1, x_1 + r$,

caz în care $S_1 = x_1 - r + x_1 + x_1 + r = 3x_1 = -\frac{a_2}{a_3}$,

de unde rezultă $x_1 = -\frac{a_2}{3a_3}$ și rația progresiei aritmetice este r .

b) De asemenea, dacă rădăcinile polinomului sunt în progresie geometrică: $\# x_1, x_2, x_3$, putem folosi notația:

$$\begin{aligned} &\# x_1, x_1q, x_1q^2, \text{ unde } q \text{ este rația progresiei geometrice sau:} \\ &\# \frac{x_1}{q}, x_1, x_1q, \end{aligned}$$

unde q este rația și din S_3 rezultă $S_3 = x_1^3 = -\frac{a_0}{a_3}$ și poate fi determinată rădăcina x_1 .

Exerciții rezolvate

1. Fie $f = 8X^3 - 6X^2 - 3X + 1$. Să se determine rădăcinile polinomului f știind că sunt în progresie aritmetică.

Soluție

Fie $\div x_1, x_1 + r, x_1 + 2r$. Rezultă:

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_1 + r + x_1 + 2r = \frac{3}{4} \\ S_2 = x_1(x_1 + r) + x_1(x_1 + 2r) + (x_1 + r)(x_1 + 2r) = -\frac{3}{8}, \\ S_3 = x_1(x_1 + r)(x_1 + 2r) = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\text{de unde rezultă: } \begin{cases} x_1 + r = \frac{1}{4} \\ 3x_1^2 + 6rx_1 + 2r^2 = -\frac{3}{8} \\ x_1 \times \frac{1}{4}(x_1 + 2r) = -\frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4} - r \\ 3\left(\frac{1}{4} - r\right)^2 + 6r\left(\frac{1}{4} - r\right) + 2r^2 = -\frac{3}{8}; \\ x_1(x_1 + 2r) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$3\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{2}r + r^2\right) + \frac{3}{2}r - 6r^2 + 2r^2 = -\frac{3}{8}, \text{ de unde deducem:}$$

$$\frac{3}{16} - \frac{3}{2}r + 3r^2 + \frac{3}{2}r - 4r^2 + \frac{3}{8} = 0; -r^2 + \frac{9}{16} = 0, r = \pm \frac{3}{4}.$$

$$\text{Dacă } r = \frac{3}{4}, x_1 = \frac{1}{4} - r = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}; x_2 = x_1 + r = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$

$$x_3 = x_1 + 2r = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1, \text{ deci } \div -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1.$$

$$\text{Dacă } r = -\frac{3}{4}, x_1 = \frac{1}{4} - r = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1, x_2 = x_1 + r = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$

$$x_3 = x_1 + 2r = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}, \text{ deci } \div 1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}.$$

Să observăm că folosind pentru progresia aritmetică notația $\div x_1 - r, x_1, x_1 + r$, deducem

$$S_1 = x_1 - r + x_1 + x_1 + r = 3x_1 = \frac{3}{4}, \text{ de unde rezultă } x_1 = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Din } S_3 = x_1 x_2 x_3 = -\frac{1}{8}, \text{ deducem } x_1(x_1 - r)(x_1 + r) = -\frac{1}{8}, \text{ deci } \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - r\right)\left(\frac{1}{4} + r\right) = -\frac{1}{8}$$

$$\text{sau } \frac{1}{16} - r^2 = -\frac{1}{2}, r^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \frac{9}{16}, r = \pm \frac{3}{4}, \text{ și rezultă progresia } \div -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1,$$

$$\text{cu rația } \frac{3}{4}, \text{ sau progresia } \div 1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2} \text{ cu rația } -\frac{3}{4}.$$

2. Fie $f \in \mathbb{R}[X], f = X^3 - 7X^2 + 14X - 8$. Știind că rădăcinile sunt în progresie geometrică, să se determine rădăcinile polinomului.

Soluție

$$\text{Fie } \ast x_1, x_1q, x_1q^2. \text{ Rezultă: } \begin{cases} S_1 = x_1 + x_1q + x_1q^2 = 7 \\ S_2 = x_1x_1q + x_1x_1q^2 + x_1qx_1q^2 = 14, \\ S_3 = x_1x_1qx_1q^2 = 8 \end{cases} \begin{cases} x_1(1 + q + q^2) = 7 \\ x_1^2q(1 + q + q^2) = 14, \\ x_1^3q^3 = 8 \end{cases}$$

$$\text{de unde rezultă } x_1q = 2, \text{ deci } x_1 = \frac{2}{q} \text{ și din prima ecuație deducem } 2(1 + q + q^2) = 72,$$

$$\text{astfel încât } 2q^2 - 5q + 2 = 0, \text{ ecuație care admite rădăcinile: } q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = 2.$$

$$\text{Dacă } q = \frac{1}{2}, \text{ rezultă } x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 1, \text{ deci } \ast 4, 2, 1.$$

$$\text{Dacă } q = 2, \text{ rezultă } x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, \text{ deci } \ast 1, 2, 4.$$

Observație

$$\text{Folosind notația } \ast \frac{x_1}{q}, x_1, x_1q, \text{ din } S_3 \text{ rezultă } S_3 = x_1^3 = 8 \text{ deci } x_1 \in \{2, 2\varepsilon, 2\varepsilon^2\} \text{ și}$$

$$S_1 = x_1 \left(\frac{1}{q} + 1 + q \right) = 7, S_2 = x_1^2 \left(\frac{1}{q} + 1 + q \right) = 14, \text{ de unde } \frac{S_2}{S_1} = x_1 = 2, \text{ deci}$$

$2 \left(\frac{1}{q} + 1 + q \right) = 7$, ecuație care admite rădăcinile $q_1 = \frac{1}{2}$, $q_2 = 2$, și astfel am regăsit rădăcinile polinomului.

4.2.3. Relațiile lui Viète pentru polinoame de grad 4

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$, $\text{grad } f = 4$, $a_4 \neq 0$. Putem scrie:

$$\begin{aligned} f &= a_4(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(X-x_4) = a_4[X^2 - (x_1+x_2)X + x_1x_2] \times [X^2 - (x_3+x_4)X + x_3x_4] = \\ &= a_4[X^4 - (x_1+x_2+x_3+x_4)X^3 + (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_4+x_3x_4)X^2 - (x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+ \\ &+ x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)X + x_1x_2x_3x_4], \end{aligned}$$

de unde rezultă:

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{a_3}{a_4} \\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{a_2}{a_4} \\ S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{a_1}{a_4} \\ S_4 = x_1x_2x_3x_4 = \frac{a_0}{a_4} \end{cases}$$

Și în cazul $n = 4$, rădăcinile polinomului x_1, x_2, x_3, x_4 pot îndeplini anumite condiții.

a) Dacă rădăcinile polinomului sunt în progresie aritmetică, putem nota:

$$\div x_1, x_1 + r, x_1 + 2r, x_1 + 3r, \text{ cu rația } r, \text{ sau}$$

$$\div x_1 - 3r, x_1 - r, x_1 + r, x_1 + 3r, \text{ cu rația } r' = 2r,$$

care este o notație avantajoasă astfel încât din S_1 rezultă $4x_1 = -\frac{a_3}{a_4}$, deci $x_1 = -\frac{a_3}{4a_4}$.

b) Dacă rădăcinile polinomului f sunt în progresie geometrică, putem scrie:

$$\ast x_1, x_1q, x_1q^2, x_1q^3, \text{ cu rația } q, \quad \text{sau} \quad \ast \frac{x_1}{q^3}, \frac{x_1}{q}, x_1q, x_1q^3 \text{ cu rația } q' = q^2$$

astfel încât din S_4 deducem: $x_1^4 = \frac{a_0}{a_4}$.

De asemenea, în cazul $n = 4$ rădăcini, dacă suma a două rădăcini este egală cu suma celorlalte două rădăcini, sau produsul a două rădăcini este egal cu produsul celorlalte două, formulele lui Viète se scriu sub forma:

$$\begin{cases} S_1 = (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = -\frac{a_3}{a_4} \\ S_2 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = \frac{a_2}{a_4} \\ S_3 = (x_1 + x_2)x_3x_4 + x_1x_2(x_3 + x_4) = -\frac{a_1}{a_4} \\ S_4 = (x_1x_2)(x_3x_4) = \frac{a_0}{a_4} \end{cases}$$

Exerciții rezolvate

1. Să se determine rădăcinile polinomului $f = 2X^4 + 5X^3 - 15X^2 - 10X + 8$, știind că produsul a două rădăcini este egal cu produsul celorlalte două rădăcini.

Soluție

Fie $x_1x_2 = x_3x_4$. Din formulele lui Viète obținem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{5}{2} \\ x_1x_2 + x_3x_4 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = -\frac{15}{2} \\ x_1x_2(x_3 + x_4) + x_3x_4(x_1 + x_2) = 5 \\ x_1x_2x_3x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_1x_2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 5; x_1x_2\left(-\frac{5}{2}\right) = 5, x_1x_2 = -2; (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = -\frac{7}{2}.$$

$$\text{Notând } u = x_1 + x_2, v = x_3 + x_4, \text{ avem } \begin{cases} u + v = -\frac{5}{2} \\ uv = -\frac{7}{2} \end{cases}, t^2 + \frac{5}{2}t - \frac{7}{2} = 0, t_1 = 1, t_2 = -\frac{7}{2},$$

$$\text{deci } u = 1, v = -\frac{7}{2}; \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1x_2 = -2 \end{cases}; \begin{cases} x_3 + x_4 = -\frac{7}{2} \\ x_3x_4 = -2 \end{cases}.$$

Rezultă $-4; \frac{1}{2}; -1, 2$.

2. Să se determine rădăcinile polinomului $f = X^4 - 15X^3 + 70X^2 - 120X + 64$ știind că sunt în progresie geometrică.

Soluție

Fie $\# x_1, x_2, x_3, x_4$ sau $\# \alpha, \alpha q, \alpha q^2, \alpha q^3$. Vom observa că produsul a două rădăcini este egal cu produsul celorlalte rădăcini. Scriind formulele lui Viète sub forma:

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ S_2 = x_1x_4 + x_2x_3 + (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) = 70 \\ S_3 = x_1x_4(x_2 + x_3) + (x_1 + x_4)x_2x_3 = 120 \\ S_4 = x_1x_2x_3x_4 = 64 \end{cases}, \text{ deducem: } \begin{cases} (x_1 + x_4) + (x_2 + x_3) = 15 \\ (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) = 54 \end{cases}.$$

$$\text{Notând } u = x_2 + x_3, v = x_1 + x_4, \text{ rezultă: } \begin{cases} u + v = 15 \\ uv = 54 \end{cases}, t^2 - 15t + 54 = 0, t_1 = 6, t_2 = 9.$$

$$\text{Din sistemele de ecuații } \begin{cases} x_2 + x_3 = 6 \\ x_2x_3 = 8 \end{cases}, \begin{cases} x_1 + x_4 = 9 \\ x_1x_4 = 8 \end{cases}, \text{ rezultă } x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = 8,$$

și astfel se obțin termenii progresiei geometrice $\# x_1, x_2, x_3, x_4$, deci 1, 2, 4, 8.

Efectuați în clasă

1. Să se determine rădăcinile polinomului $f = X^4 + 8X^3 + 14X^2 - 8X + 15$ știind că sunt în progresie aritmetică.
2. Să se determine rădăcinile polinomului $f = 8X^4 - 27X^3 + 26X^2 - 9X + 2$ știind că sunt în progresie geometrică.

3. Să se determine rădăcinile polinomului $f = X^4 - 4X^3 + 3X^2 - 10X - 6$ știind că suma a două rădăcini este egală cu suma celorlalte două rădăcini.

Temă

1. Să se afle rădăcinile polinomului $f = X^3 - 3X^2 - X + 3$ știind că sunt în progresie aritmetică.
2. Să se determine rădăcinile polinomului $f = X^3 + 3X^2 - 6X - 8$ știind că sunt în progresie geometrică.
3. Să se afle rădăcinile polinomului $f = X^4 - 10X^2 + 9$ știind că sunt în progresie aritmetică.
4. Să se afle rădăcinile polinomului $f = X^4 + 5X^3 - 30X^2 - 40X + 64$ știind că sunt în progresie geometrică.
5. Să se determine rădăcinile polinomului $f = X^4 + mX^3 + 35X^2 + 50X + 24$ știind că sunt în progresie aritmetică și una dintre rădăcini este -1 .

5. Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, ecuații binome, ecuații reciproce, ecuații bipătrate

Fiind dat un polinom $f \in \mathbb{C}[X], f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0, a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^+$, egalitatea:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (x \in \mathbb{C})$$

se numește **ecuație algebrică** (cu coeficienți complecși) în necunoscuta x , asociată polinomului f .

Prin definiție, gradul polinomului f este gradul ecuației, iar **rădăcinile (soluțiile)** ecuației sunt rădăcinile, din \mathbb{C} ale polinomului f .

Ca o consecință a teoremei fundamentale a algebrei, rezultă că orice ecuație algebrică de grad n cu coeficienți complecși admite n rădăcini complexe, nu neapărat distincte.

În continuare, vom prezenta unele tipuri particulare de ecuații algebrice.

5.1. Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

5.1.1. Ecuații cu coeficienți în inelul întregilor \mathbb{Z}

Fie ecuația cu coeficienți în $\mathbb{Z}: 9x^3 - 18x^2 - x + 2 = 0$.

Vom observa că putem scrie: $9x^2(x - 2) - (x - 2) = 0$,

de unde deducem că $\alpha = 2$ este o rădăcină întregă a ecuației și 2 este un divizor al termenului liber al ecuației $a_0 = 2$.

Vom demonstra că proprietatea este adevărată în cazul general.

Proprietate

Dacă $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$, $a_n \neq 0$, și $x = p \in \mathbb{Z}$ este o rădăcină întregă a ecuației corespunzătoare $f(x) = 0$,
adică $f(p) = 0 \Leftrightarrow a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$,
atunci $p \mid a_0$.

Demonstrație.

Relația $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$ se poate scrie sub forma:
 $p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \dots + a_2 p + a_1) = -a_0$, de unde rezultă că $p \mid a_0$.

Fie ecuația $4x^3 - 4x^2 - 9x + 9 = 0$.

Observăm că aceasta se poate scrie sub forma:

$$(x-1)(4x^2 - 9) = 0 \text{ sau } (x-1)(2x-3)(2x+3) = 0.$$

Constatăm că $\frac{3}{2}$ este o rădăcină a ecuației, unde $3 \mid a_0 = 9$ și $2 \mid a_3$.

Vom demonstra că proprietatea este adevărată în cazul general.

Proprietate

Dacă $f \in \mathbb{Z}[X]$, $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$, $a_n \neq 0$, și $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$,
 $(p, q) = 1$, $q \neq 0$, este o rădăcină a ecuației corespunzătoare $f(x) = 0$,
adică $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0 \Leftrightarrow a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$,
atunci $p \mid a_0$ și $q \mid a_n$.

Demonstrație.

Din condiția $a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$, eliminând numitorii, rezultă:

$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$ și putem scrie:

$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_2 p q^{n-2} + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n$, de unde rezultă că $p \mid a_0 q^n$.

Ținând seama de faptul că $(p, q) = 1$, avem $(p, q^n) = 1$, deci $p \mid a_0$.

În mod analog, putem scrie:

$q(a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + \dots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}) = -a_n p^n$, de unde rezultă că $q \mid a_n p^n$.

Ținând seama de faptul că $(p, q) = 1$, avem $(p^n, q) = 1$, deci $q \mid a_n$.

EXEMPLU

Fie ecuația cu coeficienți în \mathbb{Z} : $2x^3 - 11x^2 + 17x - 6 = 0$, unde $a_0 = -6$ și $a_3 = 2$.

Rezultă că mulțimea divizorilor lui a_0 este $D(a_0) = D(-6) = \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$.

Conform demonstrației, dacă ecuația admite o rădăcină întregă, aceasta aparține mulțimii $D(-6)$.

Vom constata că pentru $x = 3$, avem:

$$\begin{array}{r|rrrr} & X^3 & X^2 & X & X^0 \\ & 2 & -11 & 17 & -6 \\ \hline 3 & 2 & -5 & 2 & \underline{0} \end{array}$$

deci $x = 3$ este rădăcină a ecuației.

Este important să remarcăm faptul că există divizori ai termenului liber a_0 , dar nu sunt rădăcini ale ecuației, de exemplu, $x = -2$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & X^3 & X^2 & X & X^0 \\ & 2 & -11 & 17 & -6 \\ \hline -2 & 2 & -15 & 47 & \underline{-100 \neq 0} \end{array}$$

deci $x = -2$ nu este rădăcină a ecuației.

Să stabilim dacă ecuația cu coeficienți întregi admite rădăcini raționale de forma:

$$x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, (p, q) = 1.$$

Mulțimea divizorilor termenului liber $a_0 = -6$ este:

$$D(a_0) = D(-6) = \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 6\}$$

Mulțimea divizorilor coeficientului dominant $a_3 = 2$ este:

$$D(a_3) = D(2) = \{-2; -1; 1; 2\}.$$

Vom cerceta dacă ecuația dată admite rădăcini raționale, dar nu întregi, deci din mulțimea $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Rezultă că este necesar să vedem dacă ecuația dată admite o rădăcină din mulțimea:

$$-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}.$$

Analizând, obținem, pentru $x = \frac{1}{2}$, că:

$$\begin{array}{r|rrrr} & X^3 & X^2 & X & X^0 \\ & 2 & -11 & 17 & -6 \\ \hline \frac{1}{2} & 2 & -10 & 12 & \underline{0} \end{array}$$

deci $x = \frac{1}{2}$ este rădăcină a ecuației.

Se stabilește că ecuația dată se scrie sub forma:

$$(x - 3)(x - 2)(2x - 1) = 0,$$

iar rădăcinile ecuației sunt:

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2, x_3 = 3.$$

5.1.2. Ecuații cu coeficienți în inelul numerelor raționale \mathbb{Q}

Fie ecuația cu coeficienți în \mathbb{Q} : $x^3 - \frac{7}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = 0$.

Să considerăm o valoare pentru x de forma $x = a + b\sqrt{p}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, și $p \in \mathbb{N}$, dar p nu este un pătrat perfect.

Pentru ecuația considerată, fie $x_1 = 1 - \sqrt{2}$.

Rezultă:

$$\begin{aligned} & (1 - \sqrt{2})^3 - \frac{7}{3}(1 - \sqrt{2})^2 - \frac{1}{3}(1 - \sqrt{2}) + \frac{1}{3} = \\ & = 1 - \sqrt{3} + 6 - 2\sqrt{2} - \frac{7}{3} + 14\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{14}{3} - \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} = \\ & = 7 - 5\sqrt{2} - \frac{21}{3} + 5\sqrt{2} = 0, \end{aligned}$$

deci $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ este rădăcină a ecuației și deci $x_2 = 1 + \sqrt{2} = \overline{x_1}$.

Avem:

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 - 2x - 1.$$

Obținem:

$$x^3 - \frac{7}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = (x^2 - 2x - 1)\left(x - \frac{1}{3}\right), \text{ deci rădăcinile ecuației sunt:}$$

$$x_1 = 1 - \sqrt{2}, x_2 = 1 + \sqrt{2} \text{ și } x_3 = \frac{1}{3}.$$

Proprietate

Dacă o ecuație cu coeficienți raționali admite o rădăcină de forma $x_1 = a + b\sqrt{p}$, $a \neq 0, b \neq 0$ și $p \in \mathbb{N}$, p nu este un pătrat perfect, atunci ecuația admite și rădăcina $x_2 = \overline{x_1} = a - b\sqrt{p}$.

În caz particular, putem enunța și următoarea proprietate:

Proprietate

Dacă o ecuație cu coeficienți raționali admite o rădăcină de forma $x_1 = a + b\sqrt{p}$, $a = 0, b \neq 0$ și $p \in \mathbb{N}$, p nu este un pătrat perfect (deci, rădăcina este $x_1 = b\sqrt{p}$), atunci ecuația admite și rădăcina $x_2 = \overline{x_1} = -b\sqrt{p}$.

5.1.3. Ecuații cu coeficienți în inelul numerelor reale \mathbb{R}

Fie ecuația cu coeficienți reali: $x^3 + x^2 - x + 15 = 0$.

Fie $\alpha = 1 + 2i$. Avem:

	X^3	X^2	X	X^0
	1	1	-1	15
$1 + 2i$	1	$2 + 2i$	$-3 + 6i$	0

Deci $z_1 = 1 + 2i$ este rădăcină a ecuației.

Se verifică ușor că și $z_2 = 1 - 2i = \overline{z_1}$ este rădăcină a ecuației.

Avem:

$$(x - z_1)(x - z_2) = (x - z_1)(x - \overline{z_1}) = x^2 - (z_1 + \overline{z_1})x + z_1\overline{z_1} = x^2 - 2x + 5.$$

Efectuând împărțirea celor două polinoame asociate ecuațiilor:

$$\begin{array}{r|l} X^3 + X^2 - X + 15 & X^2 - 2X + 5 \\ -X^3 + 2X^2 - 5X & X + 3 \\ \hline / & 3X^2 - 6X + 15 \\ & -3X^2 + 6X - 15 \\ \hline & / & / & / \end{array}$$

deducem că:

$$x^3 + x^2 - x + 15 = (x^2 - 2x + 5)(x + 3), \text{ deci rădăcinile ecuației sunt:}$$

$$x_1 = 1 + 2i, x_2 = 1 - 2i \text{ și } x_3 = -3.$$

Conform exercițiului prezentat anterior, putem enunța următoarea proprietate:

Proprietate

Dacă o ecuație cu coeficienți reali admite o rădăcină de forma $x_1 = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ și $i^2 = -1$, atunci ecuația admite și rădăcina $x_2 = \overline{x_1} = a - bi$.

EXEMPLE

1. Fie ecuația cu coeficienți reali, de grad impar: $2x^3 - 7x^2 + 7x - 1 = 0$.

Cercetând dacă ecuația admite rădăcini întregi, vom constata că $\alpha_1 = 1$, valoare care se află printre divizorii termenului liber, este o rădăcină a ecuației.

	X^3	X^2	X	X^0
	2	-7	7	-2
1	2	-5	2	0

Deci, putem scrie: $(x - 3)(2x^2 - 5x + 2) = 0$.

Ecuația: $2x^2 - 5x + 2 = 0$ admite rădăcinile $\alpha_2 = \frac{1}{2}$ și $\alpha_3 = 2$, deci putem scrie:

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x-2)(x-1) = 0.$$

Observăm că ecuația are toate rădăcinile reale.

2. Fie ecuația cu coeficienți reali, de grad impar: $x^3 + 4x^2 + x - 26 = 0$.

Cercetând dacă ecuația admite rădăcini întregi, vom constata că $x_1 = 2$ este o rădăcină a ecuației.

	X^3	X^2	X	X^0
	1	4	1	-26
2	1	6	13	0

Deci, putem scrie: $(x-2)(x^2 + 6x + 13) = 0$.

Ecuația $x^2 + 6x + 13 = 0$ admite rădăcinile $x_2 = -3 - 2i$ și $x_3 = -3 + 2i$, care sunt numere complexe conjugate. Ecuația se poate scrie sub forma:

$$(x-1)(x+3-2i)(x+3+2i) = 0.$$

Observăm că ecuația are o rădăcină reală și două complexe.

3. Fie ecuația cu coeficienți reali, de grad par: $6x^4 - 11x^3 - 30x^2 + 29x - 6 = 0$.

Vom constata că $\alpha_1 = -2$ și $\alpha_2 = 3$, valori care se află printre divizorii termenului liber, sunt rădăcini ale ecuației. Rezultă că este un divizor al ecuației:

$$\begin{array}{r|l}
 6x^4 - 11x^3 - 30x^2 + 29x - 6 & x^2 - x - 6 \\
 -6x^4 + 6x^3 + 36x^2 & 6x^2 - 5x + 1 \\
 \hline
 / -5x^3 + 6x^2 + 29x & \\
 5x^3 - 5x^2 - 30x & \\
 \hline
 / & x^2 - x - 6 \\
 & -x^2 + x + 6 \\
 & \hline
 & / \quad / \quad /
 \end{array}$$

Ecuația dată se poate scrie:

$$(x^2 - x - 6)(6x^2 - 5x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3)(6x^2 - 5x + 1) = 0.$$

Ecuația $6x^2 - 5x + 1 = 0$ admite rădăcinile $x_3 = \frac{1}{2}$ și $x_4 = \frac{1}{3}$.

Ecuația se poate scrie sub forma: $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x+2)(x-3) = 0$.

Observăm că ecuația are are toate rădăcinile reale.

5.1.4. Ecuații cu coeficienți în inelul numerelor complexe \mathbb{C}

Fie ecuația cu coeficienți în \mathbb{C} : $x^3 + 2(i-2)x^2 + (3-8i)x + 6i = 0$.

Efectuând calculele, vom stabili că $x_1 = 3$ este rădăcină a ecuației:

	X^3	X^2	X	X^0
	1	$2(i-1)$	$3-8i$	$6i$
3	1	$2i-1$	$-2i$	$\underline{0}$

Deci, putem scrie: $(x-3)[x^2 + (2i-1)x - 2i] = 0$.

Pentru ecuația: $x^2 + (2i-1)x - 2i = 0$,

obținem rădăcinile:

$$x_{2,3} = \frac{-(2i-1) \pm \sqrt{(2i-1)^2 + 8i}}{2} = \frac{-(2i-1) \pm \sqrt{(2i+1)^2}}{2} = \frac{-(2i-1) \pm (2i+1)}{2}$$

și rezultă: $x_2 = -2i, x_3 = 1$.

Ecuația de gradul doi: $x^2 + (2i-1)x - 2i = 0$,

se poate scrie sub forma:

$$x^2 + 2ix - x - 2i = 0 \Leftrightarrow x(x+2i) - (x+2i) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2i) = 0,$$

pentru care obținem rădăcinile: $x_2 = -2i$ și $x_3 = 1$.

Efectuați în clasă

1. Să se rezolve ecuația: $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$, știind că admite rădăcini în \mathbf{Z} .
2. Să se rezolve ecuația: $4x^3 + 6x^2 - 2x - 3 = 0$, știind că admite rădăcini în $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$.
3. Să se rezolve ecuația: $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$, știind că admite rădăcina $x_1 = -i$.
4. Să se rezolve ecuația: $x^3 + 2ix^2 + x + 2i = 0$, știind că admite rădăcina $x = i$.

Temă

Să se rezolve ecuațiile următoare:

1. $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$;
2. $x^3 - 4x^2 + x + 26 = 0$;
3. $6x^4 + 11x^3 - 29x^2 - 6 = 0$;
4. $x^4 + x^3 - 2x^2 - 17x - 30 = 0$.

5.2. Ecuații binome

Definiție

O ecuație de forma:

$$x^n - a = 0, a \in \mathbf{C}, a \neq 0, n \in \mathbf{N}^*,$$

se numește **ecuație binomă de grad n** .

Având în vedere incluziunile $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$, rezultă că a poate aparține oricăreia dintre mulțimile $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$.

EXEMPLE

1. Pentru $n = 1$, ecuația $x - 15 = 0$, unde $a = 15$, admite soluția: $x_0 = 15 \in \mathbb{Z}$.

2. Pentru $n = 2$, ecuația $x^2 - 9 = 0$, unde $a = 9$, are rădăcinile ecuației: $x_1 = -3$ și $x_2 = 3$.

În schimb, pentru ecuația $x^2 + 16 = 0$, unde $a = -16$, rezultă ecuația: $x^2 = -16$, care are rădăcinile $x_{1,2} = \pm\sqrt{-16} = \pm 4i$. Observăm că ecuația este cu coeficienți reali, dar rădăcinile nu mai sunt reale.

3. Pentru $n = 3$, ecuația $x^3 - 64 = 0$ are rădăcinile $x_{1,2,3} = \sqrt[3]{64} = 4\sqrt[3]{1}$.

Vom observa că este necesar să studiem rădăcinile ecuației: $x^3 - 1 = 0$.

Putem scrie: $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ și obținem rădăcinile:

$$x_0 = 1, \quad x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3} \times \sqrt{-1}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Avem: $x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} \in \left\{1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$ și sunt rădăcinile de ordinul trei ale unității.

Vom observa că putem scrie: $\sqrt[3]{1} \in \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$,

unde $x_0 = 1$, $x_1 = \varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ și $x_2 = \varepsilon^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Întocmind tabla înmulțirii rădăcinilor de ordin 3 ale unității, rezultă tabla alăturată.

Acum putem formula problema:

Produsul a două rădăcini de ordin 3 ale unității este o rădăcină a unității.

•	1	ε	ε^2
1	1	ε	ε^2
ε	ε	ε^2	1
ε^2	ε^2	1	ε

Deducem că pentru ecuația $x^3 - 64 = 0$, rădăcinile sunt: $x \in \{4, 4\varepsilon, 4\varepsilon^2\}$, unde $\varepsilon^3 = 1$ și $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

4. Să se rezolve ecuația $z^2 - i = 0$.

a) *Soluție algebrică:* Fie $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Deducem $(x + iy)^2 - i = 0$ sau $x^2 - y^2 + i(2xy - 1) = 0$, astfel încât obținem sistemele echivalente de ecuații:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x + y) = 0 \\ 2xy - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (1) \begin{cases} x - y = 0 \\ 2xy - 1 = 0 \end{cases} \text{ sau } (2) \begin{cases} x + y = 0 \\ 2xy - 1 = 0 \end{cases}.$$

Din sistemul de ecuații (1), deducem că $y = x$, iar din ecuația a doua, că $2x^2 - 1 = 0$,

deci $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, respectiv $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = (1+i) \frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = -(1+i) \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Din sistemul de ecuații (2), rezultă $y = -x$, iar din ecuația a doua a sistemului se obține $2x^2 + 1 = 0$, unde $x \notin \mathbb{R}$.

b) *Soluție trigonometrică:* Putem scrie $z^2 = i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$,

și avem: $z_k = \sqrt{i} = \sqrt{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}$, $k \in \{0, 1\}$, deci:

$$z_0 = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \times 0 \times \pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \times 0 \times \pi}{2} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = (1+i) \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$z_1 = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \times 1 \times \pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \times 1 \times \pi}{2} = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = (-1-i) \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

În general, pentru o ecuație binomă de forma:

$$x^n - a = 0, a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}^*,$$

rădăcinile sunt:

$$x_k = \sqrt[n]{a}, k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Un caz particular este ecuația de forma: $x^n - 1 = 0$, de unde rezultă $x_k = \sqrt[n]{1}$, unde $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Folosind forma trigonometrică: $1 = \cos 0 + i \sin 0$, unde $i = \sqrt{-1}$, deducem:

$$x_k = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{0 + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{n} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n},$$

$k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Putem scrie:

$x_k = \varepsilon_k$, unde $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, sunt rădăcinile de ordin n ale unității.

În particular,

• pentru $n = 2$, avem: $x^2 - 1 = 0$,

$$\varepsilon_0 = \cos \frac{2 \times 0 \times \pi}{2} + i \sin \frac{2 \times 0 \times \pi}{2} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i \times 0 = 1,$$

$$\varepsilon_1 = \cos \frac{2 \times 1 \times \pi}{2} + i \sin \frac{2 \times 1 \times \pi}{2} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0 = -1;$$

• pentru $n = 3$, avem: $x^3 - 1 = 0$, rezultă:

$$\varepsilon_0 = \cos \frac{2 \times 0 \times \pi}{3} + i \sin \frac{2 \times 0 \times \pi}{3} = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + 0 = 1,$$

$$\varepsilon_1 = \cos \frac{2 \times 1 \times \pi}{3} + i \sin \frac{2 \times 1 \times \pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon;$$

$$\varepsilon_2 = \cos \frac{2 \times 2 \times \pi}{3} + i \sin \frac{2 \times 2 \times \pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon^2.$$

În cazul general, putem scrie (vom nota necunoscuta cu z):

$z^n - a = 0$, și, notând $|a| = r$, $\arg a = \alpha$, rezultă:

$$z_k = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \right), k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Efectuați în clasă

Să se rezolve ecuațiile:

1. $z^4 - 1 = 0$; 2. $z^4 - 81 = 0$; 3. $z^4 + 1 = 0$.

Temă

Să se rezolve ecuațiile binome:

1. $z^2 - 2 = 0$; 2. $z^2 + 2 = 0$; 3. $z^3 - 3 = 0$; 4. $z^3 + 3 = 0$; 5. $z^4 - 1 = 0$;
6. $z^4 + 1 = 0$; 7. $z^6 - 1 = 0$; 8. $z^6 + 1 = 0$; 9. $z^8 - 1 = 0$; 10. $z^8 + 1 = 0$.

5.3. Ecuații bipătrate

Definiție

O ecuație de forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0,$$

se numește **ecuație bipătrată**.

Făcând o substituție $y = x^2$, se obține o ecuație de gradul 2:

$$ay^2 + by + c = 0,$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$y_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, y_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

iar rădăcinile ecuației bipătrate sunt rădăcinile ecuațiilor binome:

$$x^2 - y_1 = 0, x^2 - y_2 = 0.$$

Rezultă: $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$

EXEMPLE

1. Rezolvăm ecuația bipătrată: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Notând $x^2 = y$, obținem ecuația de gradul 2: $y^2 - 5y + 4 = 0$, ale cărei rădăcini sunt: $y_1 = 1$ și $y_2 = 4$.

Din ecuațiile binome $x^2 = y_1$ și $x^2 = y_2$, deducem ecuațiile de gradul 2:

$x^2 = 1$, cu soluțiile $x_{1,2} = \pm 1$, și $x^2 = 4$, cu soluțiile $x_{3,4} = \pm 2$.

Mulțimea rădăcinilor ecuației bipătrate considerate este: $\{-2, -1, 1, 2\}$.

2. Rezolvăm ecuația bipătrată: $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Notând $x^2 = y$, obținem ecuația de gradul 2: $y^2 - 3y - 4 = 0$, ale cărei rădăcini sunt:

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}, \text{ deci } y_1 = 4 \text{ și } y_2 = -1.$$

Din ecuațiile binome $x^2 = y_1$ și $x^2 = y_2$, deducem ecuațiile de gradul 2:

$x^2 = 4$, cu soluțiile $x_{1,2} = \pm 2$, și $x^2 = -1$, cu soluțiile $x_{3,4} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$.

Mulțimea rădăcinilor ecuației bipătrate considerate este: $\{-2, 2, -i, i\}$.

3. Rezolvăm ecuația bipătrată: $x^4 - 3x^2 - 40 = 0$.

Notând $x^2 = y$, obținem ecuația de gradul 2: $y^2 - 3y - 40 = 0$, ale cărei rădăcini sunt:

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+160}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{3 \pm 13}{2}, \text{ deci } y_1 = 8 \text{ și } y_2 = -5.$$

Din ecuațiile binome $x^2 = y_1$ și $x^2 = y_2$, deducem ecuațiile de gradul al doilea:

$x^2 = 8$, cu soluțiile $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}$, și $x^2 = -5$, cu soluțiile $x_{3,4} = \pm i\sqrt{5}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației considerate este $\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -i\sqrt{5}, i\sqrt{5}\}$.

4. Rezolvăm ecuația bipătrată: $z^4 + 16z^2 + 100 = 0$.

Notând $z^2 = y$, obținem ecuația de gradul 2:

$t^2 + 16t + 100 = 0$, ale cărei rădăcini sunt:

$$t_{1,2} = -8 \pm \sqrt{64 - 100} = -8 \pm \sqrt{-36} = -8 \pm 6i, \text{ deci } t_1 = -8 + 6i \text{ și } t_2 = -8 - 6i.$$

Din ecuațiile binome $z^2 = t_1$ și $z^2 = t_2$, deducem ecuațiile de gradul 2:

$z^2 = -8 + 6i$ și $z^2 = -8 - 6i$.

Ecuația $z^2 = -8 + 6i$ are soluțiile de forma: $z = \sqrt{-8+6i} = x + iy$, cu $x, y \in \mathbb{R}$. Ridicând la pătrat, obținem $x^2 - y^2 + 2xyi = -8 + 6i$ și, identificând cele două numere complexe,

avem sistemul: $\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \end{cases}$, care are soluțiile: $x_1 = 1, y_1 = 3$ și $x_2 = -1, y_2 = -3$.

Rezultă: $z_1 = 1 + 3i$ și $z_2 = -1 - 3i$.

Ecuația $z^2 = -8 - 6i$ are soluțiile de forma: $z = \sqrt{-8-6i} = x + iy$, cu $x, y \in \mathbb{R}$. Analog obținem soluțiile: $x_3 = -1, y_3 = 3$ și $x_4 = 1, y_4 = -3$.

Rezultă: $z_3 = -1 + 3i$ și $z_4 = 1 - 3i$.

Prin urmare, rădăcinile ecuației bipătrate considerate sunt:

$z_1 = 1 + 3i, z_2 = -1 - 3i, z_3 = -1 + 3i$ și $z_4 = 1 - 3i$.

Observație

Ecuația bipătrată este un caz particular al unei ecuații de forma:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0, a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0, n \in \mathbb{N}^+,$$

din care, prin substituția $x^n = y$, se obține ecuația:

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Dacă y_1 și y_2 sunt rădăcinile ecuației

$$ay^2 + by + c = 0,$$

atunci din ecuațiile binome:

$$x^n = y_1 \text{ și } x^n = y_2,$$

se obțin cele $2n$ soluții ale ecuației în necunoscuta x .

Temă

Să se rezolve ecuațiile:

1. $x^4 - 10x^2 + 169 = 0$;

2. $x^4 - a(a + b)^2 + a^3b = 0$;

3. $x^4 + 4ix^2 - 5 = 0$;

4. $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$;

5. $x^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0$;

6. $4x^4 + 19x^2 - 5 = 0$;

7. $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{10}{9}$;

8. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$;

9. $x^6 - (1 + i)x^3 + i = 0$;

10. $x^4 - x^2 - 6 = 0$.

5.4. Ecuații reciproce

Definiție

O ecuație algebrică de grad n :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}, \quad a_n \neq 0,$$

se numește **ecuație reciprocă** dacă:

$$a_{n-k} = a_k \text{ pentru orice } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, vom analiza următoarele cazuri particulare:

1. Dacă $n = 1$, ecuația reciprocă de grad 1 este: $ax + a = 0$, $a \neq 0$, care admite soluția $x_1 = -1$.

2. Dacă $n = 2$, ecuația reciprocă de grad 2 este: $ax^2 + bx + a = 0$, $a \neq 0$, care admite soluțiile:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2a}.$$

3. Dacă $n = 3$, ecuația reciprocă de grad 3 este: $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$, $a \neq 0$.

Vom observa că putem scrie:

$$a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0 \text{ sau } a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = 0,$$

de unde deducem:

$$(x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a] = 0,$$

unde o rădăcină este $x_1 = -1$, iar celelalte rădăcini x_2, x_3 sunt rădăcini ale ecuației reciproce de grad 2:

$$ax^2 + (b - a)x + a = 0.$$

4. Dacă $n = 4$, ecuația reciprocă de grad 4 este: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, $a \neq 0$.

Vom observa că împărțind ecuația cu $x^2 \neq 0$ (având condiția $a \neq 0$), putem scrie:

$$ax^2 + bx + c + b \times \frac{1}{x} + a \times \frac{1}{x^2} = 0 \text{ sau } a \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \left(x + \frac{1}{x} \right) + c = 0.$$

Notând $x + \frac{1}{x} = y$, deducem $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, de unde rezultă:

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0 \text{ sau } ay^2 + by + c - a = 0.$$

Dacă y_1 și y_2 sunt rădăcini ale acestei ecuații atunci din ecuațiile de grad 2:

$$x + \frac{1}{x} = y_1 \Leftrightarrow x^2 - y_1x + 1 = 0 \text{ (cu rădăcinile } x_1 \text{ și } x_2) \text{ și } x + \frac{1}{x} = y_2 \Leftrightarrow x^2 - y_2x + 1 = 0$$

(cu rădăcinile x_3 și x_4), obținem rădăcinile x_1, x_2, x_3 și x_4 ale ecuației reciproce de grad 4.

5. Dacă $n = 5$, ecuația reciprocă de grad 5 este: $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0, a \neq 0$.

Putem scrie:

$$a(x^5 + 1) + bx(x^3 + 1) + cx^2(x + 1) = 0$$

sau

$$a(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + bx(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx^2(x + 1) = 0,$$

astfel încât rezultă:

$$(x + 1)[ax^4 + (b - a)x^3 + (a - b + c)x^2 + (b - a)x + a] = 0,$$

Deducem că o rădăcină este $x_1 = -1$, iar celelalte rădăcini x_2, x_3, x_4 și x_5 sunt rădăcinile ecuației reciproce de grad 4:

$$ax^4 + (b - a)x^3 + (a - b + c)x^2 + (b - a)x + a = 0..$$

Vom observa că împărțind polinoamele $ax^3 + bx^2 + bx + a$, respectiv $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$ prin $x + 1$, folosind schema lui Horner:

respectiv

	x^3	x^2	x^1	x^0
	a	b	b	a
-1	a	$b-a$	a	0

putem scrie:

	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0
	a	b	c	c	b	a
-1	a	$b-a$	$a-b+c$	$b-a$	a	0

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = (x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a] = 0,$$

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a =$$

$$= (x + 1)[ax^4 + (b - a)x^3 + (a - b + c)x^2 + (b - a)x + a] = 0.$$

De aici deducem că pentru rezolvarea ecuației reciproce de grad 3 vom rezolva ecuația reciprocă de grad 2:

$$ax^2 + (b - a)x + a = 0,$$

iar pentru rezolvarea ecuației reciproce de grad 5 vom rezolva ecuația reciprocă de gradul 4:

$$ax^4 + (b - a)x^3 + (a - b + c)x^2 + (b - a)x + a = 0.$$

Vom observa că ecuațiile reciproce de grad 3 și grad 5 admit ca rădăcină $x = -1$.

Această proprietate se extinde la toate ecuațiile reciproce de grad impar astfel:

Proprietate

Orice ecuație reciprocă de grad impar admite rădăcina -1 .

EXEMPLE

1. Rezolvăm ecuația reciprocă de grad 3: $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$.

Fiind o ecuație reciprocă de grad impar, admite rădăcina -1 și, folosind schema lui Horner, obținem schema de alături:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 7 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 2 & 0 \end{array}$$

Putem scrie: $(x + 1)(2x^2 + 5x + 2) = 0$.

Rezolvând ecuația reciprocă $2x^2 + 5x + 2 = 0$, obținem rădăcinile:

$$x_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}, \text{ deci } x_2 = -2 \text{ și } x_3 = -\frac{1}{2}.$$

Rezultă că mulțimea rădăcinilor ecuației reciproce de grad 3 este: $\left\{-1, -\frac{1}{2}, -2\right\}$.

2. Rezolvăm ecuația reciprocă: $3x^3 - x^2 - x + 3 = 0$.

Fiind o ecuație reciprocă de grad 3, admite rădăcina -1 . Putem descompune în factori, grupând termenii sau folosind schema lui Horner pentru polinomul $3X^3 - X^2 - X + 3$ sau făcând împărțirea acestuia la $X + 1$.

Avem:

$$\begin{array}{r|l} 3X^3 - X^2 - X + 3 & X + 1 \\ \hline -3X^3 - 3X^2 & \\ \hline -4X^2 - X & \\ & 4X^2 + 4X \\ & \hline & / 3X + 3 \\ & -3X - 3 \\ & \hline & / \end{array}$$

Deducem ecuația: $(x + 1)(3x^2 - 4x + 3) = 0$, care admite rădăcinile: $x_1 = -1$ și

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4 - 9} = 2 \pm \sqrt{-5} = 2 \pm i\sqrt{5}.$$

Rezultă că mulțimea rădăcinilor ecuației reciproce de grad 3 este: $\{-1, 2 - i\sqrt{5}, 2 + i\sqrt{5}\}$.

3. Rezolvăm ecuația reciprocă: $2x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 2 = 0$.

Fiind o ecuație reciprocă de grad 5, admite rădăcina $x_1 = -1$.

Utilizând schema lui Horner, obținem schema de alături:

Ecuația dată se scrie sub forma:

$$(x + 1)(2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2) = 0.$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 2 & -3 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -5 & 6 & -5 & 2 & 0 \end{array}$$

Pentru a determina rădăcinile ecuației date, vom rezolva ecuația reciprocă de grad 4:

$$2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Împărțind această ecuație cu $x^2 \neq 0$, obținem:

$$2x^2 - 5x + 6 - 5 \times \frac{1}{x} + 2 \times \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 5 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 6 = 0.$$

Notând $x + \frac{1}{x} = y$, rezultă: $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, și ecuația devine:

$2(y^2 - 2) - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0$, cu rădăcinile:

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}; y_1 = 2 \text{ și } y_2 = \frac{1}{2}.$$

Rezolvând ecuațiile: $x + \frac{1}{x} = y_1$ și $x + \frac{1}{x} = y_2$, determinăm rădăcinile ecuației date.

Din ecuația $x + \frac{1}{x} = 2$, obținem ecuația: $x^2 - 2x + 1 = 0$, cu rădăcinile: $x_2 = x_3 = 1$.

Din ecuația $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, obținem ecuația $2x^2 - x + 2 = 0$, cu rădăcinile:

$$x_{4,5} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 16}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{4} = \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{4}.$$

Am determinat astfel rădăcinile ecuației reciproce de grad 5:

$$x_1 = -1, x_2 = x_3 = 1, x_4 = \frac{1 + i\sqrt{15}}{4} \text{ și } x_5 = \frac{1 - i\sqrt{15}}{4}.$$

Efectuați în clasă

Rezolvați ecuațiile:

1. $x^4 - 256 = 0$;
2. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;
3. $2x^4 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$;
4. $x^3 + 1 = 0$;
5. $x^6 - 1 = 0$;
6. $x^8 - 1 = 0$;
7. $x^4 - 81 = 0$;

Temă

Să se rezolve ecuațiile:

1. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
2. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$;
3. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$;
4. $2x^4 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$;
5. $x^3 + (1 - 2i)x^2 + (1 - 2i)x + 1 = 0$;
6. $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$;
7. $6x^4 - 11x^3 - 3x^2 + 11x - 3 = 0$;
8. $2x^3 - x^2 - 6x + 3 = 0$;
9. $3x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0$;
10. $x^2 + (1 - 2i)x - (1 + 3i)(2 + i) = 0$.

Teste pentru verificarea cunoștințelor

A

1. Să se rezolve ecuația:
 $x^4 + 16 = 0$. (2p)
2. Să se rezolve ecuația:
 $x^4 - 20x^2 + 6 = 0$. (2p)
3. Să se rezolve ecuația
 $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$. (2p)
4. Să se rezolve ecuația:
 $x^2 - (1 + i)x + i = 0$. (1p)
5. Să se rezolve ecuația:
 $x^2 + 4x + 20 = 0$. (2p)

B

1. Să se rezolve ecuația:
 $x^4 - 16 = 0$. (2p)
2. Să se rezolve ecuația:
 $x^4 + 20x^2 + 64 = 0$. (2p)
3. Să se rezolve ecuația:
 $x^3 + (1 + 2i)x^2 + (1 + 2i)x + 1 = 0$. (2p)
4. Să se rezolve ecuația:
 $x^2 + (3 + 2i)x + 6i = 0$. (1p)
5. Să se rezolve ecuația:
 $16x^2 + 8x + 37 = 0$. (2p)

Notă: Timpul efectiv de lucru este de 50 de minute pentru fiecare variantă. Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea a II-a

Elemente de analiză matematică

Capitolul 1. Probleme care conduc la noțiunea de integrală	102
Capitolul 2. Primitive (antiderivate)	106
Capitolul 3. Integrala definită	124
Capitolul 4. Aplicații ale integralei definite	150

PROBLEME CARE CONDUC LA NOȚIUNEA DE INTEGRALĂ

Capitolul 1

1. Noțiuni introductive

Una dintre problemele importante ale matematicii a fost calculul ariilor unor suprafețe plane.

Din geometrie se știe cum se calculează ariile unor suprafețe simple: **triunghiul, dreptunghiul, paralelogramul, pătratul, romb, trapezul** etc.

Aria unui poligon se obține descompunând poligonul în triunghiuri și însumând ariile acestora (figura 1).

Pentru calculul **ariei unui disc** de rază R se consideră un șir de poligoane regulate înscrise în cerc, cu un număr de laturi din ce în ce mai mare (figura 2).

Cu cât numărul laturilor este mai mare, cu atât poligonul diferă mai puțin de cerc. Șirul ariilor acestor poligoane are limita πR^2 .

Dacă se consideră un șir de poligoane circumscrise (figura 3) cu un număr de laturi din ce în ce mai mare, șirul ariilor acestor poligoane are, de asemenea, limita πR^2 .

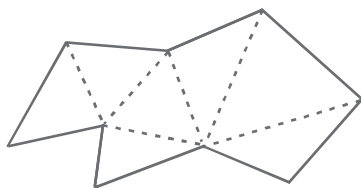


Fig. 1

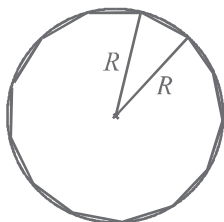


Fig. 2

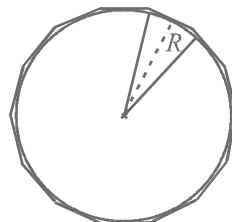


Fig. 3

Limita comună, πR^2 , a celor două șiruri de arii a fost luată prin definiție, ca arie a discului.

Procedeul folosit pentru calculul ariei discului poate fi extins și în cazul altor suprafețe, definind **aria** ca *limită comună a ariilor unor anumite șiruri de poligoane* (nu neapărat regulate).

Pentru calculul ariilor unor suprafețe plane, care nu se pot descompune în triunghiuri sau nu se pot aplica formulele cunoscute din geometrie, a fost creat un nou instrument de calcul – integrala – care s-a dovedit util și în rezolvarea altor probleme (din fizică, de exemplu).

Încă din antichitate, Arhimede* a dat metode pentru calculul unor arii, cum este aria segmentului de parabolă, dar bazele calculului integral au fost fundamentate cu 1900 de ani mai târziu de Newton** și Leibniz***.

* Arhimede (287-212 î.Hr.) a fost unul dintre cei mai mari oameni de știință ai antichității. A creat hidrostatica, a dat metode pentru calculul aproximativ al lui π . La cucerirea Siracuzei, a fost ucis de un soldat roman.

** Sir Isaac Newton (1642-1727) matematician, fizician și filozof englez. Este creatorul mecanicii clasice. Plecând de la probleme de mecanică, a creat calculul diferențial și integral, dar a dat rezultate fundamentale și în optică.

*** Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) matematician și filozof german. A pus bazele calculului diferențial și integral în 1673; este creatorul teoriei determinanților.

2. Aria triunghiului

Aplicăm procedeul folosit pentru calculul ariei discului în cazul unui triunghi și verificăm dacă obținem într-adevăr formula ariei triunghiului.

Să considerăm triunghiul OAA_1 mărginit de axa Ox , dreapta $y = 2x$ (graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x$) și axa $x = a, a > 0$.

Împărțim intervalul $[0, a]$ în n părți egale prin punctele de diviziune:

$$\frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \frac{3a}{n}, \dots, \frac{(n-1)a}{n}, \frac{na}{n}.$$

Pe fiecare dintre cele n intervale parțiale, luate ca bază, construim câte un dreptunghi ca în figura 4. Aceste dreptunghiuri au bazele egale cu $\frac{a}{n}$ și înălțimile, respectiv, cu

$$0, \frac{2a}{n}, \frac{4a}{n}, \dots, \frac{2(n-1)a}{n}.$$

Suma ariilor acestor dreptunghiuri este:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a}{n} \times 0 + \frac{a}{n} \times \frac{2a}{n} + \frac{a}{n} \times \frac{4a}{n} + \dots + \frac{a}{n} \times \frac{2(n-1)a}{n} = \\ &= 2 \times \frac{a^2}{n^2} \times [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] = a^2 \times \frac{n-1}{n}. \end{aligned}$$

Aria S_n aproximează prin lipsă aria triunghiului OAA_1 . Calculând limita șirului $(S_n)_{n \geq 1}$ obținem:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^2 \times \frac{n-1}{n} = a^2.$$

Acum, pe fiecare din cele n intervale parțiale construim dreptunghiuri cu baza $\frac{a}{n}$ și înălțimile respectiv $2\frac{a}{n}, 4\frac{a}{n}, 6\frac{a}{n}, \dots, 2n\frac{a}{n}$.

Suma ariilor acestor dreptunghiuri este:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a}{n} \times 2\frac{a}{n} + \frac{a}{n} \times 4\frac{a}{n} + \frac{a}{n} \times 6\frac{a}{n} + \dots + \frac{a}{n} \times 2n\frac{a}{n} = \\ &= 2 \times \frac{a^2}{n^2} \times (1 + 2 + 3 + \dots + n) = a^2 \times \frac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

Aria S_n aproximează prin adaos aria triunghiului OAA_1 . Această aproximare este cu atât mai bună cu cât n este mai mare. Limita șirului S_n este: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^2 \times \frac{n+1}{n} = a^2$.

Am obținut $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = a^2 = \mathcal{A}_{OAA_1}$.

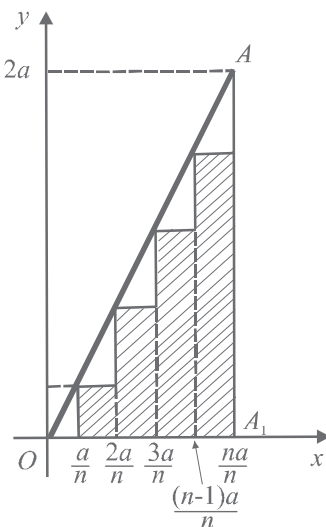


Fig. 4

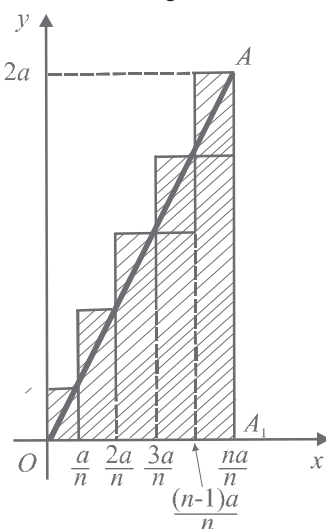


Fig. 5

Comentariu:

Este evident că în cazul triunghiului este mult mai simplu să-i aflăm aria direct, calculând semiprodusul dintre bază și înălțime decât căutând limita șirului ariilor unor poligoane.

3. Aria segmentului de parabolă

Suprafața mărginită de: axa Ox , parabola $y = x^2$ (graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$) și axa $x = a, a > 0$ (figura 6), o vom numi **triunghiul curbiliniu** OAA_1 . În cazul acestei suprafețe (în general al celor mărginite de linii curbe) nu mai dispunem de o formulă pentru calcularea ariei, ci trebuie să recurgem la procedeul de aproximare prin poligoane. Să împărțim intervalul $[0, a]$ în n părți egale prin punctele de diviziune

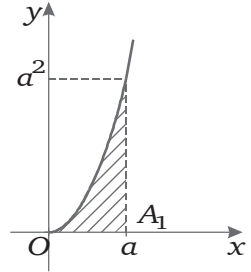


Fig. 6

$\frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \frac{3a}{n}, \dots, \frac{(n-1)a}{n}, \frac{na}{n}$

și pe fiecare interval să construim câte un dreptunghi ca în figura 7. Aceste dreptunghiuri au bazele egale cu $\frac{a}{n}$ și înălțimile respectiv $0, \left(\frac{a}{n}\right)^2, \left(\frac{2a}{n}\right)^2, \dots, \left[\frac{(n-1)a}{n}\right]^2$, iar ariile lor sunt egale respectiv cu $\frac{a}{n} \times 0, \frac{a}{n} \times \frac{a^2}{n^2}, \frac{a}{n} \times 2^2 \times \frac{a^2}{n^2}, \dots, \frac{a}{n} \times (n-1)^2 \times \frac{a^2}{n^2}$.

Aria poligonului hașurat în figura 7 este:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{a}{n} \times 0 + \frac{a}{n} \times \frac{a^2}{n^2} + \frac{a}{n} \times 2^2 \times \frac{a^2}{n^2} + \dots + \frac{a}{n} \times (n-1)^2 \times \frac{a^2}{n^2} = a^2 \\ &= \frac{a^3}{n^3} [1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2] = \\ &= \frac{a^3}{n^3} \left(\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) = a^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right). \end{aligned}$$

Luând $n = 1, 2, 3, \dots$ obținem un șir de poligoane care au respectiv ariile $s_1, s_2, s_3 \dots$. Limita acestui șir este

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \frac{a^3}{3}.$$

Acum, pe fiecare interval să construim câte un dreptunghi

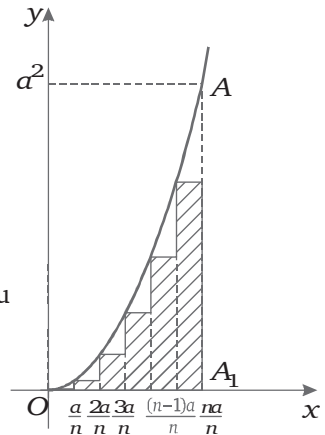


Fig. 7

ca în figura 8. Acestea au bazele egale cu $\frac{a}{n}$ și înălțimile respectiv $0, \left(\frac{a}{n}\right)^2, \left(\frac{2a}{n}\right)^2, \dots, \left[\frac{(n-1)a}{n}\right]^2, \left(\frac{na}{n}\right)^2$; ariile lor sunt

egale respectiv cu $\frac{a}{n} \times \frac{a^2}{n^2}, \frac{a}{n} \times 2^2 \times \frac{a^2}{n^2}, \frac{a}{n} \times 3^2 \times \frac{a^2}{n^2}, \dots, \frac{a}{n} \times n^2 \times \frac{a^2}{n^2}$.

Aria poligonului hașurat în figura 8 este:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a}{n} \times \frac{a^2}{n^2} + \frac{a}{n} \times 2^2 \times \frac{a^2}{n^2} + \frac{a}{n} \times 3^2 \times \frac{a^2}{n^2} + \dots + \frac{a}{n} \times n^2 \times \frac{a^2}{n^2} = \\ &= \frac{a^2}{n^2} \times (1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \end{aligned}$$

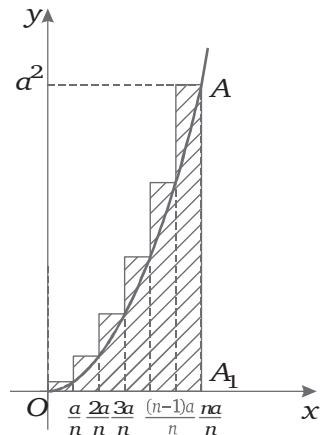


Fig. 8

$$= \frac{a^3}{n^3} \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \right) = a^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right).$$

Luând $n = 1, 2, 3, \dots$ obținem un șir de poligoane care au respectiv ariile S_1, S_2, S_3, \dots

Limita acestui șir este:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a^3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \frac{a^3}{3}.$$

Comentariu

Poligoanele din figura 7 sunt conținute în triunghiul curbiliniu, iar poligoanele din figura 8 conțin triunghiul curbiliniu OAA_1 . Aceste poligoane sunt cu atât mai „aproprite“ de triunghiul curbiliniu cu cât n este mai mare.

Este natural ca aria S a triunghiului curbiliniu OAA_1 să fie un număr cât mai apropiat de ariile s_n și S_n ; acest număr este limita comună a celor două șiruri de arii $(s_n)_{n>0}, (S_n)_{n>0}$.

Prin definiție, $S = \frac{a^3}{3}$.

Vom arăta că, folosind alte dreptunghiuri, se obține același rezultat. Împărțind intervalul $[0, a]$ în n părți egale, alegem puncte intermediare astfel: un punct ξ_1 în primul interval parțial, un punct ξ_2 în al doilea interval, ..., un punct ξ_n în al n -lea interval parțial:

$$\xi_i \in \left[\frac{(i-1)a}{n}, \frac{ia}{n} \right], i \in \overline{1, n}.$$

Pe aceste intervale construim dreptunghiuri de baze $\frac{a}{n}$ și înălțimi respectiv:

$$\xi_1^2, \xi_2^2, \xi_3^2, \dots, \xi_n^2 \text{ (vezi figura 9).}$$

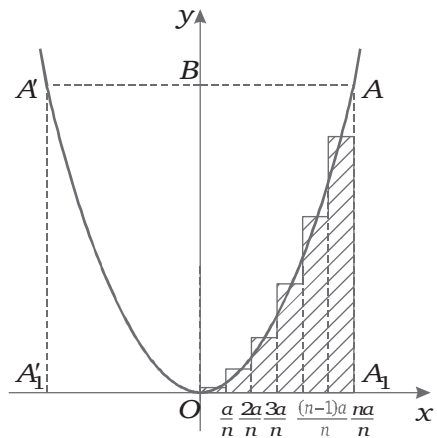


Fig. 9

Aria poligonului hașurat din figura 9 este:
$$\sigma_n = \frac{a}{n} \times \xi_1^2 + \frac{a}{n} \times \xi_2^2 + \dots + \frac{a}{n} \times \xi_n^2.$$

Acest poligon este cuprins între poligoanele de arii s_n și S_n , din figurile 7 și 8, deci

$$s_n \leq \sigma_n \leq S_n \text{ și trecând la limită, avem } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Cu teorema „cleștelui“ rezultă
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \frac{a^3}{3}.$$

Comentariu

Se observă că aria triunghiului curbiliniu BOA este $\frac{2a^3}{3} \left(= a^3 - \frac{a^3}{3} \right)$. Rezultă că aria segmentului de parabolă AOA' este egală cu două treimi din aria dreptunghiului $AA_1A'_1A'$, rezultat obținut pentru prima oară de Arhimede.

Efectuați în clasă

Folosind procedeul aproximării prin poligoane, deduceți formula ariei trapezului.

1. Continuitatea și derivabilitatea funcțiilor (recapitulare)

Reamintim cunoștințele și noțiunile învățate în clasa a XI-a.

În limbajul obișnuit, a spune că o curbă (acesta poate fi graficul unei funcții) este continuă înseamnă că ea nu are întreruperi. Dacă într-un punct curba se întrerupe, spunem că în acel punct funcția nu este continuă (este discontinuă).

1.1. Definiții și exemple

Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$.

Definiție

Funcția f se numește **continuă în punctul** $x_0 \in D$ dacă există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ și dacă această limită este egală cu $f(x_0)$.

În caz contrar se spune că f este **discontinuă în punctul** x_0 .

Știm că o funcție are limită într-un punct dacă există și sunt egale limitele laterale ale funcției în punctul dat:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \exists \lim_{x \nearrow x_0} f(x) \stackrel{\text{not}}{=} f(x_0 - 0), \exists \lim_{x \searrow x_0} f(x) \stackrel{\text{not}}{=} f(x_0 + 0)$$

și $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = l$.

Funcția f se numește **continuă la stânga** în punctul x_0 , dacă există $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ și

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0);$$

f se numește **continuă la dreapta** în punctul x_0 , dacă există $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ și $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Teoremă

f continuă în $x_0 \in D \Leftrightarrow \exists f(x_0 - 0), \exists f(x_0 + 0)$ și $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Definiție

Funcția f se numește **continuă pe mulțimea** A , unde $A \subset D$, dacă f este **continuă în toate punctele** lui A .

EXEMPLU

$$\text{Fie funcția } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{dacă } x < 0 \\ 2, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 3 \\ -x + 6, & \text{dacă } 3 < x < 4 \\ 1, & \text{dacă } x = 4 \\ x^2 - 8x + 16, & \text{dacă } x > 4 \end{cases}$$

Graficul funcției este prezentat în figura 1.

Ne propunem să studiem continuitatea funcției în punctele -1 , 0 și 3 .

$$\text{Avem } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x + 2) = -1 + 2 = 1$$

și $f(-1) = 1$, deci f este continuă în punctul -1 .

În punctul 0 calculăm limitele laterale și valoarea funcției:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (x + 2) = 2 \\ \lim_{x < 0} f(x) &= \lim_{x < 0} (x + 2) = 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2 \\ \lim_{x > 0} f(x) &= \lim_{x > 0} 2 = 2 \end{aligned} \right\}$$

$$f(0) = 2$$

$\Rightarrow l_s f(0) = l_d f(0) = f(0) \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 2$, deci f este continuă în $x_0 = 0$. (Se vede în figura 1 că graficul nu se întrerupe în punctul 0 .)

Analog procedăm în punctul $x_0 = 3$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} 2 = 2 \\ \lim_{x < 3} f(x) &= \lim_{x < 3} 2 = 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} (-x + 6) = 3 \\ \lim_{x > 3} f(x) &= \lim_{x > 3} (-x + 6) = 3 \end{aligned} \right\}$$

$$f(3) = 2$$

$\Rightarrow f(3) = l_s f(3) \neq l_d f(3) \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, deci f nu este continuă în $x_0 = 3$.

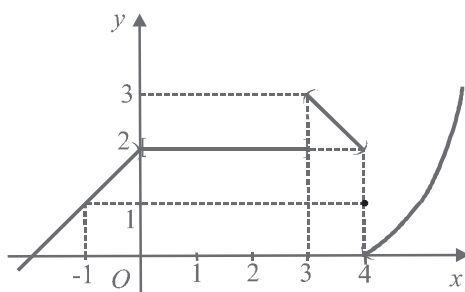


Fig. 1

Efectuați în clasă

Pentru funcția dată la exemplul anterior:

1. a) Calculați limitele laterale și valoarea funcției în punctul $x_0 = 4$.
b) Ce puteți afirma despre continuitatea funcției în acest punct?
2. Studiați continuitatea funcției în punctul $x_0 = 5$.
3. Urmăriți graficul funcției dat în figura 1 și observați „comportamentul“ acestuia în punctele: -1 , 0 , 3 , 4 , 5 .
4. Ce puteți afirma despre continuitatea funcției pe \mathbb{R} ? Justificați.

Teoremă

Toate funcțiile elementare (funcția polinomială, funcția rațională, funcția radical, funcția putere, funcția exponențială, funcția logaritmică, funcțiile trigonometrice – directe și inverse) sunt continue pe tot domeniul lor de definiție.

Observație

Problema continuității unei funcții nu se pune în punctele care nu aparțin domeniului de definiție. Pentru funcțiile „cu acoladă“ se pune problema continuității în punctele domeniului de definiție în care se schimbă expresia legii de corespondență.

Exercițiu rezolvat

Să se determine parametrul real α , astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}, & \text{dacă } x \neq 3 \\ \alpha, & \text{dacă } x = 3 \end{cases} \text{ să fie continuă pe } \mathbb{R}.$$

Soluție

Funcția este continuă pe $(-\infty, 3)$ și $(3, +\infty)$, ca funcție elementară (este funcție rațională). Problema continuității se pune în punctul $x_0 = 3$. Avem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{(x - 3)(x - 1)}{x - 3} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} (x - 1) = 2,$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{(x - 3)(x - 1)}{x - 3} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} (x - 1) = 2 \text{ și } f(3) = \alpha.$$

Pentru ca funcția f să fie continuă în 3 punem condiția $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = f(3)$,

care este echivalentă cu $\alpha = 2$.

Prin urmare, f este continuă pe \mathbb{R} , dacă $\alpha = 2$.

Efectuați în clasă

1. Reprezentați grafic, apoi studiați continuitatea funcțiilor următoare:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$ (funcția „modul“);

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x]$ (funcția „parte întreagă“);

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x\}$ (funcția „parte fracționară“);

$$d) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \text{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -1, & \text{dacă } x < 0 \end{cases} \text{ (funcția „semn“ – signum).}$$

$$e) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x < 0 \\ x^2, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}.$$

2. Studiați continuitatea următoarelor funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, date prin expresiile:

$$a) f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0, & \text{pentru } x = 0 \end{cases}; \quad b) f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0, & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{2}{(1+x)^2}, & \text{pentru } x \neq -1 \\ 5, & \text{pentru } x = -1 \end{cases}; \quad d) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{pentru } x \neq 2 \\ \alpha, & \text{pentru } x = 2, \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este interval sau reuniune de intervale.

Definiție

Funcția f se numește **derivabilă în punctul** $x_0 \in I$, dacă există și este finită limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{not}}{=} f'(x_0)$.

Numărul $f'(x_0)$ se numește **derivata funcției** f în punctul x_0 .

Funcția f se numește **derivabilă la stânga în punctul** x_0 , dacă există și este finită $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{not}}{=} f'_s(x_0)$ (**derivata la stânga** a funcției f în punctul x_0).

Funcția f se numește **derivabilă la dreapta în punctul** x_0 , dacă există și este finită $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{not}}{=} f'_d(x_0)$ (**derivata la dreapta** a funcției f în punctul x_0).

Teoremă

f derivabilă în $x_0 \in I \Leftrightarrow f$ derivabilă la stânga și la dreapta în x_0 și $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$.

Definiție

Funcția f se numește **derivabilă pe mulțimea** A , unde $A \subset I$, dacă și numai dacă f este **derivabilă în toate punctele** lui A .

EXEMPLU

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{dacă } x < 0 \\ -x^2 + 2, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$.

Graficul funcției este prezentat în figura 2.

Ne propunem să studiem derivabilitatea funcției în punctele 0 și 1. În punctul 0, trebuie să calculăm derivatele laterale:

$$\begin{aligned} f'_s(0) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{(x + 2) - 2}{x} = \\ &= \lim_{x \nearrow 0} \frac{x}{x} = 1, \end{aligned}$$

(este panta tangentei la stânga a graficului funcției în punctul de abscisă 0, vezi figura 2).

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{(-x^2 + 2) - 2}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{-x^2}{x} = 0$$

(este panta semitangentei la dreapta a graficului funcției în punctul de abscisă 0, vezi figura 2).

Cum $f'_s(0) \neq f'_d(0)$, deducem că f nu este derivabilă în 0.

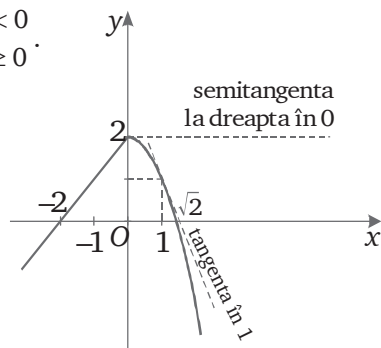


Fig. 2

În punctul de abscisă 1 nu este cazul să calculăm derivatele laterale, pentru că nu se schimbă formula legii de corespondență:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-x^2 + 2) - (-1 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 1}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (-x - 1) = -2. \end{aligned}$$

Funcția este derivabilă în punctul de abscisă 1.

Interpretare geometrică

Numărul -2 este egal cu panta tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 1. În figura 2, această tangentă a fost marcată prin linie punctată.

Observație

Punctul 0 este **punct unghiular** (pentru că cel puțin una dintre semitangente este finită și derivatele laterale sunt diferite; semitangentele formează între ele un unghi nenul).

Reamintim că ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul x_0 este:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Efectuați în clasă

Pentru funcția dată la exemplul anterior:

1. Studiați derivabilitatea funcției în punctul $x_0 = -2$.
2. Urmăriți graficul funcției în figura 2 și observați „comportamentul” acestuia și al tangențelor în punctele: $-2, 0, 1, \sqrt{2}$.
3. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției date în punctul 1.
4. Ce puteți afirma despre derivabilitatea funcției pe \mathbb{R} ? Justificați!
5. Studiați continuitatea funcției date în acest exemplu și stabiliți o legătură între continuitatea și derivabilitatea acestei funcții.

Teoremă

Funcțiile elementare — funcția polinomială, funcția rațională, funcția putere, funcția exponențială, funcția logaritmică — sunt derivabile pe tot domeniul lor de definiție.

Teoremă

Orice funcție derivabilă într-un punct $x_0 \in I$ sau pe o submulțime A a lui I este continuă în acel punct, respectiv pe acea submulțime.

Observație

Reciproca nu este întotdeauna valabilă: nu orice funcție continuă este derivabilă (a se vedea funcția de la exemplul de la paginile 107-108).

Comentariu

Afirmația din teorema anterioară este echivalentă cu a spune că dacă o funcție nu este continuă într-un punct atunci aceasta nu este nici derivabilă în acel punct (a se vedea spre exemplificare funcția de la exemplul de la paginile 107-108).

Prin urmare: **problema derivabilității unei funcții nu se pune în punctele care nu aparțin domeniului de definiție și nici în cele în care funcția nu este continuă.**

Pentru ușurința calculelor prezentăm un tabel cu derivatele funcțiilor uzuale:

Derivatele funcțiilor uzuale

Denumirea funcției	Domeniul de definiție	Legea funcției	Derivata funcției	Domeniul de derivabilitate
constantă	\mathbb{R}	c	$c' = 0$	\mathbb{R}
putere cu exponent natural	\mathbb{R}	x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$(x^n)' = nx^{n-1}$	\mathbb{R}
putere cu exponent real	$(0, +\infty)$	x^r ($r \in \mathbb{R}$)	$(x^r)' = rx^{r-1}$	$(0, +\infty)$
<i>caz particular:</i> funcția radical de ordinul 2	$(0, +\infty)$	\sqrt{x}	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(0, +\infty)$
exponențială	\mathbb{R}	a^x ($a > 0$, $a \neq 1$)	$(a^x)' = a^x \ln a$	\mathbb{R}
<i>caz particular:</i> exponențiala de bază e	\mathbb{R}	e^x	$(e^x)' = e^x$	\mathbb{R}
logaritm natural	$(0, +\infty)$	$\ln x$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	\mathbb{R}
sinus	\mathbb{R}	$\sin x$	$(\sin x)' = \cos x$	\mathbb{R}
cosinus	\mathbb{R}	$\cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	\mathbb{R}
tangentă	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
cotangentă	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\operatorname{ctg} x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
arcsinus	$[-1, 1]$	$\arcsin x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
arccosinus	$[-1, 1]$	$\arccos x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
arctangentă	\mathbb{R}	$\operatorname{arctg} x$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}
arccotangentă	\mathbb{R}	$\operatorname{arcctg} x$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}

Efectuați în clasă

Pentru funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (D domeniul maxim de derivabilitate) date mai jos, calculați:

a) $f(x) = x^{2007}$; b) $f(x) = \sqrt[2006]{x}$; c) $f(x) = 2007^x$.

1.2. Operații cu funcții continue. Suma sau diferența a două funcții derivabile

Din proprietățile operațiilor cu limite de funcții se deduc proprietățile operațiilor cu funcții continue. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval sau o reuniune de intervale.

Teoremă

Suma (produsul, câtul, puterea, compusa) a două funcții continue este o funcție continuă pe domeniile pe care aceste operații au sens.

Analog am enunțat și demonstrat următoarea

Teoremă

Suma (diferența) a două funcții derivabile într-un punct sau pe o submulțime a domeniului de definiție este o funcție derivabilă în punctul respectiv sau pe acea submulțime.

Fie $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții derivabile pe D . Atunci:

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x), \text{ oricare ar fi } x \in D.$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x), \text{ oricare ar fi } x \in D.$$

Teoremă

Produsul dintre o constantă și o funcție derivabilă într-un punct sau pe o submulțime a domeniului de definiție este o funcție derivabilă în punctul respectiv sau pe acea submulțime.

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă și $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$[\lambda f(x)]' = \lambda f'(x), \text{ oricare ar fi } x \in D.$$

$$\text{Derivata de ordin superior } f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]', n \in \mathbb{N} \text{ și } f^{(0)}(x) = f(x).$$

EXEMPLE

$$1. (x^3 + \ln x)' = (x^3)' + (\ln x)' = 3x^2 + \frac{1}{x}, x > 0.$$

$$2. (3^x - \sqrt{x} + 4)' = (3^x)' - (\sqrt{x})' + 4' = 3^x \ln 3 - \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0.$$

$$3. \left(\frac{1}{7}x^7\right)' = \frac{1}{7}(x^7)' = \frac{1}{7}(7 \times x^6) = x^6.$$

$$4. (e^x + x^3)'' = [(e^x + x^3)']' = (e^x + 3x^2)' = (e^x)' + 3(x^2)' = e^x + 3 \times 2x = e^x + 6x.$$

Efectuați în clasă

1. Calculați derivatele funcțiilor $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (D domeniul maxim de derivabilitate):

a) $f(x) = \sqrt[3]{x} - 2x^3$; b) $f(x) = 2^x + e^x + x^e$; c) $f(x) = 5x^6$.

2. Găsiți derivata de ordinul 4 a funcțiilor $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ următoare:

a) $f(x) = x^5$; b) $f(x) = e^x$.

Ce puteți spune despre derivata de ordinul n a funcției de la b)?

Exercițiu rezolvat

Să se determine constantele reale α și β astfel încât funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3\alpha, & x \leq 1 \\ \alpha x + \beta, & x > 1 \end{cases}$$

să fie derivabilă pe \mathbb{R} , apoi să se scrie derivata funcției.

Soluție

Funcția este continuă și derivabilă pe $(-\infty, 1)$ și $(1, +\infty)$ ca funcție elementară.

Problema derivabilității se pune în punctul $x_0 = 1$. Mai întâi vom pune condiția ca f să fie continuă în punctul $x_0 = 1$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) &= \lim_{x \nearrow 1} (2x^2 + 3\alpha) = 2 + 3\alpha \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) &= \lim_{x \searrow 1} (\alpha x + \beta) = \alpha + \beta \\ f(1) &= 2 + 3\alpha \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{f continuă în 1} \\ \Rightarrow 2 + 3\alpha = \alpha + \beta \Rightarrow \beta = 2 + 2\alpha. \end{array}$$

Deci $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3\alpha, & x \leq 1 \\ \alpha x + 2 + 2\alpha, & x > 1 \end{cases}$ este continuă pe \mathbb{R} , oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Vom pune condiția ca această funcție să fie derivabilă în $x_0 = 1$:

$$\left. \begin{aligned} f'_s(1) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \nearrow 1} \frac{(2x^2 + 3\alpha) - (2 + 3\alpha)}{x - 1} = \lim_{x \nearrow 1} \frac{2(x^2 - 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \nearrow 1} 2(x + 1) = 4 \\ f'_d(1) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \searrow 1} \frac{(\alpha x + 2 + 2\alpha) - (2 + 3\alpha)}{x - 1} = \lim_{x \searrow 1} \frac{\alpha(x - 1)}{x - 1} = \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

f derivabilă în 1

$\Rightarrow f'_s(1) = f'_d(1) \Rightarrow \alpha = 4$. Deducem $\beta = 10$.

Prin urmare $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 12, & x \leq 1 \\ 4x + 10, & x > 1 \end{cases}$ și $f'(x) = \begin{cases} 4x, & x < 1 \\ 4, & x \geq 1 \end{cases}$.

Temă

1. Studiați derivabilitatea și continuitatea următoarelor funcții:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 3;$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2;$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|;$

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x < 0 \\ x + 2, & x \geq 0 \end{cases}.$

2. Calculați derivatele următoarelor funcții $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (D fiind domeniul maxim de derivabilitate):
- a) $f(x) = x^2$; b) $f(x) = 7$; c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$;
d) $f(x) = 4^x$; e) $f(x) = \sqrt[4]{x} + \frac{1}{x}$; f) $f(x) = 8e^x - \ln x$;
g) $f(x) = 3\sin x$; h) $f(x) = x^4 - 2 \times 4^x$; i) $f(x) = 7 \cos x - 2x^3 + 3$;
j) $f(x) = x^2 + \sin x$; k) $f(x) = 2007 \operatorname{tg} x$; l) $f(x) = 2007 + \operatorname{arctg} x$.
3. Aflați derivata de ordinul n ($n \in \mathbb{N}$) a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.
4. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx - 3$, unde m este parametru real. Aflați m astfel încât tangenta la graficul funcției în punctul $(2, f(2))$ să fie paralelă cu prima bisectoare.

2. Primitiva unei funcții: definiții și exemple

2.1. Definiția primitivei și exemple

Să pornim de la un exemplu.

Fie $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^4$. Această funcție este derivabilă pe \mathbb{R} , ca funcție elementară și avem $g'(x) = 4x^3$.

Funcția g' se numește **derivata** funcției g , iar funcția g se numește **primitiva** funcției g' .

$$(x^4)' = 4x^3$$

primitiva

(funcția din care
se obține derivata)

derivata

În cele ce urmează ne vom ocupa de găsirea primitivelor unor funcții date (deci operația inversă derivării), în caz că acestea există.

Definiție

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ interval. Spunem că f **admite primitivă** pe I dacă există o funcție $F: I \rightarrow \mathbb{R}$, F derivabilă pe I , astfel încât

$$F'(x) = f(x), \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

Funcția F se numește **primitivă** a funcției f .

EXEMPLE

1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

O primitivă a acestei funcții este funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$.

Într-adevăr, F este derivabilă pe \mathbb{R} (ca funcție elementară) și

$$F'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 1\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + 1' = \frac{1}{3}3x^2 + 0 = x^2 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.

O primitivă a acestei funcții este funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \sin x + c$, unde c este o constantă reală.

Într-adevăr, F este derivabilă pe \mathbb{R} (ca funcție elementară) și

$$F'(x) = (\sin x + c)' = \cos x + 0 = \cos x = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$.

Funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x + 2$, este o primitivă a lui f deoarece este derivabilă pe \mathbb{R} și $F'(x) = (x + 2)' = 1 + 0 = 1 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Efectuați în clasă

Folosind tabelul de derivate, identificați primitive ale funcțiilor următoare:

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$;

b) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x \ln 2$;

d) $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$;

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$;

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3$;

g) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$;

h) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\sin x$;

i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2008x^{2007}$;

j) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\cos x$;

k) $f: (-1; 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

l) $f: \mathbb{R} \setminus \{k\pi/k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Puteți preciza mai multe primitive pentru o singură funcție? Prin ce sunt diferite acestea?

Rezolvând exercițiile de mai sus ați observat, desigur, că o funcție poate admite mai multe primitive.

Propoziție

Două primitive ale aceleiași funcții definite pe un interval I diferă printr-o constantă.

Demonstrație

Fie o funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval $\subset \mathbb{R}$. Fie $F_1, F_2: I \rightarrow \mathbb{R}$, două primitive ale funcției f .

Înseamnă că F_1 și F_2 sunt derivabile pe I și $F_1'(x) = f(x)$, $F_2'(x) = f(x)$.

Derivata funcției diferență a celor două primitive există și are loc relația:

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

Funcția $F_1 - F_2$ având derivata nulă pe I , rezultă că este constantă pe acest interval, deci $F_1(x) - F_2(x) = c \Rightarrow F_1(x) = F_2(x) + c$, $\forall c \in I$, c constantă reală.

Observație

Apar două întrebări:

1. Cum stabilim dacă o funcție admite primitive?
 2. Iar în caz afirmativ, cum scriem o primitivă a funcției date?
- Răspunsurile la aceste întrebări le vom da printr-un exemplu.

EXEMPLE

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{dacă } x \leq 2 \\ 3, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$.

O primitivă a acestei funcții ar putea fi o funcție de forma $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} x^2 - x + c_1, & \text{dacă } x \leq 2 \\ 3x + c_2, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$, derivabilă pe \mathbb{R} , unde c_1 și c_2 sunt constante pe \mathbb{R} (forma funcției am intuit-o folosind tabelul derivatelor uzuale astfel încât $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$).

Funcția F este derivabilă pe $(-\infty, 2)$ și $(2, \infty)$ ca funcție elementară. Ne punem problema derivabilității funcției F în punctul $x_0 = 2$.

Mai întâi punem condiția ca F să fie continuă în $x_0 = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} F(x) = \lim_{x \nearrow 2} (x^2 - x + c_1) = 2 + c_1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} F(x) = \lim_{x \searrow 2} (3x + c_2) = 6 + c_2 \\ F(2) = 2 + c_1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \boxed{F \text{ continuă în } 2} \\ \Rightarrow 2 + c_1 = 6 + c_2 \Rightarrow c_1 = 4 + c_2. \end{array}$$

$$\text{Notând } c_2 = c, \text{ avem acum } F(x) = \begin{cases} x^2 - x + 4 + c, & \text{dacă } x \leq 2 \\ 3x + c, & \text{dacă } x > 2 \end{cases} \Rightarrow$$

Studiem derivabilitatea funcției F în punctul $x_0 = 2$. Avem:

$$\begin{aligned} F'_s(2) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} = \lim_{x \nearrow 2} \frac{(x^2 - x + 4 + c) - (6 + c)}{x - 2} = \lim_{x \nearrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \nearrow 2} (x + 1) = 3, \end{aligned}$$

$$F'_d(2) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} = \lim_{x \searrow 2} \frac{(3x + c) - (6 + c)}{x - 2} = \lim_{x \searrow 2} \frac{3(x - 2)}{x - 2} = 3,$$

de unde rezultă că: $F'(2) = 3 = f(2)$.

Constatăm că F este derivabilă pe \mathbb{R} și $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci F este o primitivă a funcției f .

2. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$ nu admite primitive.

O primitivă a acestei funcții ar putea fi o funcție $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă pe \mathbb{R} , de forma

$$F(x) = \begin{cases} c_1, & \text{dacă } x \leq 0 \\ x \sin \frac{1}{x} + c_2, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

Orice primitivă este derivabilă, deci continuă pe \mathbb{R} . Din condiția de continuitate în punctul $x = 0$, rezultă $c_1 = c_2 \stackrel{\text{not}}{=} c$. Deci, $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} c, & \text{dacă } x \leq 0 \\ x \sin \frac{1}{x} + c, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$.

Observând că $\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \sin \frac{1}{x}$, $\forall x > 0$, și ținând cont că $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ nu există, deducem că F nu este derivabilă în $x = 0$, deci F nu este derivabilă pe \mathbb{R} ; în concluzie, F nu este primitivă pentru f .

Efectuați în clasă

Studiați dacă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$ admite primitive pe \mathbb{R} .

Ce puteți spune despre continuitatea acestei funcții?

Indicație: Considerați $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} -x + c_1, & \text{dacă } x < 0 \\ x + c_2, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$, c_1, c_2 constante, apoi

procedați ca în exemplul anterior.

Observație

Admitem fără demonstrație următoarea teoremă: **orice funcție continuă pe un interval admite primitive pe acel interval.**

3. Integrala nedefinită a unei funcții continue; definiții, exemple

Definiție

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I interval din \mathbb{R}) o funcție care admite primitive.
 Mulțimea tuturor primitivelor lui f se numește **integrala nedefinită** a funcției f și se notează prin simbolul: $\int f(x) dx$
 Semnul \int se numește **semn de integrală**.

Deci $\int f(x) dx = F(x) + C$, unde $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a lui f , și am notat prin C mulțimea funcțiilor constante definite pe I cu valori în \mathbb{R} :

$$C \stackrel{\text{not.}}{=} \{c \mid c: I \rightarrow \mathbb{R}, c(x) = \text{constant}\}.$$

EXEMPLE

$$1. \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C. \quad 2. \int \cos x dx = \sin x + C. \quad 3. \int 1 dx = x + C.$$

Din definiția integralei nedefinite deducem:

$$\left(\int F'(x) dx = F(x) + C \right).$$

Definiție

Operația de calculare a primitivelor unei funcții (care admite primitive) se numește **integrare**.

4. Primitive uzuale

Pentru a nu proceda „prin încercări” și pentru a ușura calculul integral, prezentăm un tabel cu primitivele (integralele nedefinite ale) funcțiilor uzuale:

Primitivele funcțiilor uzuale

Funcția	Domeniul de definiție	Integrala nedefinită (mulțimea primitivelor)
constantă	\mathbb{R}	$\int c \, dx = cx + C$
putere cu exponent natural ($n \in \mathbb{N}$)	\mathbb{R}	$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
putere cu exponent real ($r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$(0, +\infty)$	$\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$
putere cu exponentul -1	\mathbb{R}^*	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$
exponențială de bază $a > 0, a \neq 1$	\mathbb{R}	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
exponențială de bază e	\mathbb{R}	$\int e^x \, dx = e^x + C$
sinus	\mathbb{R}	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
cosinus	\mathbb{R}	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
tangentă	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln \cos x + C$
cotangentă	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln \sin x + C$
rațională cu numitorul diferență de pătrate	$\mathbb{R} \setminus \{-a, a\}, a \neq 0$	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} \, dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
rațională cu numitorul sumă de pătrate	$\mathbb{R}, a \neq 0$	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
numitorul radical din diferență de pătrate	$(-\infty, -a)$ sau $(a, +\infty), a \neq 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \, dx = \ln \left x + \sqrt{x^2 - a^2} \right + C$
numitorul radical din sumă de pătrate	$\mathbb{R}, a \neq 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \, dx = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C$
numitorul radical din diferență de pătrate	$(-a, a), a > 0$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$

Rețineți! $\int f(x) \, dx = \int f(x) \, dx + C$

Efectuați în clasă

Verificați prin derivare relațiile din tabelul primitivelor uzuale.

EXEMPLE

$$1. (cx + C)' = cx' + 0 = c \cdot 1 = c.$$

$$2. \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right)' = \frac{1}{n+1} (x^{n+1})' + 0 = \frac{1}{n+1} \times (n+1) x^{n+1-1} = x^n.$$

Temă

1. Calculați următoarele integrale nedefinite:

a) $\int x^3 dx, x \in \mathbb{R};$

b) $\int x^{\frac{1}{3}} dx, x \in \mathbb{R};$

c) $\int \sqrt{x} dx, x > 0;$

d) $\int 2^x dx, x \in \mathbb{R};$

e) $\int \frac{1}{x} dx, x > 0;$

f) $\int x^e dx, x \in \mathbb{R};$

g) $\int \frac{1}{x} dx, x < 0;$

h) $\int 1 dx, x \in \mathbb{R};$

i) $\int \sin x dx, x \in \mathbb{R};$

j) $\int \frac{1}{x^2-9} dx, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\};$

k) $\int \operatorname{tg} x dx, \cos x \neq 0;$

l) $\int \frac{1}{x^2+4} dx;$

m) $\int \frac{1}{x^2-4} dx, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\};$

n) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} dx, x > 2;$

o) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx, x \in \mathbb{R};$

p) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx, x \in (-2, 2).$

2. Transcrieți și completați tabelul:

Primitiva funcției	Funcția	Derivata funcției
$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x^n, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}
	$x^r, x \in (0, +\infty), r \neq -1.$	
	$a^x, x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1.$	
	$\frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$	
	$\sin x, x \in \mathbb{R}$	
	$\cos x, x \in \mathbb{R}.$	

5. Proprietăți ale integralelor nedefinite; proprietatea de liniaritate

Și pentru funcțiile care admit primitive se pot enunța și demonstra proprietăți analoge operațiilor cu funcții derivabile.

Teoremă

Suma (diferența) a două funcții definite pe I care admit primitive este o funcție definită pe I și care admite primitive. Integrala sumei (diferenței) este egală cu suma (diferența) integralelor.

Demonstrație

Fie $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval din \mathbb{R} , două funcții care admit primitive. Aceasta înseamnă că există funcțiile derivabile $F, G : I \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $F'(x) = f(x)$ și $G'(x) = g(x)$, $\forall x \in I$.

Deducem că suma $F + G : I \rightarrow \mathbb{R}$, $(F + G)(x) \stackrel{\text{def.}}{=} F(x) + G(x)$ este o funcție derivabilă și $(F + G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$, adică $F + G$ este o primitivă a funcției $f + g$.

Putem scrie:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = F(x) + G(x) + C,$$
$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{și} \quad \int g(x) dx = G(x) + C.$$

Deci:

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + C + G(x) + C = F(x) + G(x) + C = \int [f(x) + g(x)] dx.$$

Analog se poate demonstra pentru diferența a două funcții care admit primitive.

Reținem că:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \quad \text{și} \quad \int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

Observații

1. Proprietatea este adevărată și pentru suma mai multor funcții.
2. Dacă dintre două funcții numerice diferite pe același interval una admite primitive, iar cealaltă nu admite primitive, atunci suma (diferența) funcțiilor nu admite primitive.

EXEMPLE

1. $\int (x^4 + x^3) dx = \int x^4 dx + \int x^3 dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + C.$

2. Pentru $x > 0$, avem:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{x} - e^x + \sqrt{x} \right) dx &= \int \frac{1}{x} dx - \int e^x dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= \ln|x| - e^x + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \ln x - e^x + \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Efectuați în clasă

Calculați următoarele integrale:

a) $\int (\sqrt[3]{x} + 1) dx, x \in \mathbb{R};$ b) $\int (x^5 - 2^x) dx, x \in \mathbb{R};$ c) $\int (x^2 - x + 1) dx, x \in \mathbb{R};$

d) $\int \left(\frac{1}{x} - 3^x + 4\right) dx, x < 0;$ e) $\int (2 + \sin x) dx, x \in \mathbb{R};$

f) $\int (\cos x - \operatorname{tg} x + e^x) dx, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$

Teoremă

Produsul dintre o constantă nenulă și o funcție definită pe I , care admite primitive, este o funcție care admite primitive pe I . În acest caz, constanta „iese” în fața integralei.

Demonstrație

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval $\subset \mathbb{R}$, o funcție care admite primitive și $\lambda \in \mathbb{R}^*$ o constantă. Atunci există o funcție derivabilă $F: I \rightarrow \mathbb{R}$, astfel încât $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

Deducem că funcția $\lambda f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $(\lambda f)(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \lambda f(x)$ este o funcție derivabilă și

$$(\lambda f)'(x) = [\lambda f(x)]' = \lambda F'(x) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x),$$

adică λf este o primitivă a funcției λf .

Putem scrie:
$$\int [\lambda f(x)] dx = \lambda F(x) + C$$

și
$$\lambda \int f(x) dx = \lambda [F(x) + C] = \lambda F(x) + \lambda C = \lambda F(x) + C.$$

Deci
$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx.$$

EXEMPLE

1. $\int 5x^2 dx = 5 \int x^2 dx = 5 \times \frac{x^3}{3} + C.$

2. $\int \frac{5}{2} \sqrt[4]{x} dx = \frac{5}{2} \int x^{\frac{1}{4}} dx = \frac{5}{2} \times \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + C = \frac{5}{2} \times \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} + C = 2x \sqrt[4]{x} + C.$

3. $\int (7x^6 - 3\sqrt{x}) dx = 7 \int x^6 dx - 3 \int \sqrt{x} dx = 7 \frac{x^7}{7} - 3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = x^7 - 2x\sqrt{x} + C, x > 0.$

4.
$$\int \frac{(1+2\sqrt{x})^2}{x^2} dx = \int \frac{1+4\sqrt{x}+4x}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{4\sqrt{x}}{x^2} dx + \int \frac{4x}{x^2} dx =$$

$$= \int x^{-2} dx + 4 \int x^{-\frac{3}{2}} dx + 4 \int \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + 4 \ln|x| + C, x > 0.$$

Efectuați în clasă

Calculați următoarele integrale:

a) $\int 5\sqrt[3]{x} dx, x \in \mathbb{R};$ b) $\int 3e^x dx, x \in \mathbb{R};$ c) $\int 4x^4 dx, x \in \mathbb{R};$ d) $\int \frac{6}{x} dx, x < 0;$

e) $\int (-\operatorname{ctg} x) dx, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\};$ f) $\int (-\cos x) dx, x \in \mathbb{R}.$

Observație

Rezultatele celor două teoreme se pot cumula: dacă două funcții $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I interval inclus în \mathbb{R}) admit primitive, atunci orice combinație liniară a lor, $\lambda f + \mu g$, admite primitive pe I , oricare ar fi $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\int [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx.$$

Temă

1. Calculați primitivele următoarelor funcții:

a) $f(x) = x^2 + 3x, x \in \mathbb{R};$

b) $f(x) = a \sin x + b \cos x, x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R};$

c) $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty);$

d) $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \in (-\infty, 0);$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}, x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right);$

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}, x \in (-2, 2);$

g) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{2}{\cos^2 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

h) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 9}, x \in \mathbb{R};$

i) $f(x) = \frac{1}{4x^2 + 1}, x \in \mathbb{R};$

j) $f(x) = 3^x + e^x, x \in \mathbb{R};$

k) $f(x) = 3^x + e^x, x \in \mathbb{R};$

l) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, x \in (-1, 1);$

m) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, x \in (-\infty; -1);$

n) $f(x) = \frac{4}{x^2 - 5} + \frac{x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}.$

2. Calculați următoarele integrale nedefinite:

a) $\int (x^7 - 6x^5 + 4x + 3) dx;$

b) $\int x^2(x-2) dx;$

c) $\int (2x + 3\sqrt{x}) dx, x > 0;$

d) $\int 4\sqrt[3]{x} \sqrt[5]{x} dx, x \in \mathbb{R};$

e) $\int \left(2^x + \frac{3}{x} - 1\right) dx, x > 0 \text{ sau } x < 0;$

f) $\int x(x-1)(x-2) dx, x \in \mathbb{R}.$

3. Calculați următoarele integrale nedefinite:

- | | |
|---|--|
| a) $\int (5x^3 - 2x + 3) dx;$ | b) $\int (2x^5 - 3x^4 + 3x^2 + x - 4) dx;$ |
| c) $\int \left(\frac{1}{2^2} - \frac{2}{\lambda^3} + 5 \right) dx, x > 0;$ | d) $\int \frac{x^2 - x^3 + 1}{x^5} dx, x < 0;$ |
| e) $\int (\sqrt{x} + 1) dx, x > 0;$ | f) $\int (x\sqrt{x} - 2x + 1) dx, x > 0;$ |
| g) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx, x > 0;$ | h) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x^3} \right) dx, x < 0;$ |
| i) $\int \frac{1}{5x} dx, x > 0;$ | j) $\int 5e^x dx;$ |
| k) $\int 3 \times 2^x dx;$ | l) $\int (x^e + 1) dx;$ |
| m) $\int \left(\frac{1}{x^2 + 16} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 16}} \right) dx;$ | n) $\int \left(\frac{1}{x^2 - 16} + \frac{2}{\sqrt{x^2 - 16}} \right) dx, x > 4.$ |

Teste pentru verificarea cunoștințelor

A

Calculați:

1. $\int 3x^2 dx;$ (1p)
2. $\int \left(x^{\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{x} \right) dx;$ (1,5p)
3. $\int 3 \sin x dx;$ (1p)
4. $\int \frac{1}{x^2 - 25} dx, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 5\};$ (1,5p)
5. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 25}} dx;$ (1,5p)
6. $\int \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}} dx, x \in (-5; 5);$ (1,5p)
7. $\int 2 \operatorname{tg} x dx, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$ (1p)

B

Calculați:

1. $\int 2x dx;$ (1p)
2. $\int \left(\sqrt{x} - x^{\frac{1}{3}} \right) dx;$ (1,5p)
3. $\int 2 \cos x dx;$ (1p)
4. $\int \frac{1}{x^2 + 25} dx;$ (1,5p)
5. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 25}} dx, x \in (5, +\infty);$ (1,5p)
6. $\int \frac{5}{\sqrt{1 - x^2}} dx, x \in (-1, 1);$ (1,5p)
7. $\int 3 \operatorname{ctg} x dx, x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}.$ (1p)

Notă: Timpul efectiv de lucru este de 50 de minute pentru fiecare variantă. Se acordă 1 p din oficiu.

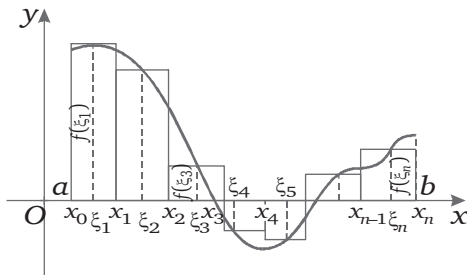
1. Definirea integralei Riemann a unei funcții continue prin formula Leibniz-Newton

1.1. Definirea integralei Riemann a unei funcții continue

Fie o funcție $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (figura 1).

Să împărțim intervalul $[a, b]$ în n intervale parțiale prin punctele $x_0 = a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n = b$.

În fiecare interval parțial $[x_{i-1}, x_i]$ alegem un punct oarecare $\xi_i, x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, i = \overline{1, n}$; considerăm $f(\xi_i)$ valoarea funcției f în punctul ξ_i și scriem produsul $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, care reprezintă aria fiecăruia dintre dreptunghiurile construite în figura 1.



Pentru cele n intervale parțiale, obținem produsele:

$$f(\xi_1)(x_1 - x_0), f(\xi_2)(x_2 - x_1), f(\xi_3)(x_3 - x_2), \dots, f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}),$$

iar suma acestora

$$S_n = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

se numește **sumă integrală** (suma Riemann*) a funcției f .

Comentariu

Luând succesiv $n = 1, 2, 3, \dots$ (adică împărțind intervalul $[a, b]$ în părți din ce în ce mai mici), pentru o anumită alegere a punctelor intermediare ξ_i , obținem un șir de sume integrale S_1, S_2, \dots, S_n , pentru o altă alegere a punctelor intermediare obținem un alt șir de sume integrale etc.

Efectuați în clasă

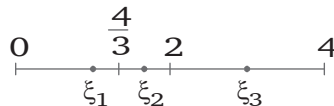
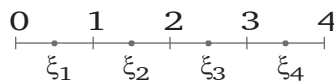
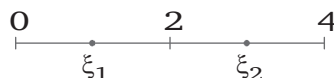
Fie funcția $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

i) Calculați sumele Riemann asociate funcției f pentru următoarele diviziuni și puncte intermediare:

a) $x_i \in \{0, 2, 4\}, \xi_i \in \{1, 3\}$;

b) $x_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \xi_i \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\}$;

c) $x_i \in \left\{0, \frac{4}{3}, 2, 4\right\}, \xi_i \in \left\{1, \frac{5}{3}, 3\right\}$.



* Bernhard Riemann (1826-1866) matematician german. A pus bazele geometriei riemanniene. Cercetările lui și-au găsit aplicație în teoria relativității.

- ii) Împărțiți intervalul $[0, 4]$ în 8 intervale parțiale egale, alegeți două sisteme de puncte intermediare diferite și calculați sumele Riemann corespunzătoare.
- iii) Ce observații puteți face privind sumele Riemann asociate funcției f ?

Definiție

Dacă șirul (S_n) de sume integrale are aceeași limită finită I , independentă de alegerea punctelor intermediare x_i spunem că funcția f este **integrabilă** pe intervalul (a, b) .

Limita unică I se numește **integrala definită a funcției** f pe intervalul $[a, b]$ sau, simplu, integrala funcției f și se notează:

$$\int_a^b f(x) dx \text{ (se citește „integrala de la } a \text{ la } b \text{ din } f(x) dx \text{“).}$$

Putem scrie relația:

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Valorile a și b se numesc **limite de integrare**, a este limita inferioară, iar b limita superioară; intervalul $[a, b]$ se numește **interval de integrare**; funcția f se numește **funcția de integrat**; x se numește **variabila de integrare**. Semnul de diferențială dx nu are justificare teoretică, dar s-a păstrat până astăzi prin tradiție.

Observații

1. Trebuie reținut că $\int_a^b f(x) dx$ este un număr.
2. Se poate demonstra următoarea proprietate: **orice funcție continuă pe un interval este integrabilă pe acel interval.**
3. În ce privește funcțiile discontinue, unele sunt integrabile, iar altele nu sunt integrabile.

1.2. Formula Leibniz-Newton

După cum ați văzut în procedeul expus anterior, calculul integralei definite, ca limită a șirurilor de sume integrale, este greoi chiar pentru funcțiile cele mai simple.

Vom stabili mai jos pentru funcțiile continue o formulă de calcul cu ajutorul primitivelor.

Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și F o primitivă a sa. Împărțim intervalul $[a, b]$ în n părți prin punctele de diviziune $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$. Aplicăm teorema creșterilor finite (a lui Lagrange) funcției F pe fiecare interval parțial $[x_{i-1}, x_i]$. Rezultă că există un punct $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ astfel încât:

$$\frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \underbrace{F'(\xi_i)}_{f(\xi_i)},$$

ceea ce se poate scrie:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Luând $i = 1, 2, 3, \dots, n-1, n$ obținem egalitățile:

$$F(x_1) - F(x_0) = f(\xi_1)(x_1 - x_0)$$

$$F(x_2) - F(x_1) = f(\xi_2)(x_2 - x_1)$$

$$F(x_3) - F(x_2) = f(\xi_3)(x_3 - x_2)$$

.....

$$F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) = f(\xi_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2})$$

$$F(x_n) - F(x_{n-1}) = f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

adunăm membru cu membru și reducem termenii asemenea

$$F(x_n) - F(x_0) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

adică $F(b) - F(a) = S_n$.

Aceasta înseamnă că toate sumele S_n corespunzătoare alegerii punctelor ξ_i (indicate de teorema creșterilor finite) sunt constante.

Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = F(b) - F(a)$ și cum $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, obținem:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Comentariu

Pentru calculul integralei $\int_a^b f(x) dx$ este suficient să cunoaștem o primitivă F a funcției f .

Diferența $F(b) - F(a)$ se notează frecvent $F(x) \Big|_a^b$.

Formula Leibniz-Newton

Fie funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$, continuă, și F o primitivă a sa. Are loc relația:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

numită **formula Leibniz-Newton**.

EXEMPLE

$$1. \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}.$$

$$2. \int_a^b x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Efectuați în clasă

Folosind formula Leibniz-Newton, calculați:

a) $\int_{-1}^2 x dx;$

b) $\int_0^4 3 dx;$

c) $\int_0^1 e^x dx;$

d) $\int_1^e \ln x dx;$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx;$

f) $\int_0^1 x^{2007} dx .$

2. Proprietăți ale integralei definite: liniaritate, monotonie, aditivitate în raport cu intervalul de integrare

Este ușor să intuim că proprietățile integralelor nedefinite sunt adevărate și pentru integralele definite.

Propoziție

Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$, două funcții continue și $\alpha, \mu \in \mathbb{R}$.
Atunci au loc relațiile:

$$1) \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

(integrala definită este **aditivă**);

$$2) \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

(integrala definită este **omogenă**);

$$3) \int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

(integrala definită este **liniară**);

$$4) \text{ Dacă } f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b], \text{ atunci } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

(integrala definită este **monotonă**).

Demonstrație

1) Fie $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ primitivele funcțiilor f , respectiv g (funcțiile F și G există datorită continuității funcțiilor f și g).

Atunci $F + G$ este o primitivă a funcției $f + g$ pe intervalul $[a, b]$ și

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= (F + G)(b) - (F + G)(a) = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = \\ &= [F(b) - F(a)] + [G(b) - G(a)] = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

2) Se lasă ca exercițiu.

3) Se deduce din proprietățile 1) și 2).

4) Se lasă ca exercițiu.

Acceptăm fără demonstrație următoarele convenții.

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$, o funcție continuă. Atunci au loc relațiile:

$$5) \left(\int_a^a f(x) dx = 0 \right); \quad 6) \left(\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \right).$$

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $c \in (a, b)$, astfel încât f continuă pe $[a, c]$ și $[c, b]$. Atunci are loc relația:

$$7) \left(\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right).$$

EXEMPLU

Fie $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Să se calculeze $\int_{-1}^2 f(x) dx$.

Explicităm modulul $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$ și împărțim intervalul de integrare în $[-1, 0]$ și $[0, 2]$.

$$\text{Deci } \int_{-1}^2 |x| dx = \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^2 x dx = -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = -0 + \frac{1}{2} + \frac{4}{2} - 0 = \frac{5}{2}.$$

Temă

1. Aplicând formula Leibniz–Newton, calculați:

a) $\int_{-1}^1 (x^2 - 2x + 3) dx;$

b) $\int_0^1 e^{-x} dx;$

c) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx;$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x ;$

e) $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx;$

f) $\int_1^2 \frac{1}{x} dx;$

g) $\int_0^4 \sqrt{x} dx;$

h) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx ;$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx .$

2. Arătați că funcțiile următoare sunt continue, apoi calculați integrala definită pe domeniul de definiție:

a) $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ x^2 + 1, & \text{dacă } x \in (1, 2] \end{cases}$;

b) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |\sin x|;$

c) $f: [1, 2e] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |\ln x - 1|.$

3. Metode de calcul ale integralelor definite: integrarea prin părți, integrarea prin schimbare de variabilă

Formula Leibniz–Newton permite calculul integralei oricărei funcții continue căreia îi cunoaștem o primitivă.

Pentru funcțiile cărora nu le cunoaștem primitive, se pot folosi procedee, numite **metode de integrare**, care reduc calculul integralei unei funcții la calculul integralei altei funcții (cu primitivă cunoscută).

Vom prezenta și exemplifica trei metode de integrare, întâi pentru integrale nedefinite, apoi pentru integrale definite.

3.1. Integrarea prin părți

Bazându-ne pe regula de derivare a produsului a două funcții și pe faptul că orice funcție continuă admite primitive, stabilim o regulă de integrare a produsului a două funcții.

3.1.1. Integrarea prin părți a primitivelor

Teoremă

Dacă $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții derivabile cu derivate continue, atunci funcțiile $fg, f'g$ și fg' admit primitive și între acestea există relația:

$$\int f(x) \times g'(x) dx = f(x) \times g(x) - \int f'(x) g(x) dx,$$

numită **formula de integrare prin părți**.

Demonstrație

Din ipoteză știm că f și g sunt derivabile, deci continue; având și f', g' continue, deducem că $fg, f'g$ și fg' sunt continue, deci admit primitive.

Din definiția integralei nedefinite putem scrie:

$$\begin{aligned} \int [f(x) \times g(x)]' dx &= f(x) \times g(x) + \mathcal{C} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int [f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)] dx &= f(x) \times g(x) + \mathcal{C} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int f'(x) \times g(x) dx + \int f(x) \times g'(x) dx &= f(x) \times g(x) + \mathcal{C} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int f'(x) \times g(x) dx = f(x) \times g(x) - \int f(x) \times g'(x) dx &+ \mathcal{C} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int f'(x) \times g(x) dx = f(x) \times g(x) - \int f(x) \times g'(x) dx. \end{aligned}$$

Comentariu

Pentru a calcula integrala unui produs de funcții, $\int f(x) \times g(x) dx$ trebuie să găsim primitiva uneia dintre funcții, apoi aplicăm formula de integrare prin părți de câte ori este necesar.

EXEMPLE

1. $\int x^2 e^x dx, x > 0.$

Alegem funcțiile derivabile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ și $g'(x) = e^x$;

avem $f'(x) = 2x$ și $g(x) = \int g'(x) dx = \int e^x dx = e^x$.

Rezultă $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$.

Pentru calculul integralei $\int x e^x dx$, folosind aceleași notații alegem:

$f(x) = x; g'(x) = e^x, f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile

$f'(x) = 1, g(x) = \int e^x dx = e^x,$

și obținem $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$.

Mai scurt, fără să mai indicăm notațiile funcțiilor, putem redacta astfel:
Căutăm o primitivă a funcției e^x (fiindcă este indefinit derivabilă); avem:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= \int x^2 (e^x)' dx = x^2 e^x - \int (x^2)' e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = \\ &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x (e^x)' dx = x^2 e^x - 2 [x e^x - \int (x)' e^x dx] = \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C. \end{aligned}$$

Observație

Dacă pentru a calcula $\int x^2 e^x dx$ am fi căutat o primitivă a funcției x^2 (deci nu a funcției indefinit derivabile) am fi avut:

$$\int x^2 e^x dx = \int \left(\frac{x^3}{3} \right)' e^x dx = \frac{x^3}{3} e^x - \int \frac{x^3}{3} (e^x)' dx = \frac{x^3}{3} e^x - \frac{1}{3} \int x^3 (e^x)' dx.$$

Astfel am ajuns la o integrală în care gradul funcției polinomiale este mai mare decât a funcției inițiale și, continuând similar, observăm că nu putem finaliza calculul.

2. $\int x^n \ln x dx, x > 0, n \in \mathbb{N}^*$.

Procedăm ca la punctul anterior.

$$\begin{aligned} \int x^n \ln x dx &= \int \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' \ln x dx = \int \frac{1}{n+1} (x^{n+1})' \ln x dx = \frac{1}{n+1} \int (x^{n+1})' \ln x dx = \\ &= \frac{1}{n+1} [x^{n+1} \ln x - \int x^{n+1} (\ln x)' dx] = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} \times \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \\ &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C. \end{aligned}$$

Comentariu

Alegerea funcțiilor f și g' pentru aplicarea formulei de integrare prin părți se face astfel încât să se ajungă la integrale mai simple și depinde de experiența și inventivitatea rezolvitorului.

Efectuați în clasă

Folosind formula de integrare prin părți, calculați:

a) $\int \ln x \, dx, x > 0.$

Indicație. Scrieți $\ln x = 1 \times \ln x$, apoi $1 = x'$.

b) $\int 2^x (x + 1) \, dx, x \in \mathbb{R};$

c) $\int x \cos x \, dx, x \in \mathbb{R}.$

Proprietate

În aplicarea formulei de integrare prin părți se poate întâmpla să obținem ca termen chiar integrala pe care dorim să o calculăm.

EXEMPLE

$$\begin{aligned} 1. I &= \int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \times \cos x \, dx = \int (\sin x)' \cos x \, dx = \sin x \cos x - \int \sin x (\cos x)' \, dx = \\ &= \sin x \cos x - \int \sin x (-\sin x) \, dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \\ &= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx = \sin x \cos x + \int dx - \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + x - I. \end{aligned}$$

Până acum avem $I = \sin x \cos x + x - I$, adică o ecuație în „necunoscuta“ I .

Trecând I în membrul stâng și „rezolvând ecuația“ obținem:

$$2I = \sin x \cos x + x \Rightarrow I = \frac{\sin x \cos x + x}{2} + C.$$

Efectuați în clasă

Calculați $\int \sin^2 x \, dx, x \in \mathbb{R}.$

2. $\int \sqrt{x^2 + \alpha} \, dx$, unde $x^2 + \alpha > 0.$

$$\text{Avem: } I \stackrel{\text{not.}}{=} \int \sqrt{x^2 + \alpha} \, dx = \int \frac{x^2 + \alpha}{\sqrt{x^2 + \alpha}} \, dx = \underbrace{\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \alpha}} \, dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + \alpha}} \, dx}_{I_2}.$$

Pentru a calcula I_1 aplicăm formula de integrare prin părți:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + \alpha}} \times x \, dx = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + \alpha}} \times x \, dx = \int \frac{(x^2 + \alpha)'}{2\sqrt{x^2 + \alpha}} \times x \, dx = \int (\sqrt{x^2 + \alpha})' x \, dx = \\ &= x\sqrt{x^2 + \alpha} - \int \sqrt{x^2 + \alpha} \, dx = x\sqrt{x^2 + \alpha} - I. \end{aligned}$$

Pentru calculul lui I_2 , utilizăm formula din tabelul primitivelor uzuale;

$$I_2 = \alpha \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx = \alpha \ln(x + \sqrt{x^2 + \alpha}) + C \text{ (am observat că } \sqrt{x^2 + \alpha} > |x|).$$

Prin urmare, $I = x\sqrt{x^2 + \alpha} - I + \alpha \ln(x + \sqrt{x^2 + \alpha})$, de unde deducem

$$2I = x\sqrt{x^2 + \alpha} + \alpha \ln(x + \sqrt{x^2 + \alpha}) \Rightarrow I = \frac{x\sqrt{x^2 + \alpha}}{2} + \frac{\alpha}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + \alpha}) + C.$$

Efectuați în clasă

Procedând analog exemplului anterior, arătați că:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C, \text{ pentru orice } x \in (-a; a), \text{ cu } a > 0.$$

Temă

1. Calculați primitivele următoarelor funcții:

- a) $f(x) = x^2 \sin x$; b) $f(x) = 5 \sin x \cos x - 1$;
 c) $f(x) = x^2 \ln x, x > 0$; d) $f(x) = \cos(\ln x), x > 0$.

2. Calculați următoarele integrale nedefinite, folosind formula de integrare prin părți:

- a) $\int x e^x dx$; b) $\int x^2 \ln x dx, x > 0$; c) $\int \frac{1}{x} \ln x dx, x > 0$;
 d) $\int \ln^2 x dx, x > 0$; e) $\int (x^2 + x + 1)e^x dx$; f) $\int x^2 \sin x dx$;
 g) $\int \sqrt{x^2 - 9} dx, x \in (3, +\infty)$; h) $\int \sqrt{x^2 + 9} dx, x \in \mathbb{R}$; i) $\int \sqrt{9 - x^2} dx, x \in (-3, 3)$.

3.1.2. Integrarea prin părți a integralelor definite

Teoremă

Formula de integrare prin părți

Dacă $F, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții derivabile, cu derivate continue, atunci:

$$\int_a^b F'(x)G(x) dx = F(x) \times G(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)G'(x) dx.$$

Demonstrație

Avem:

$$\begin{aligned} F(x) \times G(x) \Big|_a^b &= (F \times G)(x) \Big|_a^b = \int_a^b (F \times G)'(x) dx = \int_a^b [F(x) \times G(x)]' dx = \\ &= \int_a^b [F'(x)G(x) + F(x)G'(x)] dx = \int_a^b F'(x)G(x) dx + \int_a^b F(x)G'(x) dx, \end{aligned}$$

adică $\int_a^b F'(x)G(x) dx = (F \times G)(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)G'(x) dx.$

Exercițiu rezolvat

Calculați $\int_1^e x \ln x \, dx$.

Soluție

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln x \, dx &= \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} (\ln x)' \, dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \left(\frac{e^2 \ln e}{2} - \frac{1^2 \ln 1}{2} \right) - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1^2}{4} \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}. \end{aligned}$$

Efectuați în clasă

Calculați:

a) $\int_1^2 (x^2 - 3x + 4) \, dx$; b) $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$; c) $\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx$; d) $\int_4^5 \sqrt{x^2 - 9} \, dx$.

Temă

Calculați:

a) $\int_0^1 x e^x \, dx$; b) $\int_0^\pi x \sin x \, dx$; c) $\int_0^2 x^3 e^x \, dx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx$; e) $\int_1^e \ln x \, dx$;
 f) $\int_{-1}^1 \arctg x \, dx$; g) $\int_0^1 \ln(1+x^2) \, dx$; h) $\int_1^2 x^2 e^x \, dx$; i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx$; j) $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 4} \, dx$.

3.2. Integrarea prin schimbare de variabilă a funcțiilor compuse

Reamintim derivarea funcțiilor compuse:

Teoremă

Fie $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ și $\varphi: J \rightarrow I$ două funcții derivabile, I, J intervale incluse în \mathbb{R} .

Atunci $F \circ \varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă pe J și

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \times \varphi'$$

EXEMPLE

1. Fie $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \ln x$ și $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $\varphi(t) = t^2 + 4$.

Atunci $F \circ \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă și

$$(F \circ \varphi)'(t) = (F' \circ \varphi)(t) \times \varphi'(t) = F'(\varphi(t)) \times \varphi'(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \times \varphi'(t) = \frac{1}{t^2 + 4} \times 2t = \frac{2t}{t^2 + 4}.$$

$$2. \underbrace{[\sin(\ln t)]}_{\varphi(t)}' = \underbrace{[\cos(\ln t)]}_{F'(\varphi(t))} \times \underbrace{(\ln t)'}_{\varphi'(t)} = \frac{1}{t} \cos(\ln t), t > 0.$$

$x = \ln t$
 $F(x) = \sin x$

$$3. [(x^2 + x)^{100}]' = 100(x^2 + x)^{99} \cdot (x^2 + x)' = 100(x^2 + x)^{99}(2x + 1).$$

Se poate prezenta un tabel al derivatelor funcțiilor uzuale compuse (am omis în mod intenționat scrierea variabilei $t \in J$).

Derivatele funcțiilor compuse uzuale

Condiții	Derivata funcției compuse
$t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$	$(\varphi^n)' = n\varphi^{n-1} \times \varphi'$
$\varphi(t) > 0, r \neq -1$	$(\varphi^r)' = r\varphi^{r-1} \times \varphi'$
$\varphi(t) > 0$	$(\sqrt{\varphi})' = \frac{1}{2\sqrt{\varphi}} \times \varphi'$
$a > 0, a \neq 1$	$(a^\varphi)' = a^\varphi \times \varphi' \times \ln a$
	$(e^\varphi)' = e^\varphi \times \varphi'$
$\varphi(t) > 0$	$(\ln \varphi)' = \frac{\varphi'}{\varphi}$
$\varphi(t) \in \mathbb{R}$	$(\sin \varphi)' = \cos \varphi \times \varphi'$
$\varphi(t) \in \mathbb{R}$	$(\cos \varphi)' = -\sin \varphi \times \varphi'$
$\cos \varphi(t) \neq 0$	$(\operatorname{tg} \varphi)' = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \times \varphi'$
$\sin \varphi(t) \neq 0$	$(\operatorname{ctg} \varphi)' = -\frac{1}{\sin^2 \varphi} \times \varphi'$
$\varphi(t) \in (-1, 1)$	$(\arcsin \varphi)' = \frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2}} \times \varphi'$
$\varphi(t) \in (-1, 1)$	$(\arccos \varphi)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2}} \times \varphi'$
$\varphi(t) \in \mathbb{R}$	$(\operatorname{arctg} \varphi)' = \frac{1}{1+\varphi^2} \times \varphi'$
$\varphi(t) \in \mathbb{R}$	$(\operatorname{arcctg} \varphi)' = -\frac{1}{1+\varphi^2} \times \varphi'$

EXEMPLE

$$1. [(t^2 - t)^5]' = 5(t^2 - t)^4 \times (t^2 - t)' = 5(t^2 - t)^4 \times (2t - 1).$$

$$2. \left(\sqrt{t^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}} \times (t^2+1)' = \frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}.$$

$$3. [\cos(x^2 + e^x)]' = [-\sin(x^2 + e^x)] \cdot (x^2 + e^x)' = -(2x + e^x) \cdot \sin(x^2 + e^x).$$

Efectuați în clasă

Calculați derivatele următoarelor funcții:

a) e^{-t} , $t \in \mathbb{R}$;

b) $(t^2 + 1)^3$, $t \in \mathbb{R}$;

c) 2^{t^2-1} , $t \in \mathbb{R}$;

d) $\sqrt[3]{t-1}$, $t \in \mathbb{R}$;

e) $\ln(t^2 + 1)$, $t \in \mathbb{R}$;

f) $\frac{1}{t^4+2}$, $t \in \mathbb{R}$;

g) $\sin(2t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$;

h) $\ln(\sqrt{t^2+1})$, $t \in \mathbb{R}$;

i) $e^{\sin t}$, $t \in \mathbb{R}$.

În multe situații, funcția pe care vrem să o „integrăm“ poate fi pusă sub forma $f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)$, unde $\varphi: J \rightarrow I$ este o funcție derivabilă și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție care admite primitive.

Dacă funcția f admite o primitivă F (deci F derivabilă și $F' = f$), atunci $(f \circ \varphi) \times \varphi'$ admite primitive pe J și, ținând cont de formula de derivare a funcțiilor compuse, putem scrie:

$$\int f(\varphi(t)) \times \varphi'(t) dt = \int F'(\varphi(t)) \times \varphi'(t) dt = \int (F \circ \varphi)'(t) dt = (F \circ \varphi)(t) + \mathcal{C}.$$

Deci, problema găsirii unei primitive a funcției $(f \circ \varphi) \times \varphi'$ se reduce la aflarea unei primitive a funcției f .

Rezultatul intuit anterior se poate enunța astfel:

Teoremă

Prima metodă de schimbare de variabilă

Fie J și I intervale din \mathbb{R} și funcțiile $\varphi: J \rightarrow I$ derivabilă pe J , respectiv $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ funcție care admite primitive pe I (fie F o primitivă a sa).

Atunci funcția $(f \circ \varphi) \times \varphi'$ admite primitive, iar $F \circ \varphi$ este o primitivă a sa.

Demonstrație

Funcția $F: I \rightarrow \mathbb{R}$, fiind o primitivă a lui f , este derivabilă pe I și $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in I$.

Avem $J \xrightarrow{\varphi} I \xrightarrow{F} \mathbb{R}$; cum și φ este derivabilă pe J rezultă că $F \circ \varphi$ este derivabilă pe J și $(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \times \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \times \varphi'(t) = (f \circ \varphi)(t) \times \varphi'(t)$, deci $F \circ \varphi$ este o primitivă a funcției $(f \circ \varphi) \times \varphi'$.

Putem scrie: $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + \mathcal{C}$.

În continuare, vom prezenta un tabel al primitivelor funcțiilor compuse uzuale.

Primitivele funcțiilor compuse uzuale

Integrala nedefinită (mulțimea primitivelor)	Condiții
$\int \varphi^n(t) \varphi'(t) dt = \frac{\varphi^{n+1}(t)}{n+1} + C$	$t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
$\int \varphi^r(t) \varphi'(t) dt = \frac{\varphi^{r+1}(t)}{r+1} + C$	$\varphi(t) > 0, r \neq -1$
$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = \ln \varphi(t) + C$	$\varphi(t) \neq 0$
$\int a^{\varphi(t)} \varphi'(t) dt = \frac{a^{\varphi(t)}}{\ln a} + C$	$a > 0, a \neq 1, \varphi(t) \in \mathbb{R}$
$\int e^{\varphi(t)} \varphi'(t) dt = e^{\varphi(t)} + C$	$\varphi(t) \in \mathbb{R}$
$\int \sin \varphi(t) \times \varphi'(t) dt = -\cos \varphi(t) + C$	$\varphi(t) \in \mathbb{R}$
$\int \cos \varphi(t) \times \varphi'(t) dt = \sin \varphi(t) + C$	$\varphi(t) \in \mathbb{R}$
$\int \operatorname{tg} \varphi(t) \times \varphi'(t) dt = -\ln \cos \varphi(t) + C$	$\cos \varphi(t) \neq 0$
$\int \operatorname{ctg} \varphi(t) \times \varphi'(t) dt = \ln \sin \varphi(t) + C$	$\sin \varphi(t) \neq 0$
$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi^2(t) - a^2} dt = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{\varphi(t) - a}{\varphi(t) + a} \right + C$	$\varphi(t) \neq \pm a$
$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi^2(t) + a^2} dt = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\varphi(t)}{a} + C$	$a \neq 0$
$\int \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi^2(t) \pm a^2}} dt = \ln \varphi(t) + \sqrt{\varphi^2(t) \pm a^2} + C$	$\varphi(t) > a, a \neq 0$
$\int \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{a^2 - \varphi^2(t)}} dt = \operatorname{arcsin} \frac{\varphi(t)}{a} + C$	$ \varphi(t) < a, a > 0$

EXEMPLE

1 . Calculăm $\int t(t^2 - 7)^8 dt$, pentru $t \in \mathbb{R}$.

Luăm $\varphi(t) = t^2 - 7, \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Funcția φ este derivabilă pe \mathbb{R} și $\varphi'(t) = 2t$.

Putem scrie $I = \int t(t^2 - 7)^8 dt = \frac{1}{2} \int (t^2 - 7)^8 \times 2t dt = \frac{1}{2} \int [\varphi(t)]^8 \times \varphi'(t) dt$.

Definim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^8$; f admite primitive pe \mathbb{R} și o primitivă a sa este

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \frac{x^9}{9}.$$

În baza teoremei anterioare, o primitivă a funcției $(f \circ \varphi) \times \varphi'$ este:

$$(F \circ \varphi)(t) = F(\varphi(t)) = \frac{[\varphi(t)]^9}{9}, t \in \mathbb{R}. \text{ Deci } I = \frac{1}{2} \times \frac{(t^2 - 7)^9}{9} + C = \frac{(t^2 - 7)^9}{18} + C.$$

Comentariu

Pentru un calcul rapid procedăm astfel:

$$\begin{aligned} \int t(t^2 - 7)^8 dt &= \frac{1}{2} \int (t^2 - 7)^8 \times 2t dt = \frac{1}{2} \int (t^2 - 7)^8 \times (t^2 - 7)' dt = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{(t^2 - 7)^9}{9} + C = \frac{1}{18} (t^2 - 7)^9 + C. \end{aligned}$$

$$2. \int (6t + 3)e^{t^2+t-4} dt = 3 \int e^{t^2+t-4} (2t + 1) dt = 3 \int e^{t^2+t-4} \times (t^2 + t - 4)' dt = 3 e^{t^2+t-4} + C.$$

Comentariu

În exercițiul anterior am luat $\varphi(t) = t^2 + t - 4$, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, și $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$.

$$\begin{aligned} 3. \int \frac{x-1}{\sqrt{1-(x^2-2x+3)^2}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{\sqrt{1-(x^2-2x+3)^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2-2x+3)'}{\sqrt{1-(x^2-2x+3)^2}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \arcsin(x^2-2x+3) + C, \text{ unde } |x^2-2x+3| < 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \int \frac{x}{9+(x^2-2)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{9+(x^2-2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2-2)'}{3^2+(x^2-2)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x^2-2}{3} + C = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x^2-2}{3} + C. \end{aligned}$$

Efectuați în clasă

Folosind prima metodă de schimbare de variabilă, calculați:

$$\text{a) } \int \frac{3t^2 + 2t + 2}{t^3 + t^2 + 2t + 3} dt; \quad \text{b) } \int t \sin(2 + 3t^2) dt; \quad \text{c) } \int \sin 5x dx; \quad \text{d) } e^{7x} dx.$$

Exercițiu rezolvat

$$\text{Calculați } \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx.$$

Soluție

Notăm $e^x = t$, $t > 0$; rezultă $x = \ln t$.

Considerăm funcția $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(t) = \ln t$; funcția φ este derivabilă și $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$ (φ este și bijectivă și $\varphi^{-1}(x) = e^x$).

Luăm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$; f este continuă, deci admite primitive.

$$\text{Avem } f(\varphi(t)) \times \varphi'(t) = \frac{t^2}{1+t} \times \frac{1}{t} = \frac{t}{1+t} = \frac{t+1-1}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}.$$

O primitivă a funcției $(f \circ \varphi)(t) \times \varphi'(t)$ este:

$$\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = t - \int \frac{1}{1+t} dt = t - \int \frac{(1+t)'}{1+t} dt = t - \ln|1+t| + C = t - \ln(1+t) + C.$$

Ținând cont de notația inițială ($t = e^x$), rezultă:

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = e^x - \ln(1+e^x) + C.$$

Altfel. Formal, putem proceda ca mai jos:

Notăm $e^x = t$ ($t > 0$); deducem $x = \ln t$, deci $dx = \frac{1}{t} dt$.

Înlocuind în integrală obținem:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2}{1+t} \times \frac{1}{t} dt &= \int \frac{t}{1+t} dt = \int \frac{1+t-1}{1+t} dt = \int 1 dt - \int \frac{1}{1+t} dt = t - \ln|1+t| + C = \\ &= t - \ln(1+t) + C. \end{aligned}$$

Prin urmare, $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = e^x - \ln(1+e^x) + C$.

Comentariu

În exercițiul rezolvat am utilizat, bazându-ne pe intuiție, a doua metodă de schimbare de variabilă.

Efectuați în clasă

1. Verificați, prin derivare, corectitudinea rezultatului obținut în exercițiul precedent.

2. Calculați $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx, x > 0$. **Indicație:** Notați $\sqrt{x^2+1} = t$.

SINTEZĂ

Prima metodă de schimbare de variabilă	A doua metodă de schimbare de variabilă
<ol style="list-style-type: none"> Se dă o funcție $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ care admite primitive. Se caută două funcții $J \xrightarrow{\varphi} I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ astfel încât $h(t) = f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)$, $\varphi(t) = x$. Se află o primitivă F a lui f, adică $\int f(x) dx = F(x) + C$. O primitivă a lui h este $F \circ \varphi$. 	<ol style="list-style-type: none"> Se dă o funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ care admite primitive. Se caută o funcție $\varphi: J \rightarrow I$ derivabilă, cu derivata nenulă, φ bijectivă. Se află o primitivă H a funcției $(f \circ \varphi)\varphi'$. O primitivă a lui f este $H \circ \varphi^{-1}$, deci $\int f(x) dx = (H \circ \varphi^{-1})(x) + C$

Temă

1. Calculați primitivele următoarelor funcții:

a) $h(t) = t\sqrt{t^2+1}$;

b) $h(t) = e^t\sqrt{3e^t+2}$;

c) $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$, $x > 0$;

d) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

2. Calculați, utilizând schimbarea de variabilă:

a) $\int e^x \operatorname{ctg} e^x dx$, $x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$;

b) $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}} dx$;

c) $\int \sin^2 x \cos x dx$;

d) $\int \cos^4 x \sin x dx$;

e) $\int \frac{\ln(x+2)}{x+2} dx$, ($x > -2$);

f) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$;

g) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$;

h) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+7} dx$;

i) $\int \frac{\cos x}{2\sin x+3} dx$;

j) $\int 2x(x^2+1)^{2002} dx$;

k) $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx$;

l) $\int \frac{x}{1+x^4} dx$;

m) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$, $x \in (-1, 1)$;

n) $\int e^{\sin x} \cos x dx$;

o) $\int (x+4)e^{x^2+8x-7} dx$;

p) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$;

q) $\int \frac{\cos x}{a^2+\sin^2 x} dx$, $a \neq 0$;

r) $\int \frac{-\sin x}{2\cos x+3} dx$.

Formula schimbării de variabilă pentru integrale definite rezultă din următoarea teoremă:

Teoremă

Dacă $\varphi: [a, b] \rightarrow I$ este o funcție derivabilă cu derivata φ' continuă pe $[a, b]$ și $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe intervalul $[\varphi(a), \varphi(b)]$, atunci:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

Demonstrație

Într-adevăr, dacă $\int f(x) dx = F(x)$, atunci:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = F(x) \Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a) = \\ = (F \circ \varphi)(t) \Big|_a^b = \int_a^b F(\varphi(t)) \times \varphi'(t) dt .$$

Comentariu

Se observă că integrala din membrul drept se obține din cea din membrul stâng făcând înlocuirile: $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$.

EXEMPLE

1. Calculăm: $\int_0^1 (5x + 4)^{2007} dx$.

Facem schimbarea de variabilă $5x + 4 = t \Rightarrow x = \frac{t-4}{5}$; $dx = \frac{1}{5} dt$. Obținem:

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{t-4}{5} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq t-4 \leq 5 \stackrel{(+4)}{\Leftrightarrow} 4 \leq t \leq 9 .$$

Așadar, $\int_0^1 (5x + 4)^{2007} dx = \int_4^9 \frac{1}{5} t^{2007} dt = \frac{1}{5} \times \frac{t^{2008}}{2008} \Big|_4^9 = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2008} (9^{2008} - 4^{2008})$.

2. Calculăm: $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

Notăm $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2$; $dx = 2t dt$; $1 \leq x \leq 4 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x} \leq 2 \Rightarrow 1 \leq t \leq 2$.

Deci, integrala este: $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{e^t}{t} \times 2t dt = 2 \int_1^2 e^t dt = 2 \times e^t \Big|_1^2 = 2(e^2 - e)$.

Temă

Calculați:

a) $\int_{-2}^2 x\sqrt{x^2 - 4} dx$;

b) $\int_0^2 x^2\sqrt{1 + x^3} dx$;

c) $\int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2} dx$;

d) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$;

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \times \sin x dx$;

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$;

g) $\int_{-1}^1 y^2 e^{y^3+1} dy$;

h) $\int_0^{\frac{3}{\sqrt{2}}} \frac{1}{9 + 2t^2} dt$;

i) $\int_0^a \frac{1}{a^2 + b^2 z^2} dz$;

j) $\int_{\frac{\pi}{4}}^0 \operatorname{tg} x dx$;

k) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^6 + 1} dx$;

l) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx$;

m) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx$;

n) $\int_{-1}^0 \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}} dx$;

o) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{3 \cos x + 4} dx$.

3.3. Calculul integralelor de forma $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, grad $Q \leq 4$,

prin metoda descompunerii în fracții simple

Reamintim că o funcție $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (I interval $\subset \mathbb{R}$) se numește **rațională** dacă este de forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$, $\forall x \in I$ (unde P și Q sunt polinoame cu coeficienți reali).

Definiție

O funcție rațională f se numește **simplică** dacă este de una dintre formele:

$$\frac{A}{(x-\alpha)^n} \text{ sau } \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}, \text{ unde } n \in \mathbb{N}, \alpha, a, b, c, A, B \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ și } b^2 - 4ac < 0.$$

Acceptăm fără demonstrație faptul că orice funcție rațională se scrie ca o sumă finită de funcții raționale simple.

Teoremă

Descompunerea funcțiilor raționale în funcții raționale simple

Fie $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție rațională $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, unde P și Q sunt polinoame prime între ele. Presupunem că descompunerea lui Q în factori primi are forma:

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \times \dots \times (x-a_q)^{\alpha_q} \times (x^2 + M_1x + N_1)^{\beta_1} \times \dots \times (x^2 + M_r x + N_r)^{\beta_r}.$$

Atunci f se descompune, în mod unic, astfel:

$$f(x) = L(x) + \sum_{n=1}^q \left[\frac{A_1^n}{(x-a_n)^{\alpha_n}} + \frac{A_2^n}{(x-a_n)^{\alpha_n-1}} + \dots + \frac{A_n^n}{x-a_n} \right] + \sum_{m=1}^r \left[\frac{B_1^m x + C_1^m}{(x^2 + M_m x + N_m)^{\beta_m}} + \frac{B_2^m x + C_2^m}{(x^2 + M_m x + N_m)^{\beta_m-1}} + \dots + \frac{B_m^m x + C_m^m}{x^2 + M_m x + N_m} \right],$$

unde L este un polinom cu coeficienți reali, iar $a_m, M_m, N_m, A_i^n, \forall i = \overline{1, n}$,

$B_j^m, C_j^m, \forall j = \overline{1, m}$, sunt constante reale și $M_m^2 - 4N_m < 0$.

Observații

Metoda coeficienților nedeterminați:

Se face împărțirea cu rest a lui P la Q . Vom avea: $P = L \times Q + R$,

unde R este un polinom de grad strict mai mic decât gradul lui Q și deci:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

i) Se scrie formula de descompunere ca în enunțul teoremei în care coeficienții A_i^n , $\forall i = \overline{1, n}$, B_j^m , C_j^m , $\forall j = \overline{1, m}$, sunt nedeterminați.

ii) Se aduce la același numitor în membrul drept și se pune condiția ca numărătorul fracției care rezultă în membrul drept să coincidă cu numărătorul fracției din membrul stâng, de fapt aceasta revine la a scrie că două polinoame coincid.

iii) Se obține un sistem linear în care necunoscutele sunt coeficienții căutați A_i^n , $\forall i = \overline{1, n}$, B_j^m , C_j^m , $\forall j = \overline{1, m}$.

Calculul primitivelor unei funcții se reduce la calculul primitivelor funcțiilor raționale simple. Vom da metode de calcul al primitivelor funcțiilor raționale analizând cazuri particulare.

EXEMPLUL 1

a) Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x-\alpha}$, $\alpha \neq 0$, $I \subset (-\infty, \alpha)$ sau $I \subset (\alpha, +\infty)$, avem

$$\int \frac{1}{x-\alpha} dx = \int \frac{(x-\alpha)'}{x-\alpha} dx = \ln |x-\alpha| + \mathcal{C}.$$

b) Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(x-\alpha)^2}$, $\alpha \neq 0$, $I \subset (-\infty, \alpha)$ sau $I \subset (\alpha, +\infty)$, avem

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^2} dx = \int (x-\alpha)^{-2} dx = \int (x-\alpha)^{-2} (x-\alpha)' dx = \frac{(x-\alpha)^{-2+1}}{-2+1} + \mathcal{C} = -\frac{1}{x-\alpha} + \mathcal{C}.$$

Efectuați în clasă

1. Fie $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(x-1)^n}$, $n \geq 2$.

Procedând ca în exemplul 1, b), arătați că: $\int \frac{1}{(x-1)^n} dx = -\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{(x-1)^{n-1}} + \mathcal{C}$.

2. Calculați $\int \frac{5}{(x+4)^3} dx, x < -4$.

EXEMPLUL 2

a) Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, $I \subset \mathbb{R}, a \neq 0$, avem $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + \mathcal{C}$.

b) Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2+a^2}$, $I \subset \mathbb{R}, a \neq 0$, avem $\int \frac{x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+a^2} dx =$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+a^2)'}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2) + \mathcal{C}$.

c) Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{(x^2 + a^2)^2}, I \subset \mathbb{R}, a \neq 0$, avem $\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2 + a^2)^2} dx =$
 $= \frac{1}{2} \int (x^2 + a^2)' (x^2 + a^2)^{-2} dx = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + a^2)^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2 + a^2} + C.$

d) Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)^2}, I \subset \mathbb{R}, a \neq 0$, avem $\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^2} dx =$

$= \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 + a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{a^2} \left[\int \frac{x^2 + a^2}{(x^2 + a^2)^2} dx - \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx \right] = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx -$
 $- \frac{1}{a^2} \int \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} \times x dx = \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right) - \frac{1}{2a^2} \int [(x^2 + a^2)' \times (x^2 + a^2)^{-2}] \times x dx =$

$= \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{2a^2} \int \left[\frac{(x^2 + a^2)^{-2+1}}{-2+1} \right]' \times x dx =$

$= \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{2a^2} \left[-(x^2 + a^2)^{-1} \times x - \int \frac{(x^2 + a^2)^{-1}}{-1} \times x' dx \right] =$
 $= \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2} \times \frac{x}{x^2 + a^2} - \frac{1}{2a^2} \times \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2} \times \frac{x}{x^2 + a^2} + C.$

Efectuați în clasă

Calculați:

a) $\int \frac{1}{x^2 + 9} dx;$ b) $\int \frac{x}{x^2 + 9} dx;$ c) $\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx;$ d) $\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx.$

EXEMPLUL 3

a) Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{Ax + B}{x^2 + a^2}, I \subset \mathbb{R}, a, A, B \in \mathbb{R}^*,$ avem

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{Ax}{x^2 + a^2} dx + \int \frac{B}{x^2 + a^2} dx = A \int \frac{x}{x^2 + a^2} dx + B \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx;$$

integralele obținute se calculează ca în exemplul 2, punctele a) și b).

b) Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{Ax + B}{(x^2 + a^2)^2}, I \subset \mathbb{R}, a, A, B \in \mathbb{R}^*,$ avem:

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + a^2)^2} dx = A \int \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} dx + B \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx,$$

iar aceste integrale se află ca în exemplul 2, punctele c) și d).

c) Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2}, I \subset \mathbb{R}, a \neq 0$, avem

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx &= \int \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} \times x dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2 + a^2)^2} \times x dx = \\ &= \frac{1}{2} \int (x^2 + a^2)' (x^2 + a^2)^{-2} \times x dx = \frac{1}{2} \int \left[\frac{(x^2 + a^2)^{-1}}{-1} \right]' \times x dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x^2 + a^2} \times x - \int \frac{-1}{x^2 + a^2} dx \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right) + C. \end{aligned}$$

Efectuați în clasă

Calculați:

a) $\int \frac{2x+3}{x^2+4} dx$; b) $\int \frac{2x+3}{(x^2+4)^2} dx$; c) $\int \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx$.

EXEMPLUL 4

a) Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}, I \subset \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$ interval, $a \neq 0$, avem

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

b) Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 - a^2}, I \subset \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$ interval, $a \neq 0$, avem

$$\int \frac{x}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - a^2| + C.$$

c) Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{(x^2 - a^2)^2}, I \subset \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$ interval, $a \neq 0$, avem

$$\int \frac{x}{(x^2 - a^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2 - a^2} + C; \text{ se procedează analog exemplului 2, punctul c).}$$

d) Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(x^2 - a^2)^2}, I \subset \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}$ interval, $a \neq 0$, avem

$$\int \frac{1}{(x^2 - a^2)^2} dx = -\frac{1}{2a^2} \left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + \frac{1}{x^2 - a^2} \right) + C.$$

Se procedează analog exemplului 2, punctul d).

Efectuați în clasă

Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$, calculați:

a) $\int \frac{1}{x^2 - 9} dx$; b) $\int \frac{x}{x^2 - 9} dx$; c) $\int \frac{x}{(x^2 - 9)^2} dx$; d) $\int \frac{1}{(x^2 - 9)^2} dx$.

EXEMPLUL 5

- a) Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}, I \subset \mathbb{R}$ (numitorul are discriminantul negativ), avem

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx = \int \frac{1}{x^2 + 4x + 4 + 1} dx = \int \frac{1}{(x+2)^2 + 1^2} dx = \int \frac{(x+2)'}{(x+2)^2 + 1^2} dx =$$

scriem numitorul ca sumă de pătrate

$$= \operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

- b) Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(x^2 + 4x + 5)^2}, I \subset \mathbb{R}$, avem

$$\int \frac{1}{(x^2 + 4x + 5)^2} dx = \int \frac{1}{[(x+2)^2 + 1^2]^2} dx; \text{ facem schimbarea de variabilă } x+2 = t;$$

calculăm $\int \frac{1}{(t^2 + 1)^2} dt$, apoi ținem cont de notația făcută.

Efectuați în clasă

Calculați:

- a) $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx$; b) $\int \frac{1}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx$.

EXEMPLUL 6

- a) Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x - 5} dx, I \subset (-\infty, -5)$ sau $I \subset (1, +\infty)$ deoarece numitorul

are discriminantul pozitiv; putem scrie $x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$.

Fracția se poate descompune în fracții simple:

$$\frac{1}{x^2 + 4x - 5} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5}, \text{ iar coeficienții } A, B \text{ îi aflăm prin identificare:}$$

$$1 = A(x+5) + B(x-1) \Leftrightarrow 1 = Ax + 5A + Bx - B \Leftrightarrow 1 = (A+B)x + 5A - B. \quad (*)$$

$$\text{Obținem sistemul } \begin{cases} A+B=0 \\ 5A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{6} \\ B=-\frac{1}{6} \end{cases}.$$

Altă metodă de obținere a coeficienților A și B :

$$\text{în relația (*) dăm lui } x \text{ valoarea } 1 \text{ și rezultă } 1 = A \times 6 \Rightarrow A = \frac{1}{6},$$

$$\text{apoi valoarea } -5 \text{ și rezultă } 1 = B \times (-6) \Rightarrow B = -\frac{1}{6}.$$

Deci $\frac{1}{x^2 + 4x - 5} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{x+5}$; prin urmare

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x - 5} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+5} dx = \frac{1}{6} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x+5| + C.$$

b) Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(x^2 + 4x - 5)^2} dx, I \subset (-\infty, -5)$ sau $I \subset (1, +\infty)$,

fracția se poate descompune în fracții simple astfel:

$$\frac{1}{(x^2 + 4x - 5)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{(x+5)^2}, \text{ de unde } 1 = A(x+5)^2 + B(x-1)^2 (**)$$

Din relația (**) se găsește $A = \frac{1}{6}$ și $B = -\frac{1}{6}$, prin urmare

$$\int \frac{1}{(x^2 + 4x - 5)^2} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{(x-1)^2} dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{(x+5)^2} dx = \frac{1}{6} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \frac{1}{x+5} + C.$$

c) Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+1)(x+3)}$ (I interval inclus în domeniul de existență),

numitorul se poate scrie ca produsul unor expresii de gradul întâi, atunci fracția se descompune în suma a trei fracții simple:

$$\frac{1}{(x-2)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}, \text{ iar coeficienții } A, B, C \text{ se află din relația } 1 = A(x+1)(x+3) + B(x-2)(x+3) + C(x-2)(x+1)$$

prin identificare sau dând valori convenabile lui x .

d) Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(x-2)(x^2+1)}$ (I interval inclus în domeniul de existență),

numitorul se poate scrie ca produsul unor expresii de gradul al doilea (ireductibile) cu expresii de gradul întâi și atunci fracția se descompune astfel:

$$\frac{1}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

iar A, B, C se află din relația $1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1)$.

Efectuați în clasă

Calculați:

a) $\int \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$; b) $\int \frac{1}{(x^2 + 3x + 2)^2} dx$; c) $\int \frac{1}{x(x-2)(x-3)(x-4)} dx$; d) $\int \frac{1}{x^3 + 4x} dx$.

Observație

În toate exemplele anterioare gradul numărătorului a fost mai mic decât gradul numitorului.

EXEMPLUL 7

Dacă funcția rațională $f: I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, I interval inclus în domeniul de definiție, are gradul numărătorului mai mare sau egal cu gradul numitorului, procedăm astfel:

- conform teoremei împărțirii cu rest, există polinoamele unice $C(X)$ și $R(X)$, astfel încât $P(X) = C(X) \times Q(X) + R(X)$, grad $R <$ grad Q ;
- scriem $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$; rezultă: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$.

Exercițiu rezolvat

Calculați integrala nedefinită: $\int \frac{x^5 - 4x^3 + 1}{x^3 + 2x^2} dx, x > 0$.

Soluție

$$\begin{aligned} \text{Avem } \int \left(x^2 - 2x + \frac{1}{x^3 + 2x^2} \right) dx &= \frac{x^3}{3} - x^2 + \int \frac{1}{x^2(x+2)} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + \int \left[-\frac{1}{4x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4(x+2)} \right] dx = \dots \end{aligned}$$

Efectuați în clasă

Calculați: $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx, x \in (2, +\infty)$.

Indicații:

♦ Aflați câtul și restul împărțirii lui $x^5 + x^4 - 8$ la $x^3 - 4x$.

♦ Scrieți $\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}$.

♦ Descompuneți $x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$ și scrieți fracția dată ca sumă de fracții simple

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

Comentariu

Pentru calculul integralelor de forma $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, grad $Q \leq 4$, vă recomandăm să aflați mai întâi primitivele funcției raționale $\frac{P(x)}{Q(x)}$, grad $Q \leq 4$, prin descompunerea în fracții simple, apoi aplicați formula Leibniz-Newton.

Efectuați în clasă

Calculați: $\int_2^3 \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx, x \in (2, +\infty)$.

Temă

1. Calculați primitivele următoarelor funcții raționale:

a) $\int \frac{3}{x+2} dx, x \neq -2;$

b) $\int \frac{1}{(x+2)^3} dx, x \neq -2;$

c) $\int \frac{2}{x^2 + 25} dx, x \in \mathbb{R};$

d) $\int \frac{2x}{x^2 + 25} dx, x \in \mathbb{R};$

e) $\int \frac{x}{(x^2 + 25)^2} dx, x \in \mathbb{R};$

f) $\int \frac{1}{(x^2 + 25)^2} dx, x \in \mathbb{R};$

- g) $\int \frac{3x-2}{x^2+25} dx, x \in \mathbb{R};$ h) $\int \frac{3x-2}{(x^2+25)^2} dx, x \in \mathbb{R};$ i) $\int \frac{x^2}{(x^2+25)^2} dx, x \in \mathbb{R};$
- j) $\int \frac{2}{x^2-25} dx, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 5\};$ k) $\int \frac{x}{x^2-25} dx, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 5\};$
- l) $\int \frac{x}{(x^2-25)^2} dx, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 5\};$ m) $\int \frac{1}{(x^2-25)^2} dx, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 5\};$
- n) $\int \frac{x^2}{x^2+25} dx, x \in \mathbb{R};$ o) $\int \frac{x^3}{x^2+25} dx, x \in \mathbb{R};$
- p) $\int \frac{2x^4-x^2}{x^2+25} dx, x \in \mathbb{R};$ q) $\int \frac{1}{(x-2)(x+3)} dx, x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\};$
- r) $\int \frac{2x}{x^2+4x} dx, x \in \mathbb{R} \setminus \{-4, 0\};$ s) $\int \frac{2x+1}{x^2+x-2} dx, x \in \mathbb{R};$
- t) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx, x \in \mathbb{R};$ u) $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx, x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\};$
- x) $\int \frac{x^3}{x^2+2x} dx, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\};$ y) $\int \frac{2}{x^3+4x} dx, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

2. Să se calculeze derivatele funcțiilor $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ (D fiind domeniul maxim de definiție):

- a) $f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5;$ b) $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 2);$
- c) $f(x) = \sqrt{x} - \ln x - \frac{1}{\sqrt{x}};$ d) $f(x) = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9}x^3.$

3. Să se deducă formula sumei $S = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$ din egalitatea:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, (x \neq 1).$$

4. Calculați:

- a) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx;$ b) $\int (8x^7 - 7x^6 + 5x^4 - 2) dx;$ c) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx, x > 0;$
- d) $\int x^2 e^x \sin x dx;$ e) $\int x \operatorname{arctg} x dx, x \in \mathbb{R};$ f) $\int x \sin^2 x dx, x \in \mathbb{R};$
- g) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx, x \in (0, 1);$ h) $\int x\sqrt{1-x^2} dx, x \in (-1, 1);$ i) $\int \frac{x^6}{x^3-1} dx, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$

5. Stabiliți formule de recurență pentru următoarele integrale ($n \in \mathbb{N}, n > 2$):

- a) $I_n = \int (\ln x)^n dx, x > 0;$ b) $I_n = \int x^n \sin x dx, x \in \mathbb{R};$
- c) $I_n = \int x^n e^x dx, x \in \mathbb{R};$ d) $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} dx, x \in \mathbb{R}.$

6. Să se determine constantele reale α și β astfel încât funcția $F(x) = e^x(\alpha \cos x + \beta \sin x)$ să fie o primitivă a funcției $f(x) = e^x \cos x$.

7. Să se calculeze:

a) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 25}} dx, x > 5$; b) $\int (2x \ln x) dx, x > 0$; c) $\int \frac{x^4}{x^3 - 4x} dx, x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$;
 d) $\int \frac{-x + 3}{x^2 + 4} dx$; e) $\int \arcsin x dx, x \in [-1; 1]$; f) $\int \frac{x^5}{x(x+1)^2} dx, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

8. Să se calculeze următoarele integrale:

a) $\int \frac{1}{x} \sqrt{\ln x} dx, x \geq 1$; b) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx, x \in (-1, 1)$; c) $\int \frac{dx}{x \ln x}, x > e$;
 d) $\int \frac{2x+3}{2x+1} dx, x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$; e) $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; f) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx, x \in \mathbb{R}$;
 g) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, x > 0$; h) $\int \frac{1}{x^2 \ln^3 x} dx, x \in (0, +\infty)$; i) $\int \frac{1}{1+x^4} dx, x \in \mathbb{R}$;
 j) $\int \frac{x^4}{x^3-1} dx, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$; k) $\int \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2} dx, x \in \mathbb{R}$; l) $\int \frac{e^{3x}}{e^x+1} dx, x \in \mathbb{R}$.

9. Stabiliți o relație de recurență pentru a calcula $I_n = \int x^n e^{-x} dx$, apoi calculați I_3 .

Teste pentru verificarea cunoștințelor

A		B	
Calculați:		Calculați	
1. $\int (x^2 + 1)^2 dx$	(1p)	1. $\int (x^2 - 1)^2 dx$	(1p)
2. $\int (2x - 3)^{2002} dx$	(1p)	2. $\int (3x - 2)^{2002} dx$	(1p)
3. $\int x^2 (x^3 + 1)^5 dx$	(1p)	3. $\int (x^3 - 1)^4 x^2 dx$	(1p)
4. $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx, \cos x \neq 0$	(1p)	4. $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx, \sin x \neq 0$	(1p)
5. $\int \frac{3x}{x^2 + 4} dx, x \in \mathbb{R}$	(1p)	5. $\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx, x \in \mathbb{R}$	(1p)
6. $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 10} dx, x \in \mathbb{R}$	(1p)	6. $\int \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx, x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$	(1p)
7. $\int_{-1}^0 \frac{2}{x^2 - 4x + 3} dx$	(1p)	7. $\int_0^1 \frac{2}{x^2 - 4x + 5} dx$	(1p)
8. $\int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{x^3}{x^2 - 1} dx$	(2p)	8. $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$	(2p)

Notă: Timpul de lucru efectiv este de 50 de minute (pentru fiecare variantă). Se acordă 1 punct din oficiu.

APLICAȚII ALE INTEGRALEI DEFINITE

Capitolul 4

Calculul integral este util în rezolvarea unor probleme de geometrie (cum ar fi: aflarea ariei unei suprafețe plane, a volumului unui corp de rotație, aria laterală a unui corp de rotație, lungimea unei curbe etc.), dar și în fizică.

1. Subgrafic, definiție. Interpretarea geometrică a integralei definite a unei funcții pozitive

Definiție

Dacă $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție continuă pozitivă, vom numi **subgraficul** lui f mulțimea din planul xOy delimitată de: axa Ox , graficul funcției și dreptele (paralele cu Oy) $x = a$ și $x = b$ (figura 1).

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

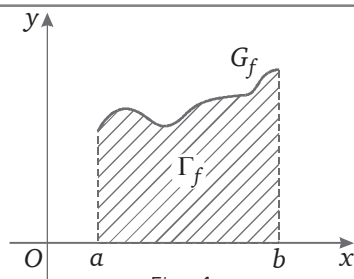


Fig. 1

Ne punem întrebarea: cum se poate calcula aria suprafeței Γ_f ?

Observăm că această suprafață nu are o formă cunoscută (așa cum se întâmplă adesea în practică); aria acesteia s-ar putea aproxima prin suma ariilor unor dreptunghiuri.

Într-adevăr, să împărțim intervalul $[a, b]$ în n intervale parțiale prin punctele de diviziune

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$$

și să alegem în fiecare interval parțial $[x_{i-1}, x_i]$ un punct intermediar ξ_i .

Produsul $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ reprezintă aria dreptunghiului cu baza pe intervalul $[x_{i-1}, x_i]$ și înălțime $f(\xi_i)$, iar suma

Riemann $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ reprezintă aria poligonului hașurat în figura 2.

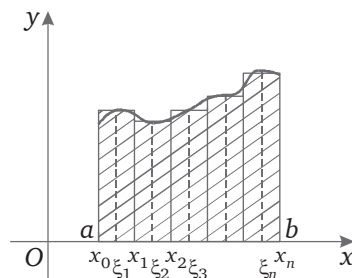


Fig. 2

Cu cât numărul n al dreptunghiurilor este mai mare, cu atât poligonul diferă mai puțin de subgraficul lui f , deci este natural să luăm ca arie a subgraficului Γ_f numărul $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Fie $f: [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ o funcție continuă și pozitivă.

Atunci mulțimea $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ are arie și aria sa este egală cu integrala lui f pe intervalul $[a, b]$:

$$\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b f(x) dx.$$

EXEMPLE

 1. Fie $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

Pentru această funcție subgraficul este mulțimea

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

(vezi porțiunea hașurată din figura 3).

Aria acestei suprafețe este:

$$\text{aria}(\Gamma_f) = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}.$$

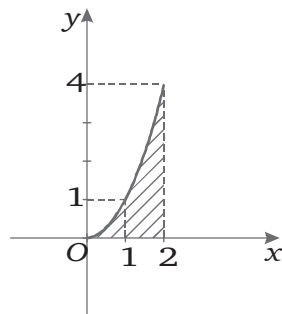


Fig. 3

Comentariu

Nicio formulă geometrică nu ne-ar fi fost utilă pentru a calcula cu exactitate aria acestei suprafețe.

 2. Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} (a > 0), f(x) = \alpha x + \beta (\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+)$

Observăm că această funcție este pozitivă (figura 4), deci:

$$\begin{aligned} \text{aria}(\Gamma_f) &= \int_a^b (\alpha x + \beta) dx = \int_a^b \alpha x dx + \int_a^b \beta dx = \\ &= \alpha \int_a^b x dx + \beta \int_a^b 1 dx = \alpha \times \frac{x^2}{2} \Big|_a^b + \beta \times x \Big|_a^b = \\ &= \alpha \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) + \beta(b-a) = \\ &= \alpha \frac{(b-a)(b+a)}{2} + \beta(b-a) = \frac{(b-a)(\alpha a + \alpha b + 2\beta)}{2}. \end{aligned}$$

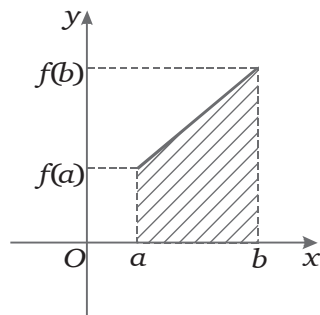


Fig. 4

Comentariu

 În acest caz, subgraficul funcției date este un trapez dreptunghic de înălțime $b - a$ și baze $f(a)$, respectiv $f(b)$.

Cu formula ariei trapezului avem:

$$\text{aria}(\Gamma_f) = \frac{(b-a)[f(b) + f(a)]}{2} = \frac{(b-a)(\alpha b + \beta + \alpha a + \beta)}{2} = \frac{(b-a)(\alpha a + \alpha b + 2\beta)}{2}$$

adică același rezultat ca atunci când am aplicat calculul integral.

Efectuați în clasă

Reprezentați grafic, apoi aflați aria subgraficului următoarelor funcții:

a) $f: [1, 3] \rightarrow [0, +\infty), f(x) = 2x + 1$;

b) $f: [0, 9] \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x}$;

c) $f: [-2, 0] \rightarrow [0, 4], f(x) = x^2$;

d) $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{2}$.

2. Aria unei suprafețe plane (mărginită de curbe)

Ca o consecință importantă a celor prezentate anterior, avem următoarea propoziție.

Propoziție

Dacă $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții continue astfel încât $f(x) \leq g(x)$, oricare ar fi $x \in [a, b]$, atunci mulțimea cuprinsă între graficele funcțiilor f, g și dreptele (paralele cu Oy) $x = a, x = b$ (figura 5),

$\Gamma_{f,g} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ are arie și

$$\text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$$

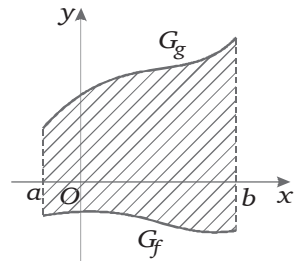


Fig. 5

Observații

1. Dacă $g(x) \geq f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in [a, b]$ (figura 6), atunci $\text{aria}(\Gamma_{f,g}) = \text{aria}(\Gamma_g) - \text{aria}(\Gamma_f)$.

2. Dacă funcția f este negativă, $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$, atunci graficul său este situat sub axa Ox .

Graficul funcției opuse, $-f$, este situat deasupra axei Ox ; graficele celor două funcții sunt simetrice față de axa Ox , deci ariile subgraficelor lor sunt egale.

Deci $\text{aria}(\Gamma_f) = \int_a^b |f(x)| dx$.

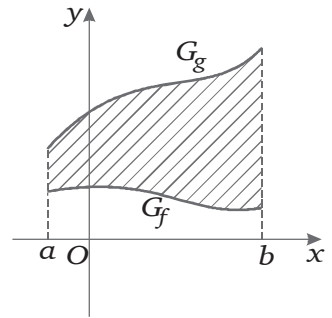


Fig. 6

EXEMPLE

1. Fie $f(x) = -\sqrt{x}, g(x) = \sqrt{x}, x \in [0, 4]$.

$\Gamma_{f,g} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4, -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}\}$ (figura 7).

$$\begin{aligned} \text{aria}(\Gamma_{f,g}) &= \int_0^4 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})] dx = \int_0^4 2\sqrt{x} dx = \\ &= 2 \int_0^4 \sqrt{x} dx = 2 \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} dx = 2 \left. \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^4 = \frac{4}{3} x\sqrt{x} \Big|_0^4 = \\ &= \frac{4}{3} (4\sqrt{4} - 0\sqrt{0}) = \frac{4}{3} \times 8 = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

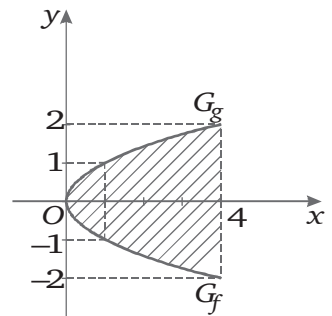


Fig. 7

Comentariu

Putem observa că $-f = g$, deci că $\text{aria}(\Gamma_f) = \text{aria}(\Gamma_g)$ și avem

$$\text{aria}(\Gamma_{f,g}) = 2 \text{aria}(\Gamma_g) = 2 \int_0^4 g(x) dx.$$

2. Calculăm aria mulțimii cuprinsă între graficul funcției $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ și dreapta de ecuație $y = 2x$.

Considerăm funcția $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x$.

Aflăm punctele de intersecție ale graficelor celor două funcții.

$x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ și $x_2 = 2$,
deci punctele de intersecție au coordonatele $(0, 0)$ și $(2, 4)$
(vezi figura 8). Atunci

$$\begin{aligned} \text{aria}(\Gamma_{f,g}) &= \int_0^2 (2x - x^2) dx = \int_0^2 2x dx - \int_0^2 x^2 dx = \\ &= x^2 \Big|_0^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = (2^2 - 0^2) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

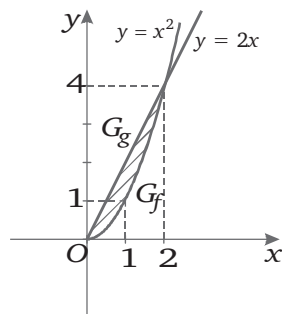


Fig. 8

3. Să calculăm aria cercului cu centrul în origine și de rază r .

Ecuția acestui cerc este $x^2 + y^2 = r^2$, de unde

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}, x \in [-r, r].$$

Semicercul superior are ecuația $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, iar

aria lui este $\mathcal{A}_1 = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$, care se mai poate

$$\text{scrie } \mathcal{A}_1 = \int_0^r 2\sqrt{r^2 - x^2} dx = 2 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Pentru calculul primitivei $I = \int \sqrt{r^2 - x^2} dx$ procedăm astfel:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{r^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = \int \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = r^2 \int \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx - \int \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} x dx = \\ &= r^2 \arcsin \frac{x}{r} + \int \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \times x dx = r^2 \arcsin \frac{x}{r} + \int (\sqrt{r^2 - x^2})' \times x dx = \\ &= r^2 \arcsin \frac{x}{r} + x \times \sqrt{r^2 - x^2} - \int \sqrt{r^2 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Deci $2I = r^2 \arcsin \frac{x}{r} + x \times \sqrt{r^2 - x^2}$, de unde $I = \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} + \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + C$.

Prin urmare,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= 2 \left(\frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^r + \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} \Big|_0^r \right) = r^2 \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^r + x \sqrt{r^2 - x^2} \Big|_0^r = \\ &= r^2 \arcsin 1 - r^2 \arcsin 0 + r \sqrt{r^2 - r^2} - 0 \sqrt{r^2 - 0^2} = r^2 \frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^2}{2} \text{ (aria unui semicerc),} \end{aligned}$$

deci $\mathcal{A}_{\text{cerc}} = \pi r^2$.

Comentariu

Am verificat astfel formula ariei cercului.

Efectuați în clasă

Aflați aria suprafeței mărginite de curbele de ecuații $y = x^2 + 1$, $y = 3 - x$, $x \in [-2, 1]$.

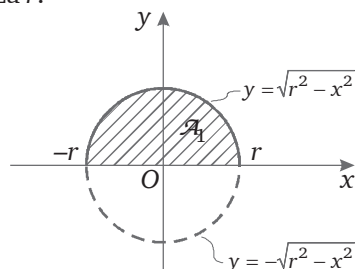


Fig. 9

Temă

1. Calculați aria subgraficului pentru fiecare dintre funcțiile următoare:

a) $f: \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{1 + 2\cos x};$

b) $f: [0; e] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \times \ln(x + 1);$

c) $f: [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2x - x^2};$

d) $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \times \arctg(x^2 + 1);$

e) $f: [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos^2 x - \cos x + 1;$

f) $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \times \arcsin x^2.$

2. Să se calculeze aria mulțimii $\Gamma_{f,g}$:

a) $f(x) = x^3, g(x) = x^2, x \in [0, 2];$

b) $f(x) = \frac{x^2}{2}, g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x \in [-1, 1];$

c) $f(x) = |x|, g(x) = 1, x \in [-1, 1];$

d) $f(x) = e^{-x}, g(x) = e^x, x \in [0, 1].$

3. Aflați aria elipsei de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

4. Să se găsească aria suprafeței plane limitate de curbele $y = x^2 + 2$ și $y = 3x.$

5. Calculați ariile suprafețelor delimitate de curbele specificate:

a) $f(x) = \frac{1}{x}, x = 1, x = 2;$

b) $f(x) = 4 - x^2$ și axa $Ox;$

c) $f(x) = x^3, y = 2x, y = x;$

d) $y^2 = 2x, x = 2;$

e) $y^2 = x, y = x^2;$

f) $xy = 4,$ axa $Ox, x = 2, x = 4;$

g) $x^2 + y^2 = 16, y^2 = 6x;$

h) $y = e^x,$ axa $Ox,$ axa $Oy, x = 1.$

3. Volumul unui corp de rotație

Volumul unor corpuri geometrice simple (prisma, piramida etc.) vă este cunoscut din clasele gimnaziale. Volumul unui poliedru se poate calcula descompunând corpul în piramide și însumând volumele acestora.

Volumul cilindrului se poate calcula ca limită a șirului volumelor unor prisme care au ca baze poligoane regulate înscrise în cercurile baze ale cilindrului.

Dacă R este raza bazei, iar h înălțimea cilindrului, atunci volumul este:

$$V_{\text{cil.}} = \pi R^2 h.$$

Urmând un procedeu analog, de aproximare cu poliedre sau cilindri, se poate defini volumul altor corpuri.

Reamintim că un domeniu plan care se rotește în jurul unei drepte d situate în planul domeniului determină un **corp de rotație**. Dreapta d se numește **axă de rotație**.

EXEMPLE

Prin rotația unui *dreptunghi* în jurul unei laturi obținem un *cilindru*; prin rotația unui *triunghi dreptunghic* în jurul unei catete obținem un *con*; prin rotația unui *disc* în jurul unui diametru al său obținem o *bilă* etc.

Vom defini volumul corpurilor generate de rotația unui subgrafic în jurul axei Ox .

Definiție

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție continuă pozitivă. Corpul geometric C_f obținut prin rotirea subgraficului Γ_f în jurul axei Ox (vezi figura 10) se numește **corpul de rotație** determinat de funcția f .

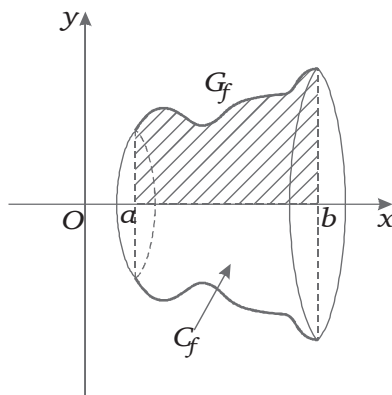


Fig. 10

Să împărțim intervalul $[a, b]$ în n intervale parțiale prin punctele de diviziune.

$$a = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n = b,$$

iar în fiecare interval parțial $[x_{i-1}, x_i]$ alegem un punct intermediar ξ_i .

Rotind dreptunghiul cu baza pe intervalul $[x_{i-1}, x_i]$ și de înălțime $f(\xi_i)$ în jurul axei Ox obținem un cilindru de rază $f(\xi_i)$ și înălțime $x_i - x_{i-1}$.

Volumul său este $\pi[f(\xi_i)]^2(x_i - x_{i-1})$, iar volumul \mathcal{V}_n al corpului format din cei n cilindri este egal cu suma volumelor acestora:

$$\mathcal{V}_n = \sum_{i=1}^n \pi f^2(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) \stackrel{\text{not.}}{=} \sum_{i=1}^n h(\xi_i) (x_i - x_{i-1}).$$

Se observă că \mathcal{V}_n este o sumă integrală a funcției h , iar limita șirului $(\mathcal{V}_n)_n$ este egală cu integrala funcției h :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{V}_n = \int_a^b h(x) dx = \int_a^b \pi f^2(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

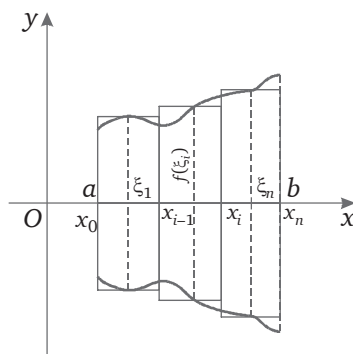


Fig. 11

Teoremă

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție continuă pozitivă. Atunci corpul de rotație determinat de f are volum și

$$\text{vol}(C_f) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

EXEMPLE

1 . Fie $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

Volumul corpului de rotație C_f (vezi figura 12) este

$$\begin{aligned} \text{vol}(C_f) &= \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \\ &= \pi \left(\frac{2^5}{5} - \frac{0^5}{5} \right) = \frac{32\pi}{5}. \end{aligned}$$

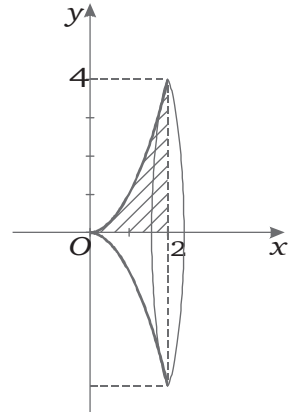


Fig. 12

2 . Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} (a > 0), f(x) = \alpha x + \beta (\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+)$.

Această funcție este pozitivă și corpul de rotație C_f (vezi figura 13) are volumul:

$$\begin{aligned} \text{vol}(C_f) &= \pi \int_a^b (\alpha x + \beta)^2 dx = \\ &= \pi \int_a^b (\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2) dx = \pi \left(\int_a^b \alpha^2 x^2 dx + \int_a^b 2\alpha\beta x dx + \int_a^b \beta^2 dx \right) = \\ &= \pi \left(\alpha^2 \int_a^b x^2 dx + 2\alpha\beta \int_a^b x dx + \beta^2 \int_a^b 1 dx \right) = \pi \left(\alpha^2 \frac{x^3}{3} \Big|_a^b + 2\alpha\beta \frac{x^2}{2} \Big|_a^b + \beta^2 x \Big|_a^b \right) = \\ &= \pi \left[\alpha^2 \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) + \alpha\beta(b^2 - a^2) + \beta^2(b - a) \right] = \\ &= \pi \alpha^2 \times \frac{(b - a)(b^2 + ab + a^2)}{3} + \\ &+ \pi \alpha\beta \times (b - a)(b + a) + \pi \beta^2 \times (b - a) = \\ &= \pi(b - a) \left[\alpha^2 \frac{b^2 + ab + a^2}{3} + \alpha\beta(b + a) + \beta^2 \right] = \\ &= \frac{\pi(b - a)}{3} [\alpha^2(b^2 + ab + b^2) + 3\alpha\beta(b + a) + 3\beta^2]. \end{aligned}$$

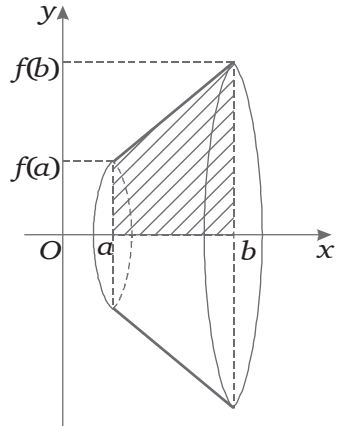


Fig. 13

Comentariu

În acest caz, corpul de rotație este un trunchi de con circular drept având înălțimea $b - a$, raza mică $f(a)$, raza mare $f(b)$.

Aplicând formula $V = \frac{\pi \times h}{3} (R^2 + Rr + r^2)$, obținem:

$$\begin{aligned} \text{vol}(C_f) &= \frac{\pi(b - a)}{3} [(\alpha b + \beta)^2 + (\alpha b + \beta)(\alpha a + \beta) + (\alpha a + \beta)^2] = \\ &= \frac{\pi(b - a)}{3} (\alpha^2 b^2 + 2\alpha b\beta + \beta^2 + \alpha^2 ab + \alpha b\beta + \alpha a\beta + \beta^2 + \alpha^2 a^2 + 2\alpha a\beta + \beta^2) = \\ &= \frac{\pi(b - a)}{3} [\alpha^2(b^2 + ab + a^2) + 3\alpha\beta(b + a) + 3\beta^2], \end{aligned}$$

adică același rezultat obținut aplicând calculul integral.

Efectuați în clasă

Reprezentați grafic apoi aflați volumul corpului de rotație determinat de funcția f în situațiile:

a) $f: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3$. Ce corp geometric se obține prin rotirea subgraficului Γ_f în jurul axei Ox ? Comparați volumul calculat prin integrale cu rezultatul obținut aplicând formula cunoscută.

b) $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$;

c) $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

Comparați volumul lui C_f cu volumul unei semifere de rază 2.

EXEMPLE

1. Să considerăm un con circular drept de rază r și înălțime h . Acesta se obține prin rotirea generatoarei OA în jurul axei Ox (vezi figura 14); ecuația generatoarei OA este

$$y = \frac{r}{h}x \quad (\text{panta ei este } \frac{r}{h}).$$

Deci volumul conului este

$$\begin{aligned} V_{\text{con}} &= \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x \right)^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \times \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \times \frac{h^3}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}. \end{aligned}$$

2. O sferă de rază r se obține prin rotirea unui semicerc în jurul diametrului său. Ecuația semicercului este:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

(obținută din ecuația cercului $x^2 + y^2 = r^2$), $x \in [-r, r]$.

Volumul sferei este

$$\begin{aligned} V_{\text{sferă}} &= \pi \int_{-r}^r \left(\sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \\ &= 2\pi \left(\int_0^r r^2 dx - \int_0^r x^2 dx \right) = \\ &= 2\pi \left(r^2 \times x \Big|_0^r - \frac{x^3}{3} \Big|_0^r \right) = \\ &= 2\pi \left[r^2(3-0) - \left(\frac{r^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) \right] = \\ &= 2\pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

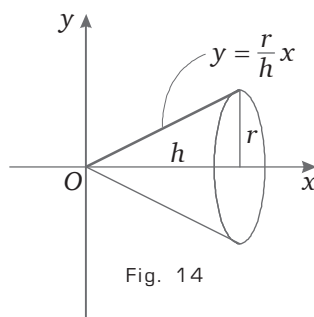


Fig. 14

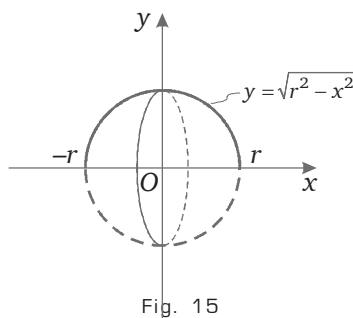


Fig. 15

Temă

1. Calculați volumele corpurilor de rotație determinate de funcțiile f următoare:

a) $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{6x}$ (paraboloid de rotație);

b) $f: [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ (hiperboloid de rotație);

c) $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}_+ (a > 0), f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ (elipsoid de rotație);

d) $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = 2x - x^2$;

e) $f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = x \ln x$;

f) $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = \sin x$;

g) $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = e^x$.

Reprezentați prin desene.

2. Calculați volumele corpurilor formate prin rotația în jurul axei Ox a suprafețelor delimitate de curbele specificate în fiecare caz în parte:

a) $y = 3x^2, y = 2x$;

b) $y = x^3, y = x^2$;

c) $y = \sin x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$;

d) $y = \operatorname{tg} x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4}$;

e) $y = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}, y = 0, x = \frac{1}{2}$;

f) $y = xe^x, y = 0, x = 1$.

Teste pentru verificarea cunoștințelor

A

1. Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x$, axa Ox și dreptele $x = 1, x = 2$. **(3p)**

2. Aflați aria suprafeței delimitată de graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$, axa Oy și dreapta $x = \frac{\pi}{2}$. **(3p)**

3. Calculați volumul corpului de rotație determinat de curba $y = \frac{x^2}{2}$, axa Oy și dreapta $x = 2$. **(3p)**

B

1. Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$, axa Ox și dreapta $x = 2$. **(3p)**

2. Aflați aria suprafeței delimitată de graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$, axa Ox și dreptele $x = 0, x = 2$. **(3p)**

3. Calculați volumul corpului de rotație determinat de $y = \sqrt{6x}$ și dreapta $x = 3$. **(3p)**

Notă: Timpul de lucru efectiv este de 50 de minute (pentru fiecare variantă). Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea a III-a
Pregătire pentru examenul de bacalaureat

1. Teme de sinteză	160
<i>Tema 1:</i> Grupuri	160
<i>Tema 2:</i> Inele și corpuri	166
<i>Tema 3:</i> Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, p$ prim)	168
<i>Tema 4:</i> Primitive	172
<i>Tema 5:</i> Integrala definită	176
<i>Tema 6:</i> Aplicații ale integralei definite	180
2. Teste pregătitoare pentru examenul de bacalaureat	184

1. TEME DE SINTEZĂ

Tema 1 – Grupuri

1. Se consideră legea de compoziție $*$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow x * y$, unde $x * y = \lambda xy + x + y$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Știind că mulțimea $M = [-1, +\infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea „*“, să se determine λ și elementul neutru al legii „*“.
2. Se consideră legea de compoziție $*$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \rightarrow x * y$, unde
$$x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy + 2x + 2y + 2.$$
Să se studieze proprietățile legii considerate.
3. Fie operația $*$: $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $(z_1, z_2) \rightarrow z_1 * z_2 \stackrel{\text{def.}}{=} z_1 + z_2 - z_1 z_2$. Să se determine elementele nesimetrizabile față de legea „*“.
4. Pe mulțimea \mathbb{R} se definește legea de compoziție:
$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y + ax + by,$$
unde $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine a și b astfel încât legea de compoziție „*“ să fie asociativă și comutativă.
5. Se consideră legea de compoziție $*$: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \rightarrow u * v$, unde $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_3)$ și $u \times v = (x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) \stackrel{\text{def.}}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 z_2)$. Să se determine elementul neutru al legii „*“.
6. Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție „*“ prin:
$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} xy - x - y - 2.$$
Arătați că legea „*“ nu admite element neutru.
7. Se consideră legea de compoziție $*$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $(x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - 7x - 7y + 56$. Să se determine elementele simetrizabile în raport cu legea „*“.
8. Pe mulțimea \mathbb{R} se definește legea de compoziție:
$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} ax + by,$$
 $a, b \in \mathbb{R}^*$. Să se determine a și b astfel încât legea „*“ să fie asociativă.
9. Pe mulțimea $G = (-1, +\infty)$ se definește legea de compoziție $*$: $G \times G \rightarrow G$,
$$(x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy + x + y.$$
Să se studieze proprietățile legii „*“.
10. Se consideră legea de compoziție:
$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} x + ay,$$
 $a \in \mathbb{R}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât legea să fie asociativă.
11. Se consideră legea $*$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy + 2\lambda x + \mu y$. Să se determine λ și μ astfel ca această lege să fie asociativă, comutativă și cu 0 (zero) element neutru.

12. Se consideră legea de compoziție:

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} 2xy - 2x - 2y + a, a \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât legea de compoziție să fie asociativă.

13. Se consideră legea de compoziție:

$$* : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y - \frac{1}{2}xy.$$

Să se arate că $M = \mathbb{Q} \setminus \{2\}$ este o parte stabilă a lui \mathbb{Q} în raport cu legea de compoziție. Arătați că legea este asociativă, admite element neutru, elementele lui M sunt simetrizabile și legea este comutativă.

14. Se consideră legea de compoziție:

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy + 4a(x + y), a \in \mathbb{R}.$$

Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel încât legea „ $*$ ” să fie asociativă.

15. Se consideră legea de compoziție $\times : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ $(x, y) \rightarrow x \times y \stackrel{\text{def.}}{=} 3xy$. Dacă e_* este elementul neutru al legii considerate, să se calculeze $a = (2e_*) * (3e_*) * (4e_*)$.

16. Fie mulțimea \mathbb{R}_+^* și legea de compoziție:

$$* : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} \log_a x + \log_a y, a \in \mathbb{R}, a > 1.$$

Să se determine valorile lui a pentru care mulțimea $M = (a, +\infty) \in \mathbb{R}_+^*$ este parte stabilă a lui \mathbb{R}_+^* în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”. Studiați proprietatea acestei legi.

17. Fie legea de compoziție $* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y + 2$.

Să se rezolve ecuația $x * x * x = e_*$, unde e_* este elementul neutru al legii „ $*$ ”.

18. Se consideră legile de compoziție $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y + \frac{1}{3}$ și

$$\circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x \circ y = -3xy - x - y - \frac{2}{3}.$$

Dacă e_1 și e_2 sunt elementele neutre în raport cu legile „ $*$ ”, respectiv „ \circ ” și

$$a = \underbrace{e_1 \circ e_1 \circ \dots \circ e_1}_{\text{de } n \text{ ori}}; b = \underbrace{e_2 * e_2 * \dots * e_2}_{\text{de } n \text{ ori}}, \text{ calculați } b - a.$$

19. Se consideră legea de compoziție $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} \lambda x + y, \lambda \in \mathbb{R}$.

Să se determine λ astfel încât legea „ $*$ ” să aibă element neutru.

20. Fie $M = (2, 4) \subset \mathbb{R}$ și legea:

$$* : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - 3(x + y) + 12.$$

Arătați că legea „ $*$ ” este o lege de compoziție internă, comutativă.

Determinați elementul neutru.

21. Fie $M = (3, 5) \subset \mathbb{R}$ și legea:

$$* : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - 4(x + y) + 20.$$

Arătați că legea „ $*$ ” este o lege de compoziție internă, comutativă.

22. Fie $M = \{x + y\sqrt{5} \mid x, y \in \mathbb{Q}, x^2 - 5y^2 = 1\}$. Să se arate că M este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu înmulțirea. Să se arate că există element neutru și să se determine elementele simetrizabile (inversabile).

23. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R}, xy \neq 0 \right\}$. Să se arate că M este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor și să se studieze proprietățile operației induse pe M de înmulțirea matricelor.

24. Fie $M = (1, +\infty)$ și aplicația:

$$* : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} 1 + (x-1)^{\ln \sqrt{y-1}}.$$

Arătați că „*“ este o lege de compoziție internă, comutativă.

25. Fie legea de compoziție:

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} (1-m)x + my - m, m \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât legea „*“ să fie comutativă.

26. Fie $M = \left\{ \begin{pmatrix} x+4y & 2y \\ -7y & x-2y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 - 2y^2 = 1 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Să se arate că înmulțirea indusă pe M în raport cu $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este comutativă.

27. Fie $M = [5, 7]$ și legea de compoziție:

$$* : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - 6(x+y) + 42.$$

Arătați că „*“ este o lege de compoziție internă asociativă, comutativă și cu element neutru. Determinați elementele simetrizabile.

28. Fie $M = \left\{ A_x = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{1}{2} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Să se arate că înmulțirea

indusă pe M de înmulțirea matricelor este asociativă, admite element neutru și este comutativă.

29. Pe $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ se definesc legile de compoziție:

$$x * y \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{x+y}{2} \text{ (media aritmetică);}$$

$$x \top y \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{xy} \text{ (media geometrică);}$$

$$x \perp y \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{2xy}{x+y} \text{ (media armonică).}$$

Arătați că aceste legi de compoziție sunt comutative și nu sunt asociative.

Admit element neutru?

30. Fie mulțimea $M = (0, +\infty) \setminus \{1\}$ și aplicația:

$$* : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} e^{\ln x \ln y}.$$

Arătați că legea „*“ este lege de compoziție internă, asociativă, cu element neutru, comutativă și toate elementele din M sunt simetrizabile.

31. Fie mulțimea $M = \{x + y\sqrt{7} \mid x, y \in \mathbb{Q}, x^2 - 7y^2 = 1\}$. Arătați că M este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu înmulțirea și că toate elementele lui M sunt simetrizabile în raport cu operația indusă.

32. Fie mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătați că M este o parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Determinați elementul neutru și elementele simetrizabile ale lui M în raport cu operația indusă.

33. Fie mulțimea $G = (3, +\infty)$ și aplicația:

$$* : G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - 3(x + y) + 12.$$

a) Arătați că „ $*$ ” este lege de compoziție internă și că $(G, *)$ este grup abelian.

b) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât aplicația $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow G, f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism de la grupul (\mathbb{R}_+^*, \cdot) la grupul $(G, *)$.

c) Arătați că $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x - 3)^n + 3, \forall x \in G$.

34. Fie $G = (2, +\infty)$ și aplicația:

$$* : G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - 2(x + y) + 6.$$

Demonstrați că „ $*$ ” este o lege de compoziție internă și $(G, *)$ este o lege de compoziție internă și $(G, *)$ este grup abelian. Calculați $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}}$.

35. Fie $G = (-3, 3) \subset \mathbb{R}$ și aplicația:

$$* : G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow (x * y) = \frac{9(x + y)}{9 + xy}.$$

Arătați că „ $*$ ” este o lege de compoziție internă și $(G, *)$ este grup abelian.

Arătați că aplicația

$$f : \mathbb{R} \rightarrow G, f(x) = \frac{2(e^{9x} - 1)}{e^{9x} + 1}$$

este izomorfism de la grupul $(\mathbb{R}, +)$ la grupul $(G, *)$.

Arătați că și $f^{-1} : G \rightarrow \mathbb{R}$ este un izomorfism de grupuri.

36. Se consideră pe \mathbb{Z} legea de compoziție:

$$* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y - 2.$$

Să se demonstreze că $(\mathbb{Z}, *)$ este grup abelian și că aplicația $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x - 2$ este un izomorfism de la grupul $(\mathbb{Z}, *)$ la grupul $(\mathbb{Z}, +)$.

37. Fie mulțimea $G = (3, +\infty)$ și aplicația:

$$* : G \times G \rightarrow G, (x, y) \stackrel{\text{def.}}{=} xy - 3(x + y) + 12.$$

Să se arate:

a) $(G, *)$ este grup abelian.

b) Funcția $f : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*, f(x) = x - 3$ este izomorfism de la grupul $(G, *)$ la grupul (\mathbb{R}_+^*, \cdot) , grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive.

38. Fie mulțimea $G = (1, +\infty)$ și aplicația:

$$* : G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - x - y + 2.$$

a) Să se arate că „ $*$ ” este o lege de compoziție internă și că $(G, *)$ este grup abelian.

b) Demonstrați că: $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x - 1)^n + 1, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$

39. Fie mulțimea $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ și legea:

$$* : G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x * y = \frac{1}{2}(1 + x + y - xy).$$

Să se arate că $(G, *)$ este grup.

40. Fie mulțimea $G = (m, +\infty)$ și operația „ $*$ ”, dată prin:

$$* : G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - m(x + y) + m^2 + m, m \in \mathbb{R}.$$

Să se demonstreze că $(G, *)$ este grup abelian.

41. Pe mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi se definesc legile de compoziție:

$$* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y + 1,$$

$$\perp : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow x \perp y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y - 1.$$

Să se arate că $(\mathbb{Z}, *)$ și (\mathbb{Z}, \perp) sunt grupuri izomorfe, adică $(\mathbb{Z}, *) \simeq (\mathbb{Z}, \perp)$, cu izomorfismul $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x + 2.$

42. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 0 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$

a) Arătați că G este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor și că (G, \cdot) este grup abelian.

b) Arătați că (\mathbb{C}^*, \cdot) este izomorf cu grupul $(G, \cdot).$

43. Fie mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$ Să se arate că (G, \cdot) este grup, unde „ \cdot ” este operația indusă de înmulțirea matricelor.

44. Să se arate că pe mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q}, x^2 + y^2 \neq 0 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ înmulțirea matricelor determină o structură de grup.

Să se arate că acest grup (G, \cdot) este izomorf cu grupul $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), \cdot)$, unde

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}, f : G \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{3}), f(A) = x + y\sqrt{3}, A = \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}.$$

Arătați că $f^{-1} : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \rightarrow G$ este un izomorfism de grupuri.

45. Se consideră mulțimea $G = \mathbb{Q} \setminus \{k\}, k \in \mathbb{Q}^*$ și legea de compoziție:

$$* : G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y - \frac{xy}{k}.$$

Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian.

46. Se consideră grupul comutativ (G, \cdot) și $a \in G$ fixat. Se definește legea de compoziție pe G :

$$* : G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy a.$$

Să se arate că $(G, *)$ este grup comutativ.

47. Se consideră mulțimea de funcții $G = \{f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty) \mid f(x) = e^{ax}, a \in \mathbb{R}\}$. Să se arate că:

a) G este grup multiplicativ, notat (G, \cdot) ;

b) (G, \cdot) este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}, +)$, care este grupul aditiv al numerelor reale.

48. Se consideră mulțimea $G = \{E, A, A^2\}$, unde $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$ și ε este o rădăcină

cubică complexă a unității, adică este soluție a ecuațiilor $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ și $\varepsilon^3 = 1$.

Arătați că (G, \cdot) este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

49. Se consideră legea de compoziție:

$$* : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (z_1, z_2) \rightarrow z_1 * z_2 \stackrel{\text{def.}}{=} z_1 z_2 - (z_1 + z_2)i - 1 + i.$$

a) Să se arate că mulțimea $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C} \setminus \{i\}$ este parte stabilă a lui \mathbb{C} față de legea „*“, iar \mathbb{C}_1 cu operația indusă este grup comutativ, $(\mathbb{C}_1, *)$.

b) Să se demonstreze că: $\underbrace{z * z * \dots * z}_{\text{de } n \text{ ori}} = (z - i)^n + i, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

50. Fie mulțimea $G = (0, 1)$ și aplicația:

$$* : G \times G \rightarrow G, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{xy}{2xy - x - y + 1}.$$

Să se arate că:

a) $(G, *)$ este grup abelian;

b) aplicația $f : G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ este izomorfism de la grupul $(G, *)$ la grupul (\mathbb{R}_+^*, \cdot) .

51. Fie mulțimea $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < a\}$. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea

$$\text{de compoziție } * : M \times M \rightarrow M, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{m^2(x + y)}{m^2 + xy}.$$

Să se arate că:

a) A este parte stabilă a lui M în raport cu „*“;

b) „*“ este asociativă, comutativă și cu element neutru;

c) A împreună cu operația indusă de „*“ nu este grup.

Tema 2 – Inele și corpuri

1. Pe mulțimea \mathbb{Z} se definesc operațiile:

$$\perp : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow x \perp y = x + y - 3,$$

$$\top : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow x \top y = xy - 3x - 3y + 12.$$

Să se arate că $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ este o structură de inel.

2. Pe mulțimea \mathbb{C} a numerelor complexe se consideră aplicațiile:

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (z_1, z_2) \rightarrow z_1 + z_2,$$

$$* : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (z_1, z_2) \rightarrow z_1 * z_2 = x_1x_2 + y_1y_2i, \text{ unde } z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i.$$

Să se arate că $(\mathbb{C}, +, *)$ este un inel comutativ.

3. Pe mulțimea $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se introduc următoarele legi de compoziție:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

a) Să se arate că $(A, +, \cdot)$ este inel comutativ.

b) Să se arate că aplicația $f : A \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f((x, y)) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ este izomorfism de inele.

4. Fie mulțimea $A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}$. Să se arate că $(A, +, \cdot)$ este inel comutativ, în raport cu operațiile de adunare și înmulțire a matricelor.

5. Fie mulțimea $A = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

Să se arate că $(A, +, \cdot)$ este inel comutativ, „+“ și „ \cdot “ fiind operațiile de adunare și înmulțire a matricelor.

6. Fie operațiile definite pe mulțimea $K = \mathbb{Q}$:

$$\perp : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, (x, y) \rightarrow x \perp y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y + 2,$$

$$\top : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, (x, y) \rightarrow x \top y \stackrel{\text{def.}}{=} xy + 2(x + y) + 2.$$

Arătați că tripletul (K, \perp, \top) este o structură de corp.

7. Pe mulțimea \mathbb{R} se definesc operațiile:

$$\perp : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x \perp y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y - 2,$$

$$\top : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x \top y \stackrel{\text{def.}}{=} 2xy - 4(x + y) + 10.$$

Să se arate că $(\mathbb{R}, \perp, \top)$ este o structură de corp.

8. Fie mulțimea $K = \{x + iy\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ dotată cu operațiile obișnuite de adunare și înmulțire. Să se arate că tripletul $(K, +, \cdot)$ este un corp.

9. Pe mulțimea numerelor complexe se definesc operațiile:

$$\perp : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (z_1, z_2) \rightarrow z_1 \perp z_2 = z_1 + z_2 + ai, a \in \mathbb{R},$$

$$\top : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (z_1, z_2) \rightarrow z_1 \top z_2 = z_1 + z_2 - a.$$

Să se arate că (\mathbb{C}, \perp) și (\mathbb{C}, \top) sunt grupuri izomorfe, cu izomorfismul $f: (\mathbb{C}, \perp) \rightarrow (\mathbb{C}, \top)$, $f(z) = iz$.

10. Se consideră legile de compoziție:

$$\oplus : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow x \oplus y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y - 2, \text{ și}$$

$$\odot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \rightarrow x \odot y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - 2(x + y) + 6.$$

i) Să se arate că tripletul $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ este inel.

ii) Să se determine elementele inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$.

11. Fie tripletele:

$$(K_1, +, \cdot), K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{Q}\},$$

$$(K_2, +, \cdot), K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Să se arate că cele două triplete sunt corpuri.

12. Fie inelele $(A_1, +, \cdot), A_1 = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ și $(A_2, +, \cdot), A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}$.

Să se demonstreze că cele două triplete sunt inele.

13. Fie mulțimea $K = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & y \\ y & x-y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Să se arate că mulțimea K

împreună cu operațiile induse de adunarea și înmulțirea matricelor este un corp comutativ $(K, +, \cdot)$.

14. Se consideră legea de compoziție $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} x + y + 1$.

Să se studieze proprietățile legii de compoziție și să se calculeze:

$$a = (-10) * (-9) * \dots * (-1) * 0 * 1 * \dots * 10.$$

15. Se consideră legea de compoziție $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} 2xy + 2x + 2y + 1$.

Demonstrați că avem relațiile:

$$x * y = 2(x + 1)(y + 1) - 1; \underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = 2^{n-1}(x + 1)^n - 1, n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Calculați: } a = (-100) * (-99) * \dots * (-1) * 0 * 1 * \dots * 99 * 100.$$

16. Se consideră legea de compoziție $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y \stackrel{\text{def.}}{=} 2xy - 4x - 4y + 10$.

Demonstrați că avem $x * y = 2(x - 2)(y - 2) + 2$ și calculați

$$a = (-50) * (-49) * \dots * (-1) * 0 * 1 * \dots * 49 * 50.$$

Să se rezolve ecuația: $2^x * 4^x = 2$.

Tema 3 – Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, p$ prim)

1. Să se determine parametrii a, b, c, d astfel încât polinoamele f și g să fie egale:
 - a) $f = (a + 2)X^3 + 3(b + 1)X^2 + (2c - 1)X + 2d + 3, g = (X + 1)(X + 2)(X + 5);$
 - b) $f = 2X^3 + 3X^2 - 4X + 5, g = a(X + 1)^3 + b(X + 1)^2 + c(X + 1) + d;$
2. Fie polinoamele $f = a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ și $g = (X + 2)(X + 3)(X + 4)(X + 5)$. Să se determine a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 astfel încât $f = g$.
3. Determinați gradul polinomului $f = (m^4 - 5m + 4)X^4 + (m^2 - 1)X^3 + (m - 4)X + 3$, unde $m \in \mathbb{C}$.
4. Fie polinomul $f \in \mathbb{C}[X], f = (m^4 - 1)X^3 + (m^2 - 1)X^2 + (m - 1)X + m + 1$. Să se determine grad f dacă $m \in \mathbb{C}$.
5. Calculați $f + g, f - g, fg$ dacă $f = 2iX^2 + iX - 1 + i$ și $g = (1 + i)X^2 + 2iX - i$.
6. Calculați fg dacă:
 - a) $f = X^2 + X + 1, g = X - 1;$
 - b) $f = X^3 + X^2 + X + 1, g = X - 1;$
 - c) $f = X^3 - X^2 + X - 1, g = X + 1.$
7. Calculați $f + g$ dacă $f = (2 + i)X^4 - 3iX^3 + \sqrt{2}X^2 - 0,5X + 5$ și $g = -iX^4 - (i - 1)X^3 - 3\sqrt{2}X^2 + \frac{1}{2}X - 1$.
8. Calculați produsul polinoamelor f și g :
 - a) $f = X^4 - 2X^3 + 4X^2 - X + 2, g = X + 2;$
 - b) $f = X^2 + (2 - i)X + 1 - i, g = iX^2 - (2 + i)X - 1 - i.$
9. Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la g , unde $f = X^4 + 6X^3 + 8X^2 + 1$ și $g = X^3 - X + 1$.
10. Să se găsească câtul și restul împărțirii polinomului f la g , unde:

a) $f = 2X^4 - X^3 - X^2 + 3X - 2, g = X - 2;$	b) $f = X^4 - X^2 + 2X - 3, g = X + 1;$
c) $f = X^4 - 2X^3 - 3X + 1, g = X - 2;$	d) $f = X^5 - 2X^4 + X^2 - X + 3, g = X + 2;$
e) $f = X^5 - 2X^3 + X^2 - 3X + 4, g = X - 1;$	f) $f = X^6 - X^4 + 2X^3 - 6X^2 + 2, g = X + 1.$
11. Utilizând schema lui Horner, să se determine câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul g , unde: $f = 3X^4 + 2X^3 - X + 10, g = X + 13$.
12. Folosind schema lui Horner, efectuați împărțirea polinoamelor: $f = X^6 - X^5 + 3X^3 - 6X + 2, g = X + 1$.
13. Calculați suma coeficienților polinomului $f = X^5 - 3X^4 + X^3 + X^2 - X + 1$.
14. Fie polinoamele $f = 6X^5 + 7X^4 - 33X^2 - 29X - 42$ și $g = 3X^3 - 4X^2 + X - 7$. Să se determine câtul și restul împărțirii lui f la g .

31. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației $x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 0$, calculați:
a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$; **b)** $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$; **c)** $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.
32. Să se rezolve ecuația $x^3 - (a + 3)x^2 + (3a + 2)x - 2a = 0$ știind că admite rădăcini independente de a .
33. Rezolvați ecuația dacă admite rădăcini independente de m :
 $x^3 - (3m + 2)x^2 + (2m^2 + 6m)x - 4m^2 = 0$.
34. Într-un paralelipiped dreptunghic suma muchiilor este 40 cm, aria totală este 62 cm^2 , iar volumul 30 cm^3 . Determinați lungimile muchiilor.
35. Determinați valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care rădăcinile ecuației $x^3 - 3x^2 + (m - 2)x + m = 0$ sunt în progresie aritmetică.
36. Determinați valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care rădăcinile ecuației $x^3 + 3x^2 - (m + 2)x - 3m + 1 = 0$ sunt în progresie geometrică.
37. Demonstrați că ecuația $x^4 + (2m + 1)x^3 + 2(m + 1)^2x^2 + px + q = 0$, $m, p, q \in \mathbb{R}$, $m \geq 0$, are cel mult două rădăcini reale.
38. Descompuneți în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ și în $\mathbb{C}[X]$ polinoamele:
a) $f = X^3 - 3X^2 + 4X - 12$;
b) $f = X^4 - 1$.
39. Fie ecuația $x^4 - (a + b)x^2 - (a + b)x + 1 = 0$, unde $a, b \in [-2, 2]$. Demonstrați că toate rădăcinile ecuației au modulul egal cu 1.
40. Demonstrați că pentru orice polinom f de grad $n \geq 0$ și numărul natural k , $0 \leq k \leq n$, există un polinom g astfel încât $\text{grad}(f + g) = k$.
41. Să se determine parametrii a și b astfel încât polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + 1$ împărțit la $X - 1$ să dea restul 1 și împărțit la $X + 1$ să dea restul -5 .
42. Fie polinomul $f = X^4 + aX^3 + X^2 + bX - 1$. Să se determine parametrii a și b dacă f împărțit la $X - 2$ dă restul -1 și împărțit la $X - 3$ dă restul 14. Să se determine restul împărțirii lui f la $(X - 2)(X - 3)$.
43. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$ și $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.
a) Arătați că restul împărțirii polinomului f prin $(X - a)(X - b)$ este

$$r = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}X + \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}.$$
b) Dacă $(X - a) \mid f$, $(X - b) \mid f$ și $a \neq b$, atunci $(X - a)(X - b) \mid f$.
44. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$. Determinați coeficienții polinomului f dacă $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^4$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
45. Fie polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^2 + aX + b$. Determinați a și b astfel încât polinomul f să dividă polinomul $X^4 + 1$.
46. Să se determine două polinoame f și g de grad unu, $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ astfel încât $(X^2 + 2X + 2)f + (X^2 + 3X + 3)g = 1$.

47. Să se determine un polinom $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ astfel încât împărțit la $X^2 - 3X + 1$ să dea restul $2X + 1$ și împărțit la $X^2 - 1$ să dea restul $-2X + 2$.
48. Fie polinomul $f = aX^{n+2} + bX^n + 2$. Să se determine a și b astfel încât f să fie divizibil prin $g = (X - 1)^2$.
49. Fie f un polinom nenul $f \in \mathbb{Z}[X]$. Dacă $\alpha = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $(p, q) = 1$, $q \neq 0$, este rădăcină a lui f , atunci $(p - q) \mid f(1)$.
50. Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - 6X^3 + aX^2 - 12X + b$. Să se determine parametrii a și b și să se rezolve ecuația știind că admite rădăcina $2 - \sqrt{2}$.
51. Să se rezolve ecuația $2x + 7x^3 + 9x^2 + 7x + 2 = 0$.
52. Să se rezolve ecuația $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$ știind că rădăcinile ei sunt în progresie aritmetică.
53. Fie ecuația $x^3 - 3x + 2 + mx + 2m - 1 = 0$, $m \in \mathbb{R}$. Să se rezolve ecuația știind că rădăcinile x_1, x_2, x_3 satisfac relația: $(x_1 + 1)^3 + (x_2 - 1)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0$.
54. Să se rezolve ecuația $x^3 + x^2 + ax + 8 = 0$ știind că produsul a două rădăcini este egal cu 2, iar $a \in \mathbb{R}$.
55. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + X^2 + (m + 1)X + m$.
- Să se arate că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ nu depinde de m .
 - Să se arate că $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 \geq 12x_1x_2x_3 - 15$, $\forall m \in \mathbb{R}$.
56. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = X^3 - 6X + 2$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Se notează $E_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ și se ia $E_0 = 3$.
- Să se calculeze $f(2) \cdot f(-2)$.
 - Să se demonstreze că polinomul f nu are rădăcini raționale.
 - Să se demonstreze că toate rădăcinile polinomului f sunt reale.
 - Să se calculeze $E_1 = x_1 + x_2 + x_3$ și $E_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.
 - Să se arate că $E_{k+3} - 6E_{k+1} + 2E_k = 0$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$.
 - Să se demonstreze că $E_n \in \mathbb{Z}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
57. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = (X + i)^4 + (X - i)^4$, având forma algebrică
- $$f = a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0.$$
- Să se calculeze $f(0)$.
 - Să se determine a_3 și a_1 .
 - Să se calculeze suma coeficienților polinomului f .
 - Să se arate că toți coeficienții a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 ai polinomului f sunt numere reale.
 - Să se arate că dacă $z \in \mathbb{C}$ este o rădăcină a lui f , atunci $|z + i| = |z - i|$.
 - Să se arate că polinomul f are numai rădăcini reale.

Tema 4 – Primitive (antiderivate)

1. Calculați primitivele următoarelor funcții:

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5, x \in \mathbb{R};$

b) $f(x) = x^2 + 2 - \frac{1}{x}, x \in (-\infty, 0);$

c) $f(x) = x^2 + 2 - \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty);$

d) $f(x) = \frac{1}{x+1}, x \in (-1, +\infty);$

e) $f(x) = \frac{1}{2x^2 + 3}, x \in \mathbb{R};$

f) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}, x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2});$

g) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}, x \in (\sqrt{2}, +\infty);$

h) $f(x) = \sqrt{x} + x\sqrt[3]{x}, x \in (0, +\infty);$

i) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R};$

j) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1);$

k) $f(x) = \sin x + a \cos x, x \in \mathbb{R}, a$ constantă;

l) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

m) $f(x) = e^x + \sin x, x \in \mathbb{R};$

n) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}, x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$

2. Calculați:

a) $\int (x+2)^3 dx;$

b) $\int (3x+5)^7 dx;$

c) $\int x(x^2+5)^4 dx;$

d) $\int \sin^3 x \cos x dx;$

e) $\int e^{5x} dx;$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a}} dx;$

g) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}} dx;$

h) $\int \frac{1}{x+3} dx;$

i) $\int \frac{1}{5x-7} dx;$

j) $\int \frac{-5x}{x^2+2} dx;$

k) $\int \frac{x}{4x^2-3} dx;$

l) $\int \frac{1}{1+(2x+3)^2} dx;$

m) $\int \sin 2x dx;$

n) $\int \sin(2x+3) dx;$

o) $\int x \cos^2 x dx;$

p) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$

q) $\int \frac{1}{\cos^2 3x} dx;$

r) $\int \frac{5x}{\sin^2(3x^2 - 1)} dx;$

s) $\int xe^{x^2-3} dx;$

t) $\int \cos xe^{\sin x} dx.$

3. Calculați următoarele primitive de funcții raționale:

a) $\int \frac{3x}{x^2 + x - 2} dx;$

b) $\int \frac{x^2 + 5x + 3}{x^2 + 3x - 4} dx;$

c) $\int \frac{2x^2}{x^4 - 1} dx;$

d) $\int \frac{x^4}{x^4 - 1} dx;$

e) $\int \frac{x + 4}{2x^2 + 3x - 5} dx;$

f) $\int \frac{x - 1}{6x^2 + 5x - 6} dx;$

g) $\int \frac{x + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx;$

h) $\int \frac{2x - 6}{7x^2 - 48x - 7} dx;$

i) $\int \frac{3x + 7}{5x^2 + 13x - 6} dx;$

j) $\int \frac{7}{11x^2 - 96x - 27} dx.$

4. Calculați următoarele integrale nedefinite (funcțiile se consideră definite pe domeniul maxim de definiție):

a) $\int (8x^3 - 2x + 3) dx;$

b) $\int (2x^{2008} - 3x^{2007} + 3x^{2006} + x - 3) dx;$

c) $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + 5 \right) dx;$

d) $\int \frac{x^2 - x^3 + 1}{x^5} dx;$

e) $\int (\sqrt{x} + 1) dx;$

f) $\int (x\sqrt{x} - 2x + 3) dx;$

g) $\int \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x} dx;$

h) $\int \frac{2}{3x + 5} dx;$

i) $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 5} dx;$

j) $\int \frac{5x^2}{x^3 - 1} dx;$

k) $\int \frac{4}{\sqrt{1 - 2x^2}} dx;$

l) $\int \frac{1}{\sqrt{7 - x^2}} dx;$

m) $\int \frac{1}{1 + 16x^2} dx;$

n) $\int \frac{1}{5 + x^2} dx;$

o) $\int \sin 5x dx;$

p) $\int (x - 1) \sin(x^2 - 2x - 3) dx;$

q) $\int 7x^2 \cos(x^3 + 1) dx;$

r) $\int e^{\frac{x}{3}} dx;$

s) $\int e^{-x+4} dx;$

t) $\int xe^{x^2-1} dx.$

5. Calculați, pe domeniul maxim de definiție:

a) $\int x\sqrt{1+x^2} dx$;

b) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$;

c) $\int x^4 \sqrt[3]{x^5-1} dx$;

d) $\int \frac{x}{(x^2+5)^9} dx$;

e) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$;

f) $\int \frac{x^2}{x^6+1} dx$;

g) $\int \cos^5 x \sin x dx$;

h) $\int \cos^3 x dx$;

i) $\int a^{3x} dx$;

j) $\int (x+1)a^{x^2+2x-2007} dx$;

k) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}} dx$;

l) $\int \frac{x}{1+x^4} dx$;

m) $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx$;

n) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$;

o) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$;

p) $\int \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$.

6. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{|x-1|+1}$.

Arătați că funcția admite primitive pe \mathbb{R} și determinați o primitivă a sa.

7. Calculați integrala nedefinită:

$$I = \int \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} dx, x \in (0; +\infty).$$

8. Arătați că funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \in [-1, 1] \\ 1-|x|, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

admite primitive și să se afle aceste primitive.

9. Arătați că funcția

$$f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}, & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

nu admite primitive.

10. Găsiți primitivele F și G ale funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x < 1 \\ 2, & \text{dacă } x = 1, \text{ astfel} \\ -4x + 6, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$

încât $F(1) = 4$ și $G(2) = 3$.

11. Admite primitive funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x < 1 \\ 0, & \text{dacă } x = 1? \\ -2x^2 + 6x, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$

12. Folosind o substituție convenabilă, calculați:

a) $\int (2x-1)^{2008} dx$;

b) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)^2}$;

c) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx$;

d) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$;

e) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2|x|}}$;

f) $\int x^2\sqrt{1+x^3} dx$.

13. Calculați:

a) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$;

b) $\int x^p \ln x dx$, $x > 0$, $p \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

c) $\int x^2 \cos x dx$;

d) $\int x^2 \sin x dx$;

e) $\int e^{2x} \sin^2 x dx$;

f) $\int e^{2x} \cos^2 x dx$;

g) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}+2}{\sqrt{x^2-4}} dx$, $x > 2$;

h) $\int \frac{(x+2)^3}{x^3} dx$, $x > 0$;

i) $\int \frac{x}{x^4+3} dx$, $x \in \mathbb{R}$;

j) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \arcsin^2 x} dx$, $x \in (0; 1)$;

k) $\int x^3\sqrt{2+x^2} dx$, $x \in \mathbb{R}$;

l) $\int x^3 e^{x^4} dx$, $x \in \mathbb{R}$;

m) $\int \sqrt{5x+2} dx$, $x \geq -\frac{2}{5}$;

n) $\int \frac{x^2}{x^6+4} dx$, $x \in \mathbb{R}$;

o) $\int \sqrt{x^2+3x+4} dx$, $x \in \mathbb{R}$;

p) $\int \sqrt{-x^2+5x-6} dx$, $x \in (2; 3)$;

q) $\int \frac{1}{2x^2-3x-2} dx$, $x < -\frac{1}{2}$;

r) $\int \frac{1}{x^2-6x+9} dx$, $x > 3$.

Tema 5 – Integrala definită

1. Calculați:

a) $\int_1^2 \left(2x^2 + x + \frac{1}{3} \right) dx$;

b) $\int_{-6}^{-1} \sqrt{3-x} dx$;

c) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$;

d) $\int_1^{\sqrt{10}} x \sqrt{5x^2-1} dx$;

e) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$;

f) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{tg} 2x dx$;

g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$;

h) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin 2x} dx$;

i) $\int_{-2}^3 (x^2 - 5x + 1) dx$;

j) $\int_1^2 \frac{t^2 - t^3 + 1}{t^5} dt$;

k) $\int_0^1 (x\sqrt[5]{x} + x^2) dx$;

l) $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^3} dt$;

m) $\int_0^e \frac{\ln x}{x} dx$;

n) $\int_{-1}^1 t^2 e^{t^3+1} dt$;

o) $\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{9+2x^2} dx$;

p) $\int_0^{\frac{a}{b}} \frac{1}{a^2 + b^2 x^2} dx$.

2. Folosind metoda integrării prin părți, calculați:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$;

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$;

e) $\int_0^1 x^2 e^x dx$;

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx$;

g) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$;

h) $\int_0^{\frac{1}{4}} \arcsin 2x dx$;

i) $\int_1^e (t-3) \ln t dt$;

j) $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$;

k) $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$;

l) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t} dt$.

3. Folosind metoda schimbării de variabilă, calculați:

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 \cos x + 3} ;$$

$$\text{b) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x + \sin^3 x} dx ;$$

$$\text{c) } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx ;$$

$$\text{d) } \int_0^1 a^x \sin a^x dx ;$$

$$\text{e) } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x} \cos x dx ;$$

$$\text{f) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx ;$$

$$\text{g) } \int_0^1 x \sqrt{1 + x^2} dx ;$$

$$\text{h) } \int_1^2 \frac{x}{(3x-1)\sqrt{3x-1}} dx .$$

4. Calculați:

$$\text{a) } \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx ;$$

$$\text{b) } \int_{-1}^1 \frac{\sin^3 x \ln(x^2 + 1)}{(x^2 + 1) \cos x} dx .$$

5. Calculați următoarele integrale definite:

$$\text{a) } \int_0^1 (3x^2 + 4) e^{2x} dx ;$$

$$\text{b) } \int_{-a}^0 (e^x - e^{4x}) dx, a \in \mathbb{R}_+ ;$$

$$\text{c) } \int_0^1 (2^x + 2^{-x}) dx ;$$

$$\text{d) } \int_2^3 x^2 \ln(x^6 - 1) dx ;$$

$$\text{e) } \int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln x)^3} ;$$

$$\text{f) } \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln x}{x} dx ;$$

$$\text{g) } \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^3 - 4x)^2} dx ;$$

$$\text{h) } \int_1^3 \frac{\ln x}{\sqrt{1+x}} dx ;$$

$$\text{i) } \int_1^e \frac{1}{x} \sqrt{\ln x} dx ;$$

$$\text{j) } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx ;$$

$$\text{k) } \int_e^{e+1} \frac{dx}{x \ln x} ;$$

$$\text{l) } \int_0^1 \frac{2x+3}{2x+1} dx ;$$

$$\text{m) } \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} dx ;$$

$$\text{n) } \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx ;$$

$$\text{o) } \int_1^4 \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx ;$$

$$\text{p) } \int_e^{e^2} \frac{1}{x^2 \ln^3 x} dx ;$$

$$\text{q) } \int_{-1}^0 \frac{1}{1+x^4} dx ;$$

$$\text{r) } \int_{-1}^0 \frac{x^4}{x^3-1} dx ;$$

s) $\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2} dx$;

t) $\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^x + 1} dx$.

6. Stabiliți o relație de recurență pentru $I_n = \int x^n e^{-x} dx$, $n \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$, apoi calculați I_2 , I_3 , I_4 și I_5 .

7. Se consideră integralele:

$$I = \int_0^{x_0} \sqrt{a^2 - x^2} dx \text{ și } J = \int_0^{x_0} \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, x_0 \in (0; a), a > 0.$$

a) Stabiliți două relații distincte între I și J care să nu conțină altă integrală.

b) Calculați I și J .

8. Calculați:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx$;

b) $\int_1^{2e} |\ln x - 1| dx$;

c) $\int_1^{2\pi} e^{-x} |\sin x| dx$;

d) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

e) $\int_1^{\sqrt{x^2-1}} \frac{dx}{x}$;

f) $\int_1^{2\pi} \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$.

9. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \times e^{-x}$.

a) Calculați $I_n = \int_0^n f(x) dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

10. a) Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}^2 x dx$.

b) Ținând seama că $\operatorname{tg}^2 x \leq 1$, pentru orice $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, deduceți inegalitatea:

$$\ln 2 \geq \frac{\pi(4-\pi)}{8} .$$

11. Calculați:

a) $\int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 4) dx$;

b) $\int_1^3 \left(2x - \frac{3}{x} + \sqrt{x}\right) dx$;

c) $\int_{-2}^2 (|x-1| + |x+1|) dx$;

d) $\int_{-2}^{-1} \frac{3x-1}{x^3} dx$;

e) $\int_{-5}^3 |x^2 - 3x + 2| dx$;

f) $\int_0^1 x \sqrt[3]{1-x^2} dx$;

g) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{\arctg x}{1+x^2} dx;$

h) $\int_{-1}^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^8+1}} dx;$

i) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}} dx;$

j) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx;$

k) $\int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx;$

l) $\int_0^1 (3x^2+4)e^{2x} dx;$

m) $\int_{-a}^0 (e^x - e^{4x}) dx;$

n) $\int_0^1 (2^x + 2^{-x}) dx.$

12. Comparând integralele:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx, \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx \quad \text{și} \quad C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x) dx,$$

arătați că $A = B = C = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$

13. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + e^x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ \sqrt{x^2 + 1}, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}.$

a) Arătați că f admite primitive pe \mathbb{R} și calculați o primitivă a sa.

b) Calculați $\int_{-1}^1 f(x) dx.$

14. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^5 + bx^2 + c$, a , b și c parametri reali. Determinați a , b și c astfel încât să fie îndeplinite simultan următoarele condiții:

$$f(0) = 1, \quad f'(1) = 36 \quad \text{și} \quad \int_0^1 f(x) dx = 3.$$

15. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}.$

a) Determinați a , $b \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}, \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}.$$

b) Calculați $\int_2^3 f(x) dx.$

16. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}.$

a) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ și $\int_0^3 f(x) dx.$

b) Determinați $f'(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ și rezolvați ecuația $f'(x) = 0.$

c) Arătați că $f(x) = \frac{1}{x+1} + x + 2, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$

Tema 6 – Aplicații ale integralei definite

1. Calculați:

- a) aria triunghiului mărginit de axa Ox , dreapta $y = 2x$ și dreapta $x = a$;
- b) aria suprafeței mărginite de dreptele: $y = 0$, $y = 3x - 1$, $x = 1$ și $x = 2$;
- c) aria suprafeței mărginite de axa Ox , parabola $y = x^2$ și dreapta $x = a$;
- d) aria suprafeței mărginite de parabola $y = x^2$ și dreapta $y = 2x$.

2. Aflați aria subgraficului pentru fiecare dintre funcțiile următoare:

a) $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$;

b) $f: [0; a] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$, $a > 0$;

c) $f: [0; e - 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + 1)$;

d) $f: [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \cos \frac{x}{2}$.

e) $f: \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos 2x}$;

f) $f: [0; e] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \times \ln(x + 1)$;

g) $f: [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$;

h) $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \times \arctg(x^2 + 1)$;

i) $f: [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^2 x - \cos x + 1$;

j) $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \times \arcsin x^2$.

3. Calculați aria mulțimii Γ_f :

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x \in [0, 1]$;

b) $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$;

c) $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$, $x \in [0, 1]$;

d) $f(x) = \frac{x^3 - 4x + 3}{x^2 - 4} - x$, $x \in [4, 6]$;

e) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $x \in [e, e^2]$;

f) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$, $x \in [1, 2]$.

4. Calculați aria mulțimii $\Gamma_{f, g}$:

a) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{(x+1)^2}{2}$, $x \in [0, 1]$;

$$\text{b) } f(x) = \operatorname{tg} x, g(x) = -\frac{1}{3}x, x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right];$$

$$\text{c) } f(x) = x^2 - 1, g(x) = 1 - x^2, x \in \mathbb{R};$$

$$\text{d) } f(x) = x^2 - x + 2, g(x) = 2x, x \in \mathbb{R};$$

$$\text{e) } f(x) = \ln x, g(x) = \ln^2 x, x > 0;$$

$$\text{f) } f(x) = \frac{x^2}{4}, g(x) = \frac{1}{3+x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

5. Calculați aria mulțimii cuprinse între curbele de ecuații $y = e^x$, $y = e^{-x}$ și dreapta de ecuație $x = 1$.

6. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, date prin expresiile:

$$f(x) = x \times \arctg x \text{ și } g(x) = \ln(1 + x^2).$$

Calculați aria mulțimii cuprinse între graficele funcțiilor f și g și dreptele de ecuații $x = 0$, respectiv $x = 1$.

7. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x) \times e^{-|x-1|}$.

Să se determine aria mulțimii cuprinse între graficul funcției f , axele de coordonate Ox și dreapta de ecuație $x = 2$.

8. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - e^{4x}$.

a) Să se calculeze $S(a)$, aria mulțimii mărginite de între graficul funcției f , axa de coordonate Ox și dreapta de ecuație $x = a$, $a < 0$.

b) Să se determine $\lim_{a \rightarrow -\infty} S(a)$.

9. Se consideră funcția $f : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - x^2$.

Să se determine parametrul real m astfel încât dreapta de ecuație $y = mx$ să împartă subgraficul funcției f în două mulțimi de arii egale.

10. Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a suprafeței mărginite de curbele:

$$\text{a) } y = x + \sqrt{x}, y = 1, x = 4 \text{ și } y = 0;$$

$$\text{b) } y = e^x, x = 0, x = 1 \text{ și } y = 0;$$

$$\text{c) } y = \sin x, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6} \text{ și } y = 0.$$

11. Aflați volumele corpurilor de rotație determinate de funcțiile:

$$\text{a) } f(x) = x^2 - \sqrt{x}, x \in [0, 1];$$

$$\text{b) } f(x) = (x+1)e^x, x \in [-1, 2].$$

12. Se consideră elipsa de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $0 < b < a$, și dreapta OM care trece prin originea axelor de coordonate. Se consideră, de asemenea, punctul M situat pe elipsă, care are abscisa egală cu $\sqrt{a^2 - b^2}$ și ordonata pozitivă.
 Determinați volumul corpului obținut prin rotația suprafeței plane mărginite de elipsă, dreapta OM și semiaxa pozitivă Ox (pentru care $x > 0$ și $y > 0$).
13. Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a suprafeței plane mărginite de curbele de ecuații:
- $y = \arcsin x, y = 0, x = -1, x = 0$;
 - $y = \ln x, y = 0, x = 1, x = e$.
14. Prin rotația suprafeței plane mărginite de elipsa de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $0 < b < a$, în jurul axei Ox , se obține corpul de volum \mathcal{V}_1 , iar prin rotația în jurul axei Oy , se obține corpul de volum \mathcal{V}_2 .
- Calculați \mathcal{V}_1 și \mathcal{V}_2 .
 - Care dintre volumele obținute este mai mare?
15. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + m, & \text{dacă } x \leq 1 \\ mx + n, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$.
- Aflați m și n astfel încât funcția să fie derivabilă.
 - Pentru $m = 2$ și $n = 1$, scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$.
 - Pentru $m = 2$ și $n = 1$, aflați aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 2$.
16. Se dau funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ și $g(x) = x + 2$.
- Aflați valorile lui x pentru care $f(x) = g(x)$.
 - Reprezentați grafic cele două funcții în același sistem de coordonate.
 - Calculați aria suprafeței plane cuprinse între graficele celor două funcții.
17. Fie funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x^2 - 5x + 1}{x}$.
- Determinați valorile întregi ale lui $f(x)$ pentru care $x \in \mathbb{Z}$.
 - Aflați abscisele punctelor de extrem ale graficului funcției f .
 - Aflați asimptotele funcției f .
 - Aflați aria subgraficului restricției funcției f la intervalul $[1; 2]$.
 - Determinați numerele reale a pentru care aria de la punctul d) este egală cu $1 + \ln(a^2 + 1)$.
 - Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă $x = 1$.

18. Se dă funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

- a) Determinați și reprezentați grafic funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |f(x)|$.
 b) Determinați aria suprafeței plane mărginite de restricția funcției f la intervalul $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ și axa Ox .

19. Fie funcția $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 6}}$.

- a) Determinați primitiva $F: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f care se anulează în $x_0 = 1$.
 b) Calculați volumul corpului de rotație obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox .

20. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a \times x e^{nx} + bx^2 + c}{e^{nx} + 1}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $f(x) = \begin{cases} bx^2 + c, & \text{dacă } x < 0 \\ \frac{c}{2}, & \text{dacă } x = 0. \\ ax, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$.

- b) Determinați $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât f să fie continuă pe \mathbb{R} .
 c) Pentru valorile găsite la punctul b), determinați primitivele funcției f .
 d) Pentru $c = 0$ și $a, b > 0$, determinați aria domeniului limitat de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = -2$ și $x = 1$.

21. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

- a) Să se verifice dacă $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
 b) Să se determine asimptotele la graficul funcției f .
 c) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
 d) Determinați aria domeniului limitat de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 3$.

22. Fie funcția $f: (1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- a) Să se determine $f'(x)$, $\forall x \in (1; +\infty)$.
 b) Să se afle a și b astfel încât $f(2) = 1$ și $f'(2) = 0$.
 c) Pentru $a = -3$ și $b = 3$, să se stabilească semnul lui f' pe $(1; +\infty)$ și, de aici, să se deducă intervalele de monotonie ale lui f .
 d) Pentru $a = -3$ și $b = 3$, determinați volumul corpului de rotație obținut prin rotirea graficului restricției funcției f la intervalul $[2; 3]$ în jurul axei Oy .

2. TESTE PREGĂTITOARE PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT

Testul 1

Subiectul I (30 puncte)

1. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului cu coeficienți reali

$$f = X^3 + (m + 1)X^2 + 2X + m, \text{ unde } m \in \mathbb{R}.$$

a) Aflați m astfel încât polinomul să fie divizibil prin $X - 1$. (5p)

b) Calculați, în funcție de m , suma $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. (3p)

c) Calculați, în funcție de m , suma $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$. (4p)

d) Determinați m astfel încât $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 > 3x_1x_2x_3 + 5$. (3p)

2. Se dă funcția $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & x \in [0, 1] \\ a \times \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 5x + 4}, & x \in (1, \pi] \end{cases}$.

a) Determinați a astfel încât f să fie continuă pe $[0, \pi]$. (5p)

b) Studiați derivabilitatea funcției în punctul $x = 1$.

3. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele: $A(2, 3), B(-1, -1)$ și $C(6, 0)$.

a) Arătați că triunghiul ABC este isoscel cu baza BC . (6p)

b) Scrieți ecuația înălțimii din A . (4p)

Subiectul II (20 puncte)

1. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$ definim legea de compoziție $x * y = xy - x - y + 2$.

Demonstrați că:

a) mulțimea $G = (1, +\infty)$ este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu operația „*“ (5p)

b) $(G, *)$ este grup abelian. (9p)

2. Aflați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + 4x + 1} - ax - b) = 2\sqrt{2}$. (6p)

Subiectul III (20 puncte)

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Demonstrați că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ (10p)

b) Determinați matricea $B = A + A^2 + \dots + A^n$. (7p)

c) Calculați $\det B$. (3p)

Subiectul IV (20 puncte)

Se consideră funcția $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + a}}{x - 2}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

- a) Determinați valorile lui a pentru care funcția admite un extrem în $x = -2$. (6p)
- b) Pentru $a = 4$, studiați variația și reprezentați grafic funcția (fără a folosi a doua derivată). (8p)
- c) Aflați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a porțiunii din graficul funcției cuprinse între dreptele de ecuații $x = 4$ și $x = 6$. (6p)

Notă: Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Nota finală se calculează împărțind punctajul obținut la 10.

Testul 2**Subiectul I (30 puncte)**

1. Fie $F(x) = \log_x e + \log_e x + \log_{\frac{e}{x}} x$.

a) Rezolvați ecuația $F(x) = -\frac{5}{2}$. (6p)

b) Determinați x astfel încât $F(x) > -\frac{5}{2}$. (6p)

2. Rezolvați sistemul cu coeficienți în \mathbb{Z}_5 :
$$\begin{cases} \hat{4}x + \hat{3}y = \hat{2} \\ \hat{3}x + \hat{2}y = \hat{2} \end{cases}$$
 (6p)

3. a) Scrieți ecuația unui cerc care trece prin originea axelor de coordonate și este tangent dreptei de ecuație $2x + y = 5$ în punctul $A(2, 1)$. (4p)

b) Aflați punctele de intersecție ale acestui cerc cu axa Ox . (4p)

c) Scrieți ecuațiile tangentelor la cerc în aceste puncte. (4p)

Subiectul II (20 puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\ln x + x^2 - 4x - m$, unde m este parametru real.

a) Stabiliți domeniul de derivabilitate al funcției și rezolvați ecuația $f'(x) = 0$. (4p)

b) Discutați în funcție de parametrul m numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = 0$. (6p)

2. Se dau matricile $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ u & v \end{pmatrix}$.

- a) Determinați u și v astfel încât $AX = XA$. (4p)
 b) Calculați A^n , $n \in \mathbb{N}$. (6p)

Subiectul III (20 puncte)

a) Rezolvați sistemul
$$\begin{cases} 11^{xz} - 2 \times 5^y = 71 \\ 11^{xz} + 2 \times 5^{\frac{y}{2}} = 21 \\ 11^{(x-1)z} + 5^{\frac{y}{2}} = 16 \end{cases}$$
 (7p)

b) Pentru $x = 2, y = 2, z = 1$, determinați matricile:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x-z & y-z \\ 2y & -2 & z \end{pmatrix}$$
 și
$$B = \begin{pmatrix} x+z & -3 & y-z \\ 1 & z & 1 \\ y-z & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 (3p)

- c) Aflați rangul matricei $A + B$. (4p)
 d) Calculați inversa matricei A . (6p)

Subiectul IV (20 puncte)

Fie $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

- a) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f . (6p)
 b) Justificați că funcția admite primitive și calculați o primitivă a sa. (7p)
 c) Demonstrați că pentru orice $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, avem:

$$\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$$
 (7p)

Notă: Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Nota finală se calculează împărțind punctajul obținut la 10.

Testul 3

Subiectul I (30 puncte)

1. Se consideră dezvoltarea binomială $\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$.

- a) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\frac{T_7}{T_{n-5}} = \frac{1}{6}$. (6p)

b) Rezolvați ecuația $\frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}$. (4p)

2. Fie funcția $f: [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln^3 x, & x \in [1, e] \\ ax + b, & x \in (e, 5] \end{cases}$.

a) Determinați a și b astfel încât funcția să verifice condițiile teoremei lui Lagrange. (6p)

b) Calculați $\int_1^e f(x) dx$. (6p)

3. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctul $M\left(2, -\frac{5}{3}\right)$

și elipsa $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} - 1 = 0$.

a) Calculați aria patrulaterului ale cărui vârfuri coincid cu focarele elipsei și celelalte două sunt extremități ale axei mici. (4p)

b) Verificați dacă punctul M este situat pe elipsă și, în caz afirmativ, scrieți ecuația tangentei la elipsă în acest punct. (4p)

Subiectul II (10 puncte)

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, I_2 matricea unitate și O_2 matricea nulă din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Determinați α și β astfel încât $(A - I_2)^2 = O_2$. (5p)

b) Determinați α și β astfel încât $A^2 = I_2$. (5p)

Subiectul III (20 puncte)

1. Pe \mathbb{Z} se definește legea de compoziție $x * y = xy - 2x - 2y + 6$.

a) Determinați elementul neutru. (3p)

b) Aflați suma elementelor simetrizabile în raport cu legea de compoziție „*“ . (6p)

c) Rezolvați ecuația $x * x = 11$. (4p)

2. Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție $\perp: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \perp y = xy + 2ax + by$.

Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât legea de compoziție să fie asociativă și comutativă. (7p)

Subiectul IV (30 puncte)

1. Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x e^x, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$ admite primitive și să

se determine o astfel de primitivă. (15p)

2. Se consideră funcția $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{ax^2 + bx + 1}$ (unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, D domeniul de definiție).

a) Determinați a, b astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\frac{1}{2}$. (10p)

b) Pentru $a = b = 1$, determinați asimptotele la graficul funcției obținute. (3p)

c) Calculați $\int [x - f(x)] dx$. (2p)

Notă: Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Nota finală se calculează împărțind punctajul obținut la 10.

Testul 4

Subiectul I (30 puncte)

1. Fie ecuația $(m - 2)x^2 + (3m - 5)x + 3 = 0$, unde $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

a) Arătați că ecuația are rădăcini reale, oricare ar fi $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. (3p)

b) Determinați m astfel încât o rădăcină să fie dublul celeilalte. (3p)

c) Determinați m astfel încât rădăcinile să fie de semne contrare. (2p)

d) Determinați m astfel încât rădăcinile să fie pozitive. (2p)

2. Rezolvați ecuația:

$$1 + 2 \cdot \log_3 \left(\frac{1 + \sqrt{7}}{3} \right)^x = \log_3 2 + \log_3 \left[\left(\frac{1 + \sqrt{7}}{3} \right)^x + 1 \right].$$
 (10p)

3. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$.

a) Calculați $f'(x)$, $\forall x \in (0, +\infty)$. (5p)

b) Determinați o primitivă $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a lui f cu proprietatea că $F(1) = 1$. (5p)

Subiectul II (20 puncte)

a) Arătați că pentru orice $z \in \mathbb{C}$ avem:

$$z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5 = (z^2 + 1)(z^2 - 4z + 5).$$
 (10p)

b) Rezolvați în \mathbb{C} ecuația: $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 5 = 0$. (10p)

Subiectul III (20 puncte)

Fie legile de compoziție $*$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ și \perp : $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definite astfel:

$$x * y = x + y - 4 \text{ și } x \perp y = xy - 4x - 4y + 20.$$

- a) Arătați că $(\mathbb{Z}, *, \perp)$ este inel comutativ. (15p)
 b) Aflați elementele inversabile ale inelului. (5p)

Subiectul IV (20 puncte)

- a) Calculați primitivele funcției $f: (1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x(1 + \ln x)}$. (10p)
 b) Aflați primitiva F cu proprietatea $F(e^{e-1}) = 2$. (10p)

Notă: Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Nota finală se calculează împărțind punctajul obținut la 10.

Testul 5

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.

Subiectul I (20 puncte)

- a) Să se determine numerele reale a și b dacă dreptele $d_1: y = ay + b$ și $d_2: y = bx - a$ trec prin punctul $A(1; 1)$. (4p)
 b) Să se calculeze perimetrul unui triunghi echilateral, știind că aria sa este egală cu 3. (4p)
 c) Să se dea un exemplu de un număr complex nenul care are modulul egal cu 3. (4p)
 d) Să se găsească un număr natural n pentru care $i^n + i^{n+1} = 1 - i$, unde $i^2 = -1$. (4p)
 e) Să se dea un exemplu de două numere reale x și y pentru care $\cos(x + y)$. (2p)
 f) Să se găsească două elemente ale mulțimii $M = \{x \in \mathbb{R} / \sin x = \sin 2x\}$. (2p)

Subiectul II (30 puncte)

1. a) Să se calculeze suma soluțiilor reale ale ecuațiilor $x^2 + 4x - 10 = 0$. (3p)
 b) Să se calculeze $\frac{C_5^2}{C_5^3}$. (3p)
 c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_5(x + 1) = \log_5(x^2 + x)$. (3p)
 d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $10^x = 100$. (3p)
 e) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$ să verifice relația $n! \geq 20$. (3p)
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(x^2 + 1)$.
 a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$. (3p)

- b) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) dx$. (3p)
- c) Să se arate că $f(x) \geq f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (3p)
- d) Să se determine coordonatele punctului de extrem local al funcției f . (3p)
- e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \times f'(x)$. (3p)

Subiectul III (20 puncte)

Se consideră polinoamele $f = X^2 - 4X + 2 \in \mathbb{R}[X]$, funcția $g : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$,

$$g(X) = X^2 - 4X + 2I_2 \text{ și matricea } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

- a) Să se arate că dacă x_1 și x_2 sunt rădăcinile polinomului f , atunci $a = x_1^2 + x_2^2$ este un număr natural. (4p)
- b) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A . (4p)
- c) Să se arate că $g(A) = O_2$. (4p)
- d) Să se arate că $g(I_2) = f(1) \times I_2$. (2p)
- e) Să se arate că matricea $B = f(1) \times I_2$ este inversabilă. (2p)
- f) Să se arate că există o matrice $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $g(I_2) - g(A) = (I_2 - A) \times C$. (2p)
- g) Să se arate că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ este o matrice pentru care $g(X) = O_2$, atunci matricea $I_2 - A$ este inversabilă. (2p)

Subiectul IV (20 puncte)

Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^8$,
 $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^9 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, și

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^9}{9}.$$

- a) Să se calculeze $f(-1)$ și $g(-1)$. (4p)
- b) Să se verifice dacă $(x + 1)f(x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (4p)
- c) Să se arate că dacă $x < -1$, atunci $g(x) < 0$ și dacă $x > -1$, atunci $g(x) > 0$. (4p)
- d) Să se arate că $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (2p)
- e) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f pe \mathbb{R} . (2p)
- f) Să se arate că funcția F este strict crescătoare pe \mathbb{R} . (2p)
- g) Să se arate că funcția F este bijectivă. (2p)

Notă: Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Nota finală se calculează împărțind punctajul obținut la 10.

Testul 6

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.

Subiectul I (20 puncte)

- a) Să se determine distanța dintre punctele $A(-2; 5)$ și $B(1; 1)$. (4p)
- b) Să se arate că punctele $M(1; 1)$, $N(2; 3)$ și $P(4; 7)$ sunt coliniare. (4p)
- c) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, dacă $1 + (a + b)xi = a + 3xi$,
unde $i^2 = -1$. (4p)
- d) Să se determine $\sin(\hat{A})$ dacă în triunghiul ABC avem:
- $$5 \times m(\hat{A}) = m(\hat{B}) + m(\hat{C}). \quad (4p)$$
- e) Să se dea un exemplu de numere $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, pentru care $\sin x = \sin y$. (2p)
- f) Să se demonstreze că vectorii $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt perpendiculari. (2p)

Subiectul II (30 puncte)

1. Se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 - X + 1 \in \mathbb{C}[X]$, care are rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.
- a) Să se afle probabilitatea ca un element al mulțimii $\{-1; 0; 1\}$ să fie rădăcină a polinomului f . (3p)
- b) Să se afle câtul și restul împărțirii polinomului f la binomul $X + 1$. (3p)
- c) Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_3$. (3p)
- d) Să se afle valoarea expresiei $\frac{1}{x_1 \times x_2} + \frac{1}{x_2 \times x_3} + \frac{1}{x_1 \times x_3}$. (3p)
- e) Să se rezolve în intervalul $(0, +\infty)$ ecuația $f(\log_3 x) = 0$. (3p)
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2007^x + x^2$.
- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. (3p)
- b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. (3p)
- c) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$. (3p)
- d) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $(0, +\infty)$. (3p)
- e) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$. (3p)

Subiectul III (20 puncte)

Se consideră matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } C = A \times B - B \times A.$$

- a) Să se afle matricele A^2 și B^2 . (4p)
- b) Să se arate că $A \times B \neq B \times A$. (4p)
- c) Să se calculeze determinantul și rangul matricei A . (4p)
- d) Să se determine matricea C^2 . (2p)
- e) Să se arate că matricea C este inversabilă și să se calculeze inversa sa. (2p)
- f) Să se determine suma elementelor matricei $C + C^2 + C^3 + \dots + C^{2007}$. (2p)
- g) Să se arate că există matricele $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), X \neq Y$, astfel încât are loc relația $A \times X = B \times Y$. (2p)

Subiectul IV (20 puncte)

Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 + \arcsin(\sin x)$ și

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- a) Să se verifice dacă $f(x + 2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. (4p)
- b) Să se calculeze $f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. (4p)
- c) Să se arate că $2 - \frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq 2 + \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. (4p)
- d) Să se arate că nu există $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. (2p)
- e) Să se arate că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe \mathbb{R} . (2p)
- f) Să se verifice dacă $F(x) = 2x + \frac{x^2}{2}, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. (2p)
- g) Să se arate că $F(\sqrt{2006}) < F(\sqrt{2007})$. (2p)

Notă: Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Nota finală se calculează împărțind punctajul obținut la 10.

Testul 7

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.

Subiectul I (20 puncte)

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(-2; 0)$, $B(4; 0)$ și $C(0; 6)$.

- a) Să se calculeze lungimea segmentului BC . (4p)
- b) Să se calculeze aria triunghiului ABC . (4p)
- c) Să se calculeze lungimea medianei duse din vârful C . (4p)
- d) Să se determine coordonatele punctului $D(a; b)$ astfel încât $ABCD$ să fie paralelogram. (4p)
- e) Să se calculeze aria paralelogramului $ABCD$. (2p)
- f) Să se determine vectorul de poziție \overline{OD} , unde $D(2; -6)$, în funcție de versorii \vec{i} și \vec{j} ai axelor de coordonate. (2p)

Subiectul II (30 puncte)

1. Se consideră polinomul

$$f = (X + 1)^{10} = a_{10}X^{10} + a_9X^9 + \dots + a_1X^1 + a_0 \in \mathbb{C}[X].$$

- a) Să se determine a_7 . (3p)
- b) Să se calculeze $f(-1)$. (3p)
- c) Să se calculeze $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$. (3p)
- d) Să se calculeze $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$. (3p)
- e) Să se calculeze $(X + 1)^4 = g$. (3p)

2. Se consideră funcția $f: (-2; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$.

- a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3}$. (3p)
- b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. (3p)
- c) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$. (3p)
- d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x)$. (3p)
- e) Să se determine ecuației asimptotei orizontale a funcției f . (3p)

Subiectul III (20 puncte)

1. Fie $M = (2; +\infty)$ și legea de compoziție $*$: $M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow x * y$,

unde $x * y \stackrel{\text{def}}{=} 2xy + 2x + 2y + 1$.

a) Să se determine elementul neutru al acestei legi. (4p)

b) Să se determine simetricul x' al unui element $x \in M$. (4p)

c) Să se rezolve în M ecuația $x * x * x = 10$. (4p)

2. Se consideră matricele $A, B, I_3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } B = I_3 - A.$$

a) Să se calculeze A^2 și A^3 . (2p)

b) Să se arate că $B^2 = I_3 - 2A$. (2p)

c) Să se arate că $B + B^2 - B^3 = I_3$. (2p)

d) Să se determine B^{-1} , inversa matricei B . (2p)

Subiectul IV (20 puncte)

Se consideră șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{5x+7} dx$.

a) Să se calculeze I_0 și I_1 . (4p)

b) Să se arate că $5I_{n+1} + 7I_n = \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. (4p)

c) Să se arate că $I_n \geq I_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. (4p)

d) Să se deducă inegalitățile $\frac{1}{12(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{12n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. (2p)

e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$. (2p)

f) Să se calculeze $f'(x)$ dacă $f(x) = \frac{1}{5x+7}$, $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{7}{5} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$. (2p)

g) Să se determine ecuația asimptotei verticale pentru funcția f . (2p)

Notă: Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Nota finală se calculează împărțind punctajul obținut la 10.

Testul 8

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.

Subiectul I (20 puncte)

- a) Să se calculeze distanța dintre punctele $A(-3; 3)$ și $B(4; -4)$. (4p)
- b) Să se calculeze aria triunghiului OAB . (4p)
- c) Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{1-i}{1+i}$. (4p)
- d) Să se calculeze partea imaginară a numărului complex $z = (1-i)(1+2i)$. (4p)
- e) Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele $M_1(2; 4)$ și $M_2(2; 6)$. (2p)
- f) Să se determine vectorul de poziție al punctului $M(2; -6)$ în reperul (O, \vec{i}, \vec{j}) . (2p)

Subiectul II (30 puncte)

1. Pe mulțimea $M = (-4; +\infty)$ se definește operația
 $*$: $M \times M \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x * y$,
unde $x * y \stackrel{\text{def.}}{=} xy + 4x + 4y + 12$.
- a) Să se demonstreze că „ $*$ ” este o lege de compoziție internă. (3p)
- b) Să se determine, dacă există, elementul neutru al legii „ $*$ ”. (3p)
- c) Să se calculeze $x * x * x$. (3p)
- d) Să se determina cardinalul mulțimii $\{x \in M / x * 2 = 60\}$. (3p)
- e) Să se determine x' , simetricul elementului $x \in M$ în raport cu legea „ $*$ ”. (3p)
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - x + 1$.
- a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbb{R}$. (3p)
- b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$. (3p)
- c) Să se afle câte puncte de extrem local are funcția f . (3p)
- d) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (3p)
- e) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)}$. (3p)

Subiectul III (20 puncte)

Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

a) Să se rezolve ecuația matriceală $AX = B$. (4p)

b) Să se rezolve ecuația matriceală $XA - AX = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$. (4p)

c) Să se calculeze AB și BA . (4p)

d) Să se afle numerele reale x și y care verifică ecuația:

$$(1 + i)x + (2 - 3i)y = 4 - i. \quad (2p)$$

e) Să se calculeze $z = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$. (2p)

f) Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ formează o progresie aritmetică, atunci și $a^2 - bc, b^2 - ca, c^2 - ab$ formează o progresie aritmetică. (2p)

Subiectul IV (20 puncte)

Se consideră $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+2x+1)}$.

a) Să se verifice că $f(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (4p)

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. (4p)

c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale a graficului funcției f . (4p)

d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$. (2p)

e) Să se determine mulțimea M pentru care funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow M$,

$$g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} \text{ este surjectivă.} \quad (2p)$$

f) Să se rezolve inecuația $2^{3n+2} \leq 256$. (2p)

g) Să se demonstreze că $\frac{x+y}{1+xy} \in (-1; 1)$, $\forall x \in (-1; 1)$. (2p)

Notă: Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Nota finală se calculează împărțind punctajul obținut la 10.

Testul 9

varianta dată la examenul de bacalaureat 2005, programa M2

Subiectul I (30 puncte)

Pentru subiectele 1-16, scrieți doar răspunsurile pe foaia de examen.

1. Câte funcții $f: \{a; b\} \rightarrow \{1; 2; 3\}$ au proprietatea $f(a) < f(b)$? (3p)
 2. Care este probabilitatea ca un element n din mulțimea $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ să verifice relația $n^2 < n!$? (3p)
 3. Câte soluții reale are ecuația $2^x + 2 = 0$? (3p)
 4. Care este valoarea sumei $1 + 5 + 9 + 13 + \dots + 49$? (3p)
 5. Dacă funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ au expresiile $f(x) = 2x + 3$ și $g(x) = 3x + 2$, cât este $(g \circ f)(-1)$? (3p)
- Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x$.
6. Cât este $f'(x), x \in (0, +\infty)$? (3p)
 7. Cât este $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$? (3p)
 8. Câte asimptote verticale are graficul funcției f ? (3p)
 9. Cât este $\int_0^1 e^x dx$? (3p)
 10. Cât este $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 3}{3n + 2}$? (3p)

Subiectul II (20 puncte)

11. Cât este distanța de la punctul $A(1, 1)$ la punctul $B(2, 2)$? (4p)
12. Care este ecuația dreptei care trece prin punctele $A(1, 1)$ și $B(2, 2)$? (4p)
13. Cât este aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime $\sqrt{3}$? (4p)
14. Cât este conjugatul numărului complex $2 + 3i$? (4p)
15. Cât este $\cos^2 1 + \sin^2 1$? (4p)
16. Dacă în triunghiul $ABC, AB = 2, AC = 3$ și $m(\sphericalangle BAC) = \frac{\pi}{3}$, cât este BC ? (4p)

Pentru subiectele III și IV, se cer rezolvările complete.

Subiectul III (20 puncte)

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și polinomul

$$f(X) = X^2 - 6X + 5.$$

- a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x) = 0$. (4p)
- b) Să se calculeze determinantul matricei A . (4p)
- c) Să se calculeze matricea A^2 . (4p)
- d) Să se verifice că $f(A) = O_2$, unde prin $f(A)$ înțelegem matricea $A^2 - 6A + 5I_2$. (2p)
- e) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. (4p)
- f) Să se arate că $A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5^n + 1 & 5^n - 1 \\ 5^n - 1 & 5^n + 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. (4p)

Subiectul IV (20 puncte)

Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [0, +\infty)$. (4p)
- b) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$. (4p)
- c) Să se verifice dacă $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$. (4p)
- d) Să se arate că, dacă $x, y \in [0, +\infty)$, $x \neq y$, atunci $|f(x) - f(y)| < |x - y|$. (2p)
- e) Să se calculeze integrala $\int_0^1 f(x) dx$. (4p)
- f) Să se arate că $\left| \frac{p}{q} - \sqrt{2} \right| < \left| \frac{p+2q}{p+q} - \sqrt{2} \right|$, $\forall p, q \in \mathbb{N}^*$. (2p)

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Nota finală se calculează împărțind punctajul obținut la 10.

Testul 10

varianta dată la examenul de bacalaureat 2006, programa M2

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete.

Subiectul I (30 puncte)

- a) Să se calculeze distanța de la punctul $A(0, 2)$ la punctul $B(2, 0)$. (4p)
- b) Să se calculeze $\cos^2 101 + \sin^2 101$. (4p)

- c) Să se calculeze aria unui triunghi echilateral cu latura de lungime 6. (4p)
- d) Să se determine conjugatul numărului complex $2 + 5i$. (4p)
- e) Să se calculeze $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât punctele $A(0, 2)$ și $B(2, 0)$ să fie pe dreapta de ecuație $x + ay + b = 0$. (2p)
- f) Dacă în triunghiul ABC , $AB = 8, AC = 8$ și $m(\sphericalangle BAC) = \frac{\pi}{2}$, să se calculeze BC . (2p)

Subiectul II (20 puncte)

1. a) Să se calculeze determinantul $\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$. (3p)

- b) Să se calculeze probabilitatea ca un element $n \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$ să verifice relația $4^n < 20$. (3p)
- c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 4 = 0$. (3p)
- d) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale strict pozitive ecuația $\log_9 x = 1$. (3p)
- e) Să se calculeze expresia $E = C_7^2 - C_7^5$. (3p)

2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$. (3p)
- b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$. (3p)
- c) Să se arate că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$. (3p)
- d) Să se calculeze $\int_1^2 f'(x) dx$. (3p)
- e) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3}{3n + 2}$. (3p)

Subiectul III (20 puncte)

Se consideră polinoamele $f = X^2 + 5X + 7$ și $g = X^2 + 5X + 6$.

- a) Să se determine rădăcinile complexe ale polinomului f . (4p)
- b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $x^2 + 5x + 6 < 0$. (4p)
- c) Să se verifice identitatea $\frac{1}{g(n)} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. (4p)
- d) Să se calculeze suma $S = \frac{1}{g(1)} + \frac{1}{g(2)} + \dots + \frac{1}{g(2006)}$. (2p)
- e) Să se verifice dacă $f = \left(X + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$. (2p)

- f) Să se arate că pentru orice două polinoame $s, t \in \mathbb{R}[X]$, avem relația $g \neq s^2 + t^2$. (2p)
- g) Să se găsească două polinoame $u, v \in \mathbb{C}[X]$, avem încât să avem relația $g = u^2 + v^2$. (2p)

Subiectul IV (20 puncte)

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$. (4p)
- b) Să se verifice dacă $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, și $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (4p)
- c) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f . (4p)
- d) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$. (2p)
- e) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} . (2p)
- f) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $f(x) + f(x + 1) = 1 + e$. (2p)
- g) Să se arate că există două funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, strict crescătoare, astfel încât $f(x) = g(x) - h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (2p)

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Nota finală se calculează împărțind punctajul obținut la 10.

Indicații și răspunsuri

Partea I: Elemente de algebră	202
<i>Capitolul 1:</i> Grupuri	202
<i>Capitolul 2:</i> Inele și corpuri	206
<i>Capitolul 3:</i> Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (\mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{Z}_p , p prim)	209
Partea a II-a: Elemente de analiză matematică	212
<i>Capitolul 2:</i> Primitive (antiderivate)	212
<i>Capitolul 3:</i> Integrala definită	213
<i>Capitolul 4:</i> Aplicații ale integralei definite	217
Partea a III-a: Pregătire pentru examenul de bacalaureat	217
1. Teste de sinteză	217
2. Teste pregătitoare pentru examenul de bacalaureat	232

PARTEA I: ELEMENTE DE ALGEBRĂ

Capitolul 1. Grupuri

pag. 12

1. $H = \mathbb{Z}[i]$, $z_1, z_2 \in H$; $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$; $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$;

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i \in H.$$

2. $x, y \in M$, $x > 1, y > 1$; $x * y = (x + 1)(y + 1) + 1 > 0$.

3. $x, y \in (-1, 1)$, $x * y = \frac{x+y}{1+xy} \in (-1, 1)$.

4.

max	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

5. $A, B \in H$, $A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & 0 & 2xy \\ 0 & 0 & 0 \\ 2xy & 0 & 2xy \end{pmatrix}$

6. $H = \{1, 3, 5, 15\}$

*	1	3	5	15
1	1	1	1	1
3	1	3	1	3
5	1	1	5	5
15	1	3	5	15

7. $H = (1, 3)$. $x * y = (x - 2)(y - 2) + 2$, $1 < x < 3$, $1 < y < 3$; $-1 < x - 2 < 1$;

$$-1 < y - 2 < 1; |x - 2| < 1; |y - 2| < 1, |x - 2| |y - 2| < 1;$$

$$|(x - 2)(y - 2)| < 1, -1 < (x - 2)(y - 2) < 1, 1 < (x - 2)(y - 2) + 2 < 3,$$

$$x * y \in (1, 3).$$

8. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; H = \{I, A, A^2\}.$$

.	I	A	A ²
I	I	A	A ²
A	A	A ²	I
A ²	A ²	I	A

$$9. A_\alpha \cdot A_\beta = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \in H.$$

$$10. H = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\};$$

(a, b)	1	2	3	4	6	12
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	2
3	1	1	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2	4
6	1	2	3	2	6	6
12	1	2	3	4	6	12

$[a, b]$	1	2	3	4	6	12
1	1	2	3	4	6	12
2	2	2	6	4	6	12
3	3	6	3	12	6	12
4	4	4	12	4	12	12
6	6	6	6	12	6	12
12	12	12	12	12	12	12

pag. 16

$$1. x, y, z \in 2\mathbb{Z}, x = 2k_1, y = 2k_2, z = 2k_3; (x + y) + z = (2k_1 + 2k_2) + 2k_3 = 2(k_1 + k_2 + k_3) = x + (y + z); (xy)z = (2k_1 \cdot 2k_2) \cdot 2k_3 = 2k_1(2k_2 \cdot 2k_3) = x(yz).$$

$$2. x = 2k_1 + 1, y = 2k_2 + 1, z = 2k_3 + 1; (xy)z = x(yz); \text{ dar } x + y \in 2\mathbb{Z} + 1.$$

$$3. x, y \in (1, 2); x * y = (x - 1)(y - 1) + 1 \in (1, 2); (x * y) * z = x * (y * z).$$

$$4. x, y \in (-1, 1); x * y \in M, (x * y) * z = x * (y * z).$$

$$5. x, y \in (-1, 1), x * y = \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)} + 1 \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1);$$

„*“ asociativă pentru $H = (1, +\infty)$.

$$6. A_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}; A_1 A_2 = \begin{pmatrix} x_1 x_2 + y_1 y_2 & x_1 y_2 + y_1 x_2 \\ x_2 y_1 + x_1 y_2 & y_1 y_2 + x_1 x_2 \end{pmatrix}, A_1, A_2 \in H.$$

$$(AB)C = A(BC).$$

$$7. x, y \in \mathbb{Z}, x \circ y = 1 - (1 - x)(1 - y) \in \mathbb{Z}; (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z).$$

$$8. x, y \in \mathbb{R}, x * y = x + y + xy \in \mathbb{R}, (x * y) * z = x * (y * z).$$

$$9. (x * y) * z = (mx + y) * z = m(mx + y) + z = m^2 x + my + z;$$

$$x * (y * z) = x * (my + z) = mx + my + z, m^2 = m, m(m - 1) = 10.$$

$$10. \text{Exemplu: } x \circ y = x + y - 1, \text{ adică } a = 1 \text{ și } b = 1.$$

pag. 19

$$1. e = -1, e * x = x * e = x, e = -1 \in M. 2. e = 0.$$

$$3. x * y = (x - 6)(y - 6) + 6; 5 \leq x \leq 7; 5 \leq y \leq 7; -1 \leq x - 6 \leq 1;$$

$$-1 \leq x - 6 \leq 1, |x - 6| \leq 1, |y - 6| \leq 1, |(x - 6)(y - 6)| \leq 1, -1 \leq (x - 6)(y - 6) \leq 1,$$

$$5 \leq (x - 6)(y - 6) \leq 7, x * y \in [5, 7], e = -7.$$

$$4. z_1 * z_2 = (z_1 + i)(z_2 + i) - i, e = 1 - i.$$

5. $x * y = 3(x + 2)(y + 2) - 2$, $e = -\frac{5}{3}$. 10. $u = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

pag. 23

1.	·	-1	1	i	-i	(-1) ⁻¹ = -1
	-1	1	-1	-i	i	1 ⁻¹ = 1
	1	-1	1	i	-i	i ⁻¹ = -i
	i	-i	i	-1	1	(-i) ⁻¹ = i
	-i	i	-i	1	-1	

2. $(x * y) * z = x * (y * z)$; $e = -1$; $x' = \frac{x+3}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

3. $e = 0$, $x + x' - 2xx' = 0$, $x'(2x - 1) = x$, $x' = \frac{x}{2x-1}$, $x \in \mathbb{Q} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

4. $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$, $e = 4$; $(x - 3)(x' - 3) + 3 = 4$, $x' - 3 = \frac{1}{x-3}$,
 $x' = 3 + \frac{1}{x-3}$, $\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{3\}$.

pag. 24

1. $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$; $x \circ y = y \circ x$. 2. $x * y = y * x$.
 10. a) $x, y \in M$, $x * y \in M$; b) $(x * y) * z = x * (y * z)$; c) $x * y = y * z$.

pag. 25

Test A

1. a) $(x * y) * z = x * (y * z) = x + y - 4$; b) $e = 2$; c) $x' = 4 - x$; d) $x * y = y * x$.
 2. a) $(x * y) * z = x * (y * z) = x^{25 \ln y \ln z}$; b) $e_* = \sqrt[5]{e}$, $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; c) $x' = e^{\frac{1}{25 \ln x}}$;
 d) $x^{5 \ln y} = y^{5 \ln x}$.

Test B

1. a) $(x * y) * z = x * (y * z) = x + y + z - 6$; b) $e = 3$; c) $x' = 6 - x$; d) $x * y = y * x$.
 2. a) $(x * y) * z = x * (y * z) = x^{49 \ln y \ln z}$; b) $e_* = \sqrt[7]{e}$, $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; c) $x' = e^{\frac{1}{49 \ln x}}$;
 d) $x^{7 \ln y} = y^{7 \ln x}$.

pag. 32

1. $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $S_2 = \{e, \sigma\}$.

o	e	σ
e	e	σ
σ	σ	e

2. $\hat{x} + \hat{y} = \hat{y} + \hat{x}$, $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_6$; $\hat{x} = \hat{2} \neq \hat{0}$; $\hat{y} = \hat{3} \neq \hat{0}$, dar $\hat{x} \hat{y} = \hat{0}$.

Nu există $\hat{2}^{-1}$, $\hat{3}^{-1}$.

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

unde $e = \hat{0}$, $-\hat{0} = \hat{0}$, $-\hat{1} = \hat{5}$, $-\hat{2} = \hat{4}$,
 $-\hat{3} = \hat{3}$, $-\hat{4} = 2$, $-\hat{5} = 1$.

pag. 33

1. $x * y = 3 - \frac{1}{3}(x-3)(y-3) \neq 3$; $e = 0$, $x' = 3 + \frac{9}{x-3}$.

2. $x * y = \underbrace{(x-2)^{\frac{1}{2}\ln(y-2)}}_{>0} + \underbrace{2}_{>0} \neq 3$; **a)** $(x-2)^{\frac{1}{4}\ln(y-2)\ln(x-2)}$;

b) $e_* = e^2 + 2$, $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; **c)** $x' = 2 + e^{\frac{4}{\ln(x-2)}}$.

3. $k = 0$, $x * y = x + y$. 4. $a = b = 1$. 5. $e = -1$, $x' = \frac{2x+3}{x+2}$.

6.
$$\begin{array}{c|cccc} \circ & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ \hline f_1 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_2 & f_2 & f_3 & f_4 & f_1 \\ f_3 & f_3 & f_4 & f_1 & f_2 \\ f_4 & f_4 & f_1 & f_2 & f_3 \end{array}$$

7. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2 \neq 0$.

8. $E = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = 1$.

9. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} x & 2y \\ \frac{7}{2}y & x \end{vmatrix} = x^2 - 7y^2 = 1 \neq 0$.

10.

$$\begin{array}{c|ccc} \circ & f_1 & f_2 & f_3 \\ \hline f_1 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_2 & f_2 & f_3 & f_1 \\ f_3 & f_3 & f_1 & f_2 \end{array}$$

11. $e_* = 0$, $x' = -x$.

pag. 39

Test A

a) (G, \times) este grup, $e = 1 + 0 \times i$; (Γ, \times) este grup, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $f(z_1 z_2) = f(z_1) \times f(z_2)$;

c) $f^{-1}(AB) = f^{-1}(A) \times f^{-1}(B)$, $f \circ f^{-1} = 1_C$.

Test B

$f_1(x) \leftrightarrow 1$, $f_2(x) \leftrightarrow \varepsilon$, $f_3(x) \leftrightarrow \varepsilon^2$.

Capitolul 2. Inele și corpuri

pag. 45

Efectuați în clasă:

1. Avem $z_1 = x_1 + y_1\sqrt{2}$, $z_2 = x_2 + y_2\sqrt{2}$; $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbf{Z} \Rightarrow x_1 + y_1 \in \mathbf{Z}, x_2 + y_2 \in \mathbf{Z}$, obținem $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{2}$, deci $z_1 + z_2 \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$. Analog $z_1 z_2 \in \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$. Se verifică axiomele G_1, G_2, G_3, G_4 ale grupului $(\mathbf{Z}[\sqrt{2}], \times)$, unde, pentru $z = x + y\sqrt{2}$, $x, y \in \mathbf{Z}$, avem $-z = -x - y\sqrt{2}$. Se verifică axiomele monoidului comutativ $(\mathbf{Z}[\sqrt{2}]; \times)$, M_1, M_2, M_4 și D: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$. Rezultă că $(\mathbf{Z}[\sqrt{2}], \times)$ este structură de inel comutativ.

2. Dacă $A_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 2y_1 & x_1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 2y_2 & x_2 \end{pmatrix}$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbf{Z}$, deducem $A_1 + A_2, A_1 A_2 \in M$.

Se verifică axiomele G_1, G_2, G_3, G_4 ale grupului $(M, +)$, unde $-A = \begin{pmatrix} -x_1 & -y_1 \\ -2y_1 & -x_1 \end{pmatrix}$ este

opusa matricei A , și axiomele monoidului (M, \times) , respectiv axioma D:

$$A_1(A_2 + A_3) = A_1 A_2 + A_1 A_3.$$

pag. 46

1. $(\mathbf{C}, +)$ este grupul cunoscut, grupul aditiv al numerelor complexe. Se verifică axiomele monoidului comutativ $(\mathbf{C}, *)$, M_1, M_2, M_3 și axioma D:

$$z_1 * (z_2 + z_3) = z_1 * z_2 + z_1 * z_3.$$

2. $(A, +)$ este grupul abelian. Sunt verificate axiomele G_1, G_2, G_3 , $-A = \begin{pmatrix} -a & -x \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ este

opusa matricei A , G_4 , axiomele monoidului (A, \times) și axioma D.

3. Se verifică axiomele inelului $G_1, G_2, G_3, G_4, M_1, M_2, M_4$ și D pentru fiecare inel $(A_1, +, \times)$ și $(A_2, +, \times)$.

4. Analog cu problem 3.

5. Se verifică axiomele inelului. Să se compare rezultatele obținute cu cele de la problema 1.

pag. 49

Pentru toate problemele propuse se va demonstra că tripletele sunt structuri algebrice de inel și apoi se vor pune în evidență axiomele necesare ca fiecare structură să fie corp.

1. $(\mathbb{R}, *, \times)$ este inel comutativ. În plus, este verificată și axioma M_3 : oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^*$

$$\text{există } x^{-1}, x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

2. $(\mathbb{R}, *, \Delta)$ este inel comutativ. În plus, este verificată și axioma M_3 : există elementele

$$\text{neutre } e_{\Delta} = \frac{5}{2} \text{ și } e_* = 2; \text{ există } x_{\Delta}', x_{\Delta}' = \frac{8x-15}{4(x-2)} \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}^*, x \neq 2 = e_*.$$

Este verificată și axioma M_4 : $x \Delta y = y \Delta x$, deci $(\mathbb{R}, *, \Delta)$ este grup comutativ.

3. $(\mathbb{Q}, \Delta, \nabla)$ este inel comutativ. În plus, este verificată și axioma M_3 : există elementele

$$\text{neutre } e_{\Delta} = 7 \text{ și } e_{\nabla} = 8; \text{ există } x_{\nabla}', x_{\nabla}' = 7 + \frac{1}{x-7} \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}^*, x \neq 7 = e_{\Delta}.$$

Este verificată și axioma M_4 : $x \nabla y = y \nabla x$, deci $(\mathbb{Q}, \Delta, \nabla)$ este corp comutativ.

4. $(\mathbb{R}, *, \perp)$ este inel comutativ. În plus, este verificată și axioma M_3 : există elementele

$$\text{neutre } e_{\perp} = \frac{3}{2} \text{ și } e_* = 1; \text{ există } x_{\perp}', x_{\perp}' = 1 + \frac{1}{4(x-1)} \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}^*, x \neq 1 = e_*.$$

Deci $(\mathbb{R}, *, \perp)$ este o structură de corp.

5. $(K, +, \times)$ este inel. În plus, este verificată și axioma M_3 : există elementele neutre

$$e_+ = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } e_{\times} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ există } A^{-1}, \det A = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2 & z_1 \end{vmatrix} = z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} \neq 0.$$

Rezultă că $(K, +, \times)$ este o structură de corp.

6. $(K, +, \times)$ este inel. În plus, este verificată și axioma M_3 : există elementele neutre

$$e_+ = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } e_{\times} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ există } A^{-1}, A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times A^*, \text{ deoarece oricare}$$

$$\text{ar fi } x, y \in \mathbb{R}, \text{ avem } \det A = \begin{vmatrix} x+2y & y \\ -5y & x-2y \end{vmatrix} = x^2 - 4y^2 + 5y^2 = x^2 + y^2 \neq 0. \text{ Rezultă că}$$

$(K, +, \times)$ este corp.

7. $(K, \times, *)$ este inel comutativ. În plus, este verificată și axioma M_3 : există elementele

$$\text{neutre } e_* = e^3, e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \text{ și } e_{\times} = 1; \text{ există } x^{-1} = \frac{1}{x} \text{ și } x' = e^{\frac{9}{\ln x}}, \text{ oricare ar fi}$$

$x \in \mathbb{R}, x \neq 1 = e_{\times}$. Rezultă că $(K, \times, *)$ este o structură de corp.

8. $(K, +, \times)$ este inel comutativ. În plus, este verificată și axioma M_3 : există elementele

neutre $e_+ = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $e_- = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; există A^{-1} , $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times A^*$, deoarece

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, avem $\det A = \begin{vmatrix} x & y \\ -y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2 \neq 0$. Rezultă că $(K, +, \times)$ este corp.

9. $(K_1, +, \times)$ și $(K_2, +, \times)$ sunt structuri de inel. În plus, este verificată și axioma M_3 : există elementele neutre $e_{K_1+} = 0 + 0 \times \sqrt{5} = 0$, $e_{K_1\cdot} = 1 + 0 \times \sqrt{5} = 1$, $e_{K_2+} = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și

$e_{K_2\cdot} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; există A^{-1} , $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times A^*$ deoarece oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, avem

$\det A = \begin{vmatrix} x & 5y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 - 5y^2 \neq 0$. Rezultă că $(K_2, +, \times)$ este o structură de corp.

De asemenea, pentru $z = x + y\sqrt{5}y \in K_1$, avem $z' = -z = -x - y\sqrt{5}$ și

$$z_{K_1+}^{-1} = \frac{1}{x + y\sqrt{5}} = \frac{x}{x^2 - 5y^2} - \frac{y}{x^2 - 5y^2} \sqrt{5}; z_{K_1\cdot}^{-1} \in K_1.$$

10. $(\mathbb{R}, \circ, *)$ este inel. În plus, este verificată și axioma M_3 : există elementele neutre $e_0 = 2$ și $e_* = 3$; există $x_*' = 2 + \frac{1}{x-2} \in \mathbb{R}$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2 = e$. Rezultă că $(\mathbb{R}, \circ, *)$ este corp.

11. a) Pentru $z = 1$, se obține $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, iar pentru $z = 0$, se obține $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$;

b) Dacă $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, din $\begin{vmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{vmatrix} = 0$ rezultă implicațiile: $z \bar{z} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow z = 0$;

c) Fie $A_1 = \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in G$ și $A_2 = \begin{pmatrix} z_2 & 0 \\ 0 & \bar{z}_2 \end{pmatrix} \in G$. Rezultă $A_1 A_2 = \begin{pmatrix} z_1 z_2 & 0 \\ 0 & \bar{z}_1 \bar{z}_2 \end{pmatrix} \in G$;

d) Fie $A = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$, $A \neq O_2$, cu $\det A = \begin{vmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{vmatrix} = z \bar{z} = x^2 + y^2 \neq 0$. Atunci există matricea

$$\text{inversă } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times A^* = \frac{1}{|z|^2} \times \begin{pmatrix} \bar{z} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix};$$

e) Dacă $X = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}$, atunci $X \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iz & 0 \\ 0 & \bar{z}i \end{pmatrix}$, respectiv

$$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iz & 0 \\ 0 & i\bar{z} \end{pmatrix}, \text{ unde } \bar{zi} = \overline{-zi};$$

f) Fie $AB = O_2$. Dacă $\det A \neq 0$, atunci matricea A este inversabilă și rezultă implicațiile: $A^{-1}(AB) = A^{-1}O_2 \Rightarrow (A^{-1}A)B = O_2 \Rightarrow I_2B = O_2$, deci $B = O_2$. Dacă $\det B \neq 0$, în mod analog, rezultă $A = O_2$;

g) Pentru $H = G \setminus \{O_2\}$, $A \in H$, avem $\det A \neq 0$, deci există matricea inversă A^{-1} astfel încât $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$. Sunt verificate axiomele corpului $(G, +, \cdot)$.

Capitolul 3. Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, p$ prim)

pag. 58

- a) $X^4 + X^2 + 1$; b) $X^4 + 3X^2 + 1$; c) $X^5 + 1$; d) $X^5 - 1$;
e) $(1 + i)X^3 + (3 - i)X^2 - 2X + 2(1 + i)$; f) $X^4 - 2X^3 + 4X^2 + 2..$
- $X^4 - 4X^3 + 2X^2 + 7X + 6$; $X^4 - 2X^3 - 12X^2 - 13X + 2$.
- $X^2 + 6X + 9$; $9X^2 - 6X + 1$; $3X^2 + 8X - 3$.
- $a = 2, b = -5, c = -2, f = 2(X + 2)^2 - 5(X + 2) - 2$.
- $f = 3X^2 + 20X + 34 = 3(X - 3)^2 + 38(X - 3) + 121, a = 3, b = 38, c = 121$.

pag. 62

- $q = 5X^2 - 7X + 12, r = -35X^2 - 24X - 36$.
- $q = 2X^3 + X^2 + 6X - 2, r = 10X - 5$.
- $q = X^2 + (2i - 1)X + 1, r = 0$.
- $q = iX^3 + 2X^2 - (1 + 5i)X + 5(i - 2), r = 9 + 19i$.
- $f = (X - \alpha)(X - \beta)q + aX + b, f(\alpha) = a\alpha + b, f(\beta) = a\beta + b,$
 $a = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}, b = \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{\alpha - \beta}.$

pag. 67

- a) $q = 3X^2 + X - 5, r = -4$; b) $q = X^4 - X^3 - 2X^2 + 2X - 8$;
c) $q = X^3 + X + 1, r = 0$; d) $2X^3 - 5X^2 + 12X - 24, r = 46$;
e) $q = 4X^3 - 8X^2 + 6X + 1, r = -\frac{3}{2}$; f) $q = X^2 + \frac{7}{2}X - \frac{15}{4}, r = \frac{23}{4}$;
g) $q = 2X^2 - 5X + 9, r = -15$; h) $q = 2X^4 - 3X^3 - 8X - 7, q = -4$;
i) $q = X^5 - 2X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 5, r = 7$; j) $q = X^4 + 2\sqrt{3}X^3 + X^2 + 3\sqrt{3} + 3, r = -\sqrt{3}$.
- Restul este $r = f(2) = 3$.

pag. 77

- a) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}: f = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$;
 $\mathbb{C}: f = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)$;

b) $\mathbb{R}: f = (X^2 - X\sqrt{2} + 1)(X^2 + X\sqrt{2} + 1);$

$\mathbb{C}: f = \left(X - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right);$

c) $\mathbb{R}: f = (X^2 + 1)^2 - (X\sqrt{3})^2 = (X^2 - X\sqrt{3} + 1)(X^2 + X\sqrt{3} + 1);$

$\mathbb{C}: f = \left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right);$

d) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}: f = (X - 1)(X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1);$

$\mathbb{C}: f = (X - 1)(X + 1)(X - \varepsilon)(X - \varepsilon^2)(X^2 + X + 1) =$

$= (X - 1)(X + 1)(X - \varepsilon)(X - \varepsilon^2)\left(X + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right), \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0, \varepsilon^3 = 1;$

e) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}: f = (X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1); \mathbb{R}: f = (X^2 + 1)(X^2 - X\sqrt{3} + 1)(X^2 + \sqrt{3} + 1);$

$\mathbb{C}: f = (X + i)(X - i)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(X - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(X + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right).$

2. $f(1) = 0, f = mX(X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1) - nX(X - 1)(X^{m-1} + X^{m-2} + \dots + X + 1) = X(X - 1)[m(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1) - n(X^{m-1} + X^{m-2} + \dots + X + 1)] = X(X - 1)h, h(1) = m \cdot n - n \cdot m = 0, (X - 1)^2 \mid f.$

4. $f(1) = 1^{2n} + 2^{2n} - (-2)^{2n} - 1^n = 1 + 2^{2n} - 2^{2n} - 1 = 0, (X - 1) \mid f.$

5. $f(1) = 1^n - n \cdot 1 + n - 1 = 1 - n + n - 1 = 0, X - 1 \mid f, f = (X^n - 1) - n(X - 1) = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1) - n(X - 1) = (X - 1)[(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1) - n] = (X - 1)g, g(1) = 0.$

6. $f(1) = 1 + m^2 - m^2 - m + m - 1 = 0, (X - 1) \mid f.$

7. $f(1) = 1^{2n} - n \cdot 1^8 + n \cdot 1^4 - 1 = 1 - n + n - 1 = 0, f(-1) = (-1)^{2n} - n(-1)^8 + n(-1)^4 - 1 = 1 - n + n - 1 = 0, (X^2 - 1) \mid f.$

8. $g(\alpha) = 0, \alpha^2 - \alpha + 1 = 0, \alpha^3 = -1, \alpha - 1 = \alpha^2;$

$f(\alpha) = (\alpha - 1)^{n+3} + \alpha^{2n+3} = (\alpha^2)^{n+3} + \alpha^{2n+3} = \alpha^{2n+6} + \alpha^{2n+3} = \alpha^{2n+3}(\alpha^3 + 1) = 0.$

9. $g(\alpha) = 0, \alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \alpha^3 = 1,$

$f(\alpha) = \alpha^{12n+2} + \alpha^{3n+1} + 1 = (\alpha^3)^{4n} \cdot \alpha^2 + (\alpha^3)^n \cdot \alpha + 1 = \alpha^2 + \alpha + 1 = 0.$

10. $g(\alpha) + 3\alpha + 3 = 0, f(\alpha) = (\alpha + 1)^{3n+2} + \alpha^2 + 2 = (\alpha + 1)^{3n}(\alpha + 1)^2 + \alpha^2 + 2 = [(\alpha + 1)^3]^n(\alpha + 1)^2 + \alpha^2 + 2 = (\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1)^n(\alpha^2 + 2\alpha + 1) + \alpha^2 + 2 = [\alpha(\alpha^2 + 3\alpha + 3) + 1]^n(\alpha^2 + 2\alpha + 1) + \alpha^2 + 2 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 + \alpha^2 + 2 = 2(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0.$

pag. 86

1. -1, 1, 3. 2. -1, 2, -4. 3. -3, -1, 1, 3. 4. 1, -2, 4, -8. 5. $m = 10, -1, -2, -3, -4.$

pag. 92

Efectuați în clasă: 1. -1, -2, 3. 2. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}.$ 3. $-i, i, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$ 4. $-i, i, -2i.$

Temă: 1. $-\frac{1}{2}, -2, -1$. 2. $-2, 3 - 2i, 3 + 2i$. 3. $-\frac{1}{2}, 2, -3, -\frac{1}{3}$. 4. $-2, 3, -1 - 2i, -1 + 2i$.

pag. 95

1. $\pm\sqrt{2}$. 2. $\pm i\sqrt{2}$. 3. $\sqrt[3]{3}, \varepsilon\sqrt[3]{3}, \varepsilon^2\sqrt[3]{3}, \varepsilon^3 = 1, \varepsilon^3 + \varepsilon + 1 = 0$.

4. $-\sqrt[3]{3}, -\varepsilon^2\sqrt[3]{3}; \varepsilon^3 = 1, \varepsilon^3 + \varepsilon + 1 = 0$. 5. $-1, 1, -i, i$. 6. $\pm(1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)$.

7. $-1, 1, -\varepsilon, \varepsilon, -\varepsilon^2, \varepsilon^2$. 8. $z_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{6} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{6}, k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

9. $(z^4 - 1)(z^4 + 1) = 0$ are soluțiile $-1, 1, \pm(1+i)\frac{\sqrt{2}}{2} - i, i, \pm(1-i)\frac{\sqrt{2}}{2}$.

10. $z^8 - i^2 = 0 \Leftrightarrow (z^4 - 1)(z^4 + 1) = 0$ are soluțiile:

$$z_k = \sqrt[8]{-1} = \sqrt[8]{\cos\pi + i\sin\pi} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{8} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{8}, k \in \{0; 1; 2; \dots; 7\}.$$

pag. 97

1. $3 \pm 2i, -3 \pm 2i$. 2. $\pm a, \pm\sqrt{ab}$. 3. $(x^2 - 2i + 1)(x^2 - 2i - 1) = 0$. 4. $\pm 2, \pm 3i$.

5. $\pm(a - b), \pm(a + b)$. 6. $\pm 1, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. 7. $\pm\frac{1}{2}, \pm i\sqrt{5}$. 8. $1, \varepsilon, \varepsilon^2, 2, 2\varepsilon, 2\varepsilon^2$.

9. $(x^3 - 1)(x^3 - i) = 0$. 10. $(x^2 - 3)(x^2 + 2) = 0$ are soluțiile $-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -i\sqrt{2}, i\sqrt{2}$.

pag. 99

Efectuați în clasă: 1. $-4, 4, -4i, 4i$. 2. $-3, -2, 2, 3$. 3. $-1, \frac{1}{2}$. 4. $-1, -e, -e^2$.

5. $(x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0; -1, 1, -\varepsilon, \varepsilon, -\varepsilon^2, \varepsilon^2$.

6. $(x^4 - 1)(x^4 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^2 - i)(x^2 + i) = 0$. 7. $-3, 3, -3i, 3i$.

Temă: 1. $-2, -1, 1$. 2. $\pm 3, \pm 4$. 3. $(x^3 - 1)(x^3 - 8) = 0$. 4. $-2, -1, -\frac{1}{2}$.

5. $(x + 1)(x^2 - 2ix + 1) = 0$. 6. $-1, \frac{1}{2}, 3$. 7. $-1, 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}$. 8. $\frac{1}{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$.

9. $1 + i, 1 - i, -\frac{2}{3}$. 10. $1 + 3i, -2 - i$.

pag. 100

Test A: 1. $(x^2 - 4i)(x^2 + 4i) = 0$. 2. $-4, -2, 2, 4$. 3. $-1, 1, 1$. 4. i . 5. $-2 + 4i, -2 - 4i$.

Test B: 1. $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0, -2, 2, -2i, 2i$. 2. $(x^2 + 4)(x^2 + 16) = 0, -4i, -2i, 2i, 4i$.

3. $(x + 1)(x^2 + 2ix + 2 + 2i) = 0$. 4. $-3, -2i$. 5. $\frac{-1+6i}{4}, \frac{-1-6i}{4}$.

PARTEA A II-A: ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Capitolul 2. Primitive (antiderivate)

pag. 113

1. a) f continuă și derivabilă pe \mathbb{R} ; b) f continuă și derivabilă pe \mathbb{R} ;
 c) f continuă pe \mathbb{R} și derivabilă pe \mathbb{R}^* ; d) f continuă pe \mathbb{R} și derivabilă pe \mathbb{R}^* .
2. a) $2x$; b) 0 ; c) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ($x \neq 0$); d) $4^x \ln 4$; e) $\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$);
 f) $8e^x - \frac{1}{x}$ ($x > 0$); g) $3 \cos x$; h) $4x^3 - 2 \cdot 4^x \ln 4$; i) $-7 \sin x - 6x^2$; j) $2x + \cos x$;
 k) $\frac{2007}{\cos^2 x}$; l) $\frac{1}{1+x^2}$.
3. $f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{dacă } n = 4k + 1, k \in \mathbb{N} \\ -\sin x, & \text{dacă } n = 4k + 2, k \in \mathbb{N} \\ -\cos x, & \text{dacă } n = 4k + 3, k \in \mathbb{N} \\ \sin x, & \text{dacă } n = 4k + 4, k \in \mathbb{N} \end{cases} \cdot 4. m = 3.$

pag. 119

1. a) $\frac{x^4}{4} + C$; b) $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$; c) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$; d) $\frac{2^x}{\ln 2} + C$; e) $\ln x + C$; f) $\frac{x^{e+1}}{e+1} + C$;
 g) $\ln(-x) + C$; h) $x + C$; i) $-\cos x + C$; j) $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$; k) $-\ln |\cos x| + C$;
 l) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$; m) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$; n) $\ln \left| x + \sqrt{x^2 - 4} \right| + C$;
 o) $\ln \left| x + \sqrt{x^2 + 4} \right| + C$; p) $\arcsin \frac{x}{2} + C$.

pag. 122

1. a) $\frac{x^3}{3}(x+1) + C$; b) $-\cos x + b \sin x + C$; c) $\frac{x^2}{2} + \ln x + C$; d) $\frac{x^2}{2} + \ln(-x) + C$;
 e) $\frac{1}{3} \arcsin 3x + C$; f) $\arcsin \frac{x}{2} + C$; g) $-\operatorname{ctg} x + 2 \operatorname{tg} x + C$; h) $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$;
 i) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x + C$; j) $\frac{3^x}{\ln 3} + e^x + C$; k) $\frac{1}{2} \ln \frac{-x+1}{x+1} + C$; l) $\frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} + C$;
 m) $\frac{2\sqrt{5}}{5} \ln \left| \frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}} \right| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$.

2. a) $\frac{x^8}{8} - x^6 + 2x^2 + 3x + C$; b) $\frac{3x^4 + 8x^3}{12} + C$; c) $x^2 + 2x\sqrt{x} + C$; d) $\frac{60}{23}x \times \sqrt[15]{x^8} + C$;
 e) $\frac{2^x}{\ln 2} + 3\ln x - x + C$; f) $\frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2}{4} + C$.
3. a) $\frac{5x^4}{4} - x^2 + 3x + C$; b) $\frac{x^6}{3} - \frac{3}{5}x^5 + x^3 + \frac{x^2}{2} - 4x + C$; c) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 5x + C$;
 d) $-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^4} + C$; e) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + x + C$; f) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - x^2 + x + C$;
 g) $\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}} + C$; h) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2x^2} + C$; i) $\ln\sqrt[5]{-x} + C$; j) $5e^x + C$; k) $\frac{3}{\ln 2} \times 2^x + C$;
 l) $\frac{x^{e+1}}{e+1} + x + C$; m) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} - \ln(x + \sqrt{x^2 + 16}) + C$;
 n) $\frac{1}{8}\ln\left(\frac{x-4}{x+4}\right) + 2\ln(x + \sqrt{x^2 - 16}) + C$.

pag. 123**Test A**

1. $x^3 + C$. 2. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$. 3. $-3\cos x + C$. 4. $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right| + C$.
 5. $\ln(x + \sqrt{x^2 + 25}) + C$. 6. $\arcsin\frac{x}{5} + C$. 7. $-2\ln|\cos x| + C$.

Test B

1. $x^2 + C$. 2. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{3}{4}x^3\sqrt{x} + C$. 3. $2\sin x + C$. 4. $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{5} + C$.
 5. $\ln(x + \sqrt{x^2 - 25}) + C$. 6. $5\arcsin x + C$. 7. $3\ln(\sin x) + C$.

Capitolul 3. Integrala definită**pag. 128**

1. a) $\frac{20}{3}$; b) $e - 1$; c) $\frac{\pi}{4}$; d) 1; e) 1; f) $\ln 2$; g) 18; h) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; i) $\ln\sqrt{2}$.
 2. a) $\frac{13}{3}$; b) 2; c) $\ln 2 - 2$.

pag. 132

1. a) $-x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \cos x + C$; b) $5 \frac{\sin^2 x}{2} - x + C$;
 c) $\frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + C$; d) $\frac{x}{2} [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C$.
 2. a) $e^x(x-1)$; b) $\frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + C$; c) $\frac{\ln^2 x}{2} + C$; d) $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$;
 e) $e^x(x^2 - x + 2) + C$; f) $(-x^2 + 2) \cos x + 2x \sin x + C$;
 g) $\frac{x\sqrt{x^2-9}}{2} - \frac{9}{2} \ln|x + \sqrt{x^2-9}| + C$; h) $\frac{x\sqrt{x^2+9}}{2} + \frac{9}{2} \ln|x + \sqrt{x^2+9}| + C$;
 i) $\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + \frac{3}{2} \arcsin \frac{x}{3} + C$.

pag. 133

- a) 1; b) π ; c) $2e^2 + 6$; d) $\pi - 2$; e) 1; f) 0.

pag. 139

1. a) $\frac{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}{3} + C$; b) $\frac{2}{9}(3e^t+2)^{\frac{3}{2}} + C$; c) $\frac{\ln^3 x}{3}$; d) $\ln(x^2+x+1) + C$.
 2. a) $\ln|\sin e^x| + C$; b) $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3} + C$; c) $\frac{\sin^3 x}{3} + C$; d) $-\frac{\cos^5 x}{5} + C$;
 e) $\frac{\ln^2(x+2)}{2} + C$; f) $\frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2} + C$; g) $\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$;
 h) $\frac{1}{2} \ln(x^2+2x+7) + C$; i) $\frac{1}{2} \ln(2 \sin x + 3) + C$; j) $\frac{(x^2+1)^{2003}}{2003} + C$;
 k) $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3 + C$; l) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C$; m) $\frac{1}{2} \arcsin x^2 + C$; n) $e^{\sin x} + C$;
 o) $\frac{1}{2} e^{x^2+8x-7} + C$; p) $\arcsin e^x + C$; q) $\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{a} + C$; r) $\frac{1}{2} \ln(2 \cos x + 3) + C$.

pag. 140

- a) 0; b) $\frac{52}{9}$; c) $\frac{4-\pi}{4}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{3}$; f) $\frac{2}{3}$; g) $\frac{e^2-1}{3}$; h) $\frac{\pi\sqrt{2}}{24}$; i) $\frac{\pi}{4ab}$; j) $\ln \frac{\sqrt{2}}{2}$.

pag. 147

1. a) $3 \ln|x+2| + C$; b) $-\frac{1}{2(x+2)^2} + C$; c) $\frac{2}{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{5} + C$; d) $\ln(x^2+25) + C$;
 e) $-\frac{1}{2(x^2+25)} + C$; f) $\frac{1}{50} \left(\frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{5} + \frac{x}{x^2+25} \right) + C$;
 g) $\frac{3}{2} \ln(x^2+25) - \frac{2}{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{5} + C$; h) $-\frac{3}{2(x^2+25)} - \frac{1}{125} \operatorname{arctg} \frac{x}{5} - \frac{x}{25(x^2+25)} + C$;

i) $\frac{1}{10} \operatorname{arctg} \frac{x}{5} - \frac{x}{2(x^2 + 25)} + C$; j) $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{x-5}{x+5} \right| + C$; k) $\frac{1}{2} \ln |x^2 - 25| + C$;

l) $-\frac{1}{2(x^2 - 25)} + C$; m) $-\frac{1}{50} \left(\frac{1}{10} \ln \left| \frac{x-5}{x+5} \right| + \frac{x}{x^2 - 25} \right) + C$;

n) $x - 5 \operatorname{arctg} \frac{x}{5} + C$; o) $\frac{x^2}{2} - \frac{25}{2} \ln(x^2 + 25) + C$; p) $\frac{2x^3}{3} - 51x + 255 \operatorname{arctg} \frac{x}{5} + C$.

2. a) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$; b) $x^2 e^x$; c) $\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{2x\sqrt{x}}$; d) $x^2 \ln x$.

3. $f(x) = 1 + x + \dots + x^n$; observăm că $f'(x) = S$, deci

$$S = \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right)' = \frac{1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} - nx^n}{1 - x}, \quad x \neq 1.$$

4. a) $\sqrt{x^2 + 1} + C$; b) $x^8 - x^7 + x^5 - 2x + C$; c) $\frac{\sqrt{x}}{10} (20 - x^2) + C$;

d) $e^x (x^2 - 2x + 2) + C$; e) $\frac{1}{2} [(x^2 + 1) \operatorname{arctg} x - x] + C$;

f) $\frac{1}{2} \left(x^2 \sin^2 x + \frac{x^2 \cos 2x}{2} - \frac{x \sin 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{4} \right) + C$;

g) $-\frac{\arcsin x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} + C$; h) $-\frac{1}{3} (1 - x^2) \sqrt{1 - x^2} + C$.

5. a) $I_n = x(\ln x)^n - nI_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > 2$;

b) $I_n = x^{n-1} (-x \cos x + n \sin x) - n(n-1)I_{n-2}$;

c) $I_n = x^n e^x - nI_{n-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

d) $I_n = x^{n-1} \sqrt{x^2 + 1} - (n-1)I_{n-2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > 2$.

6. Avem $F'(x) = f(x)$. Obținem $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

7. a) $\sqrt{x^2 - 25} + C$; b) $x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C$;

d) $-\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{3}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$; e) $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$.

8. a) $\frac{2}{3} \ln x \sqrt{\ln x} + C$; b) $\frac{1}{4} \arcsin x^4 + C$; c) $\ln(\ln x) + C$;

d) $x + \ln \left| x + \frac{1}{2} \right| + C$; e) $\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$; f) $\sqrt{x^2+1} + C$; g) $2\sin\sqrt{x} + C$;

i) $\frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\ln \left| \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right| + 2 \left(\operatorname{arctg} \frac{2x + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \operatorname{arctg} \frac{2x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right] + C$;

j) $\frac{x^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{\sqrt{|x^2+x+1|}} \right| + C$;

k) $\frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} e^x + \frac{e^x}{e^{2x}+1} \right) + C$; l) $\frac{e^{2x}}{2} - e^x + \ln(e^x + 1) + C$.

9. $I_n = -x^n e^{-x} + n I_{n-1}$; $I_3 = -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + C$.

pag. 149

Test A

1. $\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x + C$. 2. $\frac{(2x-3)^{2003}}{4006} + C$. 3. $\frac{1}{18}(x^3+1)^6 + C$. 4. $-\ln|\cos x| + C$.

5. $\frac{3}{2} \ln(x^2+4) + C$. 6. $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C$. 7. $\ln \frac{3}{2}$.

8. $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ln 4$.

Test B

1. $\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 + x + C$. 2. $\frac{(3x-2)^{2003}}{6009} + C$. 3. $\frac{(x^3-1)^5}{15} + C$. 4. $\ln|\sin x| + C$.

5. $\ln(x^2+1) + C$. 6. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + C$. 7. $2 \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{2}$.

8. $1 - \ln \sqrt[3]{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

Capitolul 4. Aplicații ale integralei definite

pag. 154

1. a) $\ln \sqrt{3}$; b) $\frac{e^3}{3} \ln(e+1) - \frac{e^3}{9} + \frac{e^2}{6} - \frac{e}{3} + \frac{1}{3} \ln(e+1)$; c) $\frac{\pi}{2}$; d) $\operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{4} \ln \frac{5}{2} - \frac{\pi}{8}$.

2. a) $-\frac{4}{3}$; b) $\frac{3\pi-2}{6}$; c) 1; d) $e + \frac{1}{e} - 2$. 3. πab . 4. $\frac{1}{6}$.

5. a) $\ln 2$; b) $\frac{32}{3}$; c) 4; d) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$; e) $\frac{1}{3}$; f) $4 \ln 4$; g) $\frac{4}{3}(2\pi - \sqrt{3})$; h) $e - 1$.

pag. 158

1. a) 48π ; b) 27π ; c) $\frac{2\pi ab^2}{3}$; d) $\frac{16\pi}{5}$.

2. a) $\frac{64\pi}{405}$; b) $\frac{2\pi}{35}$; c) $\frac{\pi^2}{4}$; d) $\frac{\pi(4-\pi)}{4}$; e) $\frac{\pi(\ln 8 - 2)}{3}$; f) $\frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$.

pag. 158

Test A: 1. $\frac{5}{6}$. 2. 1. 3. $\frac{8\pi}{5}$.

Test B: 1. 4. 2. $e^2 - 1$. 3. 27π .

PARTEA A III-A: PREGĂTIRE PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT

1. Teme de sinteză

Tema 1. Grupuri

pag. 160

1. $e = 0$, $\lambda = 1$. 2. $e = -1$. 3. $e = 0$, $z = 1$. 4. $a = b$, $a \in \{-1, 0\}$. 5. $(0, 0, 1)$.

6. $x = 1$, $e = -2$; $x = 1$, $x * e = -3 \neq 1$. 7. $e = 8 \in \mathbb{Z}$, $x' \in \{6, 8\}$. 8. $a = b = 1$. 9. $e = -1$.

10. $a \in \{0, 1\}$. 11. $\lambda = \mu = 0$. 12. $a = 3$. 13. $e = 0$, $x' = \frac{2x}{x-2} \in \mathbb{Q} \setminus \{2\}$.

14. $a \in \left\{0; \frac{1}{4}\right\}$. 15. $e_* = \frac{1}{3}$; $a = 8$. 16. $a \in (1, 2]$. 17. $e_* = -2$, $x = -2$.

18. $e_1 = -\frac{1}{3}$; $e_2 = -\frac{2}{3}$; $a = -\frac{1}{3}$; $b = -\frac{n+1}{3}$. $x * y = -3\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(y + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}$; $(x \circ y) \circ z =$

$= 3^2\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(y + \frac{1}{3}\right)\left(z + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}$; $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (-1)^{n-1}\left(x + \frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{3}$; $x * x = 2x + \frac{1}{3}$;

$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = nx + (n-1)\frac{2}{3}$; $b = ne_2 + (n-1)\frac{2}{3} = -\frac{n+1}{3}$; $b - a = \frac{n}{3} = n(e_2 - e_1)$.

19. $\lambda = 1$.

20. $x, y \in (2, 4)$, $|x-3| < 1$, $|y-3| < 1$; $x * y = (x-3)(y-3) + 3$,
 $|x * y - 3| < 1$; $x * e = x \Rightarrow e = 4 \notin M$; $x * y = y * x$.

Indicații și răspunsuri

21. $|x-4| < 1$; $|y-4| < 1$, $|x * y - 4| < 1$; $x * y = (x-4)(y-4) + 4 = y * x$.

22. $a = x_1 + y_1\sqrt{5}$; $b = x_2 + y_2\sqrt{5}$; $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Q}$, $ab \in M$, $\forall a, b \in M$.

Pentru $a = x + y\sqrt{5}$, $x, y \in \mathbb{Q}$, $x^2 - 5y^2 = 1$, $e = 1 + 0 \times \sqrt{5}$, $a' = x - y\sqrt{5}$.

23. $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $AB \in M$, $\forall A, B \in M$, $(AB)C = A(BC)$, $\det A \neq 0$; $AB \neq BA$;

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{z}{xy} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

24. $x * y \in M$, $x * y = y * x$; $1 + (x-1)^{\ln\sqrt{y-1}} = 1 + (y-1)^{\ln\sqrt{x-1}}$;

$\frac{1}{2} \ln(y-1)\ln(x-1) = \frac{1}{2} \ln(x-1)\ln(y-1)$, $\forall x, y \in M$.

25. $m = \frac{1}{2}$.

26. $A_x A_y \in M$, $A_x A_y = A_y A_x$, $\forall A_x, A_y \in M$.

27. $|x-6| < 1$, $|y-6| < 1$; $|x * y - 6| < 1$; $x * y = (x-6)(y-6) + 6$, $(x * y) * z = x * (y * z)$, $x * y = y * x$, $\forall x, y \in M$, $e = 7 \in M$.

Este necesar ca $x' = 6 + \frac{1}{x-6} \in [5, 7]$. Rezultă $x = 5$ și $x = 7$.

28. $A_x A_y \in M$, $E = A_0$; $A_x A_y = A_y A_x$, $\forall A_x, A_y \in M$.

29. Nu există e_* , e_r , e_l .

30. $x * y \in M$, $(x * y) * z = x * (y * z)$, $e_* = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; $x * y = y * x$; $x' = e^{\frac{1}{\ln x}}$, $\forall x \in M$.

31. $a_1 = x_1 + y_1\sqrt{2}$, $a_2 = x_2 + y_2\sqrt{2}$; $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow a_1 a_2 \in M$;

$a = x + y\sqrt{2}$, $x, y \in \mathbb{Q}$, $x^2 - 7y^2 = 1$, $e = 1$, $x' = x - y\sqrt{7}$.

32. $I = I_2$. Există A^{-1} dacă $\det A \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ și $y \neq 0$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ -\frac{z}{xy} & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$.

33. **a)** $x * y = (x-3)(y-3) + 3$, $x-3 > 0$, $y-3 > 0$, $x * y > 3$; **b)** $a \neq 0$; $f(x)$ este bijectivă; $f(xy) = f(x) * f(y)$; $a = 1$, $b = 3$; **c)** Inducție matematică.

34. $x * y = (x-2)(y-2) + 2$, $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = (x-2)^n + 2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

35. $|x| < 3$, $|y| < 3$, $|x * y| < 3$, $x * y \in G$; $(x * y) * z = x * (y * z)$, $e = 0$, $x' = -x$;

$x * y = y * x$; $f: \mathbb{R} \rightarrow G$ este funcție bijectivă și $f(x+y) = f(x) * f(y)$; $f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \ln \frac{x+3}{x-3}$,

$f^{-1}: G \rightarrow \mathbb{R}$ este funcție bijectivă și $f^{-1}(x * y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$.

36. $x * y \in \mathbb{Z}$, $(x * y) * z = x * (y * z)$, $e = 2$, $x' = 2 - x$, $x * y = y * x$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$,

$f(x) = x - 2$ este funcție bijectivă; $f(x * y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.

37. **a)** $x * y = (x-3)(y-3) + 3 = y * x$, $\forall x, y \in G$; **b)** $f: G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ este funcție bijectivă și $f(x * y) = f(x) \times f(y)$, $\forall x, y \in G$.

38. **a)** $x * y = (x-1)(y-1) + 1$; $x * y \in (G, (x * y) * z = x * (y * z), e = 2, x' = 1 + \frac{1}{x-1}$;
 $x * y = y * x, \forall x, y \in G$; **b)** Se demonstrează prin inducție matematică.

39. $x * y \in G, x * y = \frac{1}{2} [2 - (x-1)(y-1)] = 1 - \frac{1}{2} (x-1)(y-1), e = -1 \in G$;

$x' = 1 + \frac{4}{x-1} \in G, x * y = y * x$.

40. **a)** $x * y = (x-m)(y-m) + m$; $(x * y) * z = x * (y * z), e = m + 1, x' = \frac{1-m+mx}{x-m} =$
 $= m + \frac{1}{x-m}$; $x * y = y * x$. 41. $e_* = -1, e_{\perp} = 1, x'_* = -2 - x, x'_{\perp} = 2 - x, x'_*, x'_{\perp} \in \mathbb{Z}$;

$f(x) = x + 2$ este bijectivă, $f(x * y) = f(x) \perp f(y)$. 42. $A_1 A_2 \in G, E = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$\det A = x^2 + y^2 \neq 0, A^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$; $f^{-1}: \mathbb{C}^* \rightarrow G, f^{-1}(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$; $f: G \rightarrow \mathbb{C}^*$;

$f(A) = z, A = \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix}$; $z = x + iy, f(x)$ este bijectivă, $f(AB) = f(A) \times f(B)$.

43. $A_1 A_2 \in G, (A_1 A_2) A_3 = A_1 (A_2 A_3), I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\det A = 1, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & xz - y \\ 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

44. $A_1 A_2 \in G, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A \neq 0$.

45. $x * y \in G, (x * y) * z = x * (y * z), e = 0, x' = \frac{x}{x-k}, x \in \mathbb{Q} \setminus \{k\}$,

$x * y = y * x, \forall x, y, z \in G$.

46. $a \in G, a$ fixat, $x * y \in G, \forall x, y \in G, a \times a' = a' \times a = e, x'_* * x = x * x'_* = e_* = a', e_* =$
 $a', x'_* = x' a' a', xy = yx, x * y = y * x$.

47. **a)** $e^{ax} \times e^{bx} = e^{(a+b)x} \in G; (e^{ax} \times e^{bx}) \times e^{cx} = e^{(a+b+c)x} = e^{ax} \times (e^{bx} \times e^{cx}); e = 1, (e^{ax})' = e^{-ax}$;

b) $f: G \rightarrow \mathbb{R}, f(e^{ax}) = a, f(x)$ este bijectivă și $f(e^{ax} e^{bx}) = f(e^{ax}) + f(e^{bx})$, deci $(G, \times) \approx (\mathbb{R}, +)$.

48. $\det A = \varepsilon^2 \neq 0; A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon^2 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}; A^3 = E, A^{-1} = A^2, (A^2)^{-1} = E$.

49. **a)** $z_1 * z_2 = (z_1 - i) \times (z_2 - i) + i, e = 1 + i, z' = i + \frac{1}{z-i} \in \mathbb{C}_1$; **b)** Se demonstrează prin inducție matematică.

50. $\forall x, y \in G, x * y = \frac{xy}{xy + (x-1)(y-1)} \in G, e = \frac{1}{2} \in (0, 1), x' = 1 - x, x' \in (0, 1)$;

$x * y = y * x$; **b)** $f(x)$ este bijectivă; $f(x * y) = f(x) \times f(y)$.

51. **a)** $x * y \in G, \forall x, y \in G$; **b)** $(x * y) * z = \frac{m^2(x+y+z) + xyz}{m^2 + xy + yz + zx} = x * (y * z)$,

$x * y = y * x, e = 0$; **c)** $x * x' = x' * x = e, e = 0, \frac{m^2(x+x')}{m^2 + xx'} = 0, x' = -x < 0$, dacă $x \in (0, +\infty)$,

deci $x' \notin A$. Rezultă că $(A, *)$ nu este grup.

Tema 2. Inele și corpuri

pag. 166

1. $x \perp y \in \mathbb{Z}, x \top y \in \mathbb{Z}, (\mathbb{Z}, \perp)$ este grup abelian $e_{\perp} = 3, x'_{\perp} = 6 - x, e_{\top} = 4, (\mathbb{Z}, \top)$ este monoid, $x \top (y \perp z) = (x \top y) \perp (x \top z)$.

2. $(\mathbb{C}, +)$ este grup abelian, $e_{+} = 0, z' = -z, z_1 + z_2 = z_2 + z_1; (\mathbb{C}, *)$ este monoid comutativ, $e_{*} = 1 + i; z * (z_1 + z_2) = (z * z_1) + (z * z_2)$.

3. **a)** $u_1 = (x_1, y_1), u_2 = (x_2, y_2), u_3 = (x_3, y_3), u_1 + u_2 \in A, u_1 u_2 \in A, e_{+} = (0, 0); -u = (-x, -y); u_1 + u_2 = u_2 + u_1, e_{*} = (1, 0), u_1 u_2 = u_2 u_1, u(u_1 + u_2) = u u_1 + u u_2; (A, +, \times)$ este inel comutativ; **b)** $f(x, y)$ este bijectivă, $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2); f(u_1 u_2) = f(u_1) \times f(u_2)$.

4. $\forall A_1, A_2 \in A, A_1 + A_2 \in A, e_{+} = O_2, A' = -A, A_1 + A_2 = A_2 + A_1; A_1 \times A_2 \in A, e = I_2; A(A_1 + A_2) = A A_1 + A A_2$.

5. $e_{+} = O_3, e_{\times} = I_2$.

6. (A, \perp, \top) este inel, $x \in A, x' \in A, x \top x' = x' \top x = e_{\top}, e_{\top} = -1, x \perp y = (x + 2)(y + 2) - 2, x \perp x' = -1, (x + 2)(x' + 2) - 2 = -1,$

$$x' = -2 + \frac{1}{x+2}, \forall x \in K; x \top (y \perp z) = x \top y \perp x \top z.$$

7. (K, \perp) este grup abelian, (K, \top) este grup abelian; $x \top (y \perp z) = (x \top y) \perp (x \top z)$.

8. $u_1 = x_1 + iy_1\sqrt{3}, u_2 = x_2 + iy_2\sqrt{3}; x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Q}, u_1 + u_2 \in K, u_1 u_2 \in K, e_{+} = 0, e = 1, (K, +)$ este grup abelian, (K, \times) este grup abelian, $z(z_1 + z_2) = z z_1 + z z_2 = (z_1 + z_2)z$.

9. $z_1 \perp z_2 \in \mathbb{C}, z_1 \top z_2 \in \mathbb{C}, (z_1 \perp z_2) \perp z_3 = z_1 \perp (z_2 \perp z_3), (z_1 \top z_2) \top z_3 = z_1 \top (z_2 \top z_3), e_{\perp} = -ai, e_{\top} = a; f(z) = iz$ este funcție bijectivă, $f(z_1 \perp z_2) = f(z_1) \top f(z_2)$.

10. $x \oplus y \in \mathbb{Z}, x \odot y \in \mathbb{Z}, e_{\oplus} = 2, x'_{\oplus} = 4 - x, (\mathbb{Z}, \oplus)$ este grup abelian; $e_{\odot} = 3; (\mathbb{Z}, \odot)$ este monoid; $x \odot (y \oplus z) = (y \oplus z) \odot x$ și $x \odot y = y \odot x$, deci $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ este inel comutativ; ii) $e_{\odot} = 3; x \odot x' = e_{\odot}; (x - 2)(x' - 2) = 1; (x - 2) \mid 1$, deci $x - 2 \in \{-1, 1\}, x \in \{1, 3\}$.

11. Se verifică axiomele corpului pentru $(K_1, +, \times)$ și $(K_2, +, \times)$. Luăm $f: K_1 \rightarrow K_2, f(u) = \begin{pmatrix} x & y \\ 3y & x \end{pmatrix}$, unde $u = x + y\sqrt{3}, x, y \in \mathbb{Q}; f(u)$ este funcție bijectivă, care verifică relațiile $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$, respectiv $f(u_1 u_2) = f(u_1) \times f(u_2)$.

12. Se verifică axiomele inelului pentru $(A_1, +, \times), (A_2, +, \times); f: A_1 \rightarrow A_2, f(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, unde $z = x + yi, x, y \in \mathbb{Z}; f(z)$ este funcție bijectivă, care verifică $f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$ și $f(z_1 z_2) = f(z_1) \times f(z_2)$.

13. $A_1 + A_2 \in \mathbb{N}, \forall A_1, A_2 \in K; e_{+} = O_2, (K, +)$ este grup abelian, $(K \setminus O_2, \times)$ este grup abelian.

$$e_{\times} = I_2; A_{xy} = \begin{pmatrix} x+y & y \\ y & x-y \end{pmatrix}; A_{xy}^{-1} = \frac{1}{x^2 - 2y^2} \begin{pmatrix} x-y & -y \\ y & x+y \end{pmatrix}; \text{distributivitatea: } A_1 A_2 = A_2 A_1.$$

14. $x * y \in \mathbb{R}; (x * y) * z = x * (y * z), e_{*} = -1, x' = -2 - x, x * y = y * x; x_1 * x_2 * \dots * x_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n + n - 1, a = -10 - 9 - \dots - 1 + 0 + 1 + 2 + \dots + 21 - 1 = 20$.

15. $x * y = 2(x + 1)(y + 1) - 1; x * x = 2(x + 1)^2 - 1; x * x * x = 2^2(x + 1)^3 - 1,$

$\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = 2^{n-1}(x + 1)^n - 1$, demonstrație prin inducție matematică;

$$x_1 * x_2 * \dots * x_n = 2^{n-1}(x_1 + 1)(x_2 + 1)\dots(x_n + 1) - 1.$$

Pentru cazul $x_n = -1$, se obține $x_1 * x_2 * \dots * x_n = -1$, deci $a = -1$.

$$16. x * y = 2(xy - 2x - 2y + 5) = 2[(x - 2)(y - 2) + 1] = 2(x - 2)(y - 2) + 2,$$

$x_1 * x_2 * \dots * x_n = 2^{n-1}(x_1 - 2)(x_2 - 2)\dots(x_n - 2) + 2$, demonstrație prin inducție matematică.

Dacă există $x_n = 2$, atunci $x_1 * x_2 * \dots * x_n = 2$. Cum $2 \in \{-20, -19, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, 20\}$,

rezultă $a = 2$. Se obține $e = \frac{5}{2}$. Notând $2^x = t > 0$, se obține $t * t^2 = 2$, $2(t - 2)(t^2 - 2) +$

$+ 2 = 2$, de unde rezultă $t_1 = 2$ și $t_2 = \sqrt{2}$ astfel încât $x \in \left\{1; \frac{1}{2}\right\}$.

Tema 3. Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, p$ prim)

pag. 168

1. a) $X^3 + 8X^2 + 17X + 10$, $a + 2 = 1$, $3(b + 1) = 8$, $2c - 1 = 17$, $2d + 3 = 10$;

b) $f = 2(X + 1)^3 - 3(X + 1)^2 - 4(X + 1) + 0$, $a = 2$, $b = -3$, $c = -4$, $d = 0$.

2. $f = g = X^4 + 14X^3 + 71X^2 + 154X + 120$.

3. $m = 1$, $\text{grad } f = 1$, $m = 4$, $\text{grad } f = 3$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$, $\text{grad } f = 4$.

4. $m = -1$, $\text{grad } f = 0$, $m = -1$, $\text{grad } f = 1$, $m = i$, $\text{grad } f = 2$, $m = i$, $\text{grad } f = 2$.

5. $f + g = (1 + 3i)X^2 + 3iX - 1 - i$. 6. a) $X^3 - 1$; b) $X^4 - 1$; c) $X^4 + 1$.

7. $f + g = 2X^4 - (4i - 1)X^3 - 2\sqrt{2} + 4$.

8. a) $X^5 + 7X^2 + 4$; b) $iX^4 + (3i - 1)X^3 - 5X^2 - 6X - 2$. 9. $q = iX + 6$, $r = 9X^2 + 5X - 5$.

10. a) $q = 2X^3 + 3X^2 + 5X + 13$, $r = 24$. 11. $q = 3X^3 - 7X^2 + 21X - 64$, $r = 202$.

12. $q = X^5 - 2X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 5$, $r = 7$. 13. 0. 14. $q = 2X^5 + 5X + 6$, $r = 0$.

15. $r = f(2) = 3$. 16. $r = f(-2) = 51$.

17. $q = 2X^4 + 6X^3 + 13X^2 + 39 + 109$, $r = 328$.

18. a) $f(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_{20} = 2^{20}$; $f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{19} + a_{20} = 0$;

b) $\sum_{k=0}^{10} a_{2k} = \frac{1}{2} [f(1) + f(-1)] = a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{20} = 2^{10}$.

c) $\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} = \frac{1}{2} [f(1) - f(-1)] = a_1 + a_3 + \dots + a_{19} = 2^{10}$.

d) $(X + 1)^{20}$, $T_{k+1} = C_{20}^k X^{20-k}$, $k + 1 = 17$, $k = 16$;

$$T_{17} = C_{20}^{16} X^4 = a_{17} X^4, a_{17} = C_{20}^{16} = C_{20}^4.$$

19. $f(-1) = 2$.

20. $a = -11$, $b = -3$.

21. $a = 3$, $b = -2$.

22. $f = X^2$, $a = b = 0$, $f = X^2 + X - 2$, $a = 1$, $b = -2$.

23. $\text{grad } f = 2$, $f = ax^2 + bx + c$, $f = X^2 - X + 2$.

24. a) $f = X^n - a^n$, $f(a) = 0$; b) $f = X^{2n+1} + a^{2n+1}$, $f(-a) = 0$;

c) $f = X^{2n} - a^{2n}$, $f(a) = f(-a) = 0$.

25. a) $f(1) = 0$, $(X - 1) \mid f$;

$$\mathbf{b)} f = X^n - 1 - n(X-1) = (X-1)[(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1) - n] = (X-1)g,$$

$$g(1) = 0, (X-1)^2 \mid f.$$

26. $(X+1)^3 = X(X^2 + 3X + 3) + 1.$

27. $f(1) = f(-1) = 0.$

28. $g(\alpha) = 0, \alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \alpha^3 = 1, f(\alpha) = 0.$

29. $m = 6 + 2i, (X-i)(X^2 + 3X - 2 + 6i) = 0.$

30. **a)** $(X-1)(X-2-2i);$ **b)** $(X+1)^2(X-i);$ **c)** $(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X-i\sqrt{2})(X+i\sqrt{2}).$

31. $x_1 + x_2 + x_3 = 3, x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 4, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 17; \sum_{k=1}^3 x_k^3 = 48, \sum_{k=1}^3 x_k^4 = 85.$

32. $x_1 = a, x_2 = 1, x_3 = 2.$

33. $x_1 = 2, x_2 = 2a, x_3 = a.$

34. 2; 3; 5.

35. $m = 2; \div 1 - \sqrt{3}, 1, 1 + \sqrt{3}.$

36. $a \in \emptyset.$

37. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -(2m+1), x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4 = 2(m+1)^2 = S_2;$
 $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = (2m+1)^2, S_1 + 2S_2 = (2m+1)^2; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 =$
 $= 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 8m - 4 = -(4m+3) < 0;$

deci cel puțin două rădăcini nu sunt reale, adică cel mult două rădăcini sunt reale.

38. **a)** $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]: f = (X-3)(X^2+4); \mathbb{C}[X]: f = (X-3)(X-2i)(X+2i);$

$\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]: f = (X-1)(X+1)(X^2+1); \mathbb{C}[X]: f = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i).$

39. $x^4 - (a+b)x^3 + (ab+2)x^2 - (a+b)x + 1 = (x^2 - ax + 1)(x^2 - bx + 1); a, b \in [-2, 2].$

$$x^2 - ax + 1 = 0, x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}, -2 \leq a \leq 2, 0 \leq a^2 \leq 4, a^2 - 4 \leq 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{a \pm i\sqrt{4 - a^2}}{2} = \frac{a}{2} \pm i \frac{\sqrt{4 - a^2}}{2},$$

$$|x_{1,2}| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\pm \frac{\sqrt{4 - a^2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{4 - a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1.$$

Analogue: $x^2 - bx + 1 = 0; x_{3,4} = \frac{b \pm i\sqrt{4 - a^2}}{2}, |x_{3,4}| = 1.$

40. $f = a_n X^n + \dots + a_{k+1} X^{k+1} + a_k X^k + \dots + a_1 X + a_0, g = b_n X^n + \dots + b_{n+1} X^{k+1} +$
 $+ b_k X^k + \dots + b_1 X + a_0, \text{grad}(f+g) = k, 0 \leq k \leq n, a_n + b_n = 0, \dots, a_{k+1} + b_{k+1} = 0,$
 $a_k + b_k \neq 0, g = -a_n X^n - a_{n-1} X^{n-1} - \dots - a_{k+1} X^{k+1} + b_k X^k + \dots + b_1 X + b_0, b_k \neq a_k.$

41. $a = -3, b = 1, f = X^3 - 3X^2 + X + 1.$

42. $a = 15, b = -31, f = X^4 + 15X^3 + X^2 - 31X - 1 = (X-2)(X-3) \cdot q + 15X - 31.$

43. **a)** $f = q \cdot q + r, g = (X-a)(x-b), \text{grad } g = 2, \text{grad } r < 2, r = \alpha X + \beta,$

$$f(a) = \alpha a + \beta, f(b) = \alpha b + \beta, \alpha = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}, \beta = \frac{\alpha f(b) - \beta f(a)}{a - b}.$$

b) $f(a) = 0, f(b) = 0, a \neq b, f = (X-a)(X-b) \cdot q; g \mid f.$

$$44. \sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n (a_3 k^3 + a_2 k^2 + a_1 k + a_0) = a_3 \sum_{k=1}^n k^3 + a_2 \sum_{k=1}^n k^2 + a_1 \sum_{k=1}^n k + n \cdot a_0$$

$$= a_3 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} + a_2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + a_1 \frac{n(n+1)}{2} + a_0 n;$$

$$f = 4X^3 - 6X^2 + 4X - 1; a_3 = 4, a_2 = -6, a_1 = 4, a_0 = -1.$$

$$45. a = \pm 1, b = 0; a = 1, b = \pm \sqrt{2}; a = -1, b = \sqrt{2}.$$

$$46. f = X + 2, g = -X - 1.$$

$$47. f = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2.$$

$$48. a = n, b = -(n + 2).$$

$$49. f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0; \alpha = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1;$$

$$f(\alpha) = 0, f(\alpha) = a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0,$$

$$q^n f(\alpha) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n;$$

$$f(\alpha) - f(1) = a_n \left(\frac{p^n}{q^n} - 1 \right) + a_{n-1} \left(\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} - 1 \right) + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q} - 1 \right) = -f(1);$$

$$a_n (p^n - q^n) + a_{n-1} q (p^{n-1} - q^{n-1}) + \dots + a_1 q^{n-1} (p - q) = -f(1) \cdot q^n;$$

$$(p - q) \mid (p^k - q^k); k = 1, 2, \dots, n;$$

$$(p - q) \mid q^n f(1); (p, q) = 1; (p - q, q) = 1, (p - q, q^n) = 1, \text{ deci } (p - q) \mid f(1).$$

$$50. f \in \mathbb{Q}[X] \quad x_1 = 2 - \sqrt{2}, x_2 = 2 + \sqrt{2}, m = 12, n = 4; x_{3,4} = 1 \pm i.$$

$$51. \text{ Ecuație reciprocă } x_1 = -2, x_2 = -\frac{1}{2}, x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

$$52. x_1 = \alpha - r, x_2 = \alpha, x_3 = \alpha + r. \quad 1) d = 4, r = 2, x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6;$$

$$2) a = 4, r = -2; x_1 = 6; x_2 = 4, x_3 = 2.$$

$$53. (x_1 + 1) + (x_2 - 1) + (x - 3) = 3 - 3 = 0, t_1 + t_2 + t_3 = 0, t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 = 3t_1 t_2 t_3 = 0;$$

$$m = 5; x_1 = -1; x_{2,3} = 2 \pm i\sqrt{5}; m = 1, x_2 = -1, x_{1,3} = 1 \pm i\sqrt{5}; m = \frac{1}{5}, x_3 = 3;$$

$$x_{1,2} = \pm \frac{i\sqrt{5}}{5}.$$

$$54. a = -10; x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -4.$$

$$55. \mathbf{a)} m = -\frac{3}{2}; \mathbf{b)} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2; \mathbf{c)} 4(m + 2)^2 \geq 0, m \in \mathbb{R}.$$

$$56. \mathbf{a)} \text{ Pentru } n = 0, E_0 = x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 = 1 + 1 + 1 = 3, \text{ unde } x_k \neq 0, k \in \{1, 2, 3\};$$

$$f(2) = 2^3 - 6 \times 2 + 2 = 8 - 12 + 2 = -2,$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 6 \times (-2) + 2 = -8 + 12 + 2 = 6,$$

$$\text{deci } f(2) \times f(-2) = (-2) \times 6 = -12;$$

b) Presupunem $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $(p, q) = 1$, astfel încât $f(r) = f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$;

$a_3 = 1$, $a_2 = 0$, $a_1 = -6$, $a_0 = 2$. Este necesar ca $p \mid a_0$ și $q \mid a_3$. Din aceste condiții, rezultă că $p \mid 2$ și $q \mid 1$, deci $r \in \{-2, -1, 1, 2\}$, unde $r \in \mathbb{Z}$, adică $r \notin \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Deducem că f nu admite rădăcini raționale;

c) Considerăm funcția polinomială $f(x) = x^3 - 6x + 2$.

Avem: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $f'(x) = 3x^2 - 6$; ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x'_{1,2} = \pm \sqrt{2}$.

x	$-\infty$	x_1	$-\sqrt{2}$	x_2	$\sqrt{2}$	x_3	$+\infty$
$f'(x) = 3x^2 - 6$	+	+	+	+	+	+	+
$f(x) = x^3 - 6x + 2$	$-\infty$	↗	$2(1+2\sqrt{2})$	↘	$2(1-2\sqrt{2})$	↗	$+\infty$
		M		m			

$$f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 2 = 4\sqrt{2} + 2 = 2(1 + 2\sqrt{2}) > 0;$$

$$f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 2 = -4\sqrt{2} + 2 = 2(1 - 2\sqrt{2}) < 0.$$

Rezultă că $x_1 \in (-\infty; -\sqrt{2})$, $x_2 \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ și $x_3 \in (\sqrt{2}; +\infty)$, deci f are toate rădăcinile reale;

d) Din relațiile lui Viète, deducem că:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} = 0 \text{ și } S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3} = -6.$$

Pentru $S_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = E_2 + 2(-6)$, avem $0 = E_2 - 12$,

de unde rezultă că: $E_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 12$;

e) x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile polinomului, putem scrie, înmulțind relațiile respective cu x_1^k, x_2^k, x_3^k :

$$x_1^3 - 6x_1 + 2 = 0 \quad | \times x_1^k$$

$$x_2^3 - 6x_2 + 2 = 0 \quad | \times x_2^k$$

$$x_3^3 - 6x_3 + 2 = 0 \quad | \times x_3^k$$

$$\text{De aici obținem sistemul: } \begin{cases} x_1^{k+3} - 6x_1^{k+1} + 2x_1^k = 0 \\ x_2^{k+3} - 6x_2^{k+1} + 2x_2^k = 0 \\ x_3^{k+3} - 6x_3^{k+1} + 2x_3^k = 0 \end{cases}.$$

Adunând relațiile, obținem: $E_{k+3} - 6E_{k+1} + 2E_k = 0$;

f) Am arătat că $E_0 = 3, E_1 = 0$ și $E_2 = 12$.

$$\text{Avem } E_3 - 6E_1 + 2E_0 = 0 \Rightarrow E_3 = 6E_1 - 2E_0 = 0 + 6 = 6.$$

Rezultă că $E_0, E_1, E_2, E_3 \in \mathbb{Z}$, și putem scrie: $E_{n+1} = 6E_{n-1} - 2E_{n-2}, \forall n \geq 2$.

Folosind metoda inducției matematice, presupunând că $E_k \in \mathbb{Z}$, pentru $k \in \mathbb{N}$, rezultă că $6E_{n-1} - 2E_{n-2} \in \mathbb{Z}$, deci $E_{n+1} \in \mathbb{Z}$.

57. a) Rezultă $f(0) = i^4 + (-i)^4 = 1 + 1 = 2$;

b) În general, avem: $(a-b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^{n-k} a^{n-k} b^k$, deci:

$$f = C_4^0 X^4 + C_4^1 X^3 i + C_4^2 X^2 i^2 + C_4^3 X i^3 + C_4^4 i^4 + (C_4^0 X^4 - C_4^1 X^3 i + C_4^2 X^2 i^2 - C_4^3 X i^3 + C_4^4 i^4)$$

și deducem că: $a_3 = C_4^1 i - C_4^1 i = 0, a_1 = C_4^3 i^3 - C_4^3 i^3 = -iC_4^3 + iC_4^3 = 0$;

c) Pentru a determina suma coeficienților, calculăm:

$$f(1) = (1+i)^4 + (1-i)^4 = (1+2i-1)^2 + (1-2i-1)^2 = -4 - 4 = -8.$$

d) Oricare coeficient $a_k, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, este:

$$a_k = C_4^k i^k + C_4^k (-i)^k = [i^k + (-i)^k] \times C_4^k.$$

Pentru k impar, deci pentru $k \in \{1, 3\}$, avem: $i^k + (-i)^k = 0$, adică $a_3 = a_1 = 0 \in \mathbb{R}$.

Pentru k par, deci pentru $k \in \{0, 2, 4\}$, avem:

$$a_4 = C_4^0 i^0 + C_4^0 (-i)^0 = 1 + 1 = 2, a_2 = C_4^2 i^2 + C_4^2 (-i)^2 = -C_4^2 - C_4^2 = -2C_4^2 \in \mathbb{R} \text{ și}$$

$$a_0 = C_4^4 i^4 + C_4^4 (-i)^4 = 2C_4^4 = 2;$$

e) Dacă $f(z) = 0$, avem: $(z+i)^4 = -(z-i)^4$ și deducem: $|(z+i)^4| = |-(z-i)^4|$ sau

$$|z+i|^4 = |z-i|^4, \text{ de unde rezultă că: } |z+i| = |z-i|;$$

f) Fie $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $f(z) = 0$. Conform rezultatului demonstrat la

subpunctul e), avem $|z+i| = |z-i|$ și deducem:

$$|a+(b+1)i| = |a+(b-1)i| \text{ sau } \sqrt{a^2+(b+1)^2} = \sqrt{a^2+(b-1)^2}.$$

Efectuând calculele, obținem $b = 0$, deci: $z = a + bi = a + 0 \times i = a \in \mathbb{R}$.

Tema 4. Primitive (antiderivate)

pag. 172

1. a) $\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + 5 + C$; b) $\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x}{n} + C$; c) $\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x}{n} + C$;

d) $\ln(x+1) + C$; e) $\frac{1}{3} \arctg \frac{x\sqrt{6}}{3} + C$; f) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{\sqrt{2}-x}{x+\sqrt{2}} \right) + C$;

g) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right) + C$; h) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{7}x^2 \times \sqrt[3]{x} + C$; i) $\sqrt{x^2+1} + C$;

- j) $2 \arcsin x + C$; k) $-\cos x + \alpha \sin x + C$; l) $-2\sqrt{\cos x} + C$;
 m) $e^x - \cos x + C$; n) $\arcsin \frac{x\sqrt{2}}{2} + C$.
2. a) $\frac{(x+2)^4}{4} + C$; b) $\frac{1}{3} \times \frac{(3x+5)^8}{8} + C$; c) $\frac{1}{2} \times \frac{(x^2+5)^5}{5} + C$;
 d) $\frac{\sin^4 x}{4} + C$; e) $\frac{e^{5x}}{5} + C$; f) $\sqrt{x^2+5} + C$; g) $2\sqrt{x^2+3x+5} + C$;
 h) $\ln|x+3| + C$; i) $\ln\sqrt[5]{5x-7} + C$; j) $-\frac{5}{2}\ln|x^2+2| + C$;
 k) $\frac{1}{8}\ln|4x^2-3| + C$; l) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x+3) + C$; m) $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$;
 n) $-\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C$; o) $\frac{1}{2}\sin x^2 + C$; p) $2\sin\sqrt{x} + C$; q) $\frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + C$;
 r) $-\frac{5}{6}\operatorname{ctg}(3x^2-1) + C$; s) $\frac{1}{2}e^{x^2-1} + C$; t) $e^{\sin x} + C$.
3. a) $\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$; b) $\ln|x-1| - \frac{1}{x+2} + C$; c) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \operatorname{arctg} x + C$;
 d) $x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$.
4. a) $2x^4 - x^2 + 3x + C$; b) $2 \times \frac{x^{2009}}{2009} - 3 \times \frac{x^{2008}}{2008} + \frac{x^{2007}}{669} - 3x + C$; c) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 5x + C$;
 d) $\frac{-2x^2+4x^3-1}{4x^4} + C$; e) $\frac{2x\sqrt{x}}{3} + x + C$; f) $\frac{2x^2\sqrt{x}}{5} - x^2 + 3x + C$; g) $\frac{8x^8\sqrt{x^7}}{15} + C$;
 h) $\frac{2}{3}\ln|3x+5| + C$; i) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + C$; j) $\frac{5}{3}\ln|x^3-1| + C$;
 k) $2\sqrt{2}\arcsin(x\sqrt{2}) + C$; l) $\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}} + C$; m) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg} 4x + C$; n) $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C$;
 o) $-\frac{1}{5}\cos 5x + C$; p) $-\frac{1}{2}\cos(x^2-2x+3) + C$; q) $\frac{7}{3}\sin(x^3+1) + C$;
 r) $3e^{\frac{x}{3}} + C$; s) $-e^{-x+4} + C$; t) $\frac{1}{2}e^{x^2-1} + C$.
5. a) $\frac{(1+x^2)^3}{3} + C$; b) $\sqrt{1+x^2} + C$; c) $\frac{3}{5} \times \frac{(x^5-1)^4}{4} + C$;

$$\text{d)} -\frac{1}{16}(x^2+5)^{-8} + C; \text{ e)} 2e^{\sqrt{x}} + C; \text{ f)} \frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3 + C; \text{ g)} -\frac{1}{6}\cos^2 x + C;$$

$$\text{h)} \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C; \text{ i)} \frac{a^{3x}}{\ln a^3} + C; \text{ j)} \frac{a^{x^2+2x-2007}}{\ln a^2} + C; \text{ k)} \frac{2}{3}\operatorname{arcsin}x\sqrt{x} + C;$$

$$\text{l)} \frac{1}{2}\operatorname{arcsin}x\sqrt{x} + C; \text{ m)} \frac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3 + C; \text{ n)} \frac{1}{2}\operatorname{arcsin}x^2 + C; \text{ o)} \operatorname{arcsin}e^x + C.$$

$$6. \text{ Explicitând modulul, obținem: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq 1 \\ \frac{1}{2-x}, & x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Funcția este continuă pe } \mathbb{R} \text{ și o primitivă a sa este: } F(x) = \begin{cases} \ln x + C, & x \geq 1 \\ C - \ln(2-x), & x < 1 \end{cases}.$$

7. Frația de integrat se poate scrie:

$$\frac{1 + \sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{(1 + \sqrt{x})^2 - (\sqrt{x+1})^2} = \frac{1 + \sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{1 + 2\sqrt{x} + x - x - 1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}.$$

$$\text{Se obține: } I = \sqrt{x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \underbrace{\int \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx}_J.$$

Pentru calculul integralei $J = \int \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx$, se face substituția $\frac{x+1}{x} = t^2$ și rezultă integrala unei funcții raționale de variabilă t .

$$\text{În final, } I = \sqrt{x} + \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{x+1}}{2} - \frac{\ln(x + \sqrt{x+1})}{2} + C.$$

8. Funcția este continuă pe \mathbb{R} , deci admite primitive. Mulțimea primitivelor este:

$$F(x) = \begin{cases} x + \frac{x^2}{2} + C - 1, & x \in (-\infty; -1) \\ x - \frac{x^3}{3} + C, & x \in [-1; 1] \\ x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6} + C, & x \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

9. Presupunem prin absurd că funcția f are o primitivă, iar aceasta este de forma:

$$F(x) = \begin{cases} x + \sin \frac{1}{x} + c, & x \in (0; +\infty) \\ c_1, & x = 0 \end{cases}.$$

Punând condiția de continuitate, obținem: $c_1 = c$.

Funcția $F(x) = \begin{cases} x + \sin \frac{1}{x} + C, & x \in (0; +\infty) \\ C, & x = 0 \end{cases}$ nu are derivată în $x = 0$ deoarece

raportul:

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{x + \sin \frac{1}{x} + c - c}{x} = \sin \frac{1}{x}$$

nu are limită pentru $x \rightarrow 0, x > 0$.

$$10. F(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{dacă } x < 1 \\ 4, & \text{dacă } x = 1 \text{ și } G(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{dacă } x < 1 \\ 3, & \text{dacă } x = 1 \\ -2x^2 + 6x - 1, & \text{dacă } x > 1 \end{cases} \\ -2x^2 + 6x, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

11. Funcția f nu admite primitive.

$$12. \text{ a) } \frac{(2x-1)^{2009}}{4018} + C; \text{ b) } -\frac{1}{2(1+\ln x)^2} + C; \text{ c) } -\ln(1+\cos^2 x) + C;$$

$$\text{ d) } \sin(\ln|x|) + C; \text{ e) } \arcsin(\ln|x|) + C; \text{ f) } \frac{2}{9}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

$$13. \text{ a) } -\frac{1}{2x^2} \ln x - \frac{1}{4x^2} + C; \text{ b) } \frac{x^{p+1}}{p+1} \ln x - \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2} + C; \text{ c) } x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C;$$

$$\text{ d) } \frac{x^2}{2} \sin 2x + \frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C; \text{ e) } \frac{e^{2x}}{4} \left(1 - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \right) + C;$$

$$\text{ f) } \frac{e^{2x}}{4} \left(1 + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{2} \right) + C; \text{ g) } x + 2 \ln \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 4}} + C;$$

$$\text{ h) } x + 6 \ln x - \frac{12}{x} - \frac{4}{x^2} + C; \text{ i) } \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{\sqrt{3}} + C; \text{ j) } -\frac{1}{\arcsin x} + C;$$

$$\text{ k) } \frac{3}{8} (2+x^2)^3 \sqrt{2+x^2} + C; \text{ l) } \frac{1}{4} e^{x^4} + C; \text{ m) } \frac{10x+4}{15} \sqrt{5x+2} + C;$$

$$\text{ n) } \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{2} + C; \text{ o) } \frac{2x+3}{2} \sqrt{x^2+3x+4} + \frac{7}{8} \ln \left(\frac{2x+3}{2} + \sqrt{x^2+3x+4} \right) + C;$$

$$\text{ p) } \frac{2x-5}{2} \sqrt{-x^2+5x-6} + \frac{1}{8} \arcsin(2x-5) + C;$$

$$\text{ q) } \frac{1}{5} \ln \frac{2x-4}{2x+1} + C; \text{ r) } -\frac{1}{x-3} + C.$$

Tema 5. Integrala definită

pag. 176

1. a) $\frac{13}{2}$; b) $\frac{38}{3}$; c) 2; d) $\frac{67}{3}$; e) 1; f) $\ln\sqrt{2}$; g) $\frac{1}{2}$; h) $\frac{\sqrt{2}-2}{2}$;
 i) $\frac{25}{6}$; j) $\frac{7}{64}$; k) $-\frac{26}{33}$; l) $\frac{\ln 2}{3}$; m) $\frac{1}{2}$; n) $\frac{1}{3}(e^2-1)$; o) $\frac{\pi}{12\sqrt{2}}$; p) $\frac{\pi}{4ab}$.
2. a) $\frac{\pi}{2}-1$; b) 1; c) $\frac{\pi^2}{4}-2$; d) $\pi-2$; e) $e-2$; f) $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{4}$;
 g) $\frac{\pi-2}{4}$; h) $\frac{\pi-6\sqrt{3}-12}{24}$; i) $\frac{11-e^2}{4}$; j) $\frac{2-\pi}{4}$; k); l) $\frac{2\ln 2+\pi-4}{2}$.
3. a) Faceți substituția $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$; rezultatul este $\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}$;
 b) Faceți substituția $\cos x = t$; rezultatul este $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{7}} \right) + \ln(\sqrt{2}+1) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1} \right) \ln \sqrt{3}$;
 c) $\frac{-\pi\sqrt{3}}{9}$; d) $\frac{\cos 1 - \cos a}{\ln a}$; e) $\frac{e^2-1}{e}$; f) $\frac{\pi-2}{2}$; g) $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$; h) $\frac{2(4\sqrt{2}-\sqrt{5})}{9\sqrt{10}}$.
4. a) 0; b) 0.
5. a) $\frac{11}{4}(e^2-1)$; b) $\frac{3-4e^{-a}+e^{-4a}}{4}$; c) $\frac{3}{\ln 4}$; d) $\frac{1}{3}(26\ln 6+28\ln 8-7\ln 7-9\ln 9-38)$;
 e) $\frac{3}{8}$; f) 0; h) $4\ln 3 + \frac{8\sqrt{2}-224}{15}$; i) $\frac{2}{3}$; j) $\frac{1}{4} \arcsin \frac{1}{16}$; k) $\ln(\ln(e+1))$;
 l) $1 + \ln 3$; m) $\ln 2 - \frac{1}{2}$; n) 0; o) $2(\sin 2 - \sin 1)$;
 p) $\frac{\pi}{8}(1-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{8} \ln(3+2\sqrt{2}) + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}$;
 r) $\frac{2\sqrt{3}\pi-6\ln 2-9}{18}$; s) $\frac{1}{2} \left(\frac{e}{e^2+1} + \operatorname{arctg} e - \frac{1}{2} \right)$; t) $\frac{e^2-2e+2\ln(e+1)+1}{2}$.
6. $I_n = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}$; $I_3 = -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + C$.
7. a) $I - J = x_0 \times \sqrt{a^2 - x_0^2}$, $I + J = a^2 \arcsin \frac{x_0}{a}$; b) $I = \frac{1}{2} \left(a^2 \times \arcsin \frac{x_0}{a} + x_0 \times \sqrt{a^2 - x_0^2} \right)$;
 $J = \frac{1}{2} \left(a^2 \times \arcsin \frac{x_0}{a} - x_0 \times \sqrt{a^2 - x_0^2} \right)$.

8. a) $2\sqrt{2}$; b) $2(\ln 2 - 1)$; c) $\frac{1}{2}(1 + e^{-\pi})^2$; d) $\frac{3\pi}{32} - \frac{1}{4}$; e) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$; f) $2\pi\sqrt{2}$.

9. a) $I_n = 2 - \frac{n^2 + 2n + 2}{e^n}$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 2$.

10. a) $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \frac{\ln 2}{2}$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}^2 x \, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \, dx = \frac{\pi^2}{32}$, deci $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \frac{\ln 2}{2} \leq \frac{\pi^2}{32}$, $\ln 2 \geq \frac{\pi(4 - \pi)}{8}$.

11. a) $\frac{51}{4}$; b) $\frac{22}{3} - 3\ln 3 + 2\sqrt{3}$; c) 10; d) $\frac{9}{8}$; e) 91; f) $\frac{3}{8}$; g) $\frac{5\pi^2}{288}$;

h) 0; i) $\frac{1}{3} \ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; j) $\ln 2$; k) $\frac{1}{12}$; l) $\frac{11}{4}(e^2 - 1)$;

m) $\frac{3}{4} - e^{-a} + \frac{1}{4}e^{-4a}$; n) $\frac{3}{2\ln 2}$.

13. a) Funcția f este continuă pe \mathbb{R} , deci admite primitive.
O primitivă a sa este de forma:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + e^x - 1, & x \leq 0 \\ \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), & x > 0 \end{cases};$$

b) $\frac{\sqrt{2} + 1}{2} + \ln \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{e}$.

14. Avem: $f(0) = c$, $f'(x) = 5ax^4 + 2bx$; $\int_0^1 f(x) \, dx = \frac{a}{6} + \frac{b}{3} + c$.

Se obține: $a = 6$, $b = 3$ și $c = 1$.

15. a) $a = b = 1$; b) $\ln \frac{2}{3}$.

16. a) $+\infty$ și $\ln 4 + \frac{21}{2}$; b) $f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \{-2; 0\}$.

Tema 6. Aplicații ale integralei definite

pag. 180

1. a) a^2 ; b) $\frac{7}{2}$; c) $\frac{a^3}{3}$; d) $\frac{4}{3}$.

2. a) $-\frac{1}{2} + \ln 4$; b) $\frac{a^2}{2} [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$.

3. a) $\frac{7}{3}$; b) 2; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $10 - \frac{3}{4} \ln \frac{2}{3}$; e) $\ln 2$; f) $\frac{3\sqrt{3} - \pi}{3}$.

4. a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{\pi}{36} + \ln 2$; c) $\frac{8}{3}$; d) $\frac{1}{6}$; e) $3 - e$; f) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{6}$.

5. $\frac{e^2 + 1 - 2e}{e}$. 6. $\frac{3}{2} - \ln 2 - \frac{\pi}{4}$. 7. $4 - 4 \times e^{-1}$. 8. $\frac{3}{4}$.

10. a) $\frac{533\pi}{10}$; b) $\pi \frac{e^2 - 1}{2}$; c) $\frac{\pi}{2} \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

11. a) $\frac{9\pi}{70}$; b) $\frac{1}{4} \left(13e^4 - \frac{1}{e^2} \right)$.

12. Ecuația dreptei OM este $y = \frac{b^2}{a\sqrt{a^2 - b^2}} x$; $\nu = \frac{ab}{2} \left(\pi - 2 \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right)$.

13. a) $\pi \times \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 \right)$; b) $\pi(e - 2)$.

14. a) $\nu_1 = \frac{4\pi ab^2}{3}$, $\nu_2 = \frac{4\pi a^2 b}{3}$; b) $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{b}{a} < 1$, deci $\nu_1 < \nu_2$.

15. a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1 + m$, $\lim_{x > 1} f(x) = m + n$ și f continuă în $x = 1$, implică:

$$m + n = m + 1 \Rightarrow n = 1; f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ m, & x > 1 \end{cases}, \text{ cu } f'_s(1) = 2 \text{ și } f'_d(1) = m;$$

f derivabilă în $x = 1$, implică $m = 2$;

b) $2x - y + 1 = 0$; c) $\mathcal{A} = \frac{19}{3}$.

16. a) $x_1 = -1, x_2 = 2$; c) $\mathcal{A} = \frac{9}{2}$.

17. a) $f(x) = 4x - 5 + \frac{1}{x}$, $f(x) \in \mathbb{Z}$ pentru $x \in \{-1; 1\}$;

b) $x = -\frac{1}{2}$ este punct de maxim, $x = \frac{1}{2}$ este punct de minim;

c) Dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la stânga și la dreapta; dreapta $y = 4x - 5$ este asimptotă oblică la $\pm\infty$;

d) $\mathcal{A} = 1 + \ln 2$; e) $a \in \{-1; 1\}$; f) $3x - y - 3 = 0$.

18. a) $g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2, & \text{dacă } x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty) \\ -2x^2 + 5x - 2, & \text{dacă } x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right) \end{cases}$; b) $\mathcal{A} = \frac{9}{8}$.

19. a) $F(x) = \ln(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 6}) + C$; din condiția $F(1) = 0$, rezultă $c = -\ln(3 + \sqrt{11})$;

b) $\mathcal{V} = \pi \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 4x + 6} dx = \pi \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x+2}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\arctg \frac{3}{\sqrt{2}} - \arctg \frac{2}{\sqrt{2}} \right)$.

20. a) Pentru $x < 0$, $e^{nx} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$), rezultă $f(x) = bx^2 + c$.

Pentru $x = 0$, rezultă $f(0) = \frac{c}{2}$.

Pentru $x > 0$, rezultă $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{nx} \left(ax + \frac{bx^2}{e^{nx}} + \frac{c}{e^{nx}} \right)}{e^{nx} \left(1 + \frac{1}{e^{nx}} \right)} = ax$;

deci $f(x) = \begin{cases} bx^2 + c, & x < 0 \\ \frac{c}{2}, & x = 0. \\ ax, & x > 0 \end{cases}$.

b) $l'_s(0) = l'_d(0) \Rightarrow c = 0 = \frac{c}{2} \Rightarrow m = 0, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} bx^2 + c, & x < 0 \\ ax, & x \geq 0 \end{cases}$.

c) Primitivalele lui F sunt de forma: $F(x) = \begin{cases} \frac{bx^3}{3} + c, & x < 0 \\ \frac{ax^2}{2} + c_1, & x \geq 0 \end{cases}$.

Din continuitatea lui f pe \mathbb{R} , deci și în $x = 0$, obținem $c_1 = c$, de unde rezultă că:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{bx^3}{3} + c, & x < 0 \\ \frac{ax^2}{2} + c, & x \geq 0 \end{cases}.$$

d) $\text{Aria}(\Gamma_f) = \int_{-2}^1 f(x) dx = \int_{-2}^0 bx^2 dx + \int_0^1 ax dx = b \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^0 + a \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{8b}{3} + \frac{a}{2} = \frac{3a + 16b}{6}$.

21. b) Dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$; c) $\frac{4 - \pi}{\pi}$.

22. a) $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - a - b}{(x-1)^2}$; b) $a = 3, b = -3$;

c) Pentru $x \in (1; 2)$, rezultă $f'(x) < 0$; pentru $x = 2$, rezultă $f'(x) = 0$; pentru $x > 2$, rezultă $f'(x) > 0$. Pentru $x \in (1; 2]$, rezultă că f este descrescătoare, iar pentru $x \in [2; +\infty)$, rezultă că f este crescătoare;

d) $\frac{x^2}{2} - 2x + \ln(x-1) + C$, pentru $x > 1$; $\frac{1}{2} + \ln 2$.

2. Teste pregătitoare pentru examenul de bacalaureat

pag. 184 – Testul 1

I. 1. a) $m = -2$; b) $m^2 - 4$; c) $-m^3 + 3m - 3$; d) $m \in \left(-\infty, \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}\right) \dot{\cup} \left(1, \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}\right) \dot{\cup} \dots$

2. a) $a = -3e^3$;

b) $f'_s(1) = 3e^3$; $f'_d(1) = 0$; $f'_s(1) \neq f'_d(1)$, deci f nu este derivabilă în $x = 1$.

3. a) Fie P mijlocul lui BC , $P\left(2, 5, -\frac{1}{2}\right)$; $m_{BC} = m_{AP} = -1 \Rightarrow BC \perp AP$, deci înălțimea

este și mediană. Așadar, triunghiul ABC este isoscel;

b) $AP: 7x + y - 17 = 0$.

II. 1. b) se verifică proprietățile din definiția grupului abelian.

2. $a = \sqrt{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

III. a) Prin inducție; b) $B = \begin{pmatrix} n & \frac{3^{n+1} - 3 - 2n}{2} \\ 0 & 3\frac{3^n - 1}{2} \end{pmatrix}$; c) $\det B = \frac{3n}{2} \times (3^n - 1)$.

IV. a) $a = 4$; c) $\frac{3 - \ln 4}{2} \times \pi$.

pag. 185 – Testul 2

I. 1. a) **Condiții:** $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $x > 0$, $\frac{e}{x} \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (0, 1) \cup (1, e) \cup (e, +\infty)$.

$$\log_x e + \log_e x + \log_{\frac{e}{x}} x = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_e x} + \log_e x + \frac{1}{\log_x \frac{e}{x}} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_e x} + \log_e x + \frac{1}{\log_x e + \log_x x} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_e x} + \log_e x + \frac{1}{\frac{1}{\log_e x} + 1} = -\frac{5}{2}.$$

Folosind notația $\log_e x = \ln x$, obținem:

$$\frac{1}{\ln x} + \ln x + \frac{1}{\frac{1}{\ln x} + 1} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\ln x} + \ln x + \frac{\ln x}{1 + \ln x} = -\frac{5}{2}.$$

Notând $\log_e x = t$, obținem: $\frac{1}{t} + t + \frac{t}{1+t} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1+t}{t} + \frac{t}{1+t} = -\frac{5}{2}.$

Notând $\frac{1+t}{t} = y$, obținem: $y + \frac{1}{y} = -\frac{5}{2} \mid \times 2y \Rightarrow 2y^2 + 2 = -5y \Leftrightarrow 2y^2 + 5y + 2 = 0,$

care are soluțiile: $y_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4}$, deci:

$$y_1 = \frac{-5-3}{4} = -2; \quad y_2 = \frac{-5+3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Cazul I: $y_1 = -2 \Rightarrow \frac{1+t}{t} = -2 \Rightarrow 1+t = -2t \Rightarrow 3t = -1 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

Cazul II: $y_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1+t}{t} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2+2t = -t \Rightarrow 3t = -2 \Rightarrow t = -\frac{2}{3} \Rightarrow \ln x = -\frac{2}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = e^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}.$$

Soluția ecuației este $x \in \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} \right\}.$

b) Se fac substituțiile $t = \log_e x$ și $\frac{1+t}{t} = y$. Obținem inecuația: $y + \frac{1}{y} > -\frac{5}{2}$, care

are soluțiile: $y \in (0, +\infty)$ și $y \in \left(-2, -\frac{1}{2}\right).$

Rezultă: $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right) \cup (1, e) \cup (e, +\infty).$

2. $\begin{cases} x = \hat{2} \\ y = \hat{3} \end{cases}$.

3. a) $x^2 + y^2 - (2 + \sqrt{3})x + (2\sqrt{3} - 1)y = 0$ sau $x^2 + y^2 - (2 - \sqrt{3})x - (1 + 2\sqrt{3})y = 0$.

II. 1. a) $f' : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}; x = 1$; b) Dacă $m > -3$, ecuația are două rădăcini reale, situate în intervalele $(-2, 1)$, respectiv $(1, \infty)$. Dacă $m = -3$, ecuația are soluția dublă $x = 1$ (singura reală). Dacă $m < -3$, ecuația nu are rădăcini reale.

2. a) $u = 0, v = 3$; b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

III. a) Se fac substituțiile $11^{xz} = a, 11^z = b, 5^{\frac{y}{2}} = c$; obținem $x = 2, y = 2, z = 1$.

b) $\text{rang}(A + B) = 2$; c) $A^{-1} = -\frac{1}{17} \begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 \\ 2 & -11 & 5 \\ -8 & 10 & 3 \end{pmatrix}$

IV. a) Pentru $x \in (0, \sqrt{e})$, funcția este strict crescătoare; pentru $x > \sqrt{e}$, funcția este strict descrescătoare; b) $F(x) = -\frac{\ln x + 1}{x}$.

c) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot \ln x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$.

$1 - 2 \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$;

x	0	1	\sqrt{e}	2	e	$+\infty$							
$1 - 2 \ln x$		+	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	-
x^3		+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$f'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$		+	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	-
$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$			\nearrow	\nearrow	\nearrow	$\frac{1}{2e}$		\searrow	\searrow	\searrow			
													max.

$$1 - 2\ln x > 0 \Rightarrow \ln x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x < \ln e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x < e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e};$$

$$1 - 2\ln x < 0 \Rightarrow \ln x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x > \ln e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x > e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

Deducem că $f(x)$ este strict descrescătoare $\forall x \in (\sqrt{e}, +\infty)$, unde $\sqrt{e} < 2 \leq k$.

Din condiția $k \leq x \leq k+1$, rezultă că $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.

$$\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln k}{k^2} \Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} dx \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln k}{k^2} dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \int_k^{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \frac{\ln k}{k^2} \int_k^{k+1} dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \cdot x \Big|_k^{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \frac{\ln k}{k^2} \cdot x \Big|_k^{k+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} (k+1-k) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \frac{\ln k}{k^2} (k+1-k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \frac{\ln k}{k^2}.$$

V. **b)** $A_1(0, 0)$, $A_2(2+\sqrt{3}, 0)$; **c)** $x = \frac{5}{2+\sqrt{3}}$.

pag. 186 – Testul 3

I. 1. **a)** $n = 15$; **b)** $n = 15$ sau $n = 2$.

2. **a)** $a = 6/e$, $b = -5$; **b)** $6 - 2e$.

3. **a)** $6\sqrt{5}$; **b)** $\frac{2x}{9} - \frac{y}{3} = 1$.

II. **a)** $\alpha = 2$, $\beta = -1$; **b)** $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

III. 1. **a)** $e = 2$; **b)** simetricul oricărui număr este 2; **c)** $x \in \{-1, 5\}$.

2. **a)** $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$.

$$\text{IV. 1. } F(x) = \begin{cases} e^x(x-1) + x \\ \frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) + c - 1 \end{cases}.$$

2. **a)** $a = b = 1$, $c \in \mathbb{R}$; **b)** $y = -\frac{1}{2}$ asimptotă spre $+\infty$;

$$\text{c) } \int [x - f(x)] dx = \frac{2x+1}{4} \sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8} \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right).$$

pag. 188 – Testul 4

I. 1. **a)** $\Delta = |3m - 7| \geq 0 \Rightarrow$ ecuația are rădăcini reale; **b)** $m = \frac{13}{6}$ sau $m = \frac{8}{3}$;

c) $m = \frac{5}{3}$; **d)** $m \notin \mathbb{R}$.

2. $x = 1$.

3. **a)** $f'(x) = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\forall x \in (0, \infty)$; **b)** $F(x) = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

II. **b)** $z \in \{\pm i; 2 \pm i\}$.

III. **a)** Se verifică axiomele inelului comutativ.

b) Elementele inversabile sunt de forma $\frac{4(x-5)}{x-4}$.

IV. **a)** $F(x) = \ln(1 + \ln x) + C$; **b)** $F(x) = \ln(1 + \ln x) + 1$.

pag. 189 – Testul 5

I. 1. **a)** $A \in d_1 \Rightarrow a \times 1 + b = 1$, $A \in d_2 \Rightarrow 1 - b - a = 1$, deci avem sistemul:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases};$$

b) $\frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = 3 \Rightarrow l^2 = \frac{12}{\sqrt{3}} \Rightarrow l = 2\sqrt[4]{3}$; perimetrul va fi: $P = 6\sqrt[4]{3}$;

c) $a = 2$, $b = \sqrt{5}$;

d) $i^n + i^{n+1} = 1 - i \Leftrightarrow i^n(1 + i) = 1 - i \Leftrightarrow i^n = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i$.

Putem lua, de exemplu, $n = 3$ ($i^3 = -i$);

e) Evident $\cos \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{2}$, deci putem lua $x = \frac{\pi}{3}$ și $y = \frac{\pi}{6}$, $x, y \in \mathbb{R}$;

f) Avem echivalența: $\sin x = \cos x \Leftrightarrow x = 2x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

pentru $k = 1$, obținem $x = 2x + 2\pi \Rightarrow x = -2\pi$;

pentru $k = 0$, obținem $x = 2x + 0 \Rightarrow x = 0$.

II. 1. **a)** Din relațiile lui Viète, avem: $x_1 + x_2 = -4$;

b) $\frac{C_5^2}{C_5^3} = \frac{5!}{2!3!} \times \frac{3!2!}{5!} = 1;$

c) Condiții $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x^2+x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-1; +\infty) \\ x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (0; +\infty);$

$\log_5(x+1) = \log_5(x^2+x) \Rightarrow x+1 = x^2+x \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1;$

d) $x = 2;$

e) Observăm că $n! > 20$ doar pentru $n = 4$ sau $n = 5$. Avem 2 cazuri favorabile și 5 posibile, deci probabilitatea va fi $\frac{2}{5}$, adică 40%.

2. a) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \forall x \in \mathbb{R};$

b) $\int_0^1 f'(x) dx = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) \Big|_0^1 = \ln 2;$

c) Avem $x^2 + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Cum funcția logaritmică cu baza supraunitară este crescătoare, avem că $\ln(x^2 + 1) \geq \ln 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0), \forall x \in \mathbb{R}$.

d) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, deci 0 este punct de extrem local. Din c), rezultă că $f(x) \geq f(0)$ deci 0 este punct de maxim și este atins în punctul $f(0) = \ln(0 + 1) = 0;$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \times f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 2.$

III. a) Folosind relațiile lui Viète pentru ecuația atașată polinomului f , obținem:

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4^2 - 2 \times 2 = 12 \in \mathbb{N};$

b) $\det A = 2$ implică rang $A = 2;$

c) $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, deci $g(A) = A^2 - 4A + 2I_2;$

d) $g(I_2) = (I_2)^2 - 4I_2 + 2I_2 = -I_2$ și $f(1) \times I_2 = (1^2 - 4 \times 1 + 2) \times I_2 = -I_2,$
deci $g(I_2) = f(1) \times I_2;$

e) $\det B = \det (-I_2) = 1 \neq 0$, deci B este o matrice inversabilă;

f) $g(I_2) = f(1) \times I_2$ și $g(A) = O_2$ implică $g(I_2) - g(A) = (I_2 - A) \times C \Leftrightarrow -I_2 = (I_2 - A) \times C;$
matricea $-I_2$ este inversabilă, deci $(-I_2) \times (-I_2) = (-I_2) \times (I_2 - A) \times C \Rightarrow I_2 = (A - I_2) \times C.$

Dar $A - I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, implică $\det(A - I_2) = -1 \neq 0$, deci matricea $A - I_2$ este inversabilă;

conform definiției, $\exists C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ a.î. $C \times (A - I_2) = (A - I_2) \times C = I_2;$

g) Observăm că $(I_2 - X) \times (3I_2 - X) = 3I_2 - X - 3X + X^2 = X^2 - 4X + 3I_2 + I_2.$

Dar avem echivalența $g(X) = 0 \Leftrightarrow X^2 - 4X + 2I_2 = O_2$, deci $\exists C = 3I_2 - X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

a.î. $(I_2 - X) \times (3I_2 - X) = I_2.$

De asemenea, avem: $(3I_2 - X) \times (I_2 - X) = I_2$, deci matricea $I_2 - X$ este inversabilă.

IV. a) $f(-1) = 9$ și $g(-1) = 0;$

b) $(x+1) \times f(x) = (x+1) \times (1-x+x^2-x^3+\dots+x^8) = x^9+1 = g(x), \forall x \in \mathbb{R};$

c) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	-----	0	+++++

Din tabelul de variație a funcției g observăm că $g(x) < 0$ pentru $x < -1$ și că $g(x) > 0$ pentru $x > -1$;

d) Considerăm $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x+1}, & x \neq -1 \\ 9, & x = -1 \end{cases}$.

Din tabelul de variație al funcției g observăm că $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	-----	0	+++++
$x+1$	-----		+++++
$f(x)$	+++++	+++++	+++++

e) Deoarece $F'(x) = 1 - \frac{2 \times x}{2} + \frac{3 \times x^2}{3} - \frac{4 \times x^3}{4} + \dots + \frac{9 \times x^8}{9} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^8$,

avem $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Prin urmare, F este o primitivă a lui f pe \mathbb{R} ;

f) Avem $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Dar $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (conform punctului d), deci

$F'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Prin urmare, F este strict crescătoare pe \mathbb{R} ;

g) Fiind strict crescătoare pe \mathbb{R} , F este bijectivă.

pag. 191 – Testul 6

I. a) $d(A, B) = \sqrt{(-2-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$;

b) $MN: \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{2} \Leftrightarrow MN: 2x - y - 1 = 0$.

Deoarece $P \in MN$ (coordonatele punctului P verifică ecuația dreptei MN), punctele M, P și N sunt coliniare, situându-se pe aceeași dreaptă MN ;

c) $1 + (a+b)i = a + 3i \Leftrightarrow a = 1$ și $a + b = 3$, deci $a = 1$ și $b = 2$;

d) Avem $5m(\hat{A}) + m(\hat{A}) = 180^\circ \Rightarrow m(\hat{A}) = 30^\circ$, deci $\sin A = \frac{1}{2}$;

e) $\sin x = \sin y \Leftrightarrow x = y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; putem lua $x = \pi$ și $y = 0$;

f) Avem $\vec{u} \times \vec{v} = (-2) \times 3 + 3 \times 2 = 0$, deci vectorii \vec{u}, \vec{v} sunt perpendiculari.

II. 1. a) Observăm că 0 este singurul element al mulțimii care nu este soluție a ecuației atașate polinomului f . Avem 2 cazuri favorabile și 3 cazuri posibile, deci

probabilitatea va fi $\frac{2}{3}$, adică 66%;

b) $X^3 - X^2 - X + 1 = (X+1)(X-1)^2$, deci câțul este $(X-1)^2$, iar restul este 0;

c) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$;

d) Folosind relațiile lui Viète, obținem:

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \frac{1}{x_1 x_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 x_2 x_3} = \frac{1}{-1} = -1;$$

e) Folosind punctul b), observăm că:

$$f(\log_3 n) = 0 \Leftrightarrow (\log_3 n + 1)(\log_3 n - 1)^2 = 0, \text{ cu condiția ca } n > 0.$$

$$\text{Avem: } \log_3 n + 1 = 0 \Rightarrow n = \frac{1}{3} > 0 \text{ și } \log_3 n - 1 = 0 \Rightarrow n = 3 > 0. \text{ Deci } n \in \left\{ \frac{1}{3}; 3 \right\}.$$

2. a) $f'(x) = 2007^x \times \ln 2006 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R};$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(x) = \ln 2007;$$

c) Avem $f'(x) = 2007^x \times \ln 2007 + 2 > 0, \forall x \in (0; +\infty)$, deci f este strict crescătoare pe $(0; +\infty)$;

d) Avem $f''(x) = 2007^x \times \ln^2 2007 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci f este convexă pe \mathbb{R} ;

$$\begin{aligned} \text{e) } \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 (2007^x + x^2) dx = \pi \left(\frac{2007^x}{\ln 2007} + 2x \right) \Big|_0^1 = \\ &= \pi \left(\frac{2007}{\ln 2007} + 2 - \frac{1}{\ln 2007} \right) = \pi \times \frac{2006 + 2 \ln 2007}{\ln 2007}. \end{aligned}$$

III. a) Observăm că: $A^2 = B^2 = O_2$;

$$\text{b) } A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ și } B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ deci } A \times B \neq B \times A;$$

c) $\det A = 0$ implică $\text{rang } A = 1$;

$$\text{d) } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ deci } C^2 = I_2;$$

e) $\det A = -1 \neq 0$, deci matricea C este inversabilă; evident inversa matricei C va fi tot C deoarece $C \times C = C^2 = I_2$;

f) Observăm că: $C = \begin{cases} C, & \text{dacă } n \text{ impar} \\ I_2, & \text{dacă } n \text{ par} \end{cases}$, deci avem:

$$\begin{aligned} C + C^2 + C^3 + \dots + C^{2007} &= C + I_2 + C + I_2 + \dots + C = (C + I_2) \times 1003 + C = \\ &= \begin{pmatrix} 2006 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2007 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

g) Folosind punctul a), observăm că: $A^2 = B^2 = O_2$, deci putem lua $X = A, Y = B, X \neq Y, X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

IV. a) $f(x + 2\pi) = 2 + \arcsin(\sin(x + 2\pi)) = 2 + \arcsin(\sin x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R};$

$$\text{b) } f(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + 2 + \frac{\pi}{2} = \frac{8 + \pi}{2};$$

c) Deoarece $\arcsin : [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, obținem că:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(\sin x) \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2 - \frac{\pi}{2} \leq 2 + \arcsin(\sin x) \leq 2 + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq 2 + \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R};$$

d) Funcția f nu are limită la infinit pentru că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ nu există, deci $C^2 = I_2$;

e) Fie F o primitivă a lui f , cu $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Deoarece $f(x) \geq 2 - \frac{\pi}{2}$, avem $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci F este strict crescătoare pe \mathbb{R} ;

f) Observăm că $\arcsin(\sin x) = x, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, deci

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x (2+t) dt = \left(2t + \frac{t^2}{2}\right) \Big|_0^x = 2x + \frac{x^2}{2}, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

g) Funcția F este o primitivă a lui f , deci F este strict crescătoare pe \mathbb{R} . Cum $\sqrt{2006} < \sqrt{2007}$, rezultă că $F(\sqrt{2006}) < F(\sqrt{2007})$.

pag. 193 – Testul 7

I. a) Vom reprezenta în plan punctele A, B și C .

$$\begin{aligned} \text{Avem } BC &= \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} =; \\ &= \sqrt{(4-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}. \end{aligned}$$

b) $CO \perp AB$;

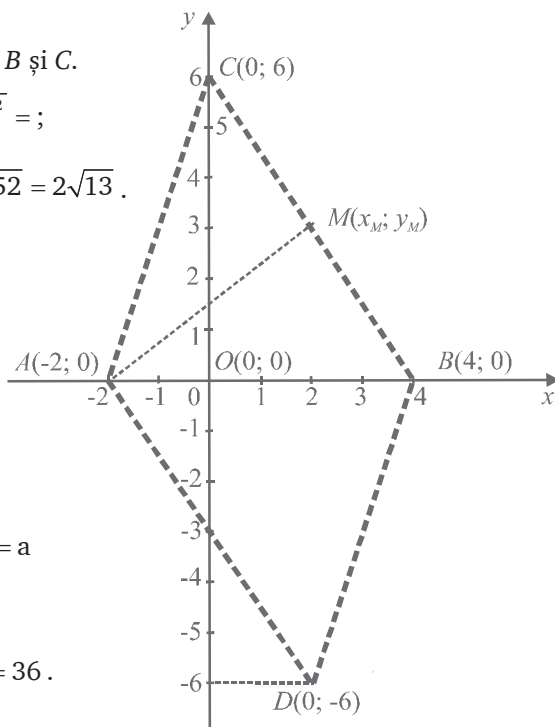
$$AB = |x_B - x_A| = |4+2| = 6; CO = 6;$$

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{AB \times CO}{2} = \frac{6 \times 6}{2} = 18$$

$$\text{sau } \mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times |\Delta|, \text{ unde}$$

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = a$$

$$= (-1)^{3+2} \times 6 \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -6 \times (-6) = 36.$$



Deci aria triunghiului ABC este: $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times |\Delta| = \frac{1}{2} \times 36 = 18$;

c) Fie punctul $M(x_M, y_M)$, $M \in BC$, cu $BM = MC$. Rezultă că:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{4 + 0}{2} = 2 \text{ și } y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0 + 6}{2} = 3.$$

Obținem lungimea medianei ca fiind:

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2} = \sqrt{(2 + 2)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{25} = 5;$$

d) Vom determina pantele dreptelor AC și BC . Avem:

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{6 - 0}{0 + 2} = 3 \text{ și } m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{6 - 0}{0 - 4} = -\frac{3}{2}.$$

Ecuatiile dreptelor AD și BD sunt:

$$AD: y - y_A = m_{AD}(x - x_A), \text{ cu } m_{AD} = m_{BC} = -\frac{3}{2}, \text{ deci}$$

$$y - 0 = -\frac{3}{2}(x + 2) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x - 3;$$

$$BD: y - y_B = m_{BD}(x - x_B), \text{ cu } m_{BD} = m_{BD} = 3, \text{ deci}$$

$$y - 0 = 3(x - 4) \Rightarrow y = 3x - 12.$$

Punctul D se află la intersecția dreptelor AD și BD , deci coordonatele sale verifică

$$\text{sistemul: } \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x - 3 \\ y = 3x - 12 \end{cases}.$$

$$\text{Obținem } -\frac{3}{2}x - 3 = 3x - 12 \Leftrightarrow 3x + \frac{3}{2}x = 9 \Leftrightarrow x_D = 2 \text{ și } y_D = -6, \text{ deci } D(2; -6);$$

e) $\mathcal{A}_{ABCD} = 2 \times \mathcal{A}_{ABC} = 2 \times 18 = 36$;

f) $\overrightarrow{OD} = x_D \vec{i} + y_D \vec{j} = 2\vec{i} - 6\vec{j}$.

II. 1. a) Formula pentru termenul general al binomului $(x + y)^n$ este $T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} y^k$ și are coeficientul C_n^k .

$$\text{Pentru } (x + y)^{10} \text{ avem: } a_7 = C_{10}^7 = C_{10}^{10-7} = C_{10}^3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120;$$

b) $f(-1) = 0 = a_{10} - a_9 + a_8 - a_7 + a_6 - a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$;

c) $f(0) = 1 = a_0$,

$$f(1) = a_{10} + a_9 + a_8 + a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 2^{10}, \text{ deci}$$

$$a_{10} + a_9 + a_8 + a_7 + a_6 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 2^{10} - 1;$$

d) $f(1) - f(-1) = 2(a_9 + a_7 + a_5 + a_3 + a_1) = 2^{10}$, deci

$$a_9 + a_7 + a_5 + a_3 + a_1 = 2^9;$$

e) $(X + 1)^4 = C_4^4 X^4 + C_4^3 X^3 + C_4^2 X^2 + C_4^1 X + C_4^0 = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1$.

2. a) Din egalitatea $\frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{a}{x + 2} + \frac{b}{x + 3}$, eliminând numitorii, rezultă că:
 $1 = (a + b)x + 3a + 2b$.

Identificând coeficienții, obținem sistemul: $\begin{cases} a + b = 0 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases}$.

Rezultă că: $a = 1, b = -1$, deci $f(x) = \frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x + 3}$;

$$\text{b) } f'(x) = \left(\frac{1}{x+2}\right)' - \left(\frac{1}{x+3}\right)' = -\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} = \frac{-(2x+5)}{(x^2+5x+6)^2};$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) dx = [\ln(x+2) - \ln(x+3)] \Big|_1^2 = \\ &= \ln \frac{x+3}{x+2} \Big|_1^2 = \ln \frac{4}{5} - \ln \frac{3}{4} = \ln \frac{4}{5} \times \frac{4}{3} = \ln \frac{16}{15}; \end{aligned}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 5x + 6} = 1;$$

e) $f : (-2; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 5x + 6} = 0$, deci $y = 0$ este ecuația
 asimptotei orizontale a funcției la $+\infty$.

III. 1. a) Pentru a se verifica axioma G_2 a grupului $(M, *)$, trebuie să arătăm că:

$$\exists e \in M \text{ a.î. } e * x = x * e = x, \forall x \in M.$$

Avem implicația: $e * x = x \Rightarrow (e - 2)(x - 2) + 2 = x$, de unde deducem că:
 $(x - 2)(e - 3) = 0$, unde $x > 2$. Deci $e = 3 \in M$.

Avem și: $x * e = x * 3 = (x - 2)(3 - 2) + 2 = x - 2 + 2 = x$;

b) Din axioma G_3 a grupului $(M, *)$, avem că:

$$x' * x = x * x' = 3, \text{ pentru elementele } x \in M \text{ care admit simetric.}$$

Avem implicațiile:

$$x' * x = 3 \Rightarrow (x' - 2)(x - 2) + 2 = 3 \Rightarrow x' = 2 + \frac{1}{\frac{x-2}{x-2}} > 2 \in M, \text{ de unde se verifică:}$$

$$x * x' = 3 \Rightarrow (x - 2)(x' - 2) + 2 = (x - 2) \left(2 + \frac{1}{x - 2} - 2 \right) + 2 = 3;$$

c) Din $(x * y) * z = x * (y * z)$, rezultă că: $x * x * x = (x - 2)^3 + 2$.

$$\text{Obținem ecuația: } (x - 2)^3 + 2 = 10 \Rightarrow (x - 2)^3 = 8.$$

Putem scrie:

$$(x - 2)^3 - 2^3 = 0 \Rightarrow (x - 2 - 2)[(x - 2)^2 + 2(x - 2) + 4] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - 4)[(x - 2)^2 + 2(x - 2) + 4] = 0.$$

Obținem ecuațiile: $x - 4 = 0$, cu rădăcina $x = 4 \in M$, și $(x - 2)^2 + 2(x - 2) + 4 = 0$, care nu are rădăcini în $M \subset \mathbb{R}$.

$$2. \text{ a) } A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3 \text{ și}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3;$$

$$\text{b) } B^2 = (I_3 - A)^2 = I_3^2 - 2I_3A + A^2 = I_3 - 2A + O_3 = I_3 - 2A;$$

$$\text{c) } B^3 = B^2 \times B = (I_3 - A) \times (I_3 - A) = I_3^2 - 3I_3A + 2A^2 = I_3 - 3A + O_3 = I_3 - 3A;$$

$$B + B^2 - B^3 = I_3 - A + I_3 - 2A - I_3 + 3A = I_3;$$

d) Din relația $B + B^2 - B^3 = I_3$, deducem $B(I_3 + B - B^2) = I_3$, deci

$$B^{-1} = I_3 + B - B^2 = I_3 + I_3 - A - I_3 + 2A^2 = I_3 + A =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Evident, se obține același rezultat folosind formula cunoscută pentru calculul inversei unei matrice: $B^{-1} = \frac{1}{\det B} \times B^*$.

$$\text{Efectuând calculele, obținem: } \det B = 1 \neq 0 \text{ și } B^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{IV. a) } I_0 = \int_0^1 \frac{1}{5x+7} dx = \frac{1}{5} \ln(5x+7) \Big|_0^1 = \frac{1}{5} (\ln 12 - \ln 7) = \frac{1}{5} \ln \frac{12}{7};$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{5x+7} dx = \int_0^1 \frac{5x+7-7}{5x+7} dx = \frac{1}{5} \int_0^1 \left(1 - \frac{7}{5x+7} \right) dx = a$$

$$= \frac{1}{5} \left[x \Big|_0^1 - \frac{7}{5} \ln(5x+7) \Big|_0^1 \right] = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{7}{5} \ln \frac{12}{7} \right);$$

$$\text{b) } 5I_{n+1} + 7I_n = \int_0^1 \frac{(5x+7)x^n}{5x+7} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1};$$

c) $x^n(1-x) \geq 0, \forall x \in [0; 1]$. Prin integrarea inegalității $x^n(1-x) \geq 0$, obținem:

$$\int_0^1 x^n(1-x)dx = \int_0^1 x^n dx - \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \geq 0;$$

d) $\frac{1}{n+1} = 5I_{n+1} + 7I_n \leq 12I_n, I_{n+1} \leq I_n$, deducem: $\frac{1}{12(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{12n}$;

e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{12(n+1)} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{12n}$, de unde rezultă că: $\frac{1}{12} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n \leq \frac{1}{12}$, deci

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = \frac{1}{12};$$

f) $f'(x) = \frac{-5}{(5x+7)^2}$;

g) $x_0 = -\frac{7}{5}$, $\lim_{x \nearrow -\frac{7}{5}} f(x) = \lim_{x \nearrow -\frac{7}{5}} \frac{1}{5x+7} = -\infty$, $\lim_{x \searrow -\frac{7}{5}} f(x) = \lim_{x \searrow -\frac{7}{5}} \frac{1}{5x+7} = +\infty$.

x	$-\infty$	$-\frac{7}{5}$	$+\infty$
$5x+7$	-----	0	+++++
$f(x) = \frac{1}{5x+7}$	-----	$-\infty$	+++++

Rezultă că $x = -\frac{7}{5}$ este asimptotă verticală la stânga spre $-\infty$ pentru graficul funcției $f(x)$.

pag. 195 – Testul 8

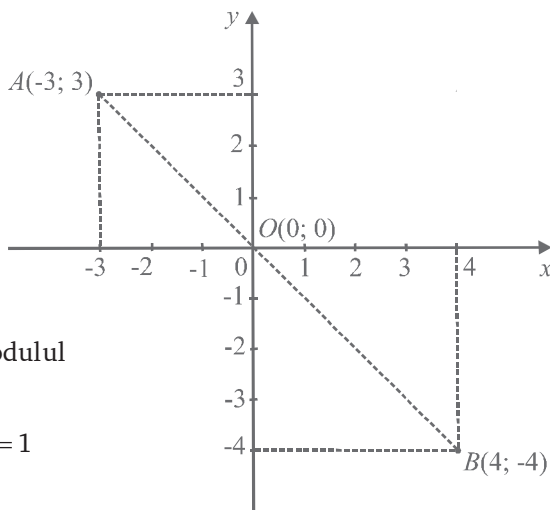
1. a) Vom reprezenta în plan punctele A și B . Avem:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \\ &= \sqrt{(4+3)^2 + (-4-3)^2} = \\ &= \sqrt{2 \cdot 7^2} = 7\sqrt{2}; \end{aligned}$$

b) $O \in AB$, deci $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = 0$;

c) Numărul complex $z = \frac{1-i}{1+i}$, are modulul

$$|z| = \left| \frac{1-i}{1+i} \right| = \frac{|1-i|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$



sau, dacă scriem $z = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i-1}{1+1} = -i$, atunci are modulul $|z| = |-i| = 1$;

d) $z = (1-i)(1+2i) = 1+i+2 = 3+i$, deci $\text{Im } z = 1$;

e) $M_1 M_2: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + 0y + 4 = 0 \Rightarrow x = 2.$

Vom observa că $x_{M_1} = x_{M_2} = 2$, deci cele două puncte sunt situate pe dreapta de ecuație $x = 2$;

f) $\overline{OM} = (x_M - x_0)\vec{x} + (y_M - y_0)\vec{y} = 2\vec{i} - 6\vec{j}$.

II. 1. a) Putem scrie $x * y = (x + 4)(y + 4) - 4$, unde $x, y \in M = (4; +\infty)$, deci $x > -4$, $y > -4$. Obținem: $(x + 4)(y + 4) - 4 > -4$, deci $x * y > -4$, adică $x * y \in M$;

b) Din axioma elementului neutru $x * e = e * x = x$, $\forall x \in M$, obținem echivalențele: $x * e = x \Rightarrow (x + 4)(e + 4) - 4 = x \Rightarrow (x + 4)(e + 4 - 1) = 0$, unde $x + 4 \neq 0$.

Deducem că $e = -3 \in M$, deci:

$$e * x = (-3) * x = (-3 + 4)(x + 4) - 4 = x + 4 - 4 = x;$$

c) Legea „*” este asociativă: $(x * y) * z = x * (y * z)$, $\forall x, y, z \in M$; deducem:

$$x * y * z = (x + 4)(y + 4)(z + 4) - 4, \text{ deci } x * x * x = (x + 4)^3 - 4;$$

d) Din ecuația $x * 2 = 56$, deducem echivalențele:

$$(x + 4)(2 + 4) - 4 = 56 \Rightarrow (x + 4) \times 6 = 60 \Rightarrow x + 4 = 10 \Rightarrow x = 6, \text{ deci cardinalul mulțimii date este } 1;$$

e) Din $x' * x = x * x' = e$, $e = -3$, deducem implicațiile:

$$x' * x = -3 \Rightarrow (x' + 4)(x + 4) - 4 = -3 \Rightarrow x' = -4 + \frac{1}{x + 4} > -4, \forall x > -4$$

$$\text{și deci } x * x' = (x + 4)(x' + 4) - 4 = (x + 4) \left(-4 + \frac{1}{x + 4} \right) - 4 = 1 - 4 = -3.$$

2. a) $f'(x) = e^x - 1$;

b) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (e^x - x + 1) dx = \left(e^x - \frac{x^2}{2} + 1 \right) \Big|_0^1 = e^1 - \frac{1}{2} + 1 - e^0 = e - \frac{1}{2}$;

c) $f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 1$;

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-----	0	++++
$f(x)$	↗ ↗ ↗	0	↘ ↘ ↘
	M		

deci există un singur punct de extrem local;

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x + 1) = +\infty$;

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x + 1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x - 1} = 1.$$

III. a) Deoarece $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$, există $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times A^*$.

Avem echivalențele: $AX = B \Rightarrow A^{-1} \times AX = A^{-1} \times B \Rightarrow X = A^{-1} \times B$.

Calculăm $A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, deci:

$$X = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -8 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix};$$

b) Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Avem:

$$\begin{aligned} XA - AX &= \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3t & 2z+4t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y-2z & 2x+3y-2t \\ -3x-3z+3t & -3y+2z \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}, \text{ de unde rezultă sistemul de ecuații:} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 3y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 2t = 5 \\ -3x - 3z + 3t = -6 \\ -3y + 2z = -1 \end{cases}, \text{ unde prima și a patra ecuație sunt identice.}$$

În concluzie, avem:

$$\begin{cases} 3y - 2z = 1 \\ 2x + 3y - 2t = 5 \\ -3x - 3z + 3t = -6 \end{cases}.$$

Rezolvând sistemul, obținem: $y = \frac{1+2z}{3}$, $t = x + z - 2$, deci:

$$X = \begin{pmatrix} x & \frac{1+2z}{3} \\ z & x+z-2 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R}.$$

Caz particular: $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dacă $x = y = z = 1$;

c) Avem $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$ și $BA = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$, deci

$AB \neq BA$;

d) Ecuația se scrie sub forma: $x + 2y + i(x - 3y) = 4 - i$,

și rezultă sistemul de ecuații: $\begin{cases} x + 2z = 4 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$,

care are soluția $x = 2, y = 1$;

e) $z = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^3} = \frac{1+2i-1}{1-3i+3i^2-i^3} = \frac{2i}{1-3i-3+i} = \frac{2i}{-2-2i} = \frac{i}{-1-i} =$
 $= -\frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\frac{i(1-i)}{1+1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$;

f) Dacă $\div a, b, c$, avem $b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow 2b = a + c$, deci $\div a^2 - bc, b^2 - ca, c^2 - ab$.

IV. a) Aducând la același numitor, avem:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)[(x+1)^2 + 1]} = \frac{2x+1}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)};$$

$$\text{b) } f'(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{2(x+1)}{[(x+1)^2 + 1]^2};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)} = 0 \text{ și}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)} = 0,$$

deci $y = 0$ este ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ și $-\infty$;

$$\text{d) } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx - \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = \arctg x \Big|_0^1 - \arctg(x+1) \Big|_0^1 =$$

$$= \arctg 1 - \arctg 0 - \arctg 2 + \arctg 1 = \frac{\pi}{4} - \arctg 2 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \arctg 2;$$

e) $g(x) = y \Rightarrow \frac{2x+1}{x^2+x+1} = y \Rightarrow yx^2 + (y-2)x + y-1 = 0$, care este o ecuație de

gradul doi în necunoscuta x , cu discriminantul:

$$\Delta = (y-2)^2 - 4y(y-1) = y^2 - 4y + 4 - 4y^2 + 4y = -3y^2 + 4.$$

$$\text{Pentru } \Delta \geq 0 \Rightarrow -3y^2 + 4 \geq 0 \Rightarrow 3y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

y	$-\infty$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$\Delta = -3y^2 + 4$	-----	0	++++	0-----

Rezultă că imaginea funcției $f(x)$ este: $\text{Im } f = y \in \left[-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3}}{3} \right]$;

f) Ecuația dată se scrie sub forma:

$$2^{3n} \times 2^2 \leq 256 \mid : 2^2 \Rightarrow 2^{3n} \leq 64 \Rightarrow 2^{3n} \leq 2^6, \text{ de unde rezultă: } 3n \leq 6 \Rightarrow n \leq 2;$$

g) Din ipoteză, avem: $x, y \in (-1; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ -1 < y < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0, & x-1 < 0 \\ y+1 > 0, & y-1 < 0 \end{cases} (*)$.

Deducem că: $\begin{cases} |x| < 1 \\ |y| < 1 \end{cases} \Rightarrow |x||y| < 1 \Rightarrow |xy| < 1 \Rightarrow -1 < xy < 1 \Rightarrow xy + 1 > 0$.

Condiția $\frac{x+y}{1+xy} \in (-1; 1)$ se scrie sub forma: $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$, unde $1+xy > 0$, deci

putem elimina numitorul.

Obținem echivalențele:

$$-1 - xy < x + y < 1 + xy \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - xy < x + y \\ x + y < 1 + xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + x + y + 1 > 0 \\ xy - x - y + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1) > 0 \\ (x-1)(y-1) > 0 \end{cases}, \text{ condiții îndeplinite conform relațiilor notate cu (*).}$$

pag. 197 – Testul 9

I. 1. trei funcții. 2. 40%. 3. niciuna. 4. 325. 5. 5. 6. $f'(x) = \frac{1}{x}, \forall x \in (0; +\infty)$.

7. 1. 8. asimptotă. 9. $e - 1$. 10. $\frac{2}{3}$.

II. 11. $|AB| = \sqrt{2}$. 12. $AB: x = y$. 13. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 14. $2 - 3i$. 15. 1. 16. $\sqrt{7}$.

III. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = 1, x_1, x_2 \in \mathbb{R};$

b) $\det A = 5;$

c) $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{pmatrix};$

d) $f(A) = A^2 - 6A + 5I_2 = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 & 12 \\ 12 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = O_2;$

e) $(x, y) = \{(0; 0)\};$

f) Inducție după n :

$$n = 1: A^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5^1 + 1 & 5^1 - 1 \\ 5^1 - 1 & 5^1 + 1 \end{pmatrix};$$

$$n = 2: A^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 26 & 24 \\ 24 & 26 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5^2 + 1 & 5^2 - 1 \\ 5^2 - 1 & 5^2 + 1 \end{pmatrix};$$

....

$$n = k: A^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5^k + 1 & 5^k - 1 \\ 5^k - 1 & 5^k + 1 \end{pmatrix}.$$

Presupunem relația adevărată pentru $n = k$ și demonstrăm pentru $n = k + 1$,

adică: $A^{k+1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5^{k+1} + 1 & 5^{k+1} - 1 \\ 5^{k+1} - 1 & 5^{k+1} + 1 \end{pmatrix}.$

$$\begin{aligned} \text{Avem: } A^{k+1} &= A^k \times A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5^k + 1 & 5^k - 1 \\ 5^k - 1 & 5^k + 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 + 1 & 5 - 1 \\ 5 - 1 & 5 + 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6(5^k + 1) + 4(5^k - 1) & 4(5^k + 1) + 6(5^k - 1) \\ 6(5^k - 1) + 4(5^k + 1) & 4(5^k - 1) + 6(5^k + 1) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \times 5 \times 5^k + 2 & 2 \times 5 \times 5^k - 2 \\ 2 \times 5 \times 5^k - 2 & 2 \times 5 \times 5^k + 2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5^{k+1} + 1 & 5^{k+1} - 1 \\ 5^{k+1} - 1 & 5^{k+1} + 1 \end{pmatrix}, \forall k \geq 1. \end{aligned}$$

Deci $A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5^n + 1 & 5^n - 1 \\ 5^n - 1 & 5^n + 1 \end{pmatrix}, \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$

IV. a) $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}, \forall x \in (0; +\infty).$

b) Deoarece $(x+1)^2 > 0, \forall x \in [0; +\infty)$, avem $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in [0; +\infty)$,

deci f este strict descrescătoare pe $[0; +\infty)$;

$$\text{c) } f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-1)}{2-1} = \sqrt{2};$$

$$\text{d) } \text{Avem: } |f(x) - f(y)| < |x - y| \Leftrightarrow \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < 1 \Leftrightarrow \left| -\frac{1}{(x+1)(y+1)} \right| < 1.$$

Pentru $x, y \in [0; +\infty)$, deci pentru $x+1 \geq 1$ și $y+1 \geq 1$, avem: $(x+1)(y+1) \geq 1$.

Pentru $x, y \in [0; +\infty)$, $x \neq y$, avem $(x+1)(y+1) > 1$ și deci: $0 < \frac{1}{(x+1)(y+1)} < 1$.

Obținem $\left| -\frac{1}{(x+1)(y+1)} \right| = \frac{1}{(x+1)(y+1)} < 1$, relație care este adevărată.

Observație: Se poate raționa și direct, plecând de la faptul că funcția f este strict

descrescătoare pe $[0; +\infty)$, deci $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0 < 1, \forall x \neq y$, atunci

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < 1 \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|, \forall x, y \in (0; +\infty), x \neq y;$$

$$\text{e) } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = [x + \ln(x+1)]_0^1 = 1 + \ln 2;$$

f) Folosind punctul d), este suficient să luăm $x = \frac{p}{q}$ și $y = \sqrt{2}$ pentru a demonstra

egalitatea, deoarece avem: $f(x) = \frac{p+2q}{p+q}$ și $f(y) = \sqrt{2}, \forall p, q \in \mathbb{N}^*$.

pag. 198 – Testul 10

$$\text{l. a) } d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2};$$

$$\text{b) } \cos^2 101 + \sin^2 101 = 1;$$

$$\text{c) } \frac{6^2 \sqrt{2}}{4} = \frac{36\sqrt{2}}{4} = 9\sqrt{2};$$

$$\text{d) } \overline{2+5i} = 2-5i;$$

$$\text{e) } A \text{ și } B \text{ verifică ecuația dreptei, deci } \begin{cases} 2a+b=0 \\ 2+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases};$$

f) $m(\sphericalangle BAC) = \frac{\pi}{2}$, deci triunghiul este dreptunghic, cu ipotenuza de lungime:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}.$$

II. 1. a) $\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0;$

b) Observăm că doar pentru $n = 1$ și $n = 2$ relația se verifică, deci avem 2 cazuri favorabile și 5 cazuri posibile; probabilitatea este $\frac{2}{5}$, adică 40%;

c) $4^x = 4$, iar conform proprietății de monotonie a funcției exponențiale de bază supraunitară, ecuația are o singură soluție: $x = 1$;

d) $\log_9 x = 1 \Leftrightarrow \log_9 x = \log_9 9 \Rightarrow x = 9$;

e) Deoarece $C_n^k = C_n^{n-k}$, $\forall n, k \in \mathbb{N}, k \leq n$, avem $C_7^2 = C_7^5$, deci $E = 0$.

2. a) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 3)^2}$, $\forall x \in (0; +\infty)$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = -\frac{1}{8}$;

c) Avem: $-2x < 0$, $\forall x \in (0; +\infty)$, iar $(x^2 + 3)^2 > 0$, $\forall x \in (0; +\infty)$. Rezultă că $f'(x) < 0$, $\forall x \in (0; +\infty)$, adică funcția f este strict descrescătoare pe $(0; +\infty)$;

d) $\int_1^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = \frac{1}{x^2 + 3} \Big|_0^1 = \frac{1}{7} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{28}$;

e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 3}{3n + 2} = \frac{2}{3}$.

III. a) $\Delta = 25 - 28 = -3$, deci ecuația are două rădăcini complexe:

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{3}}{2} \text{ și } x_2 = \frac{-5 - \sqrt{3}}{2};$$

b) $x^2 + 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 3) < 0$, deci, $x \in (-3; -2)$;

x	$-\infty$	-3	-2	$+\infty$
$x + 2$	----- 0 + + + + +			
$x + 3$	----- 0 + + + + + + + + + + +			
$x^2 + 5x + 6$	+ + + + + 0 ----- 0 + + + + +			

c) $\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \frac{n+3-n-2}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n^2 + 5n + 6} = \frac{1}{g(n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

d) Adunăm următoarele relații:

$$\frac{1}{g(1)} = \frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+3},$$

$$\frac{1}{g(2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5},$$

$$\frac{1}{g(3)} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6},$$

...

$$\frac{1}{g(2005)} = \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008},$$

$$\frac{1}{g(2006)} = \frac{1}{2008} - \frac{1}{2009}.$$

$$\text{Obținem } S = \frac{1}{g(1)} + \frac{1}{g(2)} + \dots + \frac{1}{g(2006)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2009} = \frac{2006}{2009 \times 3};$$

$$\text{e) } \left(X + \frac{5}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = X^2 + 5X + \frac{25}{4} + \frac{3}{4} = X^2 + 5X + 7 = f;$$

f) Dacă $s, t \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $\text{grad } s \geq 2$ sau $\text{grad } t \geq 2$, atunci avem:

$\text{grad } g \neq \text{grad } s^2 + \text{grad } t^2$, deci $g \neq s^2 + t^2$.

Cercetăm cazul în care $\text{grad } s < 2$ și $\text{grad } t < 2$ (dacă ambele au gradul 0, de asemenea nu se verifică).

Fie $s = aX^2 + b$ și $t = cX^2 + d$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Avem:

$$s^2 + t^2 = a^2X^2 + 2abX + b^2 + c^2X^2 + 2cdX + d^2 = X^2(a^2 + c^2) + 2(ab + cd)X + b^2 + d^2.$$

Presupunem că $g = s^2 + t^2$. Atunci $s^2 + t^2$ are aceleași rădăcini ca și g , adică -2 și -3 .

Dacă $X = -2$, atunci au loc echivalențele:

$$4(a^2 + c^2) - 4(ab + cd) + b^2 + d^2 = 0 \Leftrightarrow (2a - b)^2 + (2c - d)^2 = 0 \Leftrightarrow b = 2a \text{ și } d = 2c.$$

Dacă $X = -3$, atunci au loc echivalențele:

$$9(a^2 + c^2) - 6(ab + cd) + b^2 + d^2 = 0 \Leftrightarrow (3a - b)^2 + (3c - d)^2 = 0 \Leftrightarrow b = 3a \text{ și } d = 3c.$$

Rezultă că $a = b = c = d = 0$, adică s și t sunt polinoamele nule, ceea ce nu verifică presupunerea făcută.

Rămâne că: $g \neq s^2 + t^2, \forall s, t \in \mathbb{R}[X]$;

g) Luăm $u = X + \frac{5}{2}$ și $v = \frac{i}{2}$, $\forall u, v \in \mathbb{C}[X]$. Avem:

$$u^2 + v^2 = X^2 + 5X + \frac{25}{4} - \frac{1}{4} = X^2 + 5X + 6 = g.$$

IV. a) $f'(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$;

b) $e > 0$, iar funcția exponențială ia valori pozitive.

Rămâne că $f(x) = f'(x) = e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, deci $y = 0$ este asimptotă orizontală a lui f spre $-\infty$;

$$\text{d) } \int_0^1 f(x) dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1;$$

e) Deoarece $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, funcția f este strict crescătoare pe \mathbb{R} ;

f) $f(x) + f(x+1) = 1 + e \Leftrightarrow e^x + e^{x+1} = 1 + e \Leftrightarrow e^x(1 + e) = 1 + e \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$, care este soluție unică;

g) Luăm $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^{x+1} + e^x, h(x) = f(x+1) = e^{x+1}, g$ și h strict crescătoare. Avem $f(x) = e^{x+1} + e^x - e^{x+1} = g(x) - h(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

CUPRINS

Partea I. Elemente de algebră	4
Capitolul 1. Grupuri	4
1. Lege de compoziție internă, tabla operației	4
1.1. Noțiuni recapitulative	4
1.2. Definiție. Exemple	6
1.2.1. Notății pentru o lege de compoziție	6
1.2.2. Parte stabilă. Lege de compoziție indusă	8
1.2.3. Lege de compoziție internă	9
1.3. Tabla unei legi de compoziție (tabla lui Cayley)	11
1.4. Proprietăți ale operațiilor algebrice	13
1.4.1. Asociativitatea	14
1.4.2. Elementul neutru	17
1.4.3. Elementele simetrizabile	20
1.4.4. Comutativitatea	23
2. Grup, exemple: grupuri numerice, grupuri de matrice, grupuri de permutări, \mathbb{Z}_n	26
2.1. Definiții și exemple	26
2.1.1. Grupuri numerice	26
2.1.2. Grupuri de funcții	27
2.2. Reguli de calcul într-un grup	29
2.2.1. Simplificarea la stânga și la dreapta într-un grup	29
2.3. Grupuri de permutări	30
2.4. Grupuri de resturi modulo n (\mathbb{Z}_n)	31
2.5. Grupuri de matrice	32
3. Morfisme și izomorfisme de grupuri	35
<i>Teste pentru verificarea cunoștințelor</i>	39
CAPITOLUL 2. Inele și corpuri	40
1. Inel, exemple: inele numerice (\mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C}), \mathbb{Z}_n , inele de matrice, inele de funcții reale	40
1.1. Exemple de inele de numerice	41
1.2. Exemple de inele de matrice	43
1.3. Inelul claselor de resturi modulo n	45
1.4. Exemple de inele de funcții	45
2. Corp, exemple: corpuri numerice (\mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C}), \mathbb{Z}_p (p prim)	47
<i>Teste pentru verificarea cunoștințelor</i>	51
CAPITOLUL 3. Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ (\mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{Z}_p , p prim)	52
1. Forma algebrică a unui polinom; operații (adunarea, înmulțirea, înmulțirea cu un scalar)	52
1.1. Definiții și exemple	52
1.2. Egalitatea a două polinoame	52
1.3. Gradul unui polinom	53
1.4. Operații cu polinoame	54
1.4.1. Adunarea polinoamelor	54
1.4.2. Scăderea polinoamelor	55
1.4.3. Înmulțirea polinoamelor	56

2. Teorema împărțirii cu rest; împărțirea cu $X - a$; schema lui Horner	59
2.1. Teorema împărțirii cu rest a polinoamelor	59
2.2. Valoarea unui polinom	62
2.3. Valoarea sumei a două polinoame și valoarea produsului a două polinoame	63
2.4. Funcția polinomială asociată unui polinom	63
2.5. Rădăcina unui polinom	64
2.6. Împărțirea cu $X - a$, unde $a \in \mathbb{C}$, teorema restului	64
2.7. Schema lui Horner	65
3. Divizibilitatea polinoamelor, teorema lui Bézout, <i>c.m.m.d.c.</i> și <i>c.m.m.m.c.</i> al unor polinoame, descompunerea unui polinom în factori ireductibili	68
3.1. Divizibilitatea polinoamelor	68
3.2. Teorema lui Bézout	69
3.3. Cel mai mare divizor comun (<i>c.m.m.d.c.</i>) și cel mai mic multiplu comun (<i>c.m.m.m.c.</i>) al polinoamelor	70
3.3.1. Noțiuni pregătitoare	70
3.3.2. Cel mai mare divizor comun a două polinoame (<i>c.m.m.d.c.</i>)	71
3.3.3. Cel mai mic multiplu comun a două polinoame (<i>c.m.m.m.c.</i>)	73
3.4. Descompunerea unui polinom în factori ireductibili	74
4. Rădăcini ale polinoamelor; relațiile lui Viète pentru polinoame de grad cel mult 4	78
4.1. Rădăcini complexe ale polinoamelor	78
4.2. Relațiile între rădăcinile și coeficienții unui polinom sau relațiile lui Viète pentru polinoame de grad cel mult 4	79
4.2.1. Relațiile lui Viète pentru polinoame de grad 2	79
4.2.2. Relațiile lui Viète pentru polinoame de grad 3	81
4.2.3. Relațiile lui Viète pentru polinoame de grad 4	84
5. Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , ecuații binome, ecuații reciproce, ecuații bipătrate	86
5.1. Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coeficienți în \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C}	86
5.1.1. Ecuații cu coeficienți în inelul întregilor \mathbb{Z}	86
5.1.2. Ecuații cu coeficienți în inelul numerelor raționale \mathbb{Q}	89
5.1.3. Ecuații cu coeficienți în inelul numerelor reale \mathbb{R}	90
5.1.4. Ecuații cu coeficienți în inelul numerelor complexe \mathbb{C}	91
5.2. Ecuații binome	92
5.3. Ecuații bipătrate	95
5.4. Ecuații reciproce	97
<i>Teste pentru verificarea cunoștințelor</i>	100

Partea a II-a. Elemente de analiză matematică

Capitolul 1. Probleme care conduc la noțiunea de integrală	102
1. Noțiuni introductive	102
2. Aria triunghiului	103
3. Aria segmentului de parabolă	104
Capitolul 2. Primitive (antiderivate)	106
1. Continuitatea și derivabilitatea funcțiilor (recapitulare)	106
1.1. Definiții și exemple	106

1.2. Operații cu funcții continue. Suma sau diferența a două funcții derivabile	112
2. Primitiva unei funcții: definiții și exemple	114
2.1. Definiția primitivei și exemple	114
3. Integrala nedefinită a unei funcții continue; definiții, exemple	117
4. Primitive uzuale	118
5. Proprietăți ale integralelor nedefinite; proprietatea de liniaritate	120
<i>Teste pentru verificarea cunoștințelor</i>	123
Capitolul 3. Integrala definită	124
1. Definierea integralei Riemann a unei funcții continue prin formula Leibniz-Newton	124
1.1. Definierea integralei Riemann a unei funcții continue	124
1.2. Formula Leibniz-Newton	125
2. Proprietăți ale integralei definite: liniaritate, monotonie, aditivitate în raport cu intervalul de integrare	127
3. Metode de calcul ale integralelor definite: integrarea prin părți, integrarea prin schimbare de variabilă	128
3.1. Integrarea prin părți	129
3.1.1. Integrarea prin părți a primitivelor	129
3.1.2. Integrarea prin părți a integralelor definite	132
3.2. Integrarea prin schimbare de variabilă a funcțiilor compuse	133
3.3. Calculul integralelor de forma $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, grad $Q \leq 4$, prin metoda descompunerii în fracții simple	141
<i>Teste pentru verificarea cunoștințelor</i>	149
Capitolul 4. Aplicații ale integralei definite	150
1. Subgrafic, definiție. Interpretarea geometrică a integralei definite a unei funcții pozitive	150
2. Aria unei suprafețe plane (mărginită de curbe)	152
3. Volumul unui corp de rotație	154
<i>Teste pentru verificarea cunoștințelor</i>	158
Partea a III-a. Pregătire pentru examenul de bacalaureat	159
1. Teme de sinteză	160
Tema 1: Grupuri	160
Tema 2: Inele și corpuri	166
Tema 3: Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, p$ prim)	168
Tema 4: Primitive (antiderivate)	172
Tema 5: Integrala definită	176
Tema 6: Aplicații ale integralei definite	180
2. Teste pregătitoare pentru examenul de bacalaureat	184
Indicații și răspunsuri	201

Neculai I. Nediță
Gina Caba

*M*atematică

M2

Manual pentru clasa a XII-a



Filiera teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii (TC + CD) și filiera tehnologică, toate calificările profesionale (TC).

CORINT

ISBN: 978-973-135-088-2

